Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

Primošten, 5. travnja 2016.

1. Izračunaj zbroj

$$\frac{2^2+1}{2^2-1}+\frac{3^2+1}{3^2-1}+\cdots+\frac{100^2+1}{100^2-1}.$$

2. Dana je dužina $\overline{AD}$ duljine 3. Neka su B i C ($C \neq A$) točke na kružnici s promjerom $\overline{AD}$ takve da vrijedi $|AB| = |BC| = 1$. Izračunaj $|CD|$.

3. Odredi sve trojke realnih brojeva (x, y, z) takve da vrijedi

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y+z}=\frac{1}{3}, \qquad \frac{1}{y}+\frac{1}{z+x}=\frac{1}{5}, \qquad \frac{1}{z}+\frac{1}{x+y}=\frac{1}{7}.$$

4. Neka su a, b i c prirodni brojevi takvi da vrijedi

$$c = a + \frac{b}{a} - \frac{1}{b}.$$

Dokaži da je c kvadrat nekog prirodnog broja.

5. U ravnini je označeno 15 točaka. Neke su obojane crveno, neke plavo, a ostale zeleno. Poznato je da je broj crvenih točaka veći i od broja plavih i od broja zelenih točaka. Zbroj duljina svih dužina kojima je jedna krajnja točka crvena, a druga zelena iznosi 31. Zbroj duljina svih dužina kojima je jedna krajnja točka zelena, a druga plava iznosi 25. Zbroj duljina svih dužina kojima je jedna krajnja točka plava, a druga crvena iznosi 5.

Odredi broj točaka svake boje.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

Primošten, 5. travnja 2016.

1. Neka su a, b i c realni brojevi takvi da je $a + 2b + c > 0$ i $a - 2b + c < 0$.
Dokaži da vrijedi $b^2 > ac$.

2. Odredi sve parove prirodnih brojeva (m, n) za koje postoje cijeli brojevi a, b i c takvi da vrijedi

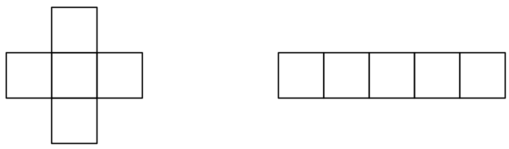
$$a + b + c = 0 \quad \text{i} \quad a^2 + b^2 + c^2 = 2^m \cdot 3^n.$$

3. Neka je ABC trokut takav da je $|AB| > |AC|$. Neka je t tangenta na opisanu kružnicu trokuta ABC u točki A. Kružnica sa središtem u točki A koja prolazi točkom C siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki D, a pravac t u točkama E i F tako da su C i E s iste strane pravca AB. Dokaži da središte upisane kružnice trokuta ABC leži na pravcu DE.

4. Odredi sve trojke pozitivnih realnih brojeva (x, y, z) takve da vrijedi

$$x^3 + 2y^2 + \frac{1}{4z} = 1, \qquad y^3 + 2z^2 + \frac{1}{4x} = 1, \qquad z^3 + 2x^2 + \frac{1}{4y} = 1.$$

5. Dana je ploča s 2016 redaka i 2017 stupaca. Je li moguće ukloniti dva polja u zadnjem stupcu te ploče tako da dobivenu ploču možemo prekriti bez preklapanja pločicama oblika kao na slici? Pločice je dozvoljeno rotirati.



Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

Primošten, 5. travnja 2016.

1. U konveksnom četverokutu $ABCD$ vrijedi $|AD| = |CD|$ i $\sphericalangle ADC = 90°$. Ako je $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|BD| = d$, $\sphericalangle ABC = \beta$, dokaži da vrijedi

$$2d^2 = a^2 + b^2 + 2ab\sin\beta.$$

2. Dokaži da ne postoji prirodni broj k takav da su

$$k + 4 \quad \text{i} \quad k^2 + 5k + 2$$

kubovi nekih prirodnih brojeva.

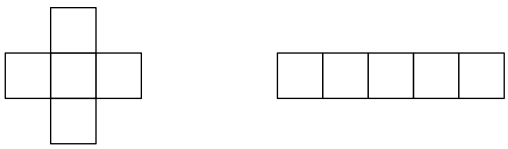
3. Neka su x, y i z pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $xyz = 1$. Dokaži nejednakost

$$\frac{x^6+2}{x^3} + \frac{y^6+2}{y^3} + \frac{z^6+2}{z^3} \geqslant 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right).$$

4. Neka je H ortocentar šiljastokutnog trokuta ABC. Kružnica opisana trokutu ABH ima središte S i siječe dužinu $\overline{BC}$ u točkama B i D. Neka je P presjek pravca DH i dužine $\overline{AC}$, te neka je Q središte opisane kružnice trokuta ADP.

Dokaži da je četverokut $BDQS$ tetivan.

5. Dana je ploča s 2016 redaka i 2017 stupaca. Je li moguće ukloniti dva polja u zadnjem stupcu te ploče tako da dobivenu ploču možemo prekriti bez preklapanja pločicama oblika kao na slici? Pločice je dozvoljeno rotirati.



Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

Primošten, 5. travnja 2016.

1. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(xy+1) = f(x)f(y) - f(y) - x + 2.$$

2. U jednom retku redom su napisani brojevi 1, 2, ..., 2016. U svakom idućem retku napisani su redom zbrojevi dvaju susjednih brojeva. Npr. u drugom retku su napisani brojevi 3, 5, ..., 4031. U zadnjem retku je samo jedan broj. Koji je to broj?

3. U konveksnom četverokutu $ABCD$ vrijedi

$$\sphericalangle BAC = 48^\circ, \qquad \sphericalangle CAD = 66^\circ, \qquad \sphericalangle CBD = \sphericalangle DBA.$$

Odredi kut $\sphericalangle BDC$.

4. Nađi sve trojke prirodnih brojeva (m, n, k) takve da vrijedi $3^m + 7^n = k^2$.

5. U utrci sudjeluje 200 biciklista. Na početku utrke biciklisti su poredani jedan iza drugoga. Kažemo da neki biciklist *pretječe* ako mijenja mjesto s biciklistom neposredno ispred sebe. Tijekom utrke poredak se mijenja samo kad neki biciklist pretječe.

Neka je A broj svih mogućih poredaka na kraju utrke u kojoj je svaki biciklist pretjecao točno jednom, te neka je B broj svih mogućih poredaka na kraju utrke u kojoj je svaki biciklist pretjecao najviše jednom. Dokaži da vrijedi

$$2A = B.$$

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.