POJAM SLIČNOSTI U OSNOVNOJ ŠKOLI

dr.sc. Boris Čulina dipl. ing. matematike, Veleučilište Velika Gorica

boris.culina@vvg.hr

Gordana Paić, prof. matematike, OŠ Dr. Ivan Merz, Zagreb

Željko Bošnjak, prof. matematike
OŠ Pavleka Miškina, Zagreb

- **Pojam sličnosti** geometrijskih figura i tijela temeljni je pojam euklidske geometrije po kojem se ona bitno razlikuje od ostalih homogenih i izotropnih geometrija, i koji joj daje karakterističnu jednostavnost, ljepotu i upotrebljivost.
- S obzirom na takav značaj, smatramo da pojam sličnosti **nije odgovarajuće zastupljen** u matematičkoj izobrazbi osnovnoškolaca
- **Predložena je skica duž koje se, vjerujemo, pojam sličnosti može ukomponirati u gradivo sedmog razreda**, a da ga pri tom ne optereti već da ga, štoviše, učini jednostavnijim i relevantnijim.

KAKO JE SADA

- Obrađuju se **proporcionalnost** i **Talesov poučak o proporcionalnim dužinama**, između ostalog i kao priprema za uvođenje pojma sličnosti
- **pojam sličnosti definira se nepotrebno ograničeno, samo za trokute, i obično na način koji skriva osnovnu bit tog pojma,** preko jednakosti odgovarajućih kutova trokuta

KAKO BI MOGLO BITI

- **Predlaže se posebna lekcija u kojoj bi se učenik upoznao s općim pojmom sličnosti zajedno sa značajnim geometrijskim svojstvima sličnosti**

- **Pojam se može jednostavno i efikasno primijeniti na učenicima zanimljiv način jer su s duljinama, površinama i volumenima likova povezane razne fizikalne veličine.**

- **Sličnost trokuta se uvodi kao specijalan slučaj općeg pojma sličnosti**

- **Pojam sličnosti se može upotrijebiti za bolje razumijevanje kružnica (sve kružnice su slične) kao i formula za opseg i površinu kruga.**

- **Pomoću pojma sličnosti se može jednostavno uvesti i radijanska mjera kuta.**

OPĆI POJAM SLIČNOSTI

- **Uvođenje pojma sličnosti na primjeru istih konstrukcija pomoću raznih jedinica mjere.** Npr. nastavnik na ploči može konstruirati pravokutnik sa stranicama duljina 6 dm i 4 dm, a učenik u bilježnici provede istu konstrukciju sa stranicama duljina 6 cm i 4 cm. Konstrukcije su istovjetne osim u izboru jedinice mjere (jedna je 10 puta veća od druge). Dobiveni likovi imaju isti oblik a različite dimenzije.

- **Uvođenje koeficijenta sličnosti**. Lako se eksperimentiranjem ili računanjem uvjeriti da kad izaberemo bilo koje dvije točke *A* i *B* na pravokutniku na ploči (npr. par nasuprotnih vrhova) i odgovarajuće dvije točke *A*' i *B*' u bilježnici, da je tada udaljenost *d* točaka *A* i *B* deset puta veća od udaljenosti *d'* točaka *A*' i *B*'. Isto je i s opsegom i s bilo kojom drugom duljinom. Broj 10 je faktor povećanja duljina u jednom liku da bismo dobili odgovarajuće duljine u drugom liku.

- **Uvođenje faktora povećanja (smanjenja) površina i volumena**.

  Analiziramo li površine pravokutnika, lako dobijemo da je površina pravokutnika na ploči 10x10 = 100 puta veća od površine pravokutnika u bilježnici. Lako se možemo uvjeriti računanjem da je tako i sa svakom drugom površinom.

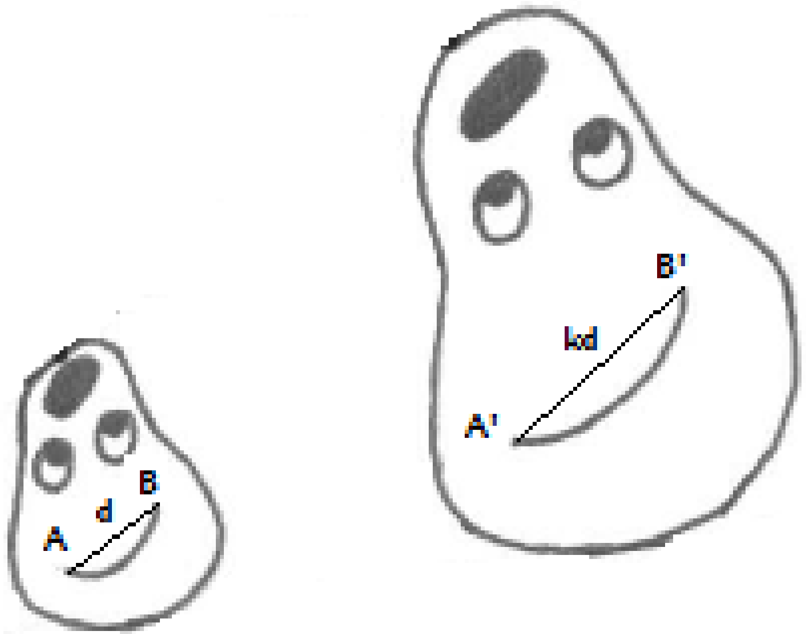
  Ako prijeđemo na kvadre u prostoru dimenzija npr. 6 dm x 4 dm x 3 dm odnosno 6 cm x 4 cm x 3 cm, tad se možemo uvjeriti računanjem da veći kvadar ima 10x10 x10 = 1000 puta veći volumen.

Osnovna intuicija o sličnosti.
Likovi su slični ako su istog oblika
(ista konstrukcija) ,
tj. proporcionalnih dimenzija
(različit izbor jedinične dužine).

slični smo

slični smo

- **Definicija sličnosti likova**. Da su dva lika **slična** znači da možemo povezati točke jednog lika s točkama drugog lika tako da je udaljenost dvije točke jednog lika uvijek za isti broj *k* (**koeficijent sličnosti**) puta veća od udaljenosti odgovarajućih točaka drugog lika:

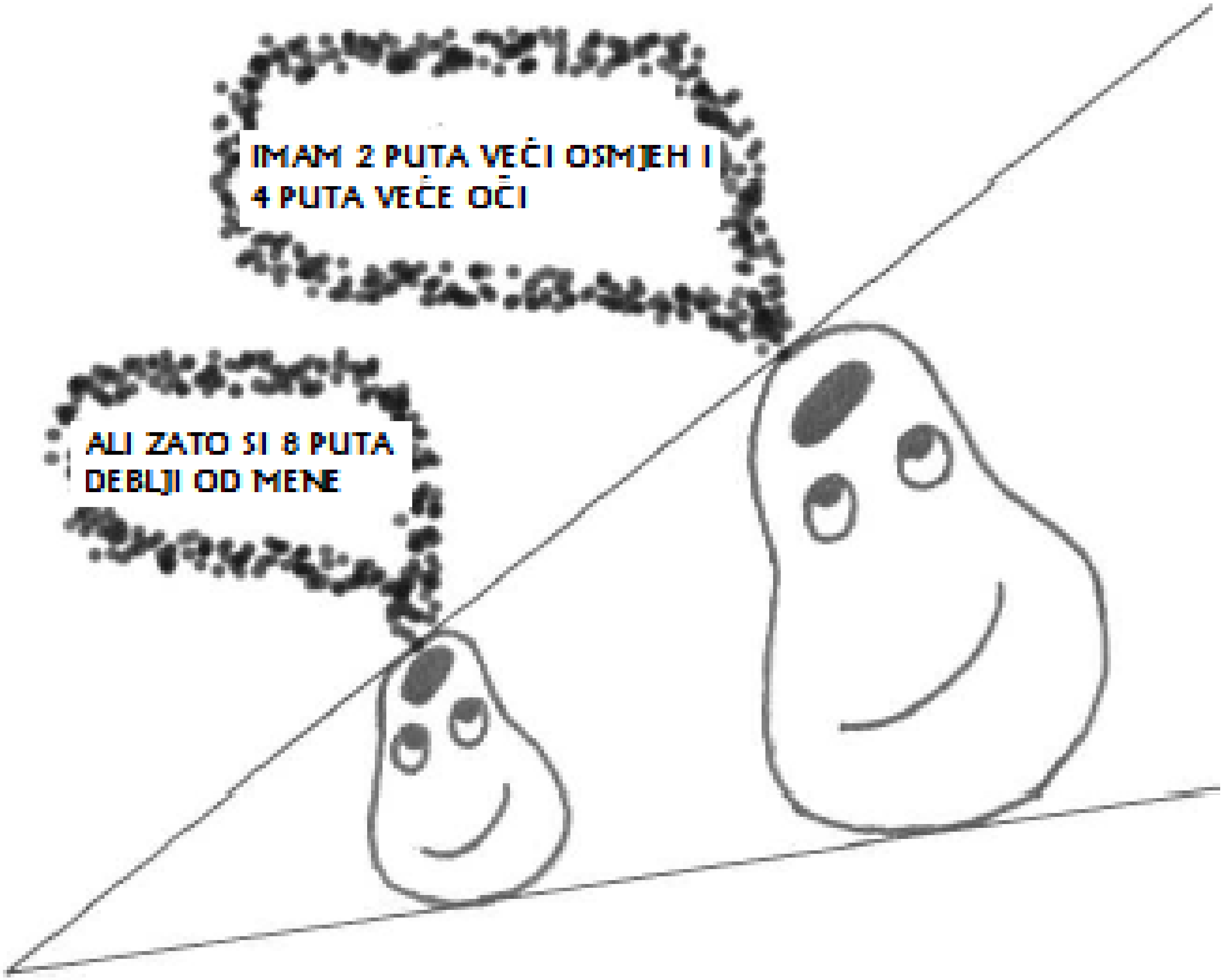


- **Osnovna svojstva sličnosti**.
  - linearne dimenzije (stranice, opseg i sl.) jednog lika su k puta veće od odgovarajućih linearnih dimenzija drugog lika.
  - kvadratne dimenzije (razne površine) jednog lika su k^2 puta veće od odgovarajućih kvadratnih dimenzija drugog lika.
  - kubne dimenzije (razni volumeni) jednog lika su k^3 puta veće od odgovarajućih kubnih dimenzija drugog lika.

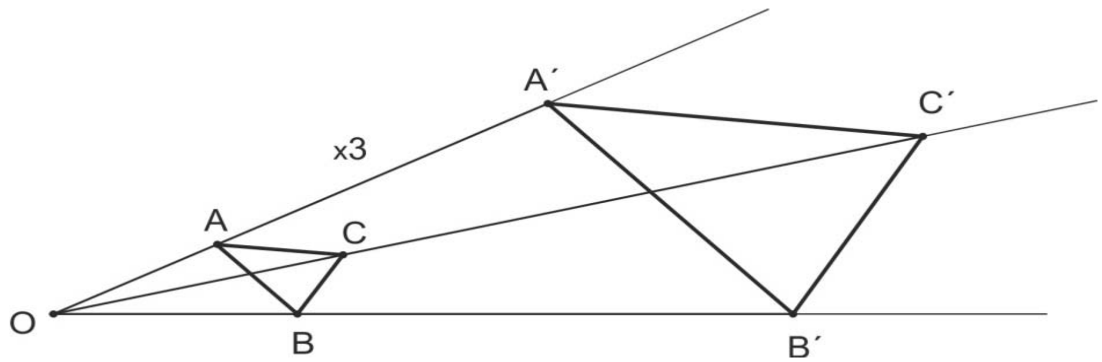
- Specijalno to vrijedi za ukupan opseg, površinu i volumen sličnih likova *L* i *L*':

$$O' = kO, \qquad P' = k^2 P, \qquad V' = k^3 V$$

- Iz definicije jednostavno slijedi da su omjeri duljina stranica (površina, volumena) u jednom liku jednaki omjerima duljina odgovarajućih stranica (površina, volumena) u sličnom liku.


IMAM 2 PUTA VEĆI OSMJEH I
4 PUTA VEĆE OČI
ALI ZATO SI 8 PUTA
DEBLJI OD MENE

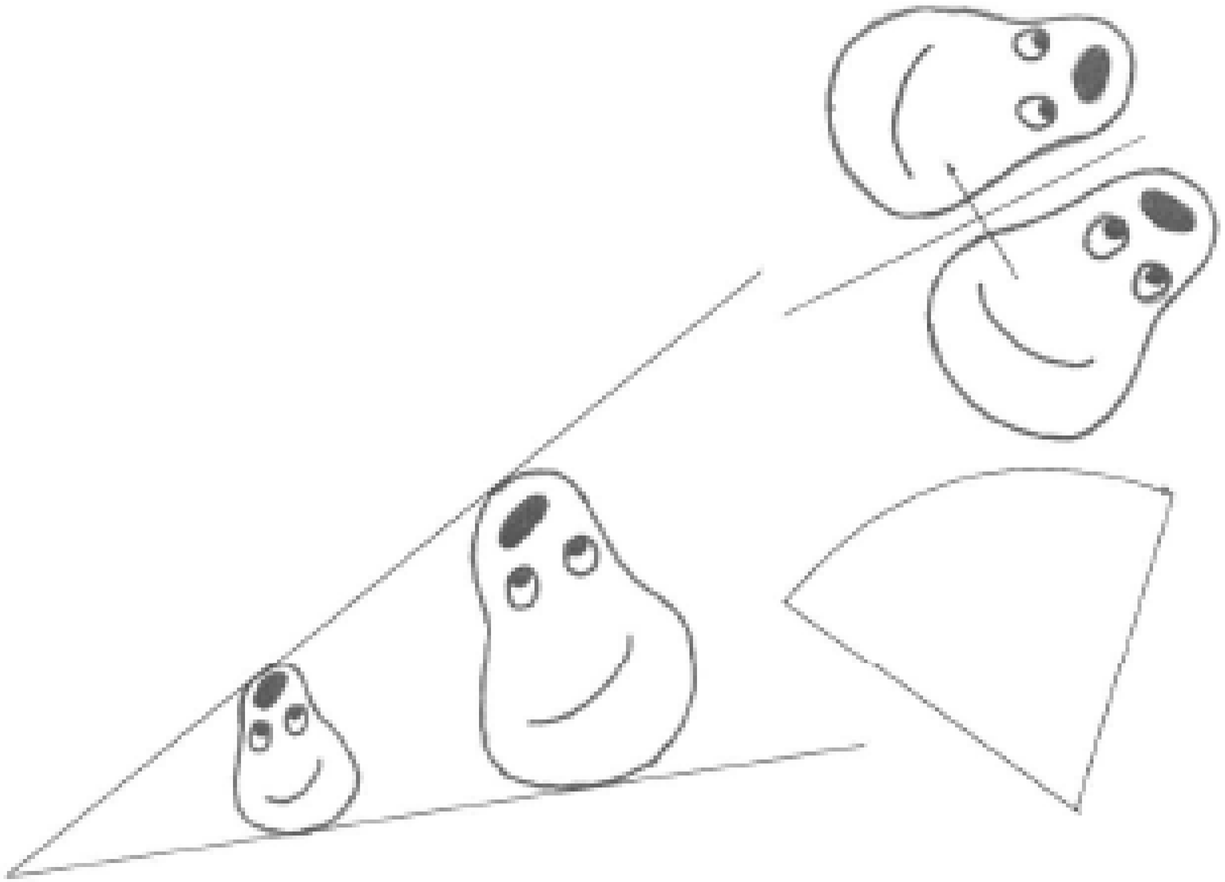
- **Uvođenje pojma transformacije sličnosti**. Usvajanje pojma sličnosti može se ''ojačati'' preciziranjem intuitivne ideje da slične likove dobivamo povećanjem, odnosno smanjenjem lika. Teren za ovakvu formulaciju je pripremljen Talesovim poučkom o proporcionalnim dužinama



Bilo eksperimentalno, mjerenjem, ili računski, korištenjem Talesova poučka o proporcionalnim dužinama, učenici se mogu uvjeriti da smo uvećanjem dobili sličan lik

- Na ovaj način se učenik upoznaje s osnovnom transformacijom sličnosti (uvećanjem, odnosno umanjenjem, u matematičkom rječniku: dilatacijom ili homotetijom) i usvaja drugu karakterizaciju pojma sličnosti:

  transformacijska karakterizacija pojma sličnosti: *Dva lika su slična ako uvećanjem ili umanjenjem jednog lika dobijemo lik koji je sukladan drugom liku.*



PRIMJENA POJMA SLIČNOSTI

- Odnosi duljina, površina i volumena u sličnim likovima imaju jednostavne i značajne posljedice za oblike u prirodi i tehnici, jer su mnoge fizikalne veličine proporcionalne duljinama, površinama i volumenima

- **Nismo slučajno ovakvih dimenzija**. Ne možemo u ovom obliku biti ni puno veći (divovi, po Guliverovoj priči visoki kao crkveni zvonici) ni puno manji (liliputanci, po Guliverovoj priči visoki oko 6 palaca). Naime, naša je težina proporcionalna volumenu, a pritisak koji mogu podnijeti kosti, njihovom poprečnom presjeku. Tako kad bi čovjek porastao do visine crkvenog zvonika, postao recimo 10 puta veći, težina bi mu bila puta veća, a površina presjeka bedrenih kostiju samo puta veća. Tako bi kosti bile izložene 10 puta većem naprezanju (kao da deset ljudi nosi na sebi) i polomile bi se.

- Još gore. Zagrijavanje tijela kod toplokrvnih živih bića proporcionalno je volumenu, a hlađenje je proporcionalno površini tijela. To znači da bi se kod navedenog povećanja čovjek 1000 puta jače zagrijavao, a sama 100 puta jače hladio. Dakle deset puta bi se više zagrijavao nego hladio, pa bi ''pregorio’’.
  S druge strane kad bismo se smanjili tad bismo se “ohladili”.

- Zato ne postoje divovski mravi niti se “djeca mogu smanjiti. Naravno, ovakva povećanja i smanjenja su moguća u nekoj mjeri i uz određene izmjene karakteristika organizma. Većim životinjama je lakše zadržati temperaturu, a manjima teže. Jedna vrsta prilagodbe je da veće životinje trebaju sporije raznošenje energije po tijelu, pa imaju manji broj otkucaja srca u minuti, dok manje životinje imaju veći broj otkucaja srca u minuti. Tako npr. ptice imaju od 100 (golub) pa čak do 1000 (kanarinac) otkucaja u minuti, dok veće životinje od 40 (konj) do 20 (kitovi) otkucaja u minuti.

SLIČNOST TROKUTA

- Sličnost trokuta se uvodi kao specijalan slučaj sličnosti geometrijskih likova
- Usvojivši opći pojam sličnosti, učenik ne bi trebao imati problema s razumijevanjem poučaka o sličnosti trokuta.
- vrijeme odvojeno za uvođenje općeg pojma sličnosti može se kompenzirati manjim vremenom potrebnim za obradu sličnosti trokuta.

SLIČNOST KRUŽNICA

- **Sve kružnice su slične** jediničnoj kružnici pri čemu je radijus kružnice faktor sličnosti:

$$O_r = rO_1, \quad P_r = r^2 P_1$$

- **Definicija broja** π. Zbog sličnosti svih kružnica omjer opsega i promjera je uvijek isti broj koji ćemo nazvati π

$$\pi = \frac{O_r}{2r}$$

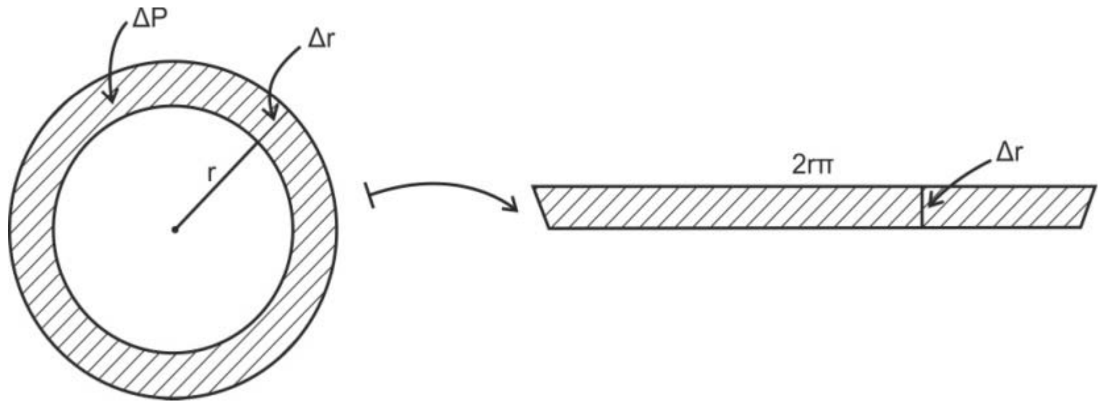
- **Opseg kružnice**. Iz definicije broja π :

$$O_r = 2r\pi$$

- **Površina kruga**.

1. Povećanje površine po prethodnoj formuli za površinu: $\Delta P_r = (r+\Delta r)^2 P_1 - r^2 P_1 = (2r\Delta r + (\Delta r)^2) P_1 \approx 2r\Delta r P_1$

2. povećanje površine je tanki kružni vijenac koji je približno jednak: $\Delta P_r \approx 2r\pi\Delta r$



Izjednačavanjem ova dva (približna) izraza

$$2r\Delta r P_1 \approx 2r\pi\Delta r$$

dobit ćemo formulu za površinu kruga jediničnog radijusa:

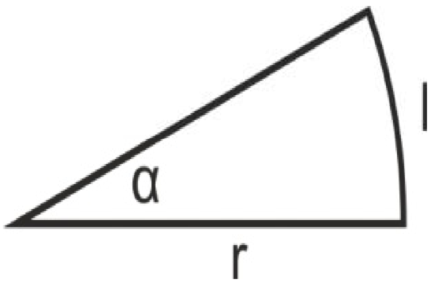
$$P_1 = \pi$$

pa, po sličnosti, i formulu za površinu kruga radijusa *r*

$$P_r = r^2\pi$$

RADIJANSKA MJERA KUTA

- Ne treba čekati treći razred srednje škole da bi se uvela radijanska mjera kuta
- Iz sličnosti kružnica slijedi da je za dani kružni isječak određen kutom omjer duljine *l* pripadajućeg luka i radijusa *r* uvijek isti broj.



Lako se vidi da je taj broj aditivna mjera kuta. Dakle prirodno je kut mjeriti omjerom luka i radijusa pripadajućeg kružnog isječka, odnosno, u danoj jedinici mjere dužine, duljinom pripadajućeg luka jedinične kružnice, tzv **radijanskom mjerom kuta**:

$$\alpha = \frac{l}{r}$$

- Iz ovoga jednostavno slijedi
  - da je mjera punog kuta jednaka 2π
  - transformacijska formula pretvorbe mjere kuta u stupnjevima u mjeru kuta u radijanima: $180° = \pi$
  - formulu za duljinu luka: $l = r\alpha$
  - formula za površinu kružnog isječka $P = \frac{1}{2}r^2\alpha$