MATEMATIČKI KLOKAN

u 97 država Europe, Amerike, Afrike, Australije i Azije

Četvrtak, 17. ožujka 2022. – trajanje 75 minuta
Natjecanje za Student (IV. razred SŠ)

S

* Natjecanje je pojedinačno. **Računala nisu dopuštena.** Svaki sudionik natjecanja dobiva simboličan dar, a deset posto najboljih nagradu.
* **Svaki zadatak ima pet ponuđenih odgovora od kojih je samo jedan točan**.
* U prva četiri zadatka točno rješenje zadatka donosi 3 boda, u druga četiri 4 boda, a u treća četiri 5 bodova.
* Ako u zadatku nije odabran odgovor ili su zacrnjena dva ili više odgovora istoga zadatka, dobiva se 0 bodova.
* Za netočan odgovor ne dobivaju se bodovi, nego se oduzima četvrtina bodova predviđenih za taj zadatak.

Pitanja za 3 boda:

1. Danka je starija od Filipa i mlađa od Lili. Tomo je stariji od Danke. Koje bi dvije osobe mogle biti jednake dobi?

   A) Filip i Tomo   B) Tomo i Lili   C) Lili i Filip   D) Danka i Lili   E) Tomo i Danka

   Rješenje: B
   I Lili i Tomo stariji su od Danke, dok je Filip mlađi od nje.

2. Koliko ima troznamenkastih prirodnih brojeva djeljivih brojem 13?

   A) 68   B) 69   C) 70   D) 76   E) 77

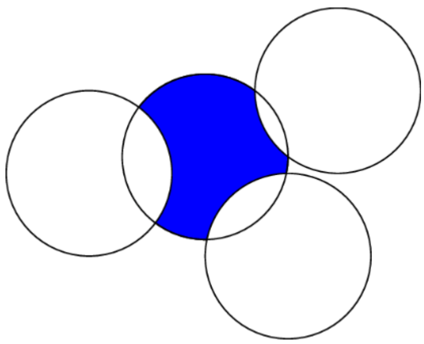
   Rješenje: B
   Najmanji troznamenkasti prirodni broj djeljiv brojem 13 je $104 = 8 \cdot 13$, a najveći $988 = 76 \cdot 13$. Stoga traženih brojeva ima $76 - 8 + 1 = 69$.

3. Umnožak znamenaka deseteroznamenkastog prirodnog broja iznosi 15. Koliko iznosi zbroj znamenaka toga broja?

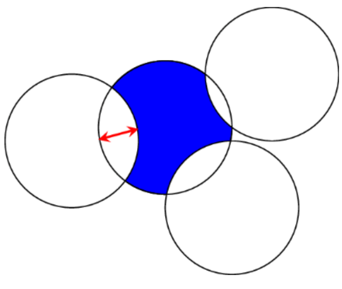
   A) 8   B) 12   C) 15   D) 16   E) 20

   Rješenje: D
   Budući da je $15 = 5 \cdot 3$, ovaj se broj mora sastojati od jedne znamenke 5, jedne znamenke 3 i osam znamenaka 1. Zbroj znamenaka tada je 16.

4. Četiri kružnice polumjera 1 smještene su kao na slici. Koliki je opseg osjenčanog lika?



   A) π B) $\frac{3\pi}{2}$ C) Neki broj između $\frac{3\pi}{2}$ i 2π.
   D) 2π E) π^2



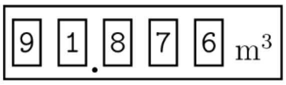
   Rješenje: D
   Uočimo da su dva luka koja dvije kružnice jednakih polumjera odsijecaju jedna na drugoj jednake duljine (vidi sliku). Slijedi da je opseg osjenčanog lika jednak opsegu jedne kružnice polumjera 1, tj. 2π.

5. Koliko realnih rješenja ima jednadžba $(x-2)^2+(x+2)^2=0$?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Rješenje: A
Zbroj kvadrata s lijeve strane jednakosti bit će jednak nula samo ako su oba izraza $x-2$ i $x+2$ jednaka nula. Budući da se to ne može istovremeno dogoditi, jednadžba nema realnih rješenja.

6. Kada je pogledao svoj vodomjer, Toni je primijetio da su sve znamenke na njemu različite.



Koliko će se vode potrošiti do trenutka kada opet sve znamenke na vodomjeru budu različite?

A) 0.006 m^3 B) 0.034 m^3 C) 0.086 m^3 D) 0.137 m^3 E) 1.048 m^3

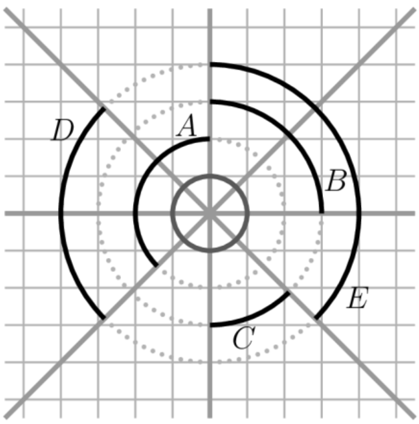
Rješenje: D
Ne možemo povećati samo posljednju znamenku jer će ona onda biti 7, 8 ili 9, a te znamenke već pišu na vodomjeru. Analogno ne možemo ni samo četvrtu znamenku povećati (bila bi 8 ili 9), a niti treću (bila bi 9). Zaključujemo da moramo povećati drugu znamenku, pa je povećamo najmanje što možemo – na 2. Posljednje tri znamenke sada biramo tako da dobijemo najmanji mogući broj nakon 92.000 koji ima sve različite znamenke – to je broj 92.013. Taj će se broj pojaviti nakon što Toni potroši još 0.137 m^3 vode.

7. Točke A, B, C, D leže na istome pravcu, kao na slici. Udaljenost između A i C je 12 cm, a udaljenost između B i D je 18 cm. Kolika je udaljenost između polovišta dužine $\overline{AB}$ i polovišta dužine $\overline{CD}$?

A) 15 cm B) 12 cm C) 18 cm D) 6 cm E) 9 cm

Rješenje: A
Označimo s x duljinu dužine $\overline{BC}$. Duljina dužine $\overline{AB}$ tada je $12-x$, a duljina dužine $\overline{CD}$ je $18-x$. Udaljenost između polovišta dužine $\overline{AB}$ i polovišta dužine $\overline{CD}$ tada je $\frac{12-x}{2}+x+\frac{18-x}{2}=15$.

8. Četiri pravca koji imaju jednu zajedničku točku tvore osam kutova jednake mjere. Koji od crnih lukova ima jednaku duljinu kao mala siva kružnica?



A) A B) B C) C D) D E) E

Rješenje: D
Uzmemo li da je polumjer male sive kružnice 1, tada su polumjeri kružnica na kojima leže lukovi 2, 3 i 4. Jedini luk duljine 2π (koliki je i opseg jedinične kružnice) luk je D koji odgovara kutu od 90° na kružnici radijusa 4.

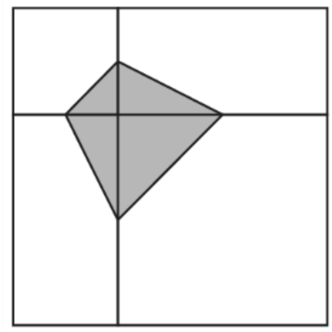
Pitanja za 4 boda:

9. David u uzlaznome poretku zapisuje sve prirodne brojeve od 2 do 2022 koji su sastavljeni samo od znamenaka 0 i 2. Koji je broj u sredini njegove liste?

   A) 200 B) 220 C) 222 D) 2000 E) 2002

   Rješenje: B
   David je zapisao brojeve: 2,20,22,200,202,220,222,2000,2002,2020,2022. Broj u sredini liste je 220.

10. Veliki kvadrat podijeljen je na dva sukladna pravokutnika i dva manja kvadrata, kao na slici. Vrhovi osjenčanog četverokuta polovišta su stranica dvaju manjih kvadrata. Njegova je površina 3. Kolika je površina dijela velikog kvadrata koji nije osjenčan?



   A) 12 B) 15 C) 18 D) 21 E) 24

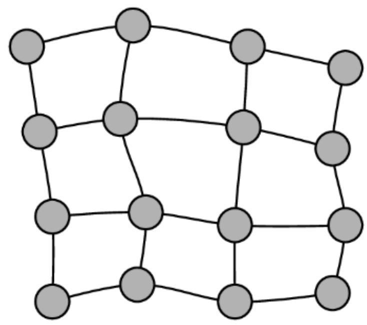
   Rješenje: D
   Primijetimo da je u svakome od četiri lika na koje je veliki kvadrat podijeljen osjenčana njegova osmina (površina pravokutnog trokuta kojemu su katete polovine duljina stranica odgovarajućeg lika). Stoga je ukupno osjenčana $\frac{1}{8}$ velikog kvadrata. Veliki kvadrat tada ima površinu $8 \cdot 3 = 24$, tj. dio koji nije osjenčan ima površinu 21.

11. Koji je najveći zajednički djelitelj brojeva $2^{2021} + 2^{2022}$ i $3^{2021} + 3^{2022}$?

   A) 2^{2021} B) 1 C) 2 D) 6 E) 12

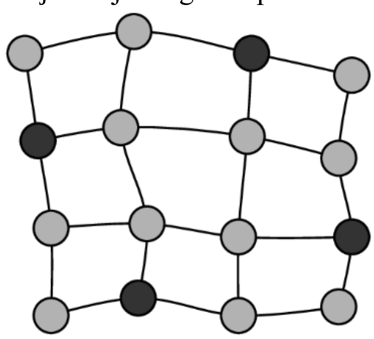
   Rješenje: E
   Kako je $2^{2021} + 2^{2022} = 2^{2021} \cdot 3$, a $3^{2021} + 3^{2022} = 3^{2021} \cdot 4$, vidimo da su im zajednički prosti faktori 2, 2 i 3.

12. Slika prikazuje regiju sa 16 gradova koji su povezani cestama. U nekima od tih gradova vlada želi izgraditi elektrane. Svaka elektrana moći će opskrbljivati grad u kojemu se nalazi i gradove koji su izravno povezani s njim. Koji je najmanji broj elektrana koje treba izgraditi kako bi svi gradovi bili opskrbljeni električnom energijom?



   A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

   Rješenje: B
   Ako je elektrana smještena u jednome gradu, ona može opskrbiti najviše 5 gradova. Stoga nam trebaju barem 4 elektrane (jer je $3 \cdot 5 \neq 16$). Na slici je primjer da je moguće opskrbiti sve gradove s točno 4 elektrane.



13. Martina igra na turniru u kojemu sudjeluje 8 igrača. Zna da će pobijediti sve osim Ace koji će pobijediti sve. U prvom kolu igrači su nasumično raspoređeni u parove. Pobjednik svakog meča prelazi u drugi krug. U drugom su krugu dva meča, a pobjednici idu u finale. Koja je vjerojatnost da Martina neće igrati u finalu?

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{7}$ D) $\frac{3}{7}$ E) $\frac{4}{7}$

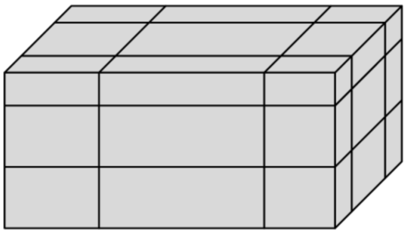
Rješenje: D
Martina neće igrati u finalu ako igra meč s Acom u jednome od prva dva kruga. Vjerojatnost da Martina igra s Acom u prvom krugu je $\frac{1}{7}$. Ako nije s njim zaigrala u prvome krugu (već s nekim od preostalih 6 igrača), prošla je dalje, a vjerojatnost za to je $\frac{6}{7}$. Vjerojatnost da u drugom krugu igra s Acom je $\frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{7}$. Dakle, vjerojatnost da Martina neće igrati u finalu je $\frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$.

14. Aritmetička sredina pet brojeva je 24. Aritmetička sredina najmanja tri od njih je 19. Aritmetička sredina najveća tri od tih brojeva je 28. Koliki je medijan tih pet brojeva?

A) 20 B) 21 C) 22 D) 23 E) 24

Rješenje: B
Zbroj svih pet danih brojeva je $24 \cdot 5 = 120$. Zbroj najmanja tri od njih je $19 \cdot 3 = 57$. Zbroj najveća tri od njih je $28 \cdot 3 = 84$. Medijan – broj koji je u sredini kada se početnih pet brojeva poreda po veličini – nalazi se u sva tri zbroja. Možemo ga odrediti kao $57 + 84 - 120 = 21$.

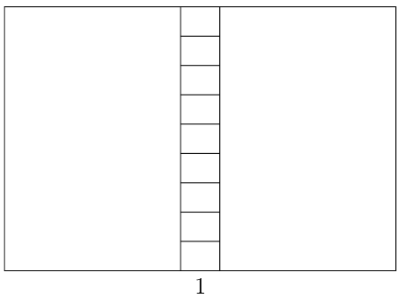
15. Kvadar oplošja S presječen je sa šest ravnina kao na slici. Svaka je ravnina paralelna s nekom stranom kvadra, no njena je udaljenost od te strane nasumična. Tako je kvadar podijeljen na 27 manjih dijelova. Koliki je zbroj oplošja svih tih 27 manjih dijelova, izražen pomoću S?



A) $2S$ B) $\frac{5}{2}S$ C) $3S$ D) $4S$ E) Ništa od navedenog.

Rješenje: C
Neka su A, B i C površine triju različitih strana kvadra. Tada je $S = 2A + 2B + 2C$. Presjek svake ravnine s kvadom nadodaje na ukupno oplošje još dvije površine strane s kojom je ravnina paralelna. Imamo po dvije ravnine paralelne sa svakom stranom pa će ukupno oplošje biti $6A + 6B + 6C = 3S$.

16. Pravokutnik je podijeljen na 11 manjih pravokutnika, kao na slici. Svi su pravokutnici slični početnome pravokutniku. Duljina dulje stranice manjih pravokutnika je 1. Koliki je opseg velikog pravokutnika?

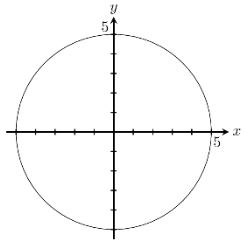


A) 20 B) 24 C) 27 D) 30 E) 36

Rješenje: D
Gledajući 9 najmanjih pravokutnika koji popunjavaju cijelu visinu najvećeg njemu sličnog pravokutnika, možemo zaključiti da se duljine stranica najmanjeg i najvećeg pravokutnika odnose u omjeru $1 : 9$. Dulja stranica najvećeg pravokutnika stoga je $1 \cdot 9 = 9$. To znači da pravokutnici srednje veličine imaju jednu, kraću, stranicu duljine 4. Stavimo li u omjer stranice srednjeg i velikog pravokutnika, imamo $4 : b = b : 9$, iz čega slijedi da je $b = 6$. Opseg velikog pravokutnika tada je $2 \cdot (9 + 6) = 30$.

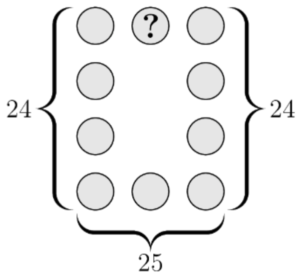
Pitanja za 5 bodova:

17. Koliko točaka na centralnoj kružnici polumjera 5 ima cjelobrojne koordinate?



A) 5 B) 8 C) 12 D) 16 E) 20

Rješenje: C
Jednadžba zadane kružnice je $x^2 + y^2 = 25$. Njena su cjelobrojna rješenja: $(0, \pm 5)$, $(\pm 5, 0)$, $(3, \pm 4)$, $(-3, \pm 4)$, $(4, \pm 3)$, $(-4, \pm 3)$. Kako brojevi $5^2 - 1^2$ i $5^2 - 2^2$ nisu potpuni kvadrati, nema više cjelobrojnih rješenja.

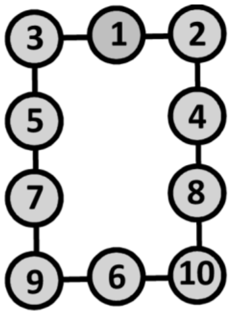


18. Svaki od prirodnih brojeva od 1 do 10 upisan je u jedan od krugova na slici. Zbroj brojeva u desnom stupcu je 24. Zbroj brojeva u lijevom stupcu također je 24. Zbroj brojeva u donjem retku je 25. Koji se broj nalazi u krugu označenom upitnikom?

A) 2 B) 4

C) 5 D) 6 E) Ništa od navedenog.

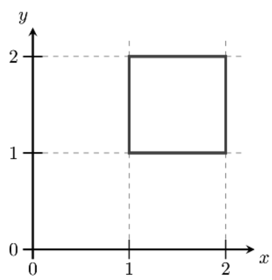
Rješenje: E
Najveći mogući zbroj brojeva koji se nalaze u stupcima i donjem retku (pojavljuje se devet brojeva, dva se od njih ponavljaju) je
$(2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) + (9 + 10) = 73$.
Zbrojevi prikazani na slici daju $24 + 25 + 24 = 73$, što je najveći mogući zbroj. Stoga u stupcima i donjem retku moraju biti brojevi od 2 do 10 pa brojevi 9 i 10 moraju biti u donjim kutovima. Preostaje broj 1 koji mora biti u krugu označenom upitnikom. Na slici desno primjer je da je to moguće postići.

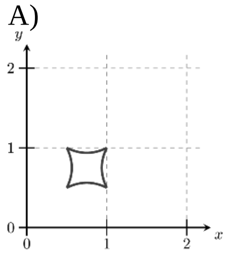


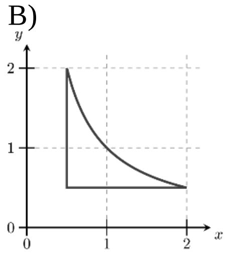
19. Kvadrat je smješten u koordinatni sustav kao na slici.

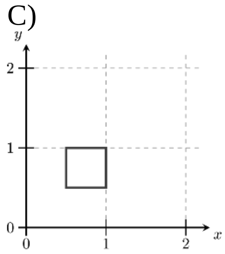
Svaka točka (x, y) kvadrata transoformira se u točku $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$.

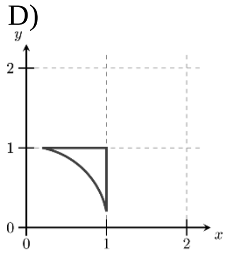
U koji se lik kvadrat transformirao?

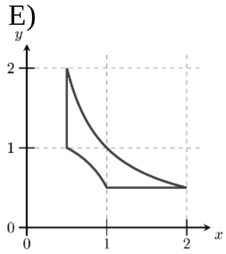


A)


B)


C)


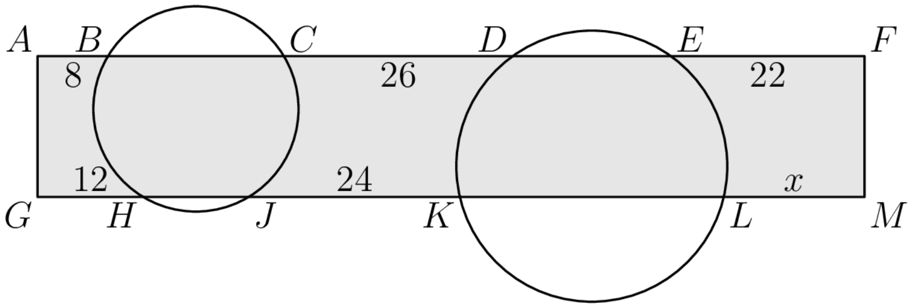
D)


E)


Rješenje: C

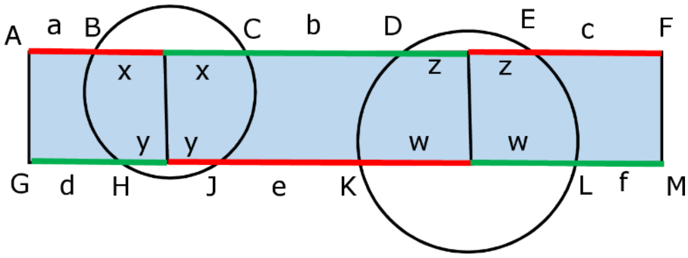
Vrhovi kvadrata transformiraju se ovako: $(1,1) \to (1,1)$, $(2,1) \to \left(\frac{1}{2},1\right)$, $(2,2) \to \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $(1,2) \to \left(1,\frac{1}{2}\right)$. Kako sve točke na stranicama početnog kvadrata imaju konstantnu jednu koordinatu, svaka će se stranica transformirati u vertikalnu ili horizontalnu dužinu. Kvadrat će se transformirati u kvadrat.

20. Dvije kružnice sijeku pravokutnik $AFMG$ kao na slici. Dužine izvan kružnica imaju duljine: $|AB| = 8$, $|CD| = 26$, $|EF| = 22$, $|GH| = 12$ i $|JK| = 24$. Kolika je duljina dužine $\overline{LM}$?



A) 14　　B) 15　　C) 16　　D) 17　　E) 18

Rješenje: C



Označimo segmente na sljedeći način: $|AB| = a$, $|CD| = b$, $|EF| = c$, $|GH| = d$, $|JK| = e$, $|LM| = f$. Povucimo zatim simetralu dužine $\overline{BC}$ i označimo dijelove na koje je ona podijelila dužinu $\overline{BC}$ s x. Ta simetrala ujedno je i simetrala dužine $\overline{HJ}$ – označimo dijelove na koje je ona podijelila dužinu $\overline{HJ}$ s y. Slično napravimo s dužinama $\overline{DE}$ i $\overline{KL}$ (vidi sliku). Primijetimo zatim da je zbroj duljina crvenih dužina jednak zbroju duljina zelenih duljina na slici. Odnosno, $(a + x) + (y + e + w) + (z + c) = (d + y) + (x + b + z) + (w + f)$. Nakon poništavanja jednakih izraza imamo: $a + e + c = d + b + f$.
Sada je lako zaključiti da je u našem konkretnom slučaju $f = 8 + 24 + 22 - 12 - 26 = 16$.

21. Neka je N neki prirodni broj. Koliko je prirodnih brojeva između $\sqrt{N^2 + N + 1}$ i $\sqrt{9N^2 + N + 1}$?

A) $N + 1$　　B) $2N - 1$　　C) $2N$　　D) $2N + 1$　　E) $3N$

Rješenje: C

Uočimo da je $N < \sqrt{N^2 + N + 1} < N + 1$ te $3N < \sqrt{9N^2 + N + 1} < 3N + 1$. Prvi broj u ovom nizu stoga je $N + 1$, a posljednji $3N$. Ukupno ih ima $3N - (N + 1) + 1 = 2N$.

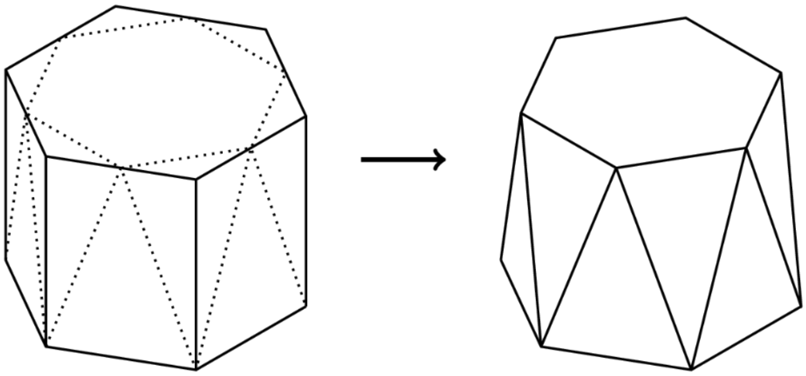
22. Prvi je član niza, a_1, između 0 i 1. Za sve $n \geq 1$ vrijedi $a_{2n} = a_2 \cdot a_n + 1$ i $a_{2n+1} = a_2 \cdot a_n - 2$. Koliko iznosi a_2 ako je $a_7 = 2$?

A) Isti kao a_1.　　B) 2　　C) 3　　D) 4　　E) 5

Rješenje: D

Iz $a_7 = a_2 \cdot a_3 - 2$ dobivamo da je $a_2 \cdot a_3 = 4$. Primijetimo da za svaki n vrijedi $a_{2n} - a_{2n+1} = 3$, iz čega slijedi da je $a_2 - a_3 = 3$. Sada imamo sustav dviju jednadžbi s dvjema nepoznanicama (a_2 i a_3) koji nam daje rješenje $a_2 = 4$ ili $a_2 = -1$. Kako vrijedi da je $a_2 = a_2 \cdot a_1 + 1$ i $0 < a_1 < 1$, moguće je jedino da je $a_2 = 4$.

23. Pravilnoj šesterostranoj prizmi odrezani su vrhovi kako je prikazano na slici. Gornja strana sada je manji šesterokut, a 12 bočnih strana jednakokračni su trokuti (po 6 međusobno sukladnih). Koliki je dio volumena originalne prizme ovim rezanjem izgubljen?



A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{4\sqrt{3}}$ D) $\frac{1}{6\sqrt{2}}$ E) $\frac{1}{6\sqrt{3}}$

Rješenje: A

Volumen početne prizme je $V = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot h$, gdje je a duljina brida baze, a h visina prizme.

Od početne prizme odrezano je šest sukladnih piramida. Baza svake od njih jednakokračan je trokut s krakovima duljine $\frac{a}{2}$ i kut među krakovima 120°. Njihova visina jednaka je visini prizme. Volumen odrezanog dijela zato je

$V_o = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\frac{a}{2}\frac{a}{2}\sin 120° \cdot h = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} \cdot h.$

Stoga je $\frac{V_o}{V} = \frac{1}{12}$.

24. Nogometna utakmica između Sjevera i Juga igra se na stadionu koji ima pravokutnu mrežu gledateljskih sjedala. U svakom je redu gledališta 11 navijača Sjevera, a u svakom je stupcu 14 navijača Juga. Prazno je ostalo 17 sjedala. Koji je najmanji mogući broj sjedala u gledalištu ovog stadiona?

A) 500 B) 660 C) 690 D) 840 E) 994

Rješenje: B

Neka je r broj redova, a s broj stupaca u gledalištu ovog stadiona. Ukupan broj sjedala tada je $r \cdot s$ i taj broj mora biti jednak broju $11r + 14s + 17$. Jednadžbu $rs = 11r + 14s + 17$ možemo zapisati kao

$(r - 14)(s - 11) = 171.$

Zaključujemo da $r - 14$ i $s - 11$ trebaju biti prirodni brojevi čiji je umnožak $171 = 3 \cdot 3 \cdot 19$.

Imamo šest slučajeva:

$(r-14, s-11)$	$(1,171)$	$(3,57)$	$(9,19)$	$(19,9)$	$(57,3)$	$(171,1)$
(r,s)	$(15,182)$	$(17,68)$	$(23,30)$	$(33,20)$	$(71,14)$	$(185,12)$
$r \cdot s$	2730	1156	690	660	994	2220

Najmanji je mogući broj sjedala u gledalištu 660.

Obavijesti o rješenjima zadataka i rezultatima mogu se naći na mrežnim stranicama HMD-a.
http://www.matematika.hr/klokan/2022/