

# POJAM FUNKCIJE U NASTAVI MATEMATIKE

## prijedlozi za razmatranje

dr.sc. Boris Čulina dipl. ing. matematike,  
Veleučilište Velika Gorica

[boris.culina@vvg.hr](mailto:boris.culina@vvg.hr)

Sanja Vitaljić, prof. matematike,  
Druga gimnazija, Split

[svitalji@gmail.com](mailto:svitalji@gmail.com)

# FUNKCIJE SU TEMELJNI MATEMATIČKI POJAM

- 1. bitan su element matematičkog modeliranja**  
(npr modeliranje ovisnosti među veličinama, recimo tlaka plina o volumenu i temperaturi)
- 2. bitan su element matematičkih struktura**  
(npr operacije u algebarskim strukturama)
- 3. pomoću njih uspoređujemo strukture**  
(npr homomorfizmi struktura)

## **4. cijele dijelove matematike možemo razumjeti kao aparat za opis funkcija:**

- teorija grupa je u osnovi teorija transformacija
- linearna algebra je teorija linearnih funkcija
- matematička analiza je teorija neprekidnih i derivabilnih funkcija
- teorija diferencijalnih jednažbi je glavni praktičan način opisivanja funkcija u prirodi i tehnici
- teorija rekurzija je teorija opisa funkcija na diskretnim strukturama

## 5. pojam funkcije izražava bitne matematičke ideje:

- ideju preslikavanja  
(npr preslikavanja dva broja u njihov zbroj)
- ideju transformacije  
(npr transformacije geometrijskih likova ili transformacije problema)
- ideju ovisnosti jednih veličina o drugima  
(npr ovisnost dinamičkih veličina o vremenu u nekom fizikalnom procesu)

- 6. pojam funkcije nosi u sebi algoritamski sadržaj, koji je ključan za konstruktivni i programerski pristup rješavanju problema.**

## **ZAKLJUČAK**

**Razvijanje funkcijskog načina razmišljanja je bitan element matematičkog obrazovanja**

# NACIONALNI OKVIRNI KURIKULUM O POJMU FUNKCIJE

## **1. za osnovnu školu:**

- prikazati jednostavnu ovisnost dviju veličina (linearna, čista kvadratna, drugi korijen) riječima, tablicom pridruženih vrijednosti, formulom i grafički

## 2. za strukovne škole:

- opisati i izvesti jednostavne ovisnosti (veze) dviju veličina formulama, tablicama, grafovima i riječima
- prepoznati i protumačiti karakteristična svojstva jednostavnih grafova (monotonost, periodičnost) i njihove karakteristične točke (nultočke, ekstremi, točke važne za određenu situaciju),  
te uspoređivati jednostavne grafove

### **3. za gimnazije dodatno:**

- prepoznati, odrediti i protumačiti karakteristične elemente i svojstva jednostavnih funkcija, analizirati linearne, kvadratne, eksponencijalne, logaritamske i trigonometrijske funkcije te rabiti njihova svojstva
- primijeniti funkcije i njihove grafove te jednadžbe i nejednadžbe u rješavanju matematičkih problema i problema u ostalim odgojno-obrazovnim područjima i svakodnevnomu životu



# NAŠE MIŠLJENJE

## 1. navedeni sadržaji nisu dovoljni:

- **proučavani skup funkcija koje povezuju realne brojeve je previše ograničen** i nije dovoljno povezan s nastavom u drugim predmetima, pogotovo fizici i informatici
- **ne koristi se jednostavan software za crtanje i ispitivanje svojstava funkcija**, kojima se na jednostavan način može proširiti skup funkcija koje se mogu ispitivati i pomoću kojih se može modelirati širok raspon problema

- **nedovoljno su obrađena geometrijska preslikavanja** na kojima se mogu vizuelno predstaviti mnoga svojstva funkcija i koja mogu pomoći u boljem razumijevanju geometrije i efikasnijem modeliranju i rešavanju geometrijskih problema
- **uopće se ne proučavaju funkcije van brojeva i geometrije**, čime se uveliko ograničava razumijevanje pojma funkcije, a i prirode matematike

## **2. Navedeni sadržaji se prekasno i nepostepeno uvode:**

- do sedmog razreda pojam funkcije gotovo da nije prisutan**
- u srednjoj školi se pojam funkcije temeljitije obrađuje tek u 4. razredu, dakle, na kraju umjesto na početku jednog ciklusa obrazovanja u kojem je taj pojam itekako važan**
- u visokoškolskom obrazovanju se pojam funkcije u punoj širini uvodi uglavnom, ako se uopće uvodi, na višim godinama, dakle, opet na kraju umjesto na početku jednog ciklusa obrazovanja koji se gotovo cijeli zasniva na ispitivanju funkcija**

***Pogotovo ključnom smatramo primjedbú da se sadržaji vezani za pojam funkcije prekasno i nepostepeno uvode.***

*Pravo pitanje nije na kojem nivou uvesti pojam funkcije, već što od pojma funkcije uvesti na danom nivou obrazovanja. (Servais, Varga)*

Prekasno uvođenje može jednako štetiti kao i prerano uvođenje.

A svakako je štetno ako se pojam ne uvodi postepeno, kroz sve cikluse obrazovanja, već "u komadu" u jednom dijelu obrazovanja.

# PRIJEDLOZI

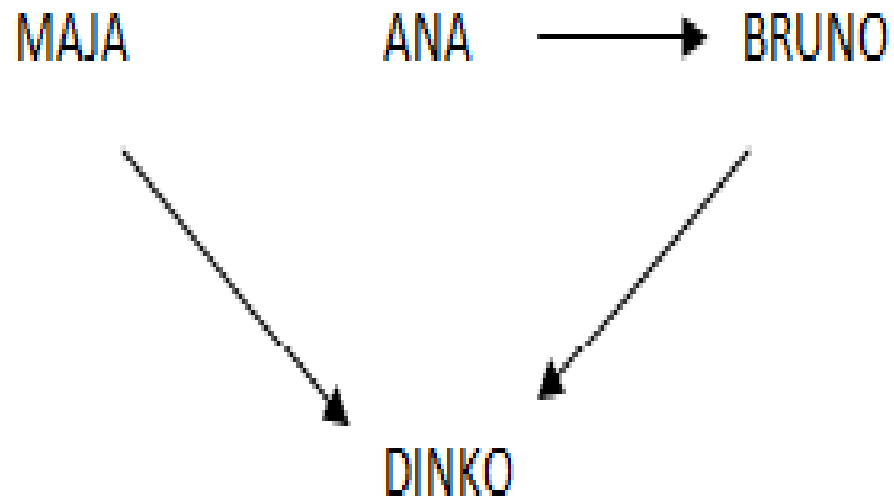
## 1. DO 4. RAZRED

Mada su brojevi i geometrija važni, smatramo pogrešnim ograničavanje matematike samo na ova područja.

Smatramo da na tom nivou obrazovanja **nedostaje razvijanje osjećaja za matematičko modeliranje jednostavnih životnih situacija pomoću pojma skupa , relacije i funkcije, kojima vrvi dječji svijet**

**Pomoću tih pojmova djeca se uče strukturirati konkretne situacije, apstrahirati iz njih ono bitno za temu kojom se bave, i to grafički prikazati, a što je sve skupa jedna veoma značajna i univerzalna matematička vještina**

Primjer: svatko pokazuje svog tatu:  $x \rightarrow \text{tata}(x)$



Pitanja: tko je tu djeda, tko je brat,...?

# PRIJEDLOZI

## 5. I 6. RAZRED

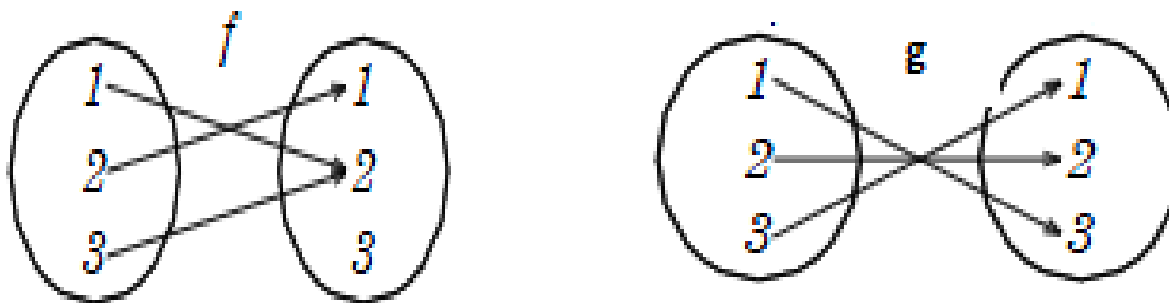
**U ovom ciklusu bi se funkcije već mogle simbolički i računski gledati. Evo nekih prijedloga:**

- U prethodnom primjeru bi se mogle uvesti oznake za funkcije, npr.  $T(x)$  za *tata od x* i  $M(x)$  za *mama od x*, i računati npr.  $T(T(\text{Ana}))$ , ili rješavati jednačinu npr.  $T(x) = \text{Dinko}$ .



- Valjalo bi koristiti oznake koje ističu prisustvo funkcije u računanju s brojevima, npr. za zbrajanje:  $3,5 \mapsto 3 + 5$   
ili za duljinu dužine:  $AB \mapsto |AB|$
- Jednostavan primjer funkcija su transformacije riječi. Tu se može uvesti jednostavno pojam kompozicije funkcije, čak i inverzne funkcije. Također na to se može nadovezati uvođenje jednostavnih funkcija šifriranja, kao npr, Cezarova šifra.

- Mogu se uvesti *male* funkcije. Takve funkcije možemo zadati dijagramima. Npr.



Na takvim prikazima se jednostavno mogu uvesti razna svojstva funkcija, npr. injektivnost, ključno svojstvo za npr. kodiranje informacija

- Učeniku valja razviti spoznaju da se iza svake formule po kojoj računa (ili programa koji piše na satu Informatike) nalazi odgovarajuća funkcija  $f$ .

Kad računa po formuli  $2x + 3$ , svakom broju  $x$  pridružuje broj  $f(x) = 2x + 3$

Kad računa površinu pravokutnika po formuli  $P = a \cdot b$ , on računa funkciju koja izražava ovisnost površine o duljinama stranica:

$$a, b \mapsto P(a, b) = a \cdot b$$

# PRIJEDLOZI

## 7. I 8. RAZRED

- Sada se javljaju *velike* funkcije koje preslikavaju realne brojeve u realne brojeve.
- U tom ciklusu je pojam funkcije, smatramo, dobro zastupljen, pogotovo što dolazi do korelacije s predmetom Fizika.
- Međutim, smatramo da bi trebalo napraviti isto tako dobru korelaciju s predmetom Informatika

- **Valjalo bi koristiti software za grafičko predstavljanje funkcija, u sklopu općeg korištenja softwarea u rješavanju matematičkih problema.**

**Crtanje grafova funkcija pomoću odgovarajućeg softwarea i razvijanje umijeća čitanja svojstava funkcija iz tako dobivenih grafova daje učenicima moćan aparat za kvalitativno razumijevanje cijelog spektra pojava.**

- U osmom razredu se može nadopuniti tema o geometrijskim preslikavanjima dodatnim razumijevanjem funkcijskih pojmova.

Pogotovo što se taj dio gradiva može lijepo korelirati s grafičkim softwareom koji se koristi u predmetu Informatika (npr. grafika kornjače).

Isto tako pojam funkcije se može iskoristiti za bolje razumijevanje veoma važnog pojma simetrije, koji se ovdje javlja u obliku simetrija likova, funkcija koje lik preslikavaju u njega samog.

# PRIJEDLOZI SREDNJA ŠKOLA

Naš je osnovni stav da ***osnovne pojmove o funkciji i njenim svojstvima treba uvesti u primjerenom formi strogosti već u prvom razredu, upotrebljavati i nadopunjavati te pojmove kroz cijelo srednjoškolsko obrazovanje, te ih eventualno u četvrtom razredu obraditi kraće i u nešto striktnijoj formi.*** Evo nekih prijedloga kako to uraditi

# PRVI RAZRED

**Smatramo da na početku prvog razreda srednje škole nedostaje jedan modul koji bi s jedne strane omogućio učeniku blaži prijelaz iz osnovnoškolske u srednjoškolsku matematiku, a s druge strane bi bio osnova na kojoj bi učenici usvojili srednjoškolsku matematiku s više razumijevanja i efikasnije.**



Umjesto iscrpljujućeg, nemotivirajućeg i nezanimljivog rješavanja glomaznih algebarskih izraza i jednažbi, trebao bi se uvesti **modul u kojem bi se na jedan nešto zreliji način nego u osnovnoj školi i s većim naglaskom na razumijevanje nego na računske postupke ponovila osnovna svojstva brojeva i sve bogatstvo matematičkog jezika - simbolizacija, varijable, aritmetički izrazi, algebarski izrazi, jednažbe, nejednažbe, skupovi i funkcije. I sve to na jednom rudimentarnom nivou i na jednostavnim primjerima koji ne zahtjevaju neko veliko računanje i dovijanje, već samo potiču razumijevanje tih pojmova**

Što se pojma funkcije tiče, važno je nadovezati se na započeto u osnovnoj školi u razumijevanju općih pojmova: **načinima zadavanja funkcije, jednoznačnosti funkcije, neovisnosti o načinu zadavanja, te domeni i skupu vrijednosti funkcije.** Kad su funkcije zadane formulom ta svojstva je uglavnom teško ispitati i to se može ostaviti za četvrti razred. Međutim **za funkcije zadane grafički svi ti pojmovi imaju jednostavnu geometrijsku interpretaciju i lako ih je ispitati.** Pri tome valja koristiti, ako je tehnički izvedivo, i **jednostavan matematički software koji će dati grafički prikaz funkcije koja je zadana formulom.**

To je podloga za dalje:

## **1. primjena na jednadžbe:**

- **"S obje strane jednadžbe uradi isto", je u stvari primjena odgovarajuće funkcije na obje strane jednadžbe**
- **Princip suprotne operacije direktno se realizira pojmom inverzne (suprotne) funkcije.** Tako se u kontekstu rješavanja jednadžbi prirodno može motivirati i objasniti pojam inverzne funkcije. Pitanje postojanja inverzne funkcije lako se može ispitati na njenom grafu.

- **Razumijevajući postupak rješavanja** **jednadžbi kao niz primjena funkcija na obje strane jednadžbe, može se objasniti puno situacija vezanih za logiku rješavanja jednadžbi.** Npr. svojstva primijenjenih funkcija objašnjavaju zašto se ponekad izgube rješenja (za neke izbore nepoznanice strane jednadžbe ne pripadaju domeni funkcije), a ponekad dobije i višak rješenja (funkcija nije injektivna).

- Nadalje, **pojam funkcije omogućava učeniku da uz pomoć softwera za crtanje grafa funkcije kvalitativno riješi gotovo bilo koju jednadžbu!** Prebacivši sve članove jednadžbe na jednu stranu dobit će jednadžbu oblika

$$f(x) = 0$$

**Rješenje jednadžbe je tako nultočka funkcije  $f$ .** Pomoću softwera nacрта graf funkcije  $f$  i iz grafa kvalitativno odredi nultočke funkcije (zajedničke točke grafa funkcije i  $x$  - osi).

## **2. primjena na nejednadžbe:**

- **na obje strane nejednadžbe možemo primijeniti samo monotone operacije, što direktno vodi pojmu monotonosti (na intervalu) funkcije. Ovo svojstvo se također lako može ispitati na grafu funkcije.**

- Nadalje, **pojam funkcije omogućava učeniku da uz pomoć softwarea za crtanje grafa funkcije kvalitativno riješi gotovo bilo koju nejednadžbu!** Prebacivši sve članove nejednadžbe na jednu stranu dobit će nejednadžbu oblika npr.

$$f(x) > 0$$

Pomoću softwarea nacрта graf funkcije i iz grafa kvalitativno odredi sve brojeve na x osi za koje je graf funkcije poviše x – osi. Upravo su oni rješenja nejednadžbe. **Ovo je direktno vezano s ispitivanjem pojma predznaka funkcije.**

### **3. primjena na uvođenje novih funkcija.**

Sa usvojenim osnovnim pojmovima, mogu se bolje i efikasnije uvesti ostale funkcije u prvom razredu, apsolutna vrijednost, potencije i korijeni.

### **4. primjena na geometriju.**

**Mogu se uvesti grupa izometrija i grupa sličnosti pomoću kojih se mogu razumijeti pojmovi sukladnosti i sličnosti likova u njihovoj punoj općenitosti**



## **5. korelacija s ostalim predmetima:**

- učenik je matematički pripremljen za razumijevanje raznovrsnih s-t, v-t i F-s dijagrama koji su (s pravom) prisutni u nastavi fizike u prvom razredu, a isto tako i p-V, V-T i p-T dijagrama u drugom razredu.
- učenik je matematički pripremljen i za programiranje u nastavi informatike

## **6. podloga za matematiku promjena.**

Na grafu funkcije se može steći osjećaj za brzinu rasta ili pada što vodi pojmu derivacije i površinu ispod grafa što vodi pojmu integrala

**Smatramo da se prostor za ovaj modul može dobiti izbacivanjem sadržaja koji su nepotrebni, rekli bismo i nepotrebno opterećujući za učenika na ovom nivou obrazovanja.**

Većina onoga što treba izbaciti se javlja u matematici jedino u udžbenicima iz matematike.

**Smatramo da treba izbaciti rješavanje složenijih aritmetičkih i algebarskih izraza, analitičko rješavanje složenijih jednažbi, ograničiti analitičko rješavanje nejednažbi na jednostavnije primjere, ograničiti analitičko rješavanje jednažbi i nejednažbi s apsolutnim vrijednostima, ograničiti računanje aritmetičkih i algebarskih izraza s višim korijenima, ograničiti analitičko rješavanje složenijih iracionalnih jednažbi, izbaciti dijeljenje polinoma, ograničiti geometrijske konstrukcije, izbaciti tetivni i tangencijalni četverokut, ,**

# DRUGI RAZRED

1. U drugom razredu se usvojeni opći funkcijski pojmovnik može uspješno primijeniti na jednostavnije i bolje usvajanje kvadratnih, polinomnih, eksponencijalnih, logaritamskih i trigonometrijskih funkcija, te na rješavanje pripadnih jednažbi i nejednažbi. Takav pristup omogućuje jednostavnije i bolje razumijevanje ovih tema.

2. Na primjeru eksponencijalnih i logaritamskih funkcija može se ojačati pojam inverzne funkcije i ujedno postići bolje razumijevanje veze funkcije i inverzne funkcije.

# TREĆI RAZRED

1. U trećem razredu se usvojeni opći funkcijski pojmovnik može uspješno primijeniti na jednostavnije i bolje usvajanje trigonometrijskih i njima inverznih funkcija. Također, ovdje se prirodno uvodi svojstvo periodičnosti funkcije.

2. U analitičkoj geometriji bi se trebao uvesti **analitički prikaz geometrijskih transformacija**, barem translacija, projekcija i zrcaljenja, ako već ne i rotacija, pomoću kojeg bi se sve transformacije mogle računati. Ovo gradivo je direktno povezano s kompjuterskom grafikom i priprema je za geometrijsko razumijevanje matrica, ako ne u srednjoškolskom obrazovanju, onda poslije u visokoškolskom obrazovanju. Prostora za uvođenje ovog dijela ima jer smatramo da je ionako trigonometrija previše zastupljena.

# ČETVRTI RAZRED

Ovdje modul o funkcijama može ostati.

U predloženim promjenama, pored razumijevanja općeg pojma funkcije i raznih svojstava funkcija, svojstva funkcije se prije svega ispituju na grafovima funkcija.

Sad, kad su ti pojmovi usvojeni u jednostavnom kontekstu, oni se mogu ispitivati i na formulama kojima su zadane funkcije, što je preciznije ali i puno teže.



# VISOKO OBRAZOVANJE

Po nama, na prvoj godini nedostaje predmet tipa nekadašnjih predmeta s nazivom *Uvod u matematiku* koji bi studentu dao jedan širi i zasnovaniji pogled na cjelokupnu matematiku, prije nego se posveti studiranju specijalnijih područja.

Sve to se eventualno uvodi opet na kraju tog obrazovnog ciklusa obično ugrvano u predmet Diskretna matematika

OVDJE PREDLOŽENE PROMJENE SMATRAMO SAMO DIJELOM PROMJENA KOJE BI TREBALO PROVESTI.

SMATRAMO DA JE POTREBAN NOVI CIKLUS PREISPITIVANJA NAŠEG SUSTAVA MATEMATIČKOG OBRAZOVANJA, OD IZBORA I ZASTUPLJENOSTI POJEDINIH SADRŽAJA I POJMOVA PA DO NAČINA NJIHOVE OBRADU, SA SVRHOM DOBIVANJA ZANIMLJIVIJEG, SVESTRANIJEG I MODERNIJEG SUSTAVA.