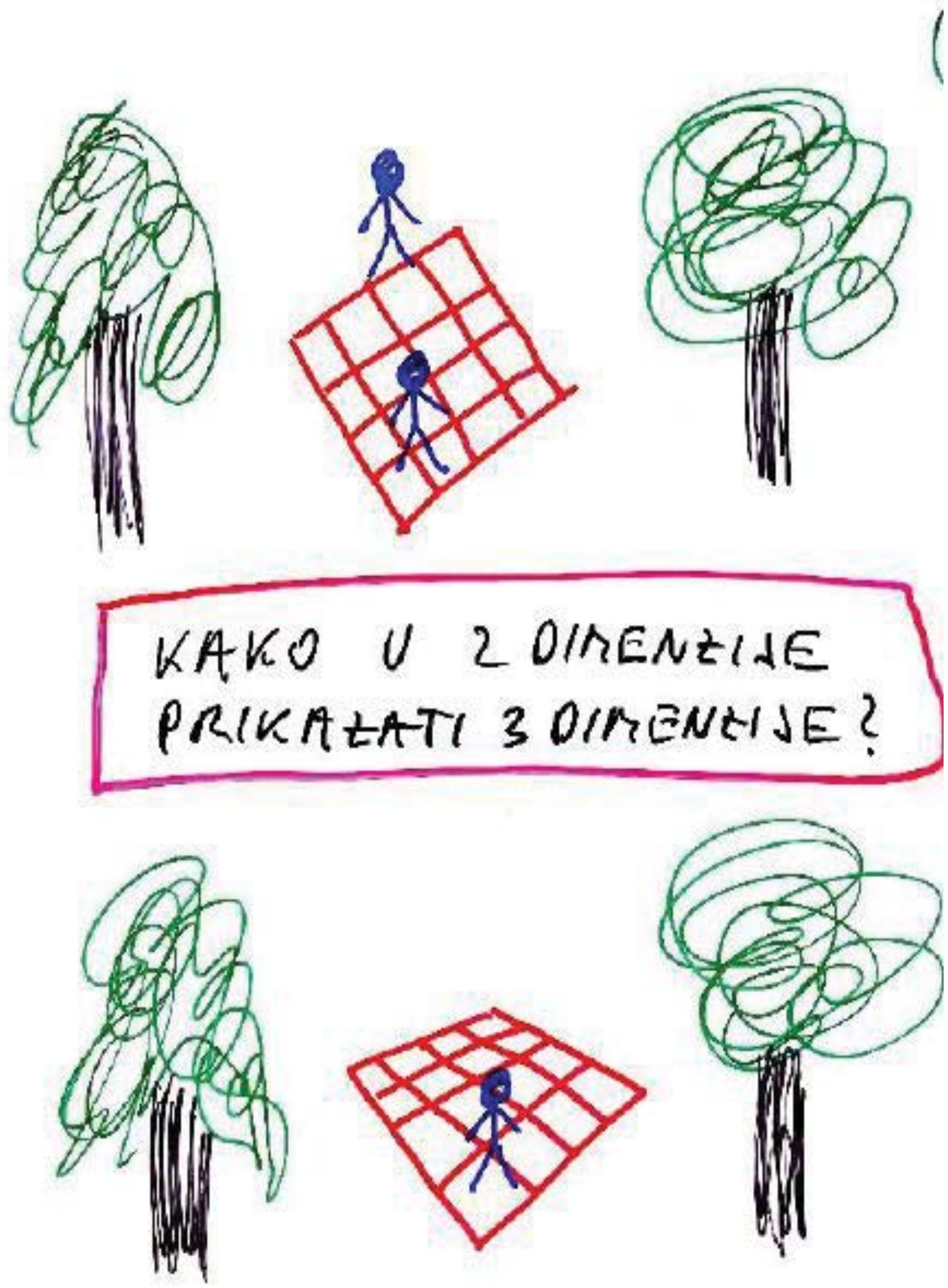
GEOMETRIJA I PERSPEKTIVA

Zvonimir Šikić


KAKO U 2 DIMENZIJE
PRIKAZATI 3 DIMENZIJE?

Rođenje Sv. Edmunda, kasno 15. st. nepoznati autor.

Predaja ključeva Sv. Petru, Pietro Perugino 1482 (Sikstinska kapela)

Gary Meyer, 1986.

KAKO SLIKATI DA DOBIJEMO ŽELJENI EFEKT DUBINE?

Albertijev veo 1436
(Della pitura)

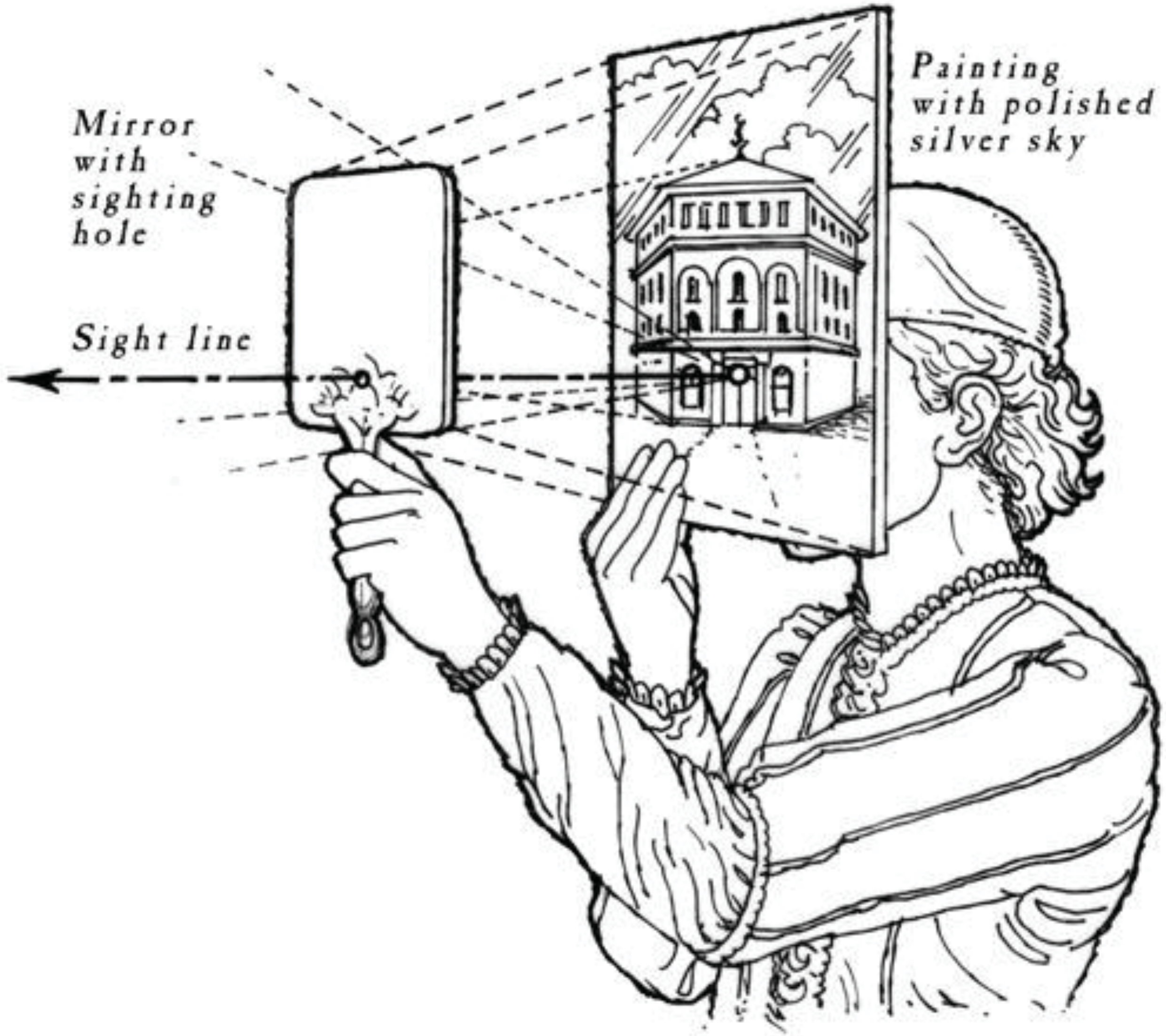
Brunelleschijev pokus 1420. (1401?)

Alhazen tj. Ibn al-Hajtham, 11. st.
(Kitab al-manazir, Optika)

Alhazen (Ibn al-Hajtham, 11. st.)

Brunelleschi

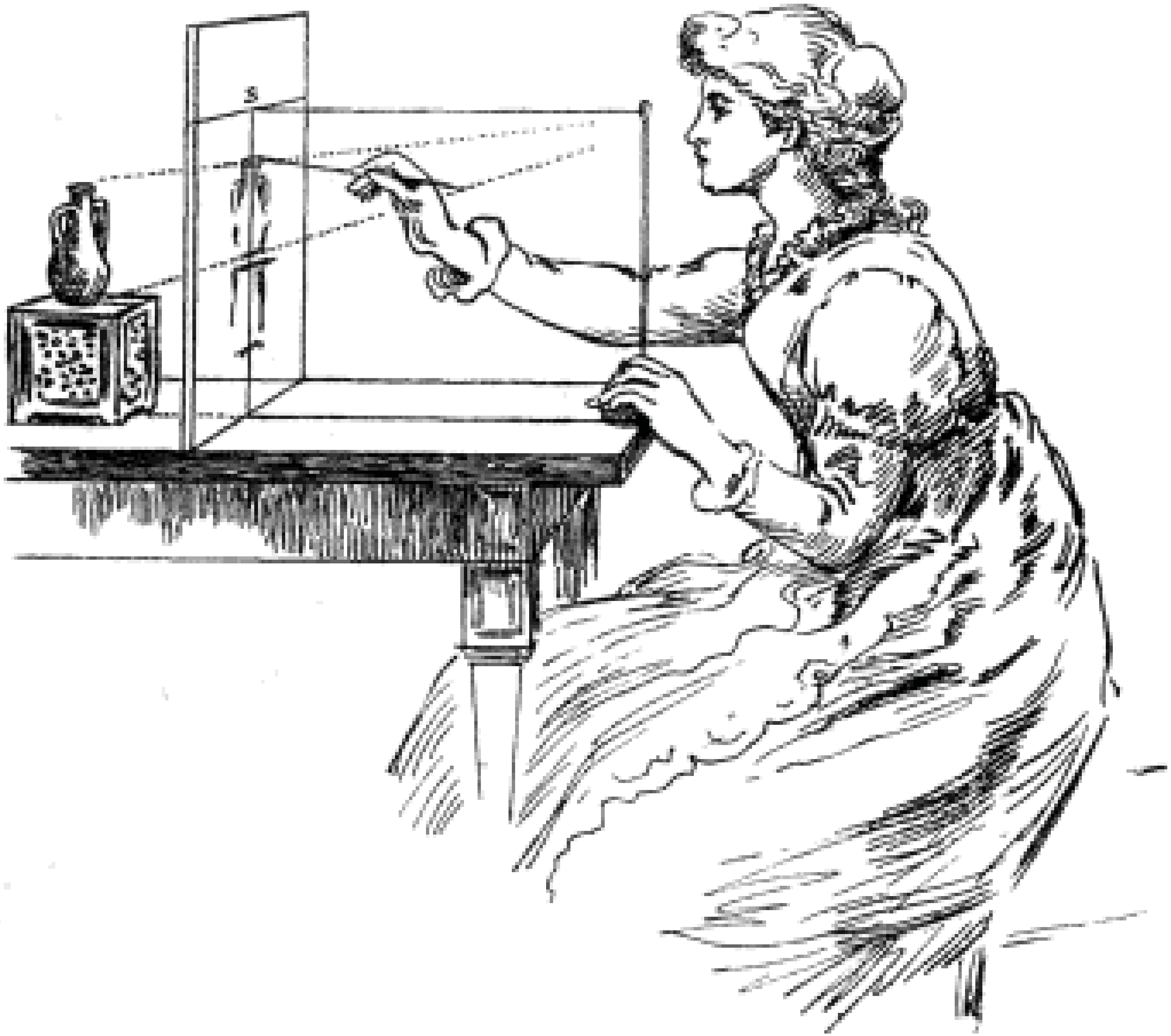
Krstionica Firenske katedrale.

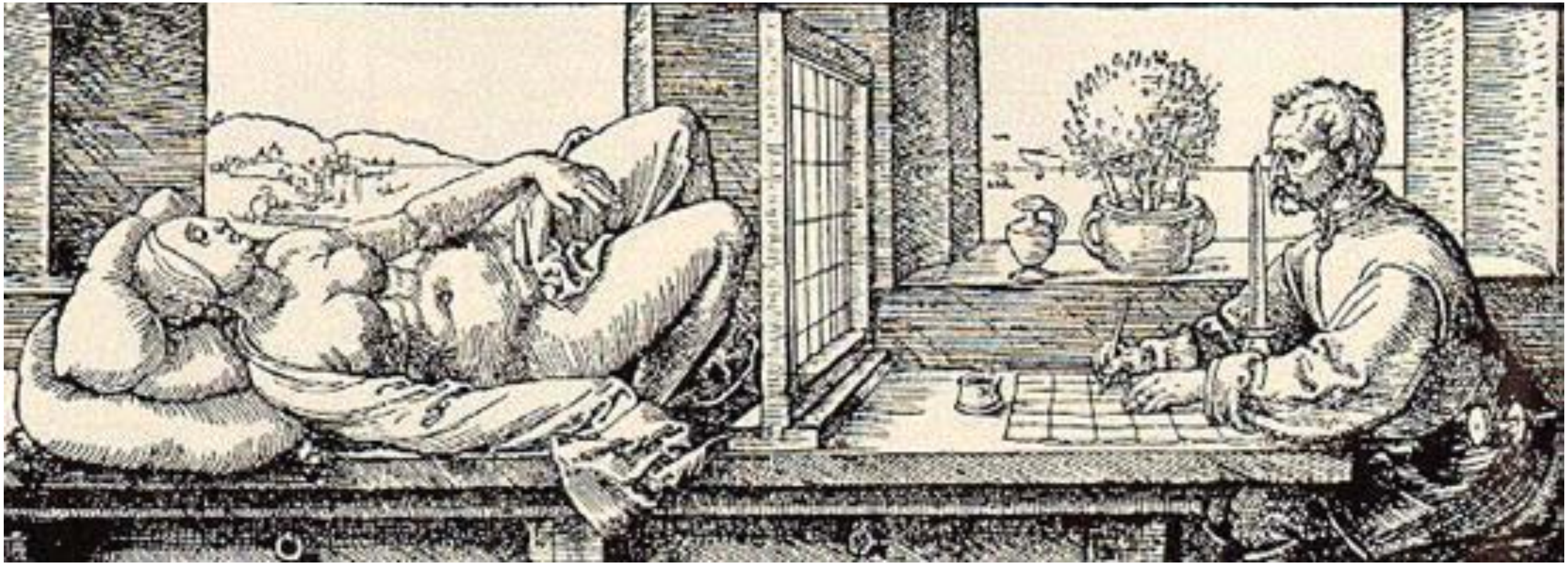


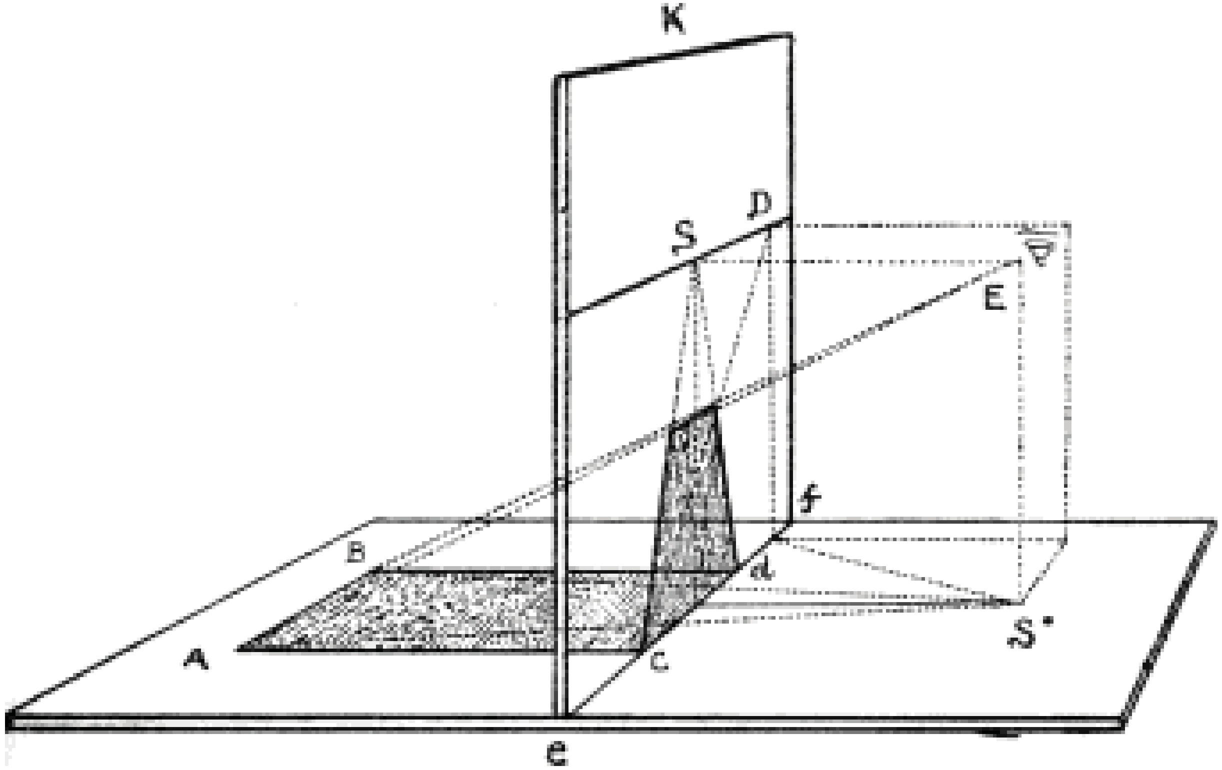
Brunelleschijev pokus 1420.


LEON BATT.A ALBERTI

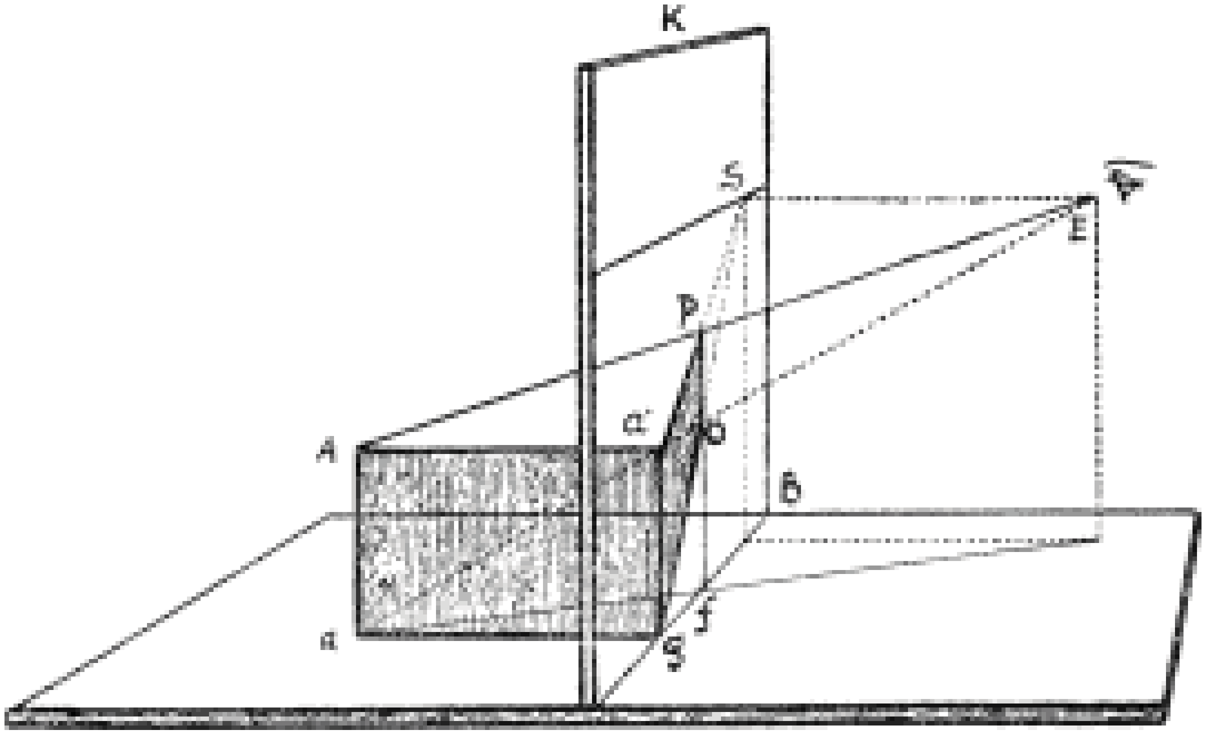

G
F


S





Pod sobe (kvadrat) na slici je trapez.
Slika ovisi o tome gdje je oko.



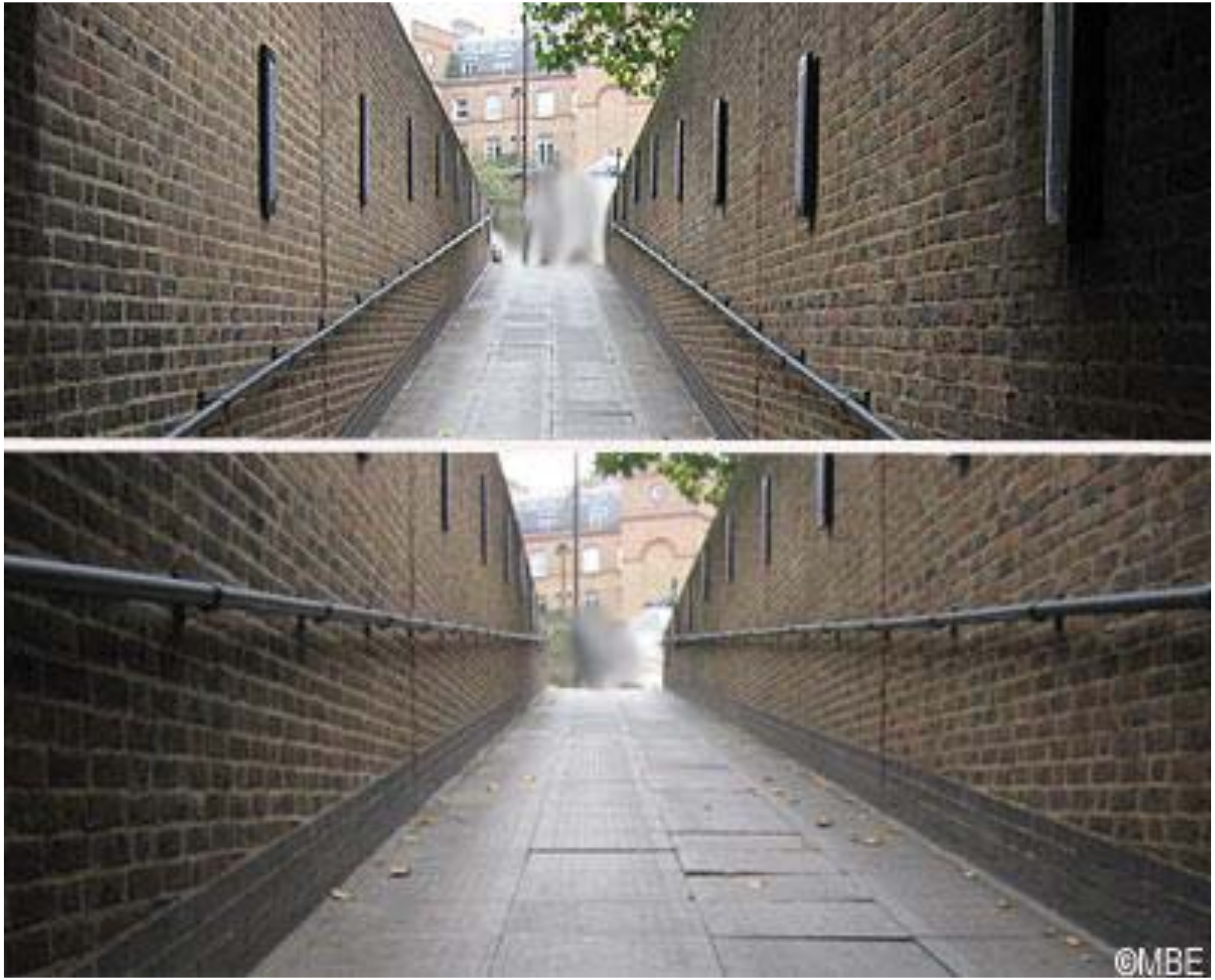
Zid sobe (pravokutnik) na slici je trapez.
Slika ovisi o tome gdje je oko.

MORAMO LI SLIKU GLEDATI IZ ISTE

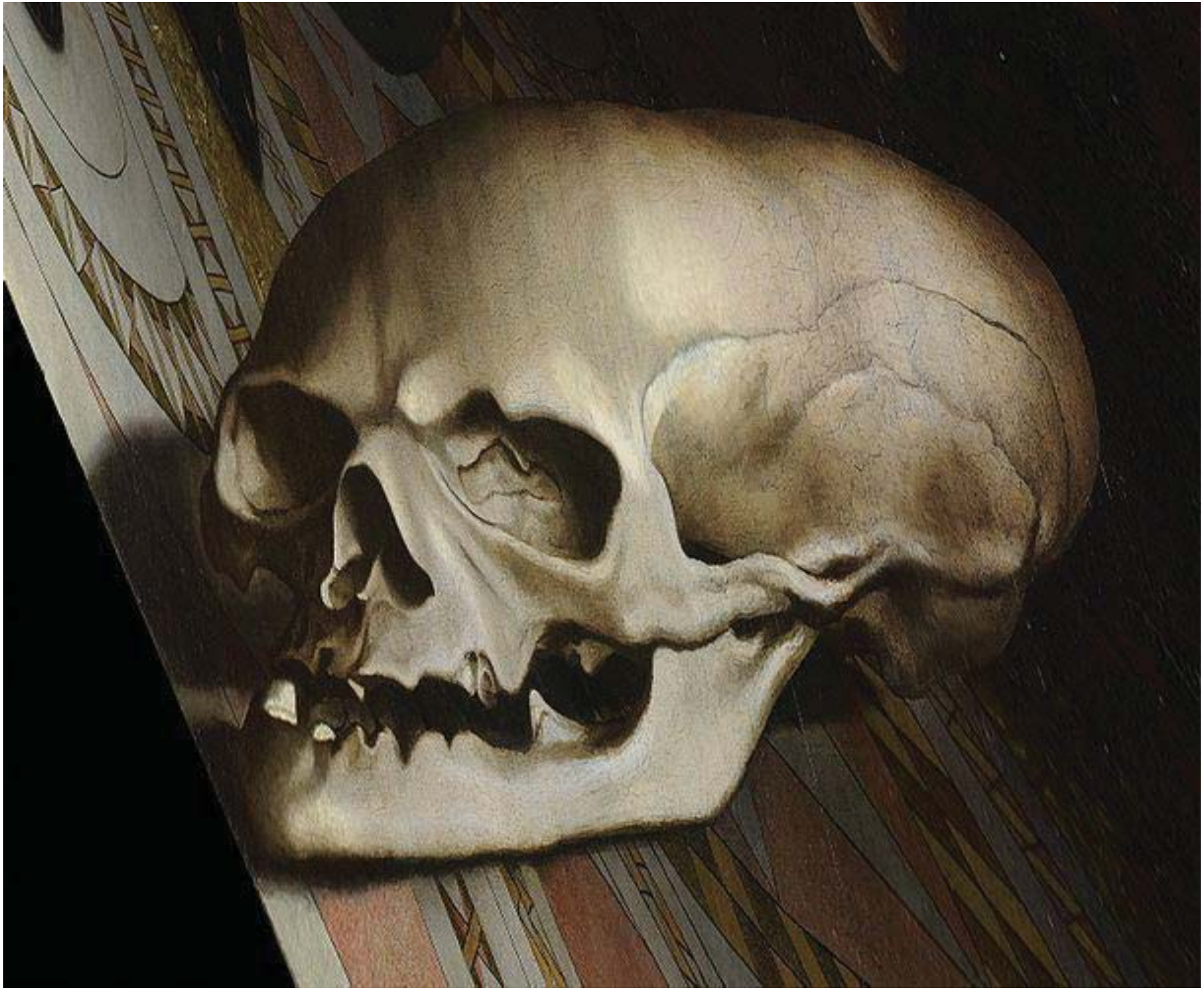
TOČKE IZ KOJE JE SLIKANA DA

BISMO DOBILI ŽELJENI EFEKT?

I DA I NE!


©MBE

Holbein, Ambasadori 1533.



Nasmiješeni vitez (Frans Hals 1624.) sve vas gleda.

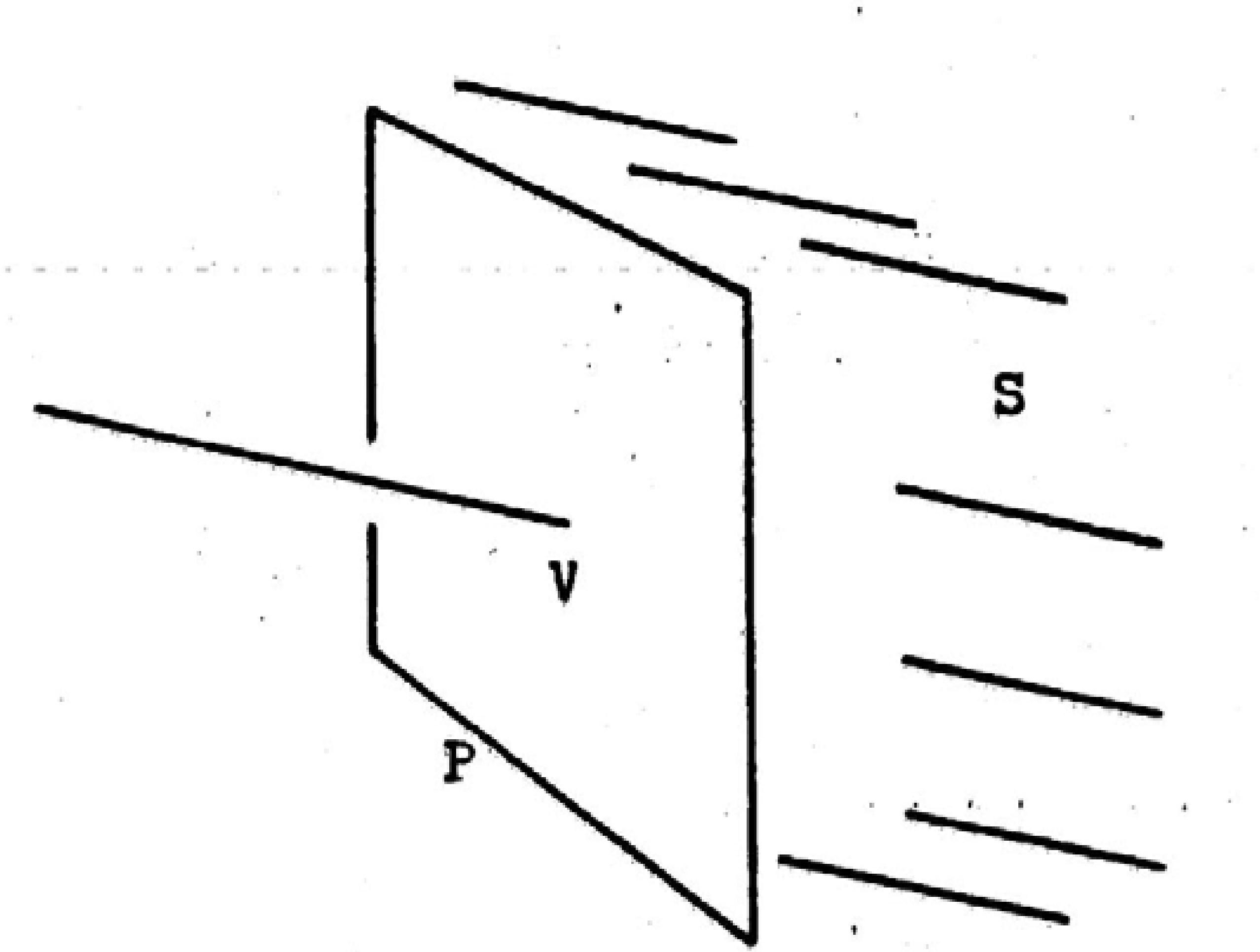
KAKO SLIKATI BEZ ALBERTIJEVOG VELA (NEPOSTOJEĆU IZMAŠTANU SCENU)?

COSTRUZIONE LEGITTIMA
ALBERTI 1436
(Brunelleschi, Alhazen, antika ...)

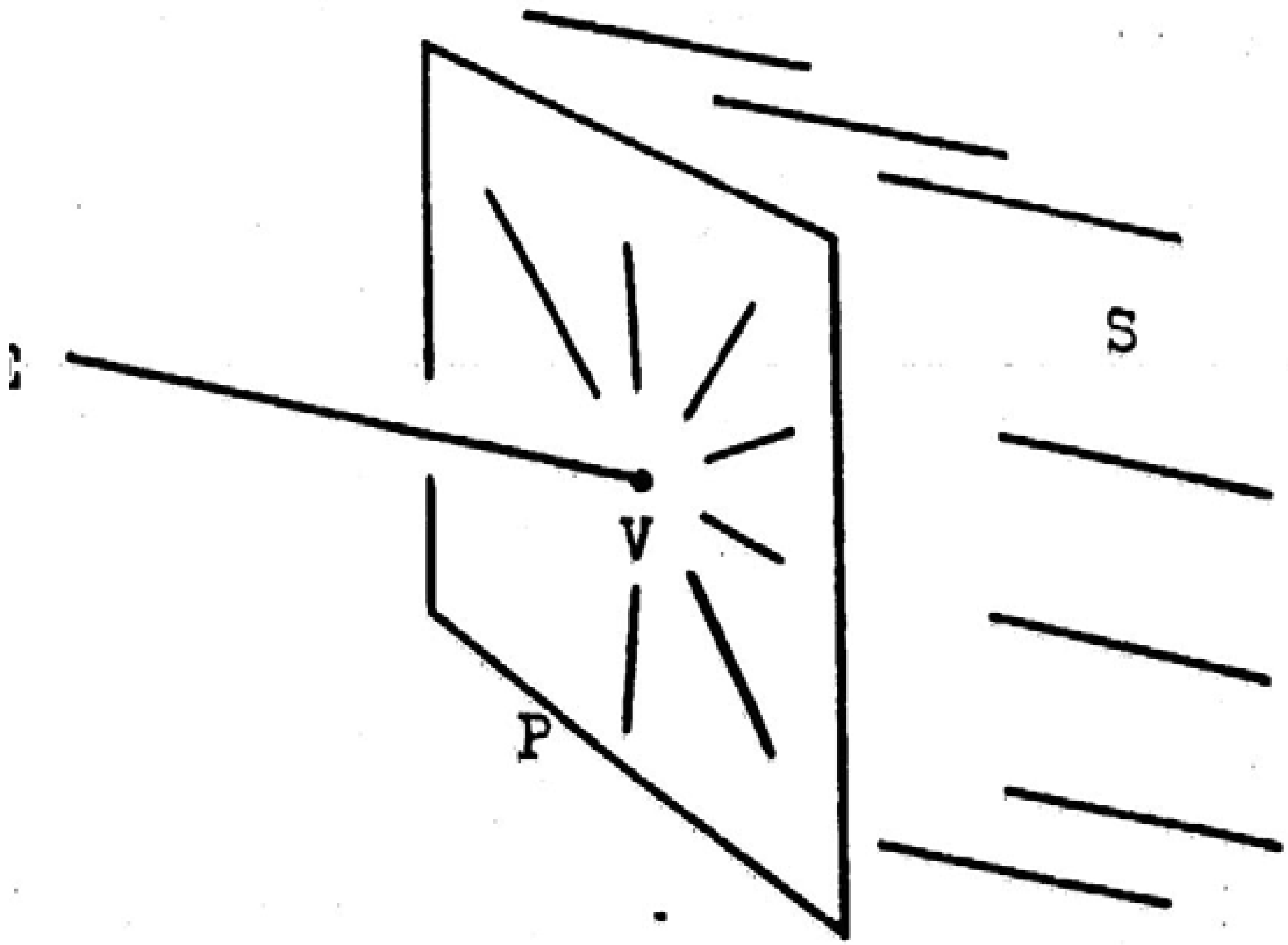
PARALELE SE SIJEKU U TOČKI NA HORIZONTU

Horizont je pravac u kojem ravnina kroz oko paralelna s tlom siječe platno.
Sve paralele s tlom koje prolaze okom sijeku platno u točki horizonta.
(Dakle sve paralele s tlom na platnu „nestaju” na horizontu.)

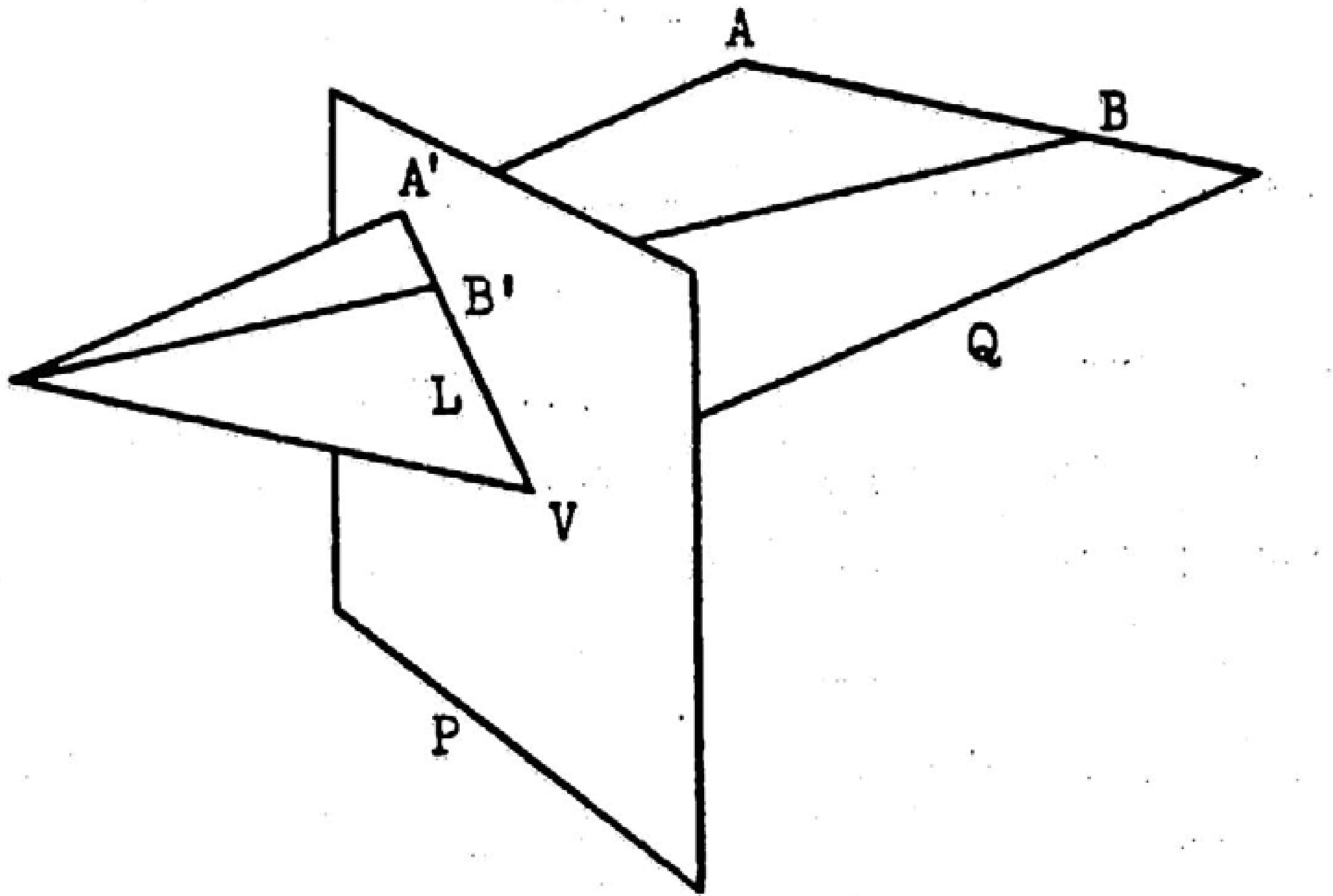
Za paralele općenito (ne samo horizontalne):



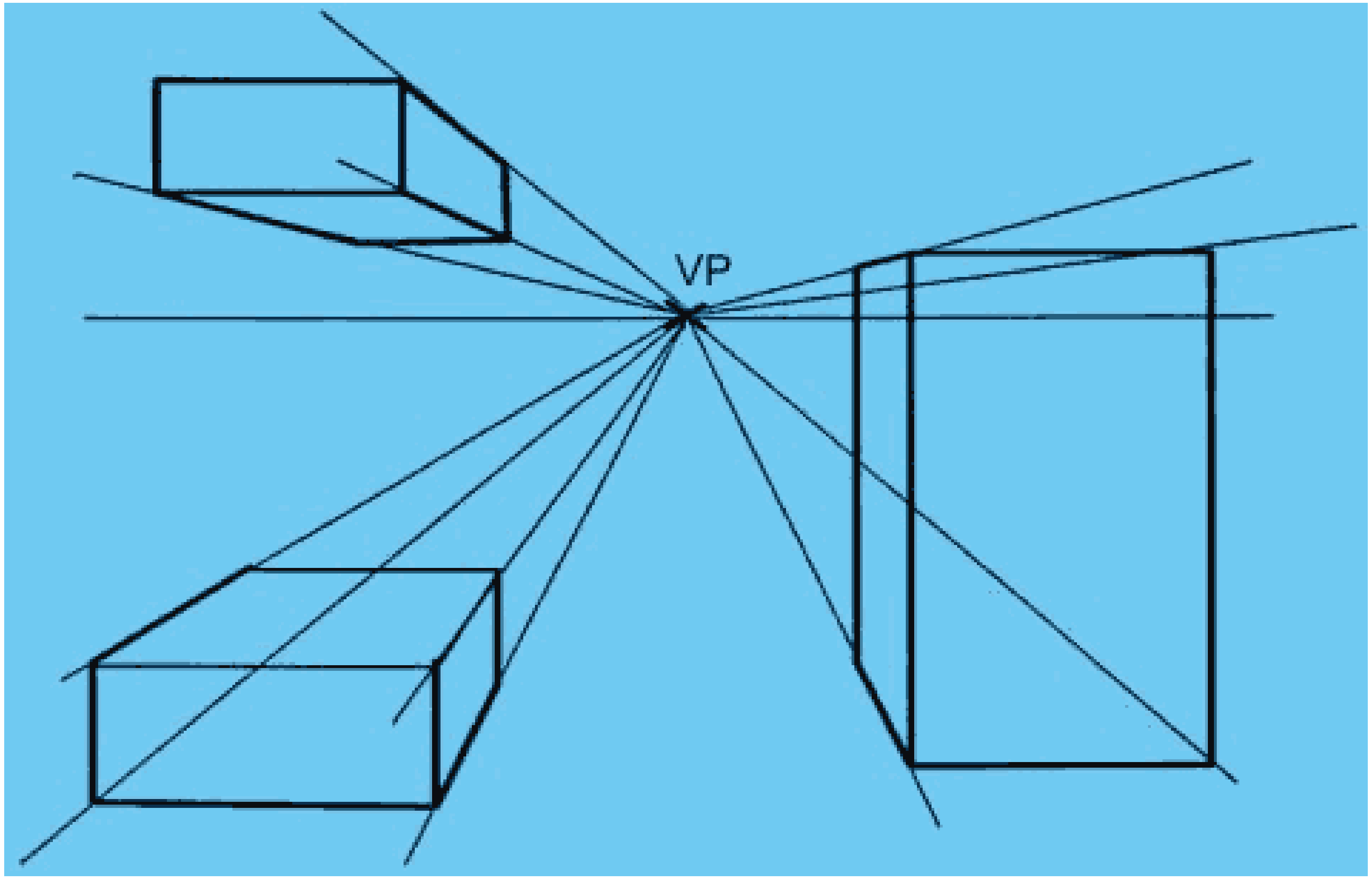
S njima paralelni vidni pravac siječe platno u točki V, tzv. nedogledu tih pravaca.



Slike paralela (koje sijeku platno) na platnu se sijeku u nedogledu V.

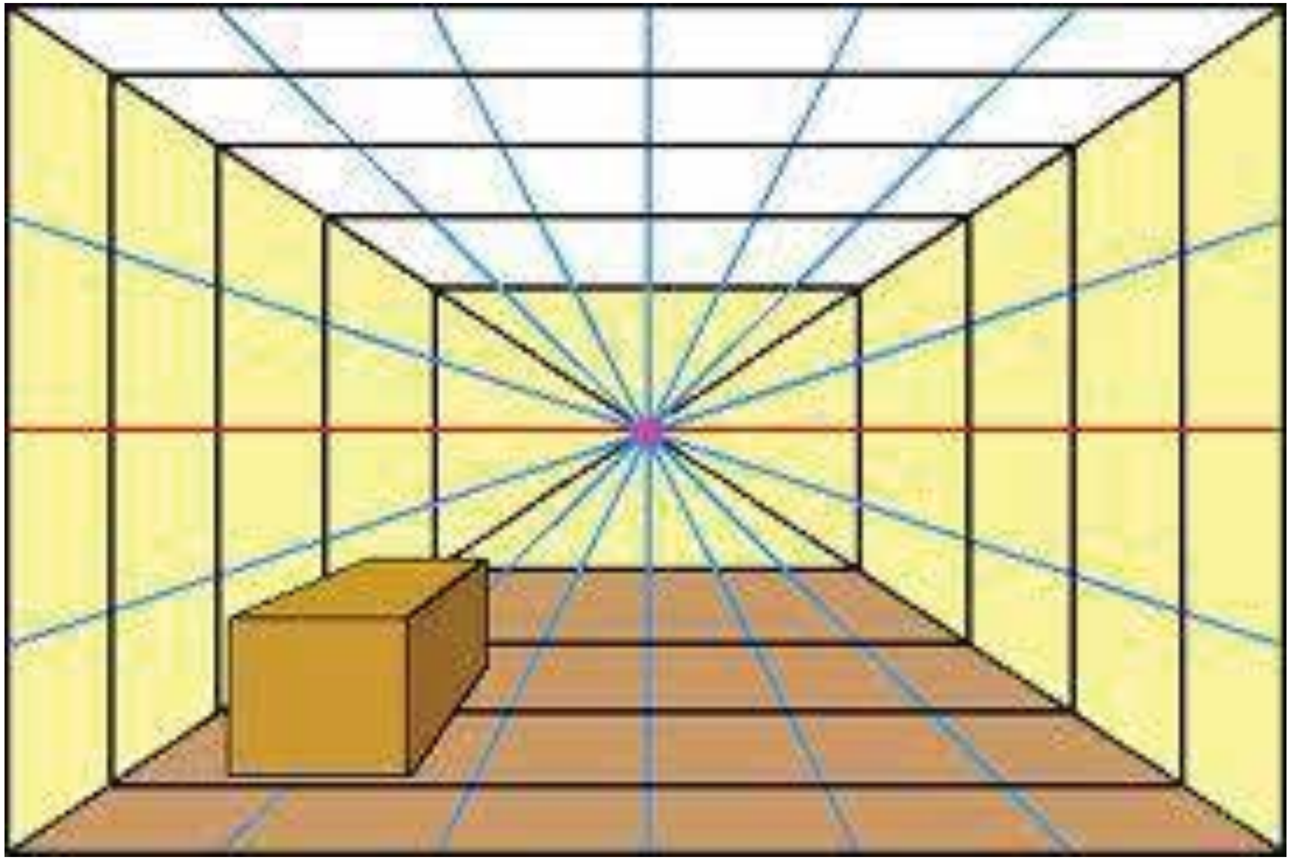


AB i paralela OV određuju ravninu Q koja ravninu platna P siječe u A’B’.
V je na A’B’ jer je i na P i na Q.



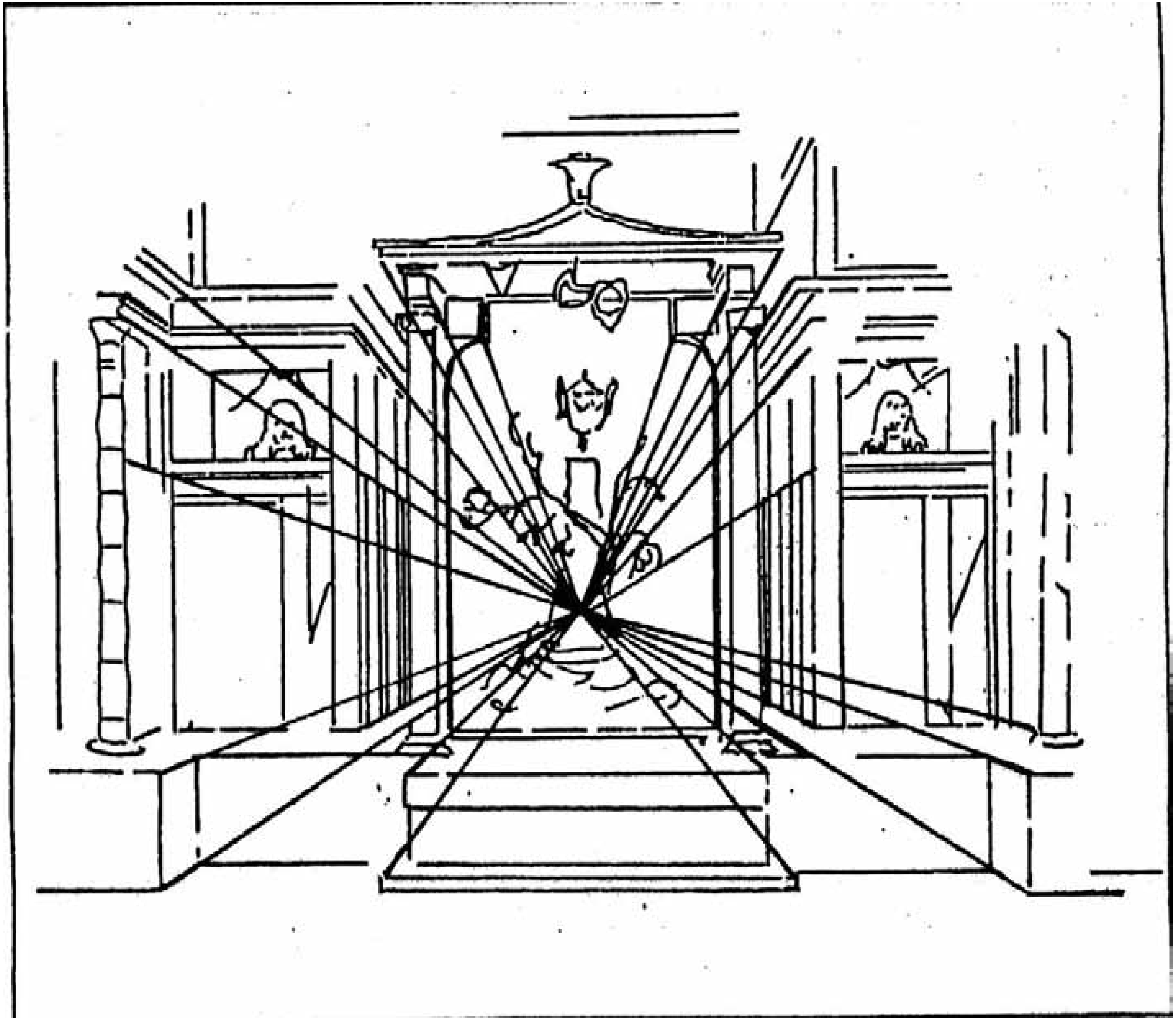
Stranice paralelne s platnom imaju isti smjer i na platnu. 1 istaknuti smjer neparalelan je s platnom (okomice na platno) i siječe se u svojem 1 nedogledu (na horizontu).

(Tzv. perspektiva 1 točke.)

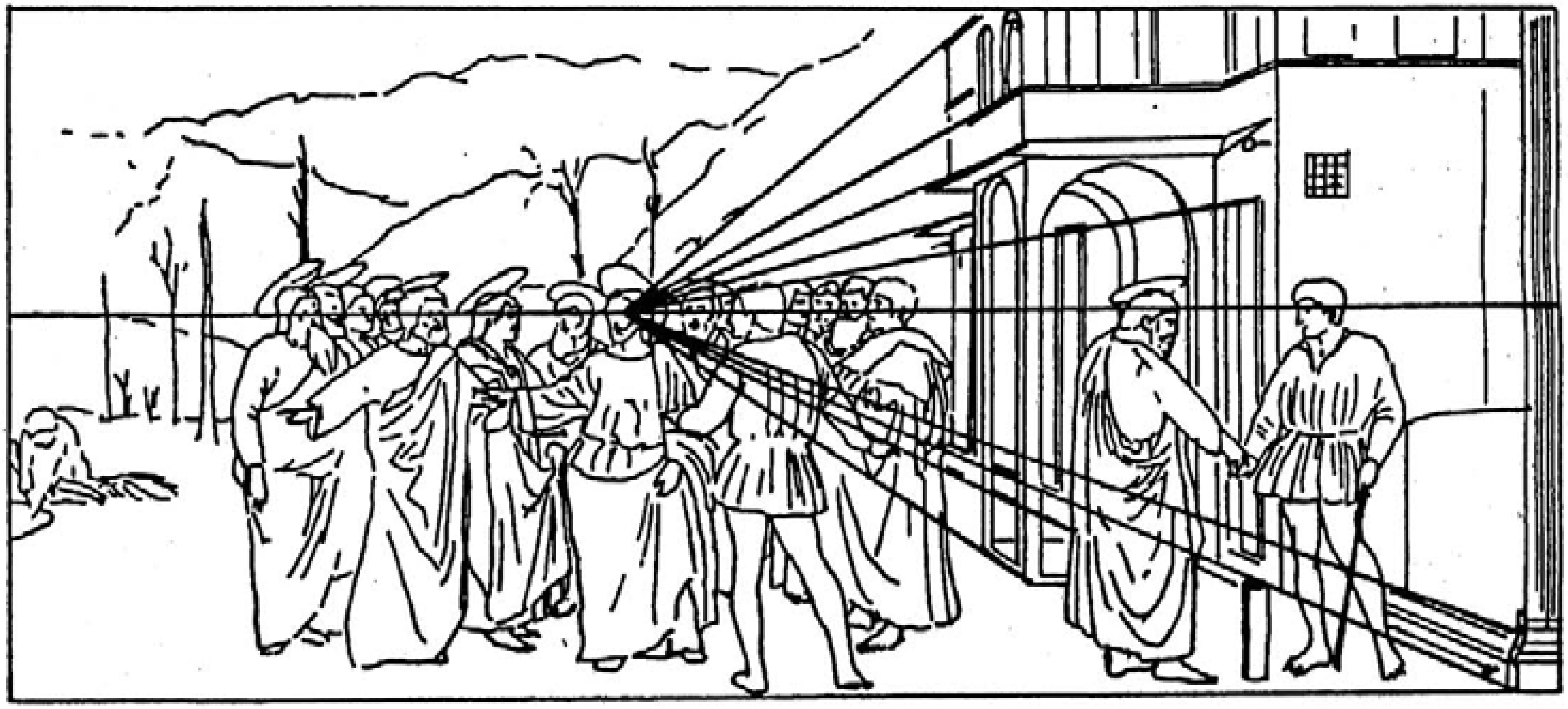


Okumura Masanobu, 1745

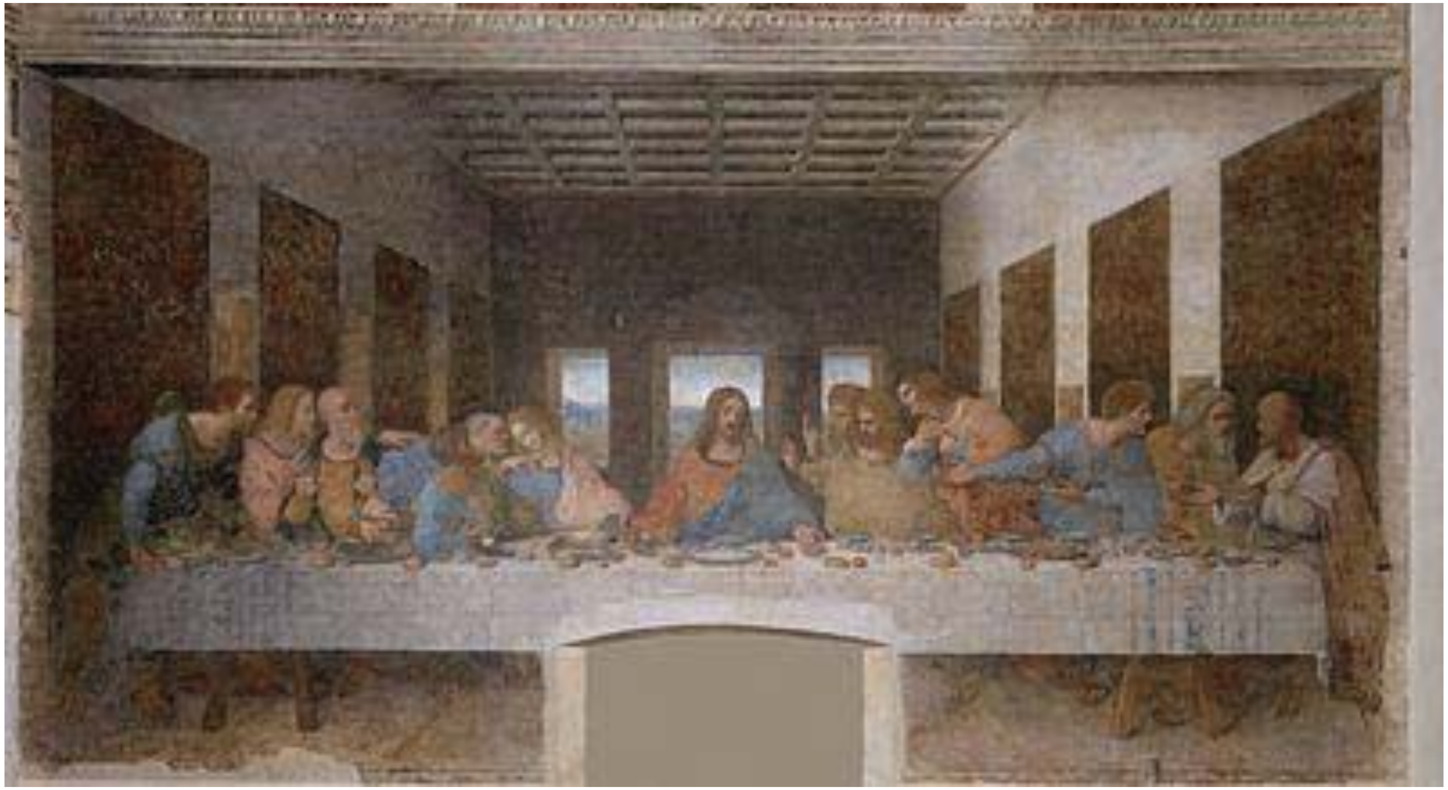
Antička freska (iz Augustovog vremana).



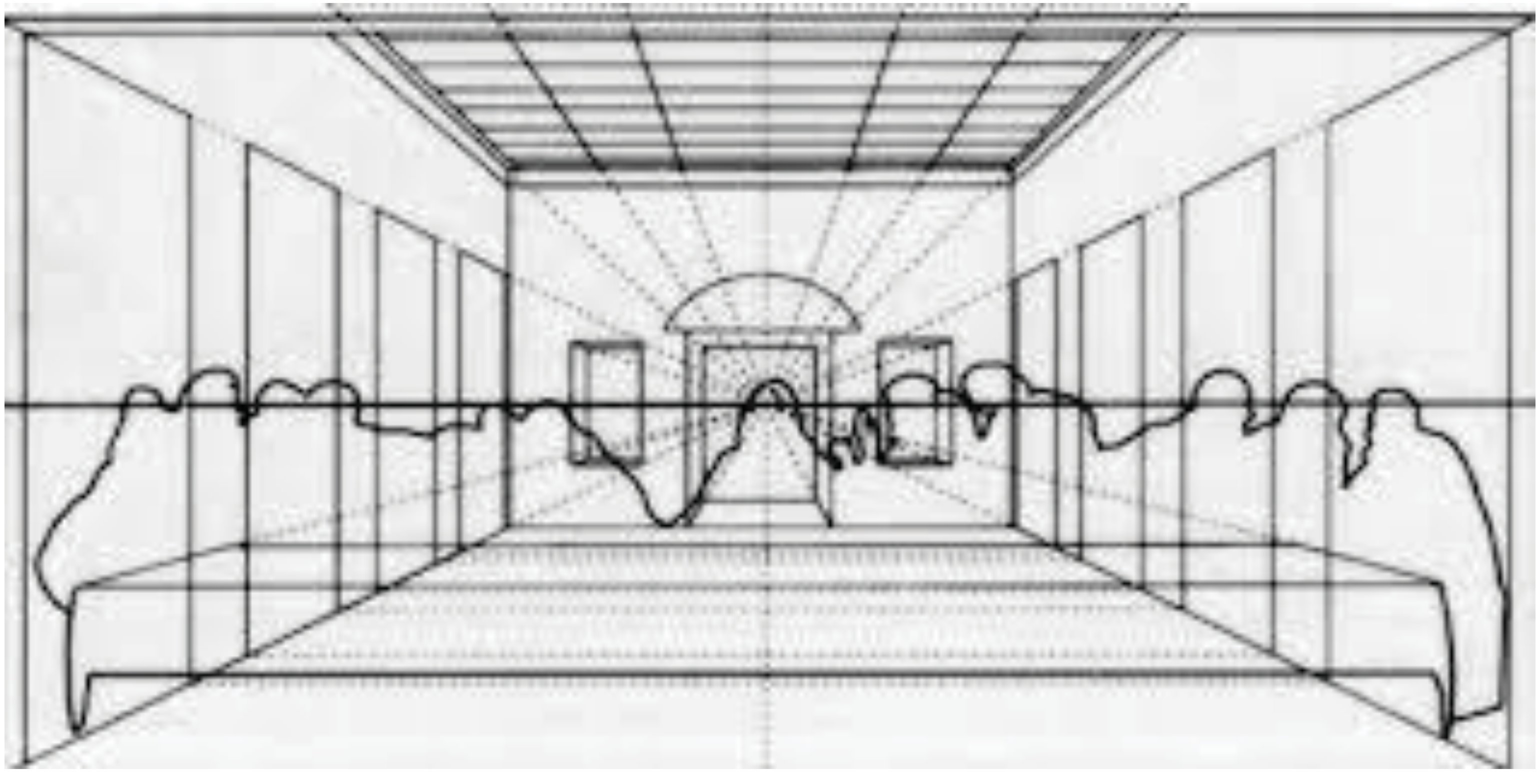
Plaćanje poreza u Kafarnaumu (staterom iz ribljih usta), Masaccio 1425. (Svjetlo s desna, uhvaćeni trenutak, boje, ...)



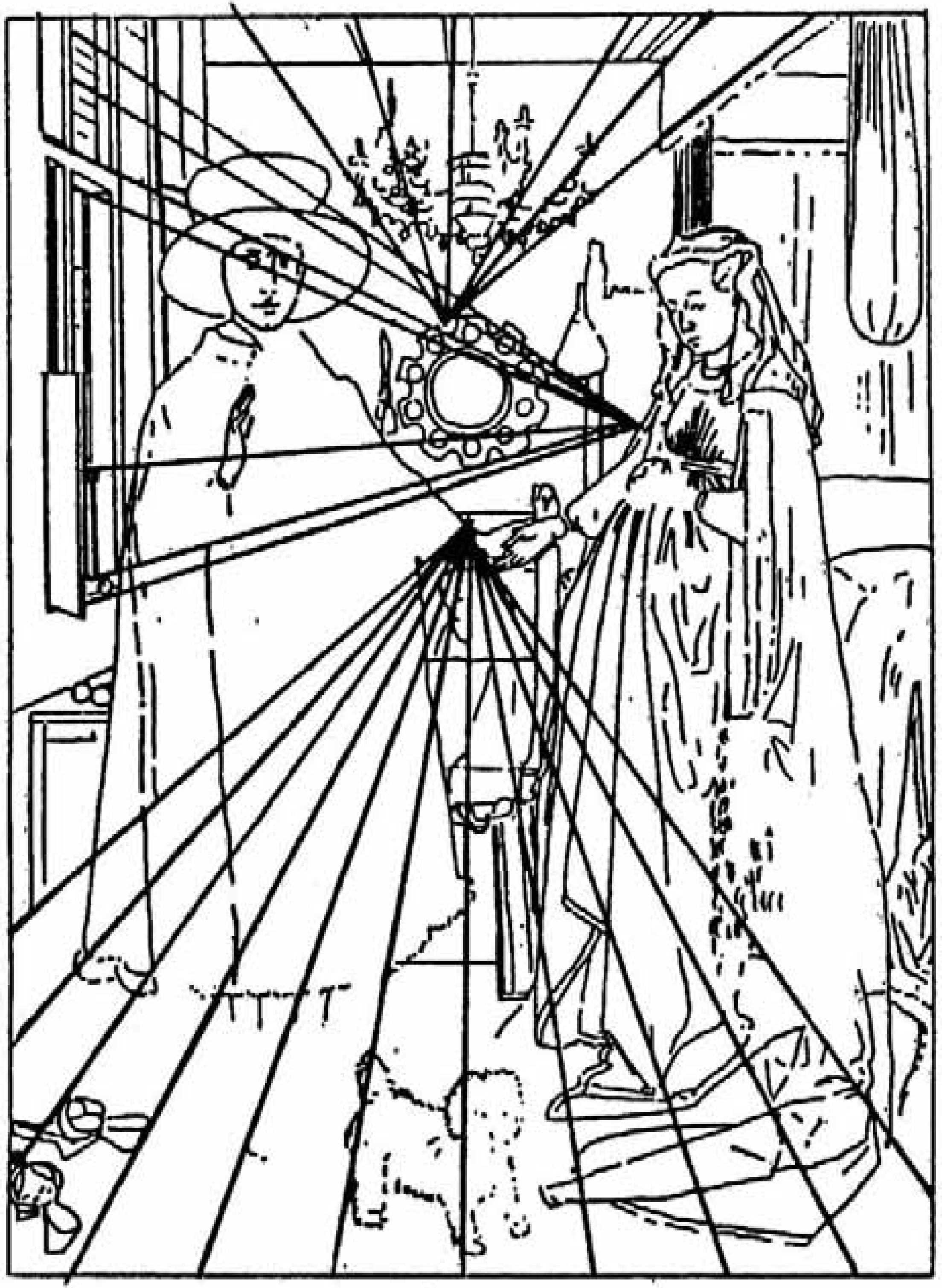
Nedogled u središtu prizora, izokefalija na horizontu (glave na liniji ali noge ne, prva takva slika).



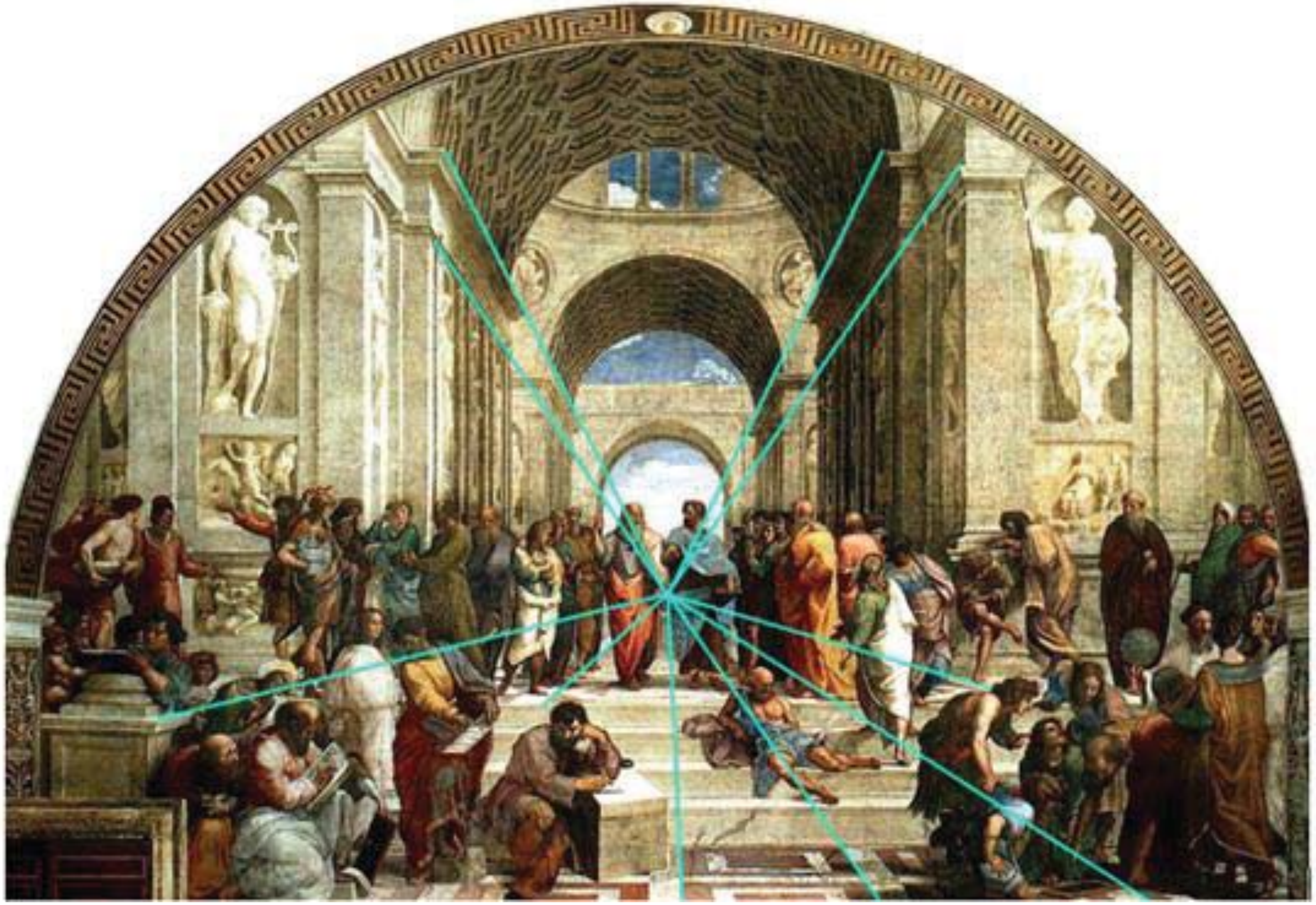
Posljednja večera, Leonardo da Vinci 1490-tih.



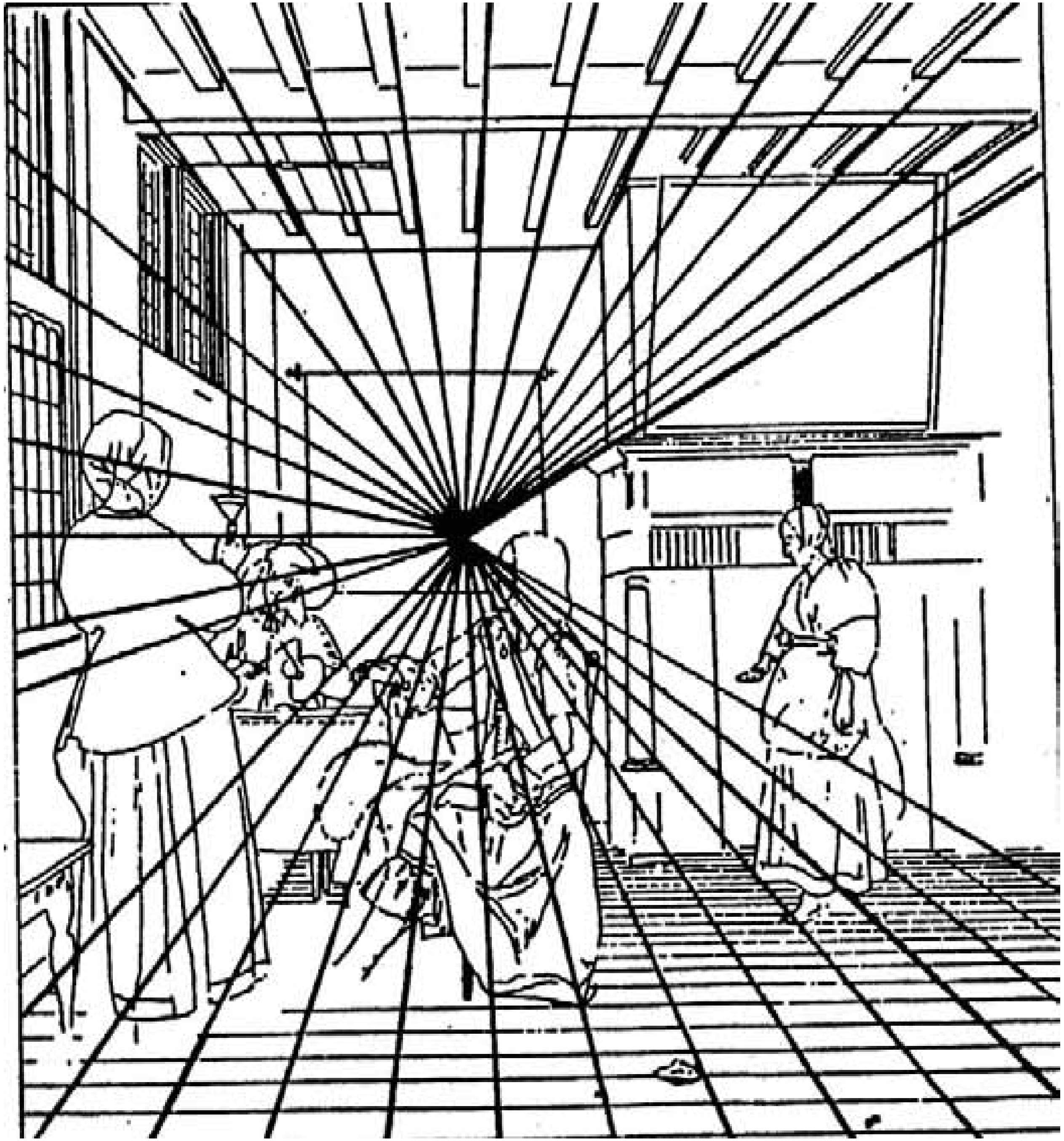
Van Eyck, Vjenčanje Arnolfinijevih 1434.

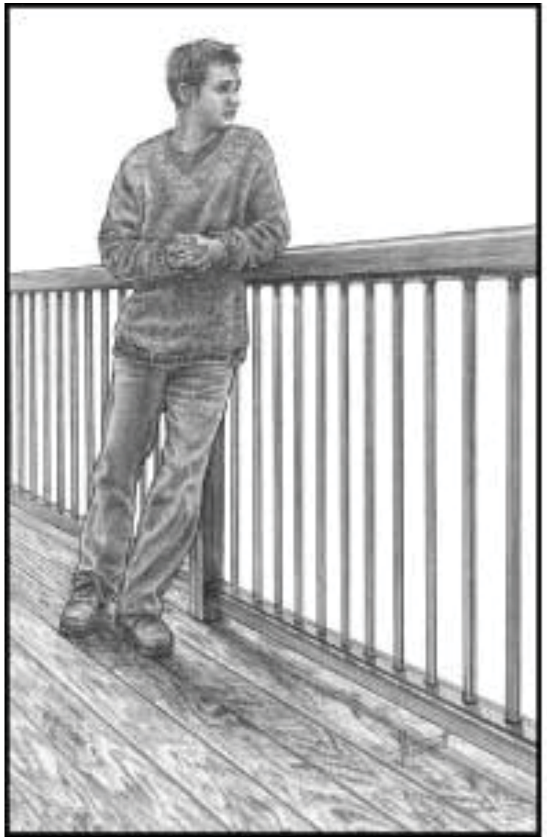


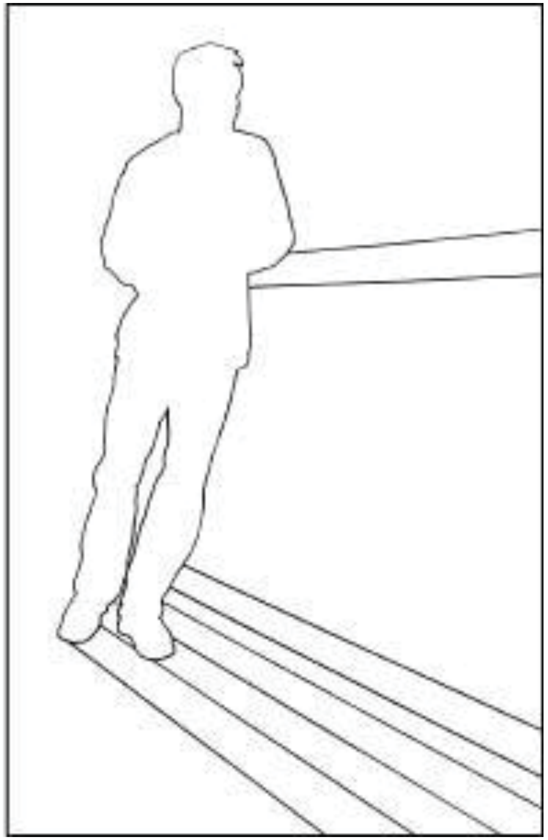
Atenska škola, Raffaello 1510.

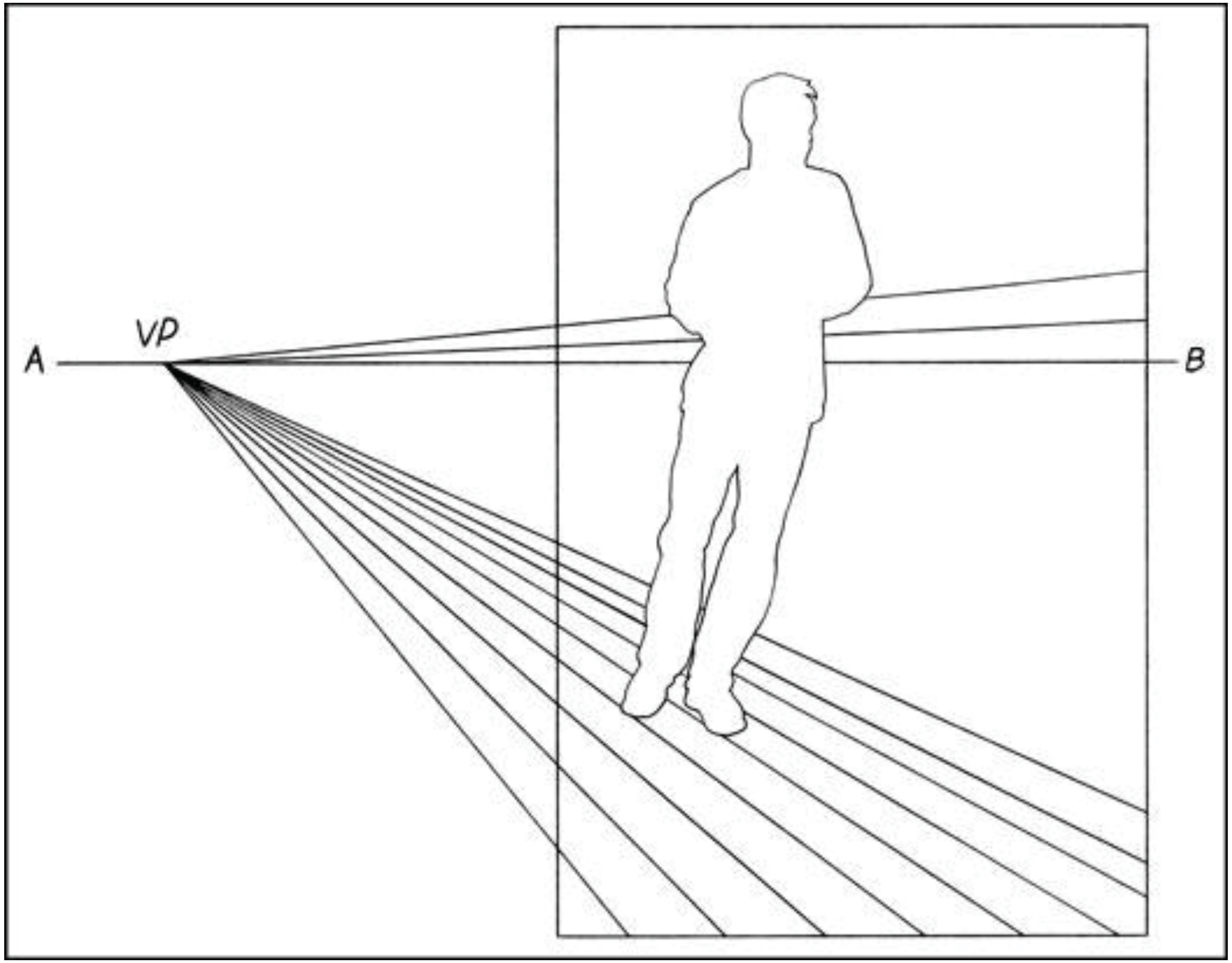


Pieter de Hoogh, 1658.

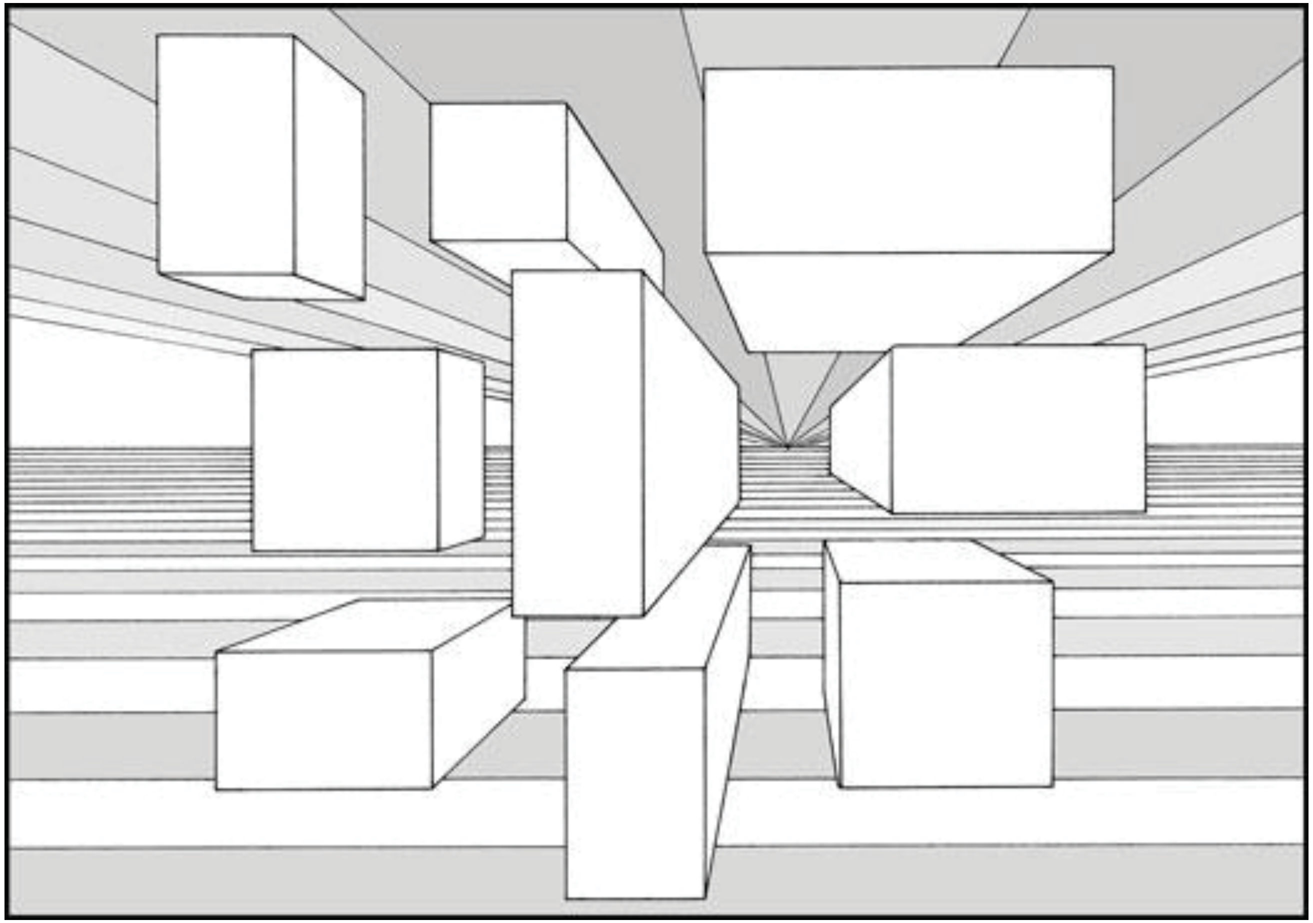


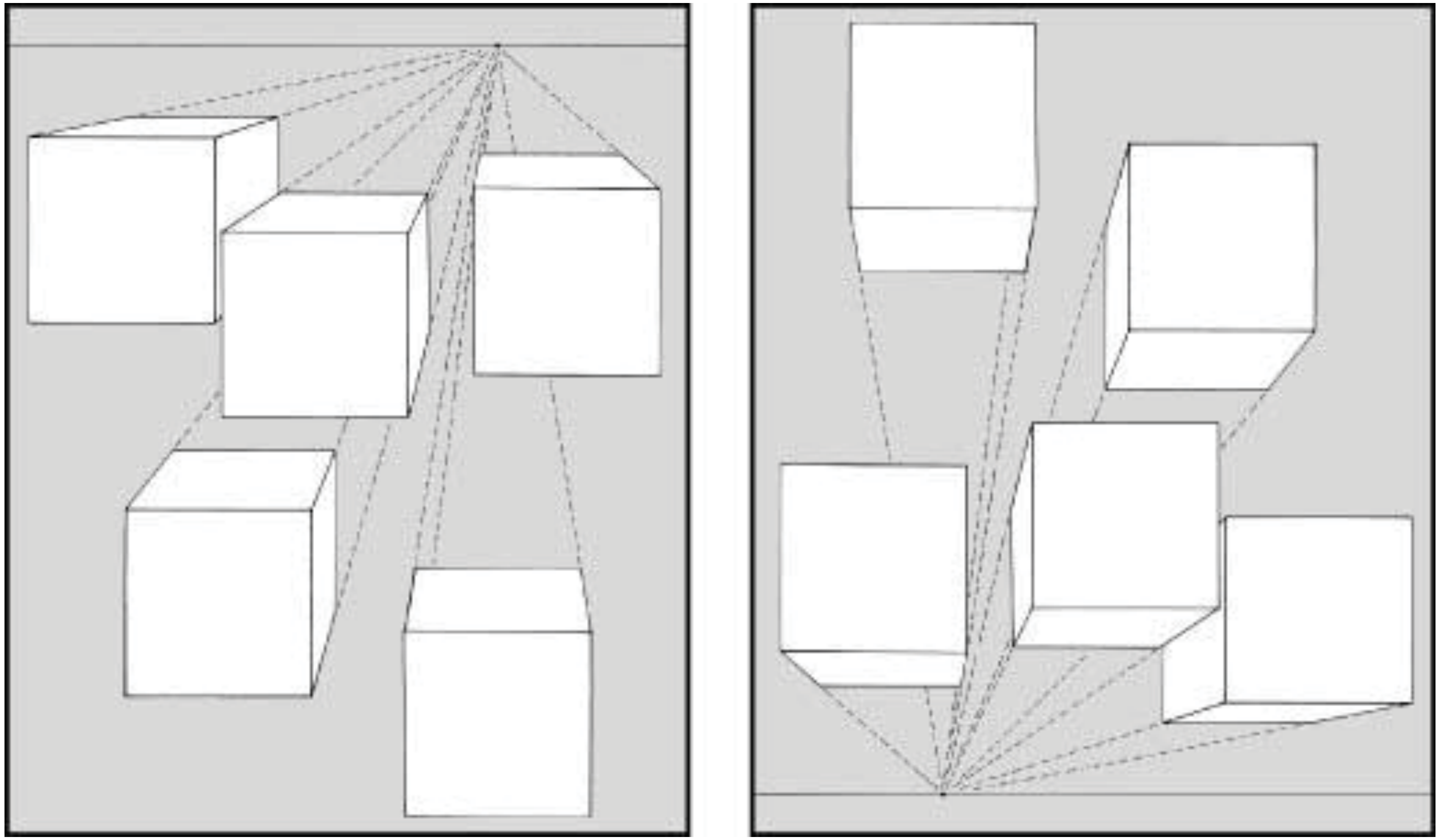




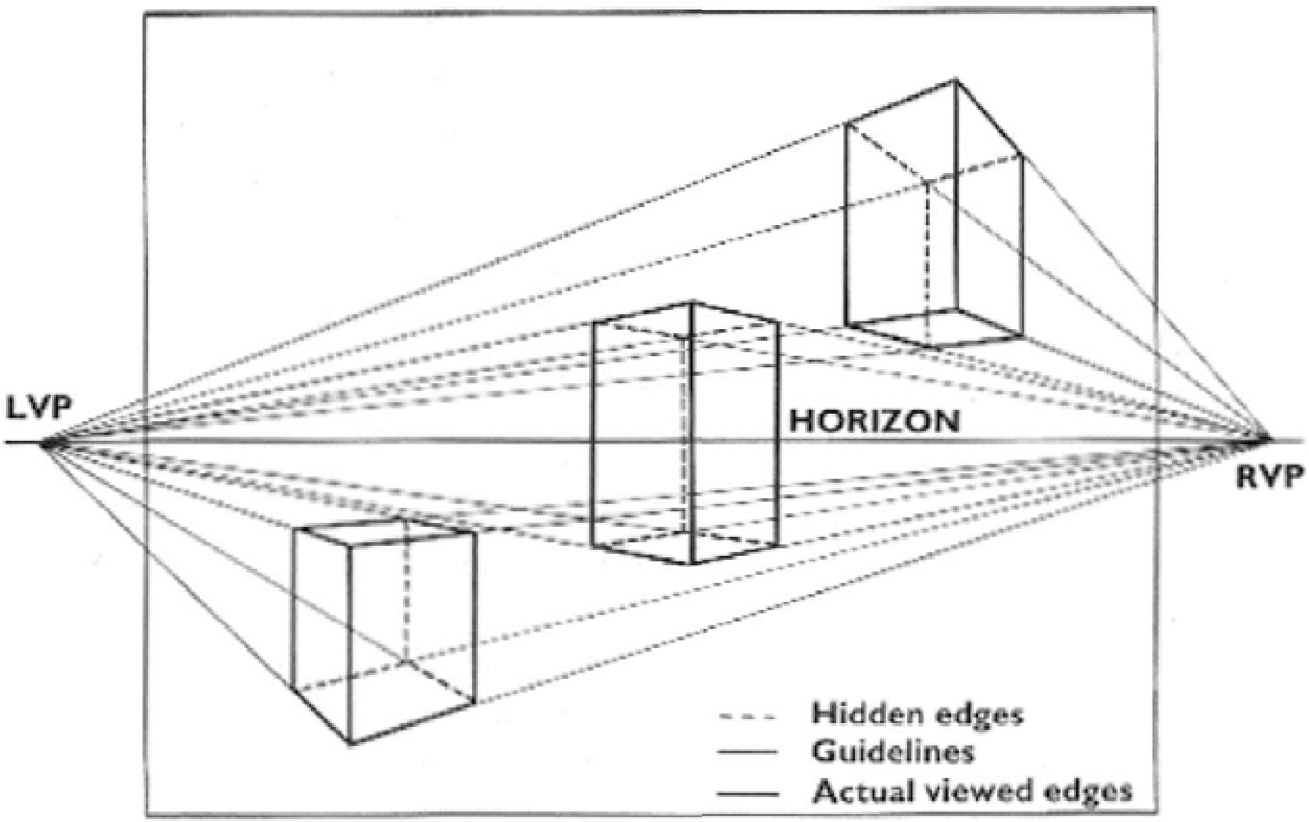


Nedogled izvan platna.



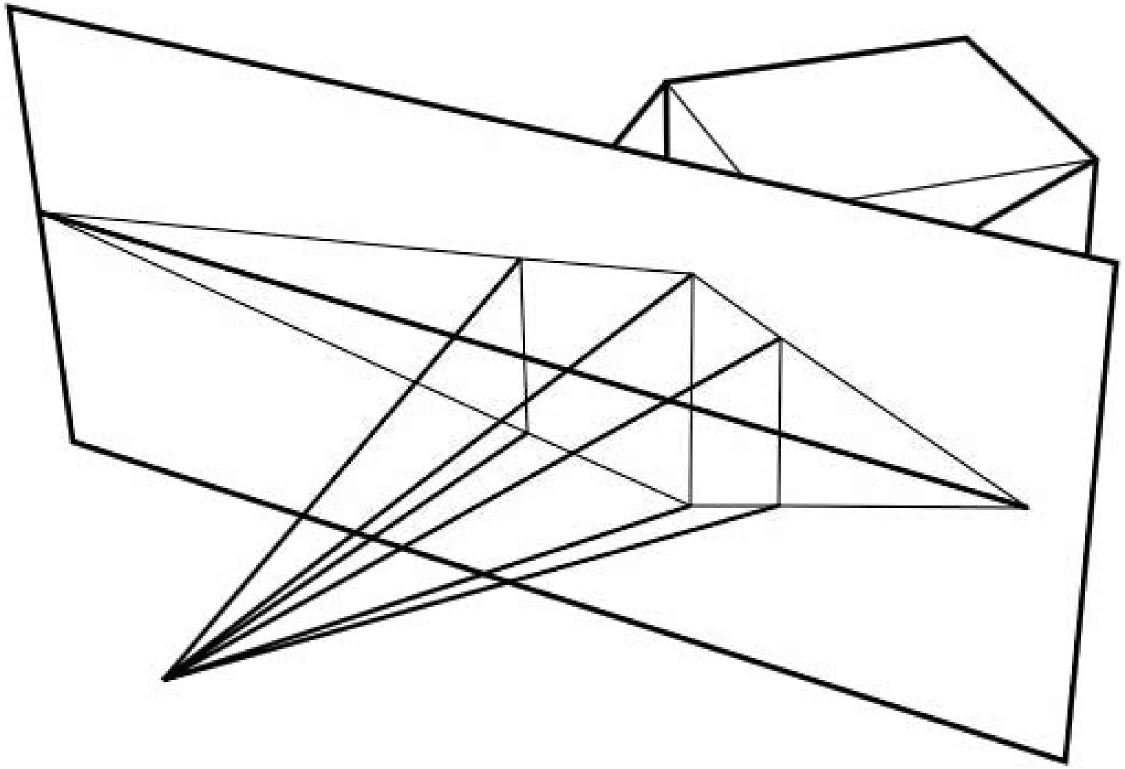


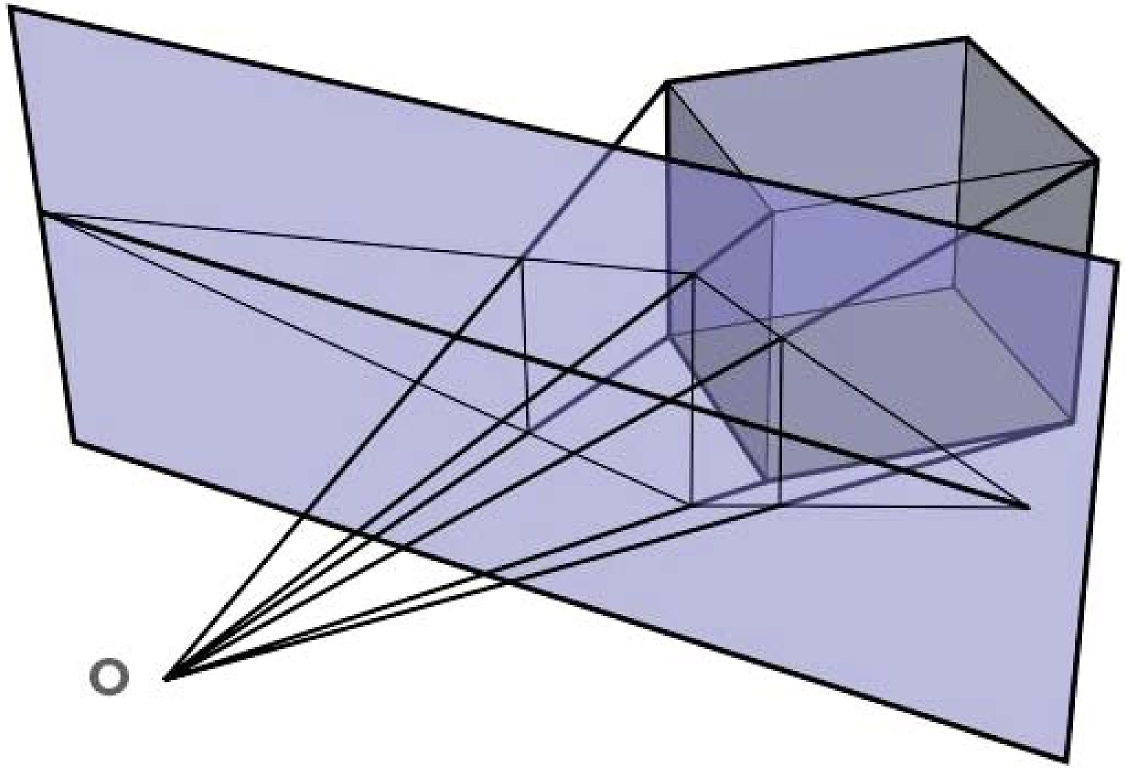
Ptičja i žablja perspektiva.



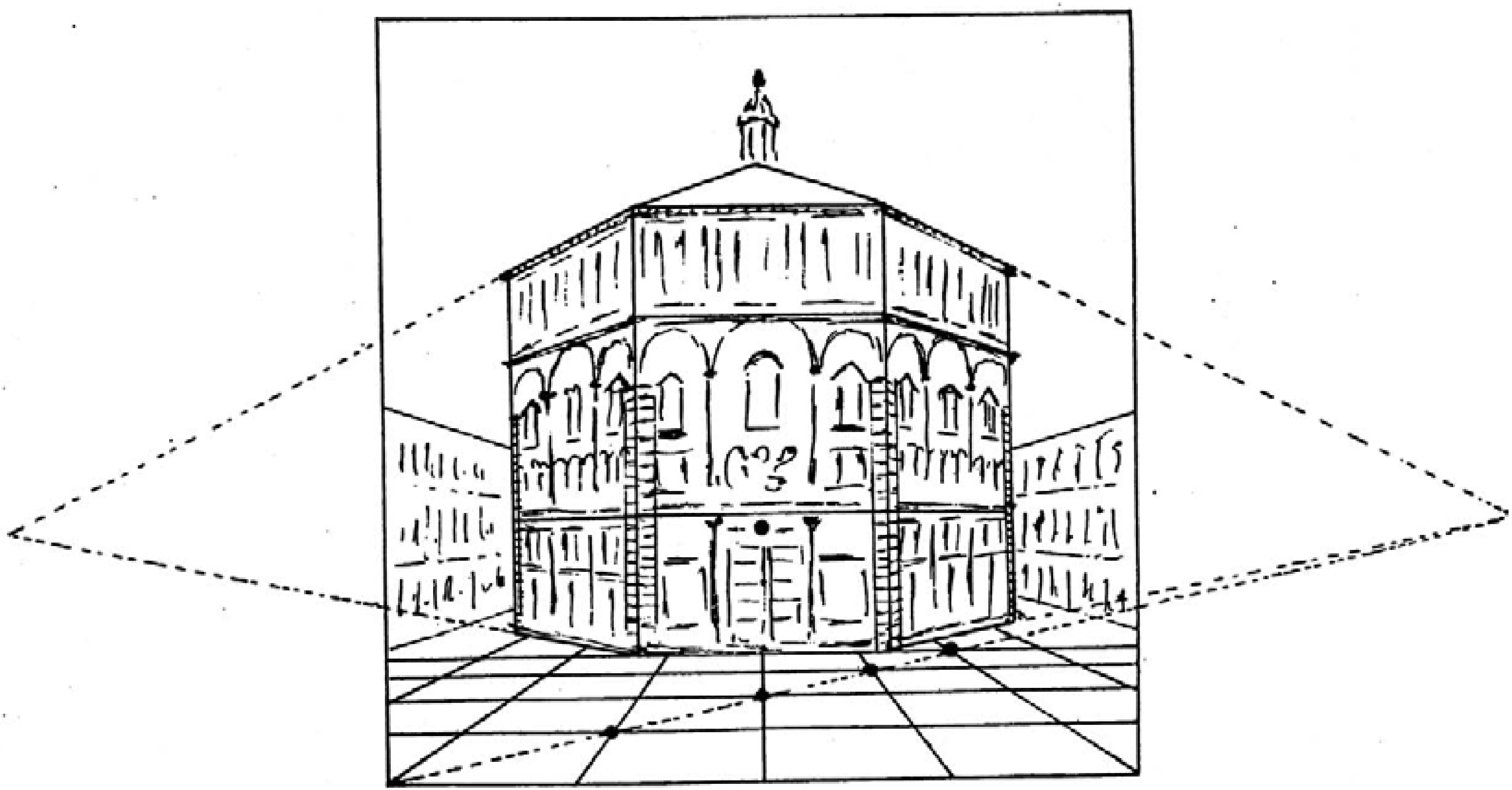
2 istaknuta smjera s tlom neparalelni su s platnom i sijeku se u svoja 2 nedogleda na horizontu.

Tzv. perspektiva 2 točke.




O

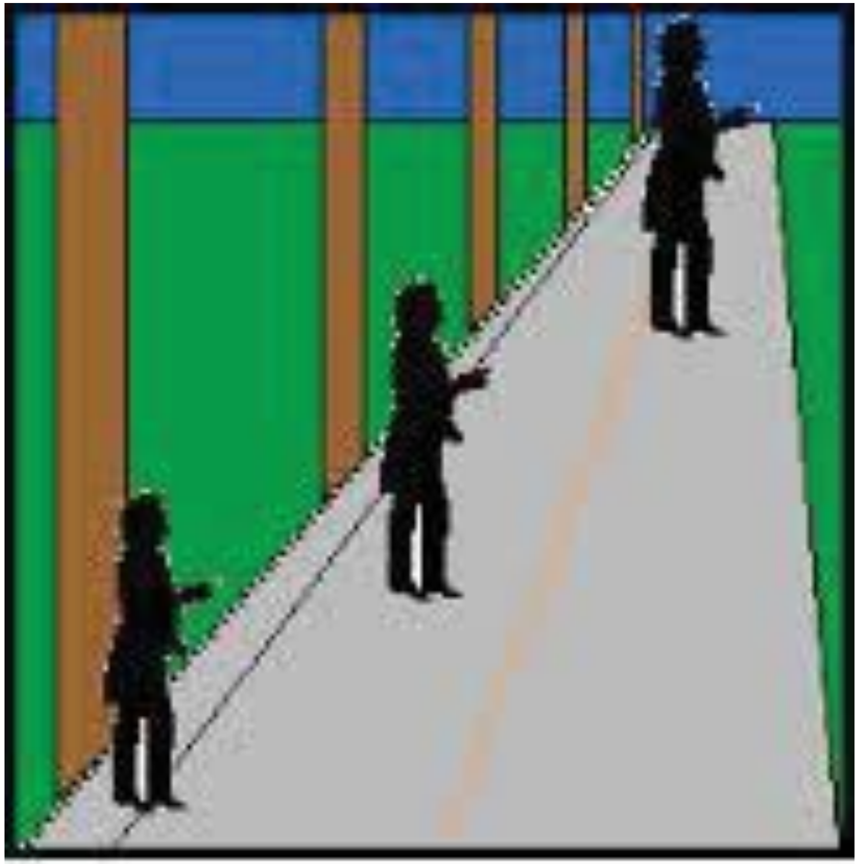
Brunelleschijeva krstionica:



DUŽINE SE „DUBINSKI” SKRAĆUJU!

PO KOJEM PRAVILU?

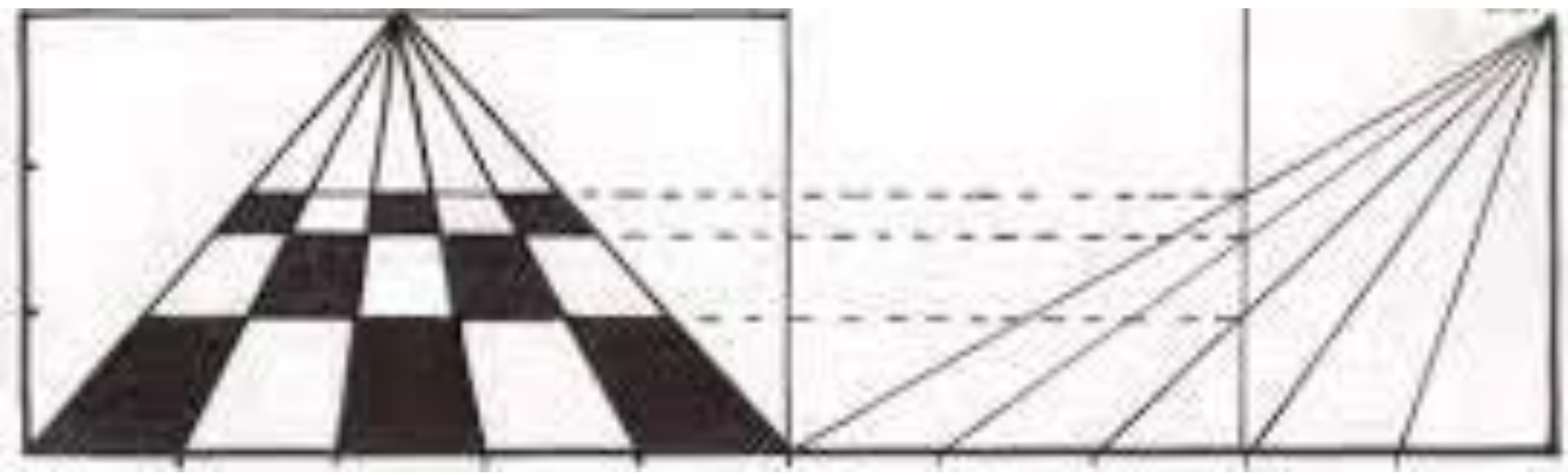
TREBAMO LI RAČUNATI ILI MOŽEMO SAMO CRTATI?



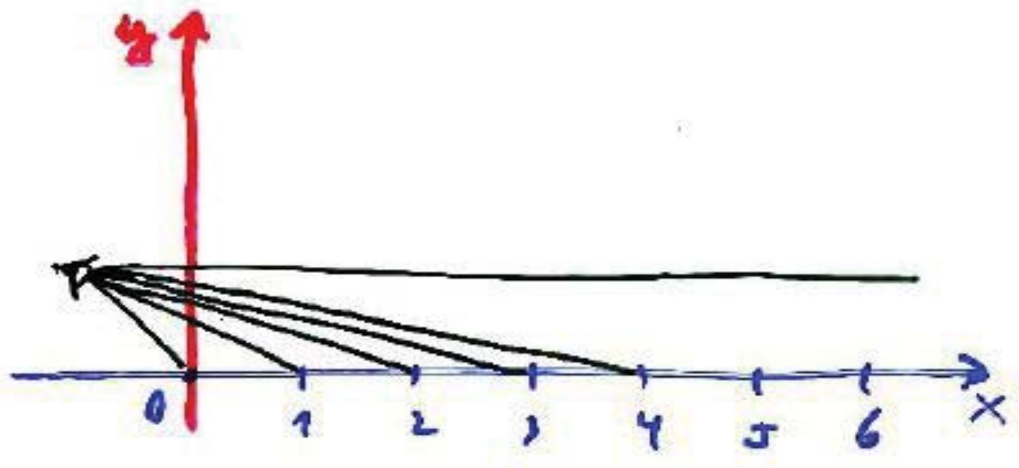
Size Illusion
(after Coren & Ward, 1989)

Konjunkcija Mjeseca i Venere

Skraćenja nisu perspektivna nego klasna.



Naravno, možemo i računati:



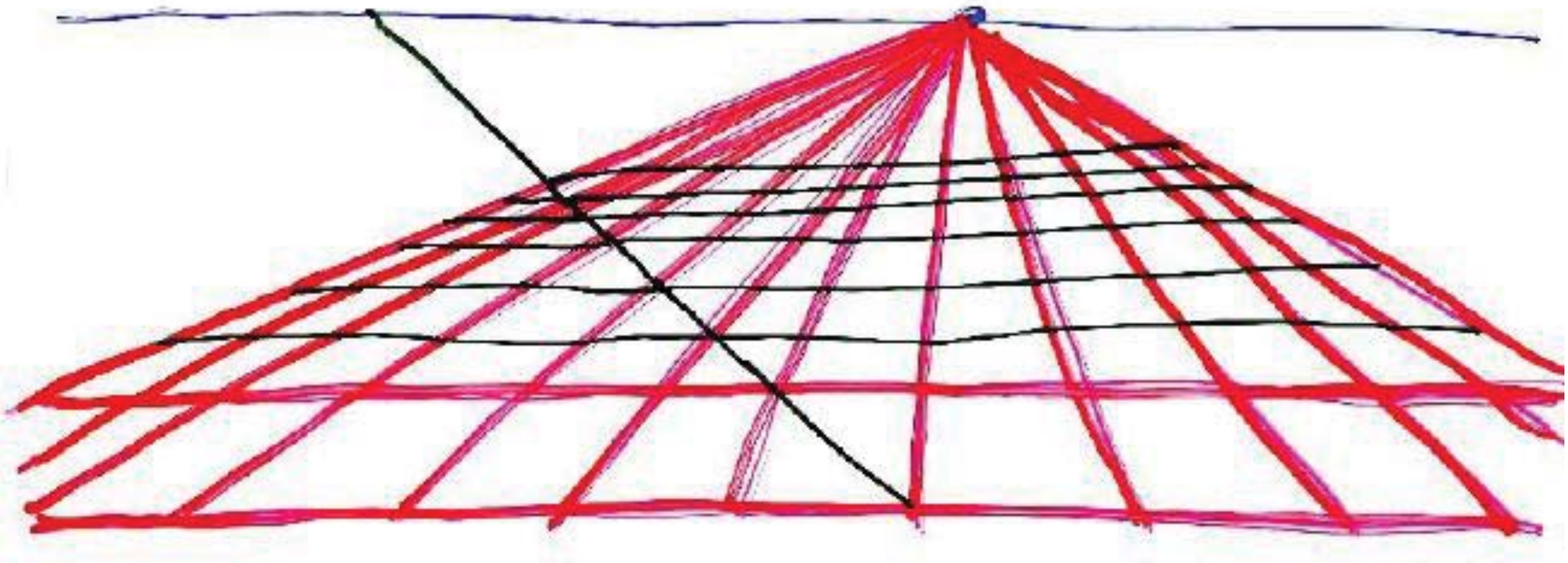
$$y = \frac{x}{x+1} \iff x = \frac{y}{1-y}$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	....	∞
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{9}$	....	1

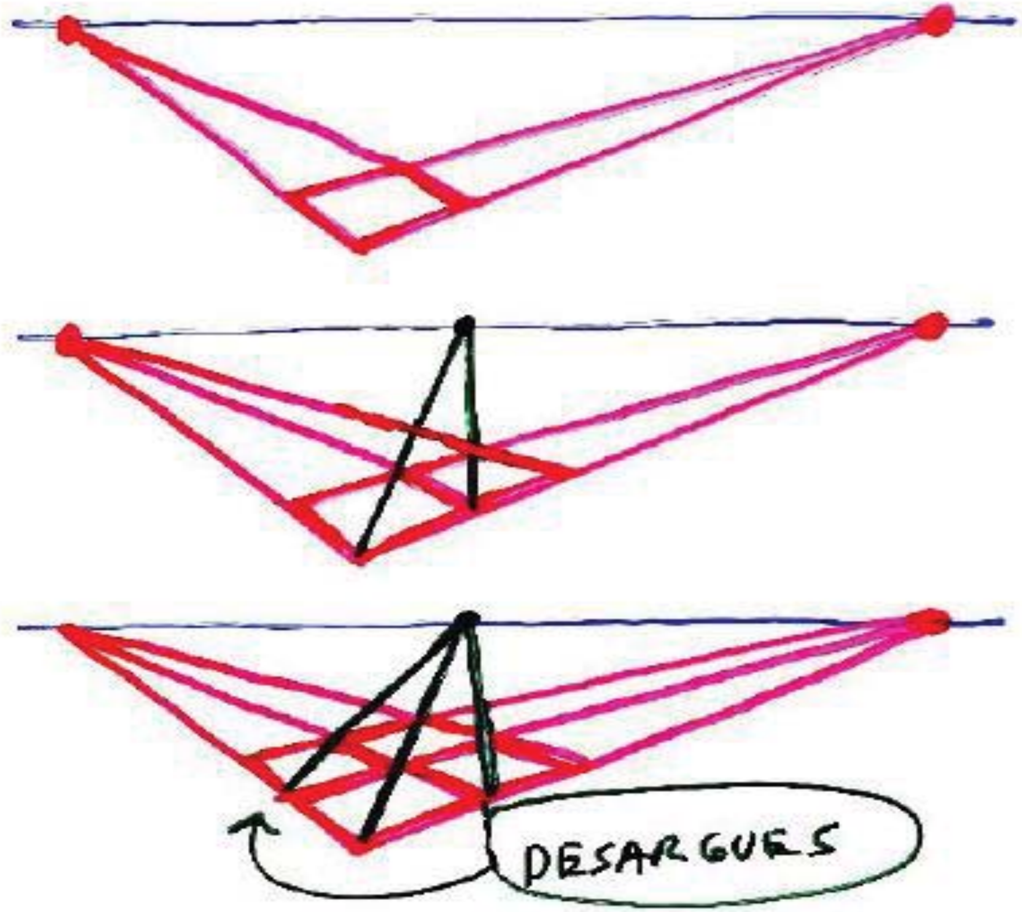
$x' = x + 1$ $\qquad$ $y' = \frac{1}{2-y}$

$\Delta x = 1$ $\qquad$ $\Delta y = \frac{(1-y)^2}{2-y}$

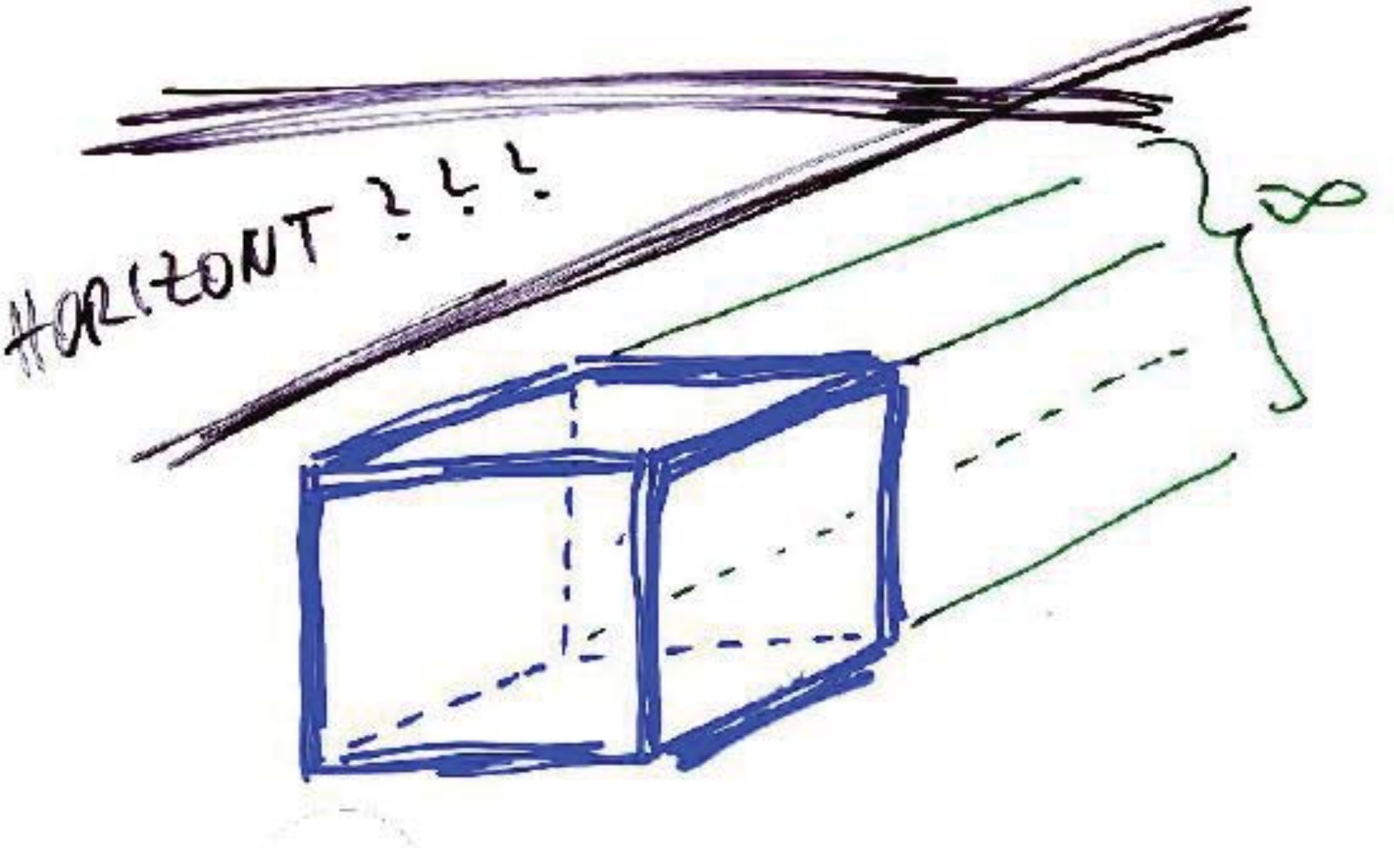
Ili samo crtati pomoću dijagonala, u perspektivi 1 točke:



ili u perspektivi 2 točke:



NEKOREKTNA PERSPEKTIVA
(S BESKONAČNO DALEKIM OKOM)
KOSA PROJEKCIJA.

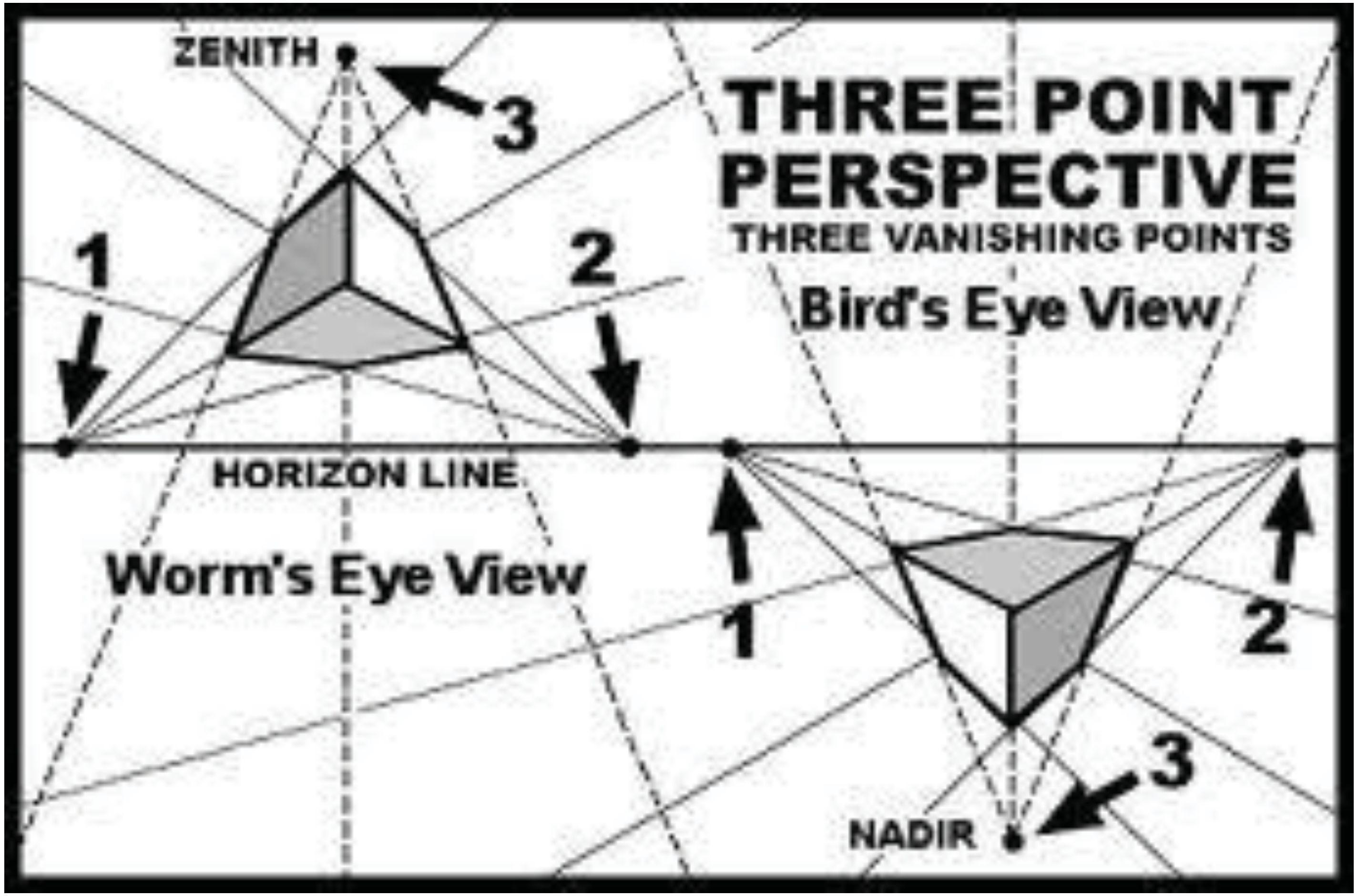


OVAKO TO IZGLEDA NA PRAVOJ SLICI:

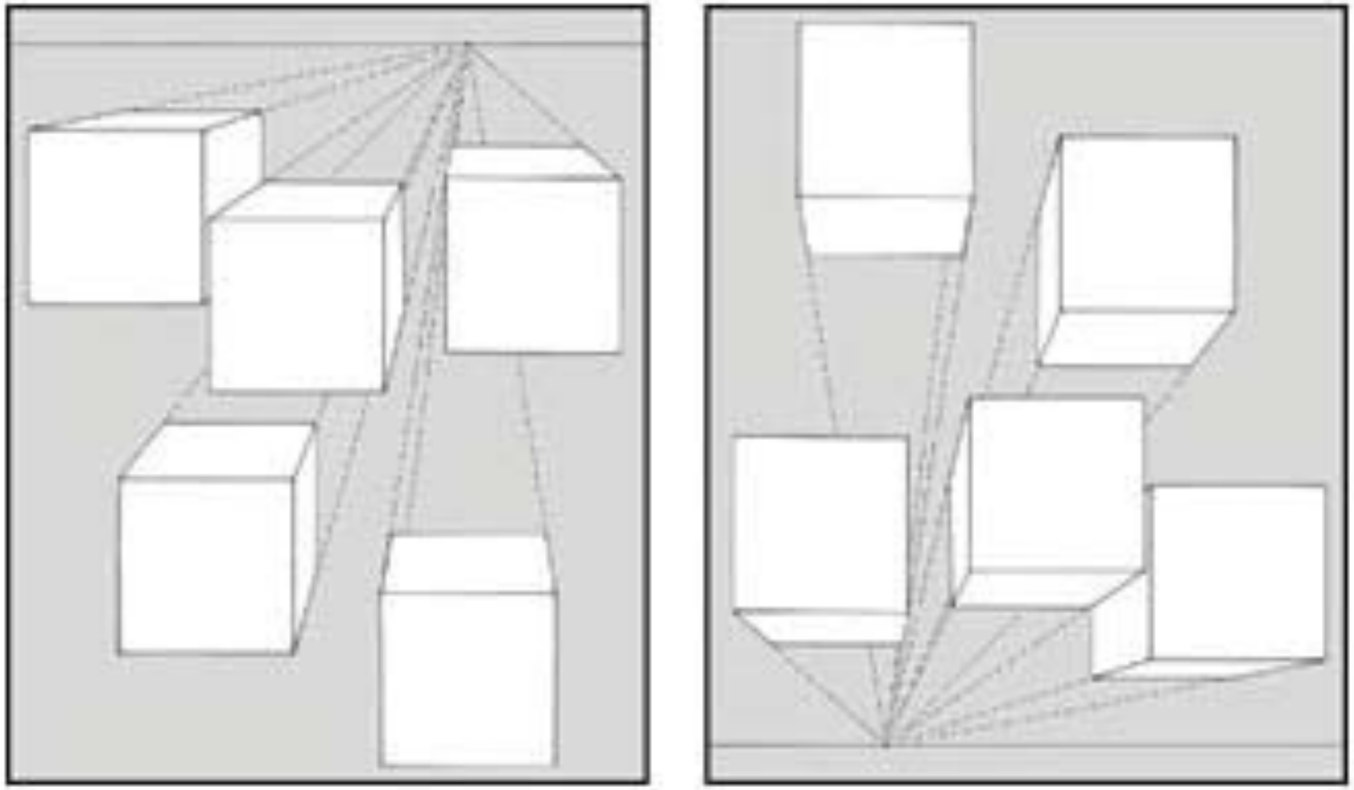
Ako smo blizu objekta (kvadra) koji slikamo, platno moramo nagnuti prema nebu ili zemlji, ne bismo li ga „uhvatili” u okvir platna.

To znači da vertikale objekta više nisu paralelne s platnom, pa vidna vertikala siječe platno u nedogledu tih vertikalnih pravaca.

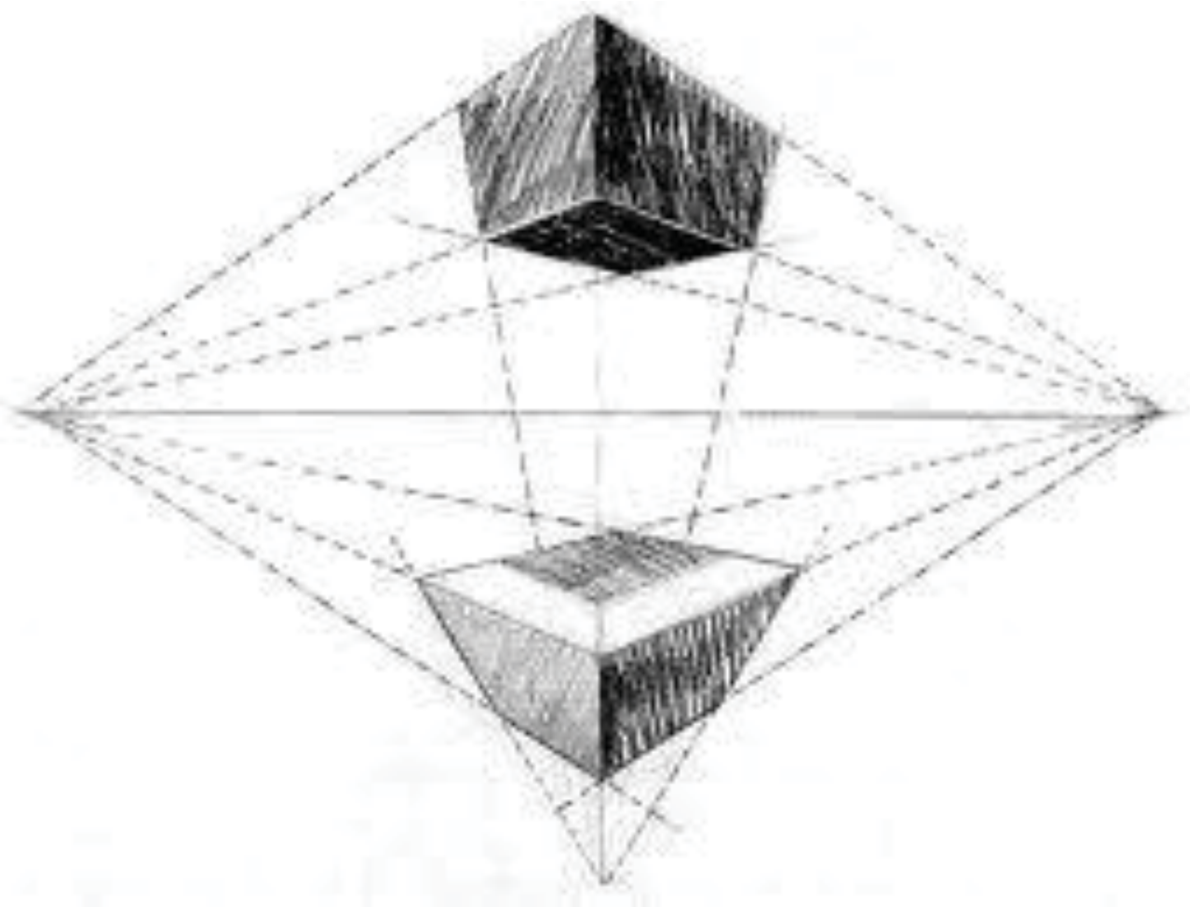
To je 3. točka perspektive, iznad horizonta u „žabljem” pogledu ili ispod u „ptičjem” (??).



ZENITH
3
THREE POINT PERSPECTIVE
THREE VANISHING POINTS
Bird's Eye View
1
2
HORIZON LINE
Worm's Eye View
1
2
3
NADIR



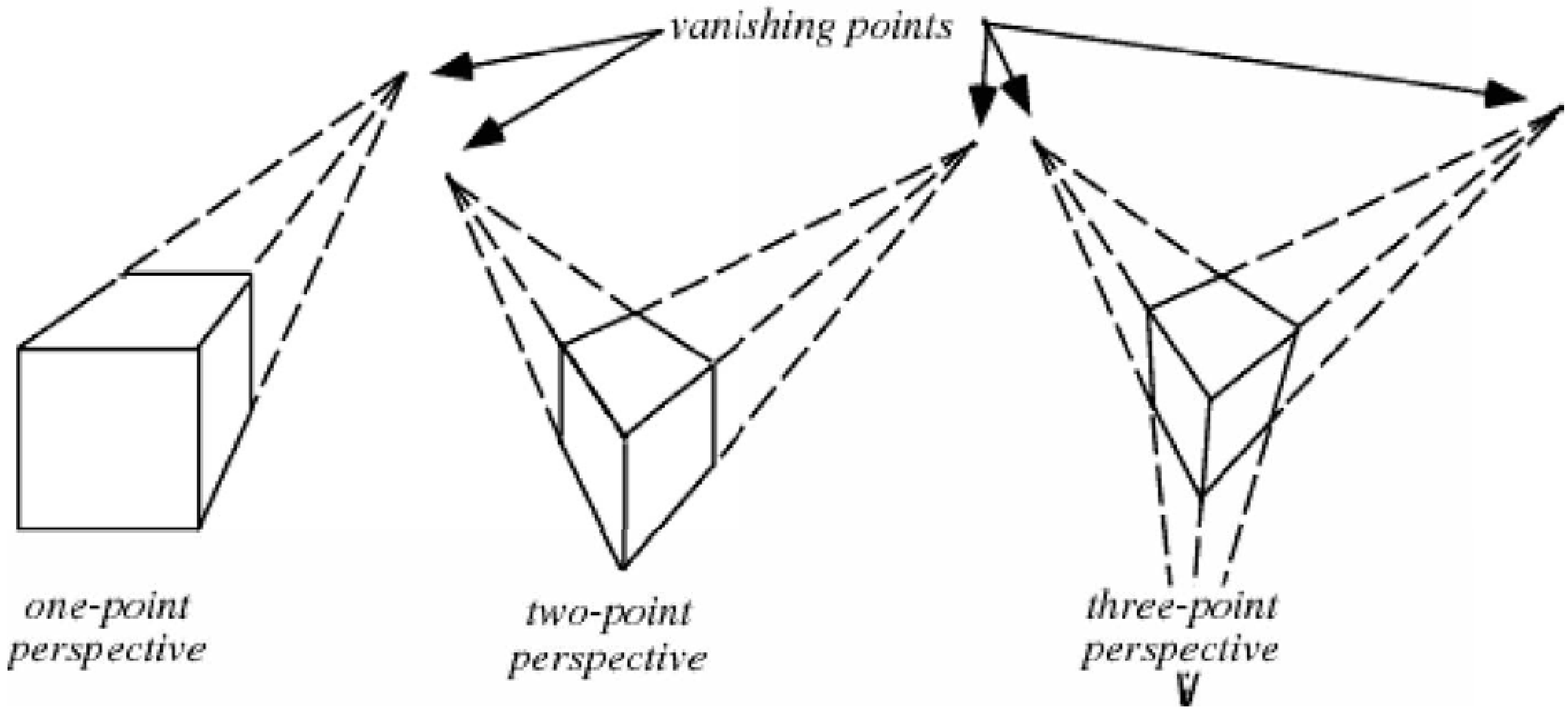
Ptičja i žablja perspektiva.



Žablji-ptičji pogled znači da je objekt slikanja iznad-ispod horizonta.

Nedogled vertikalnih pravaca ispod-iznad horizonta znači platno nagnuto prema zemlji-nebu.

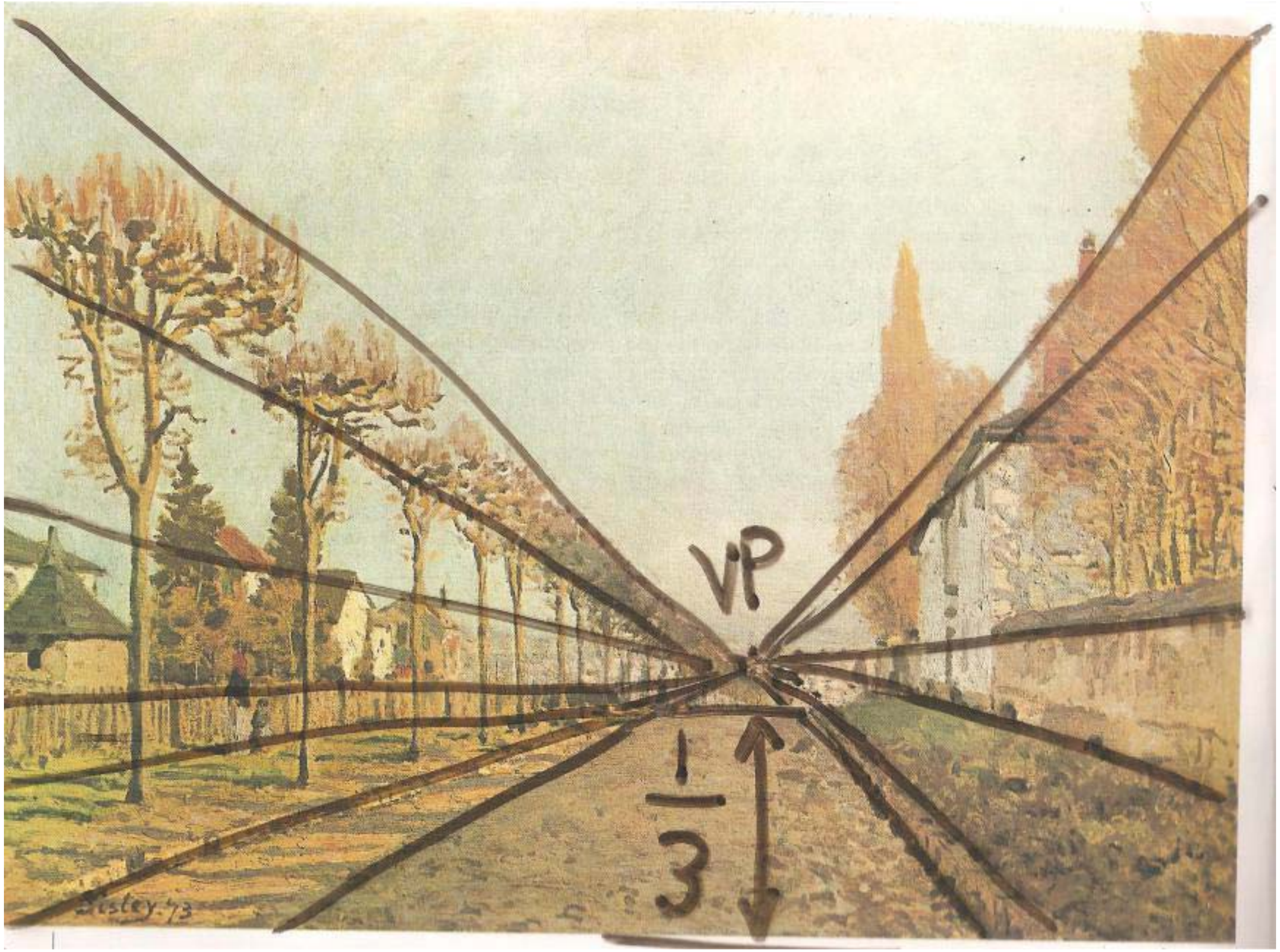
Uz 3 istaknuta smjera imamo „tri perspektive”:

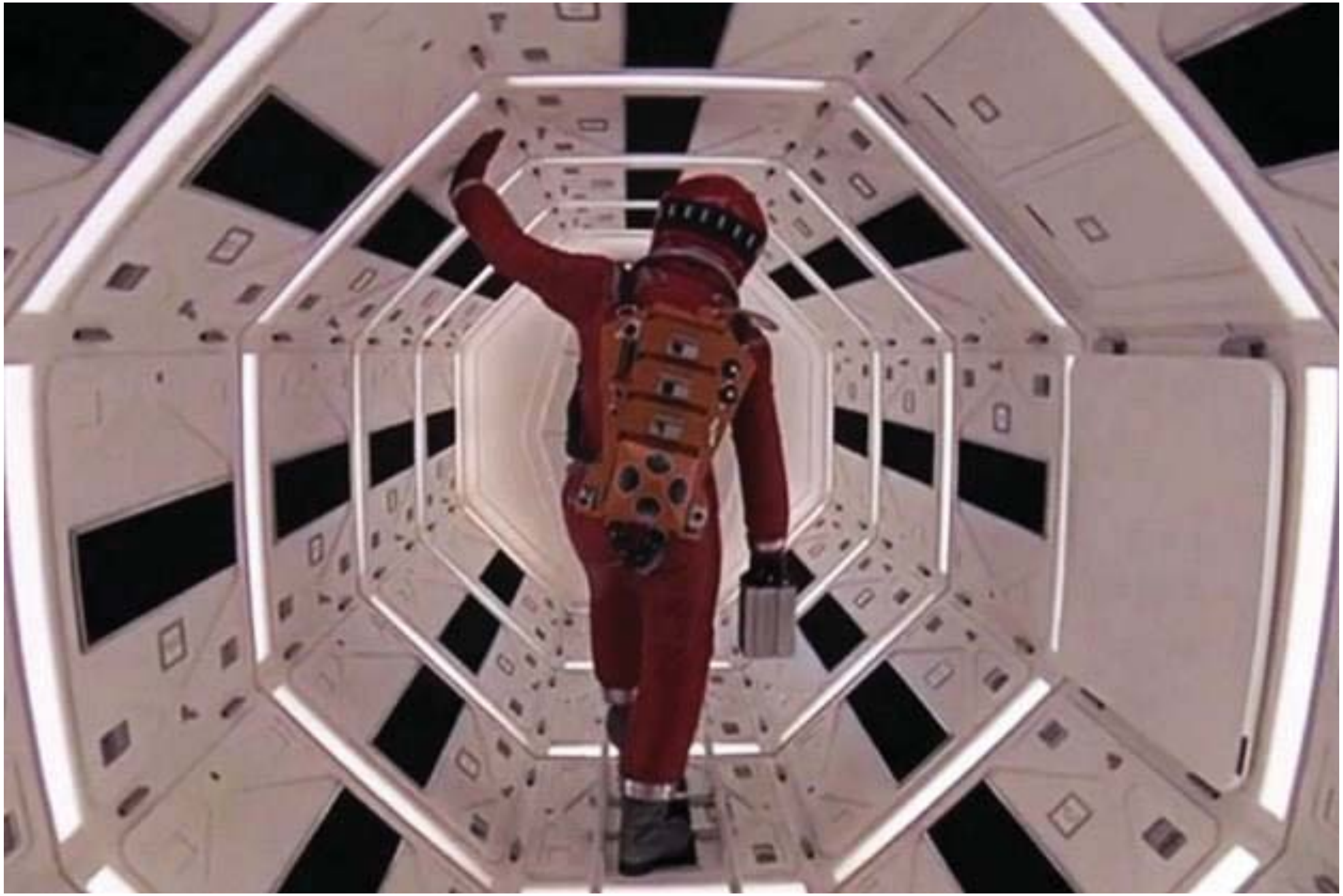


Ali možemo imati 0,1,2,3,4,... istaknutih smjerova!

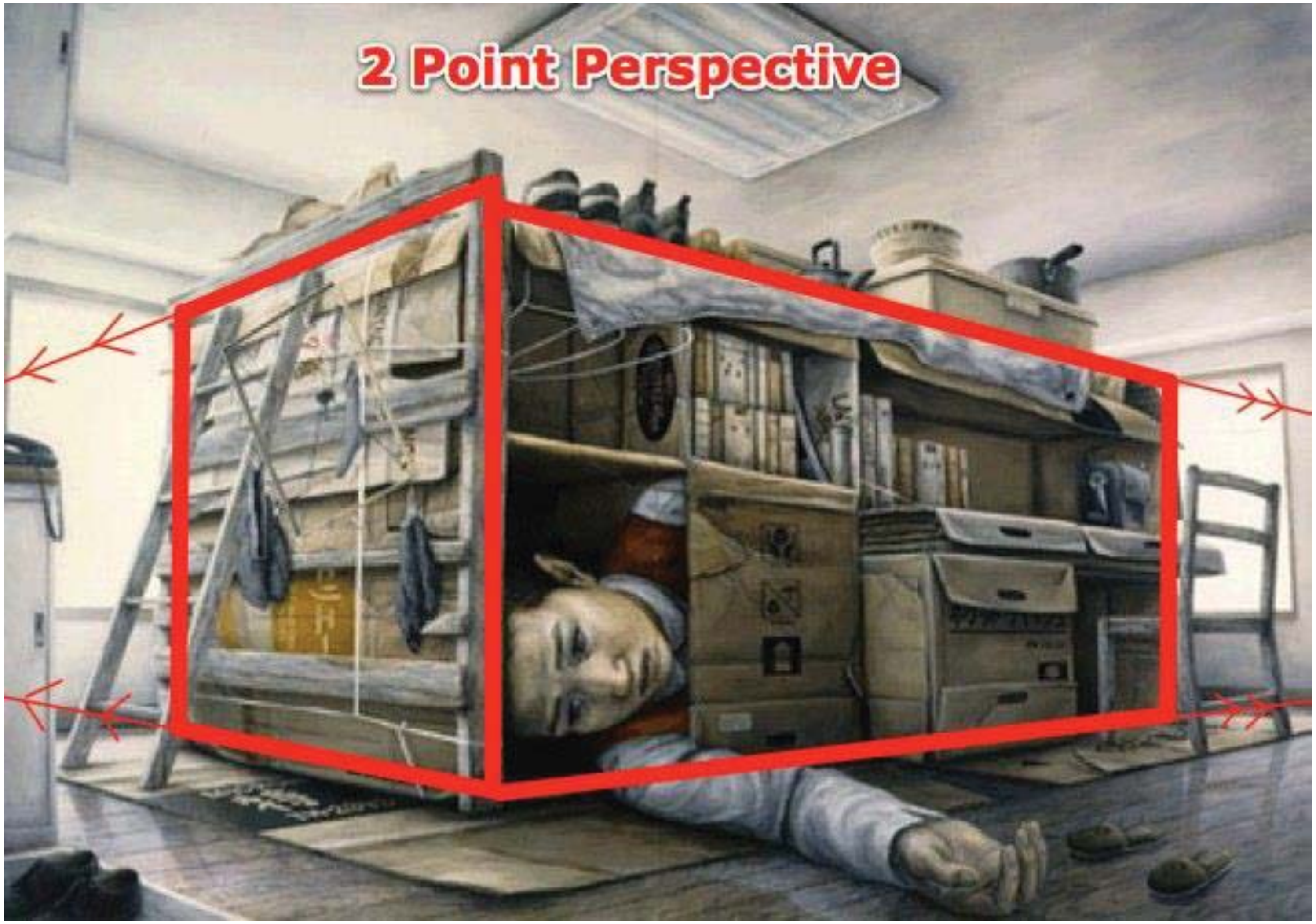
0 istaknutih smjerova:

1 istaknuti smjer neparalelan s platnom:





2 istaknuta smjera neparalelna s platnom:




1738

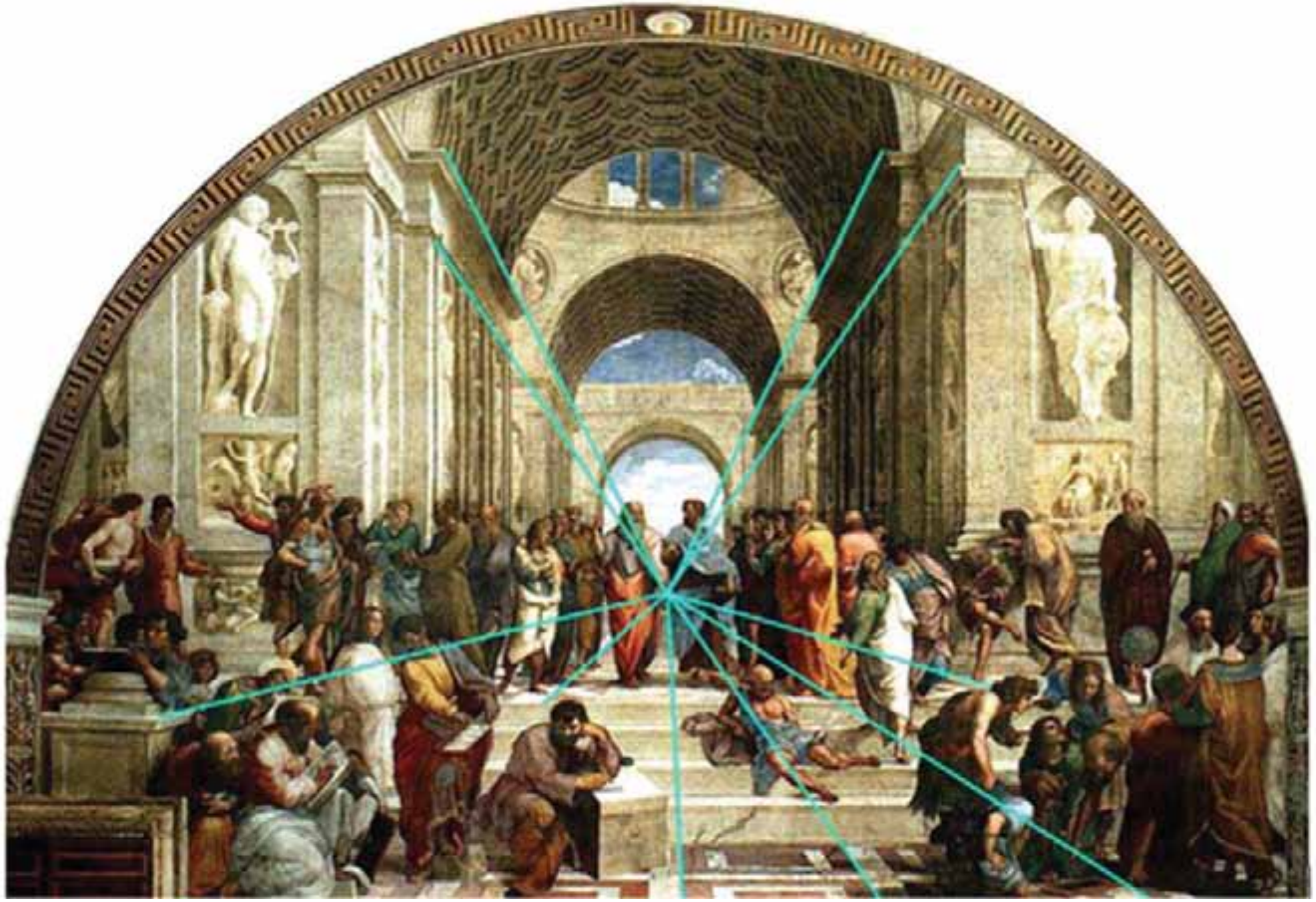
1 od 2 nehorizontalan, platno nagnuto prema nebu:

1 od 2 nehorizontalan i lažan (platno nije nagnuto prema zemlji):

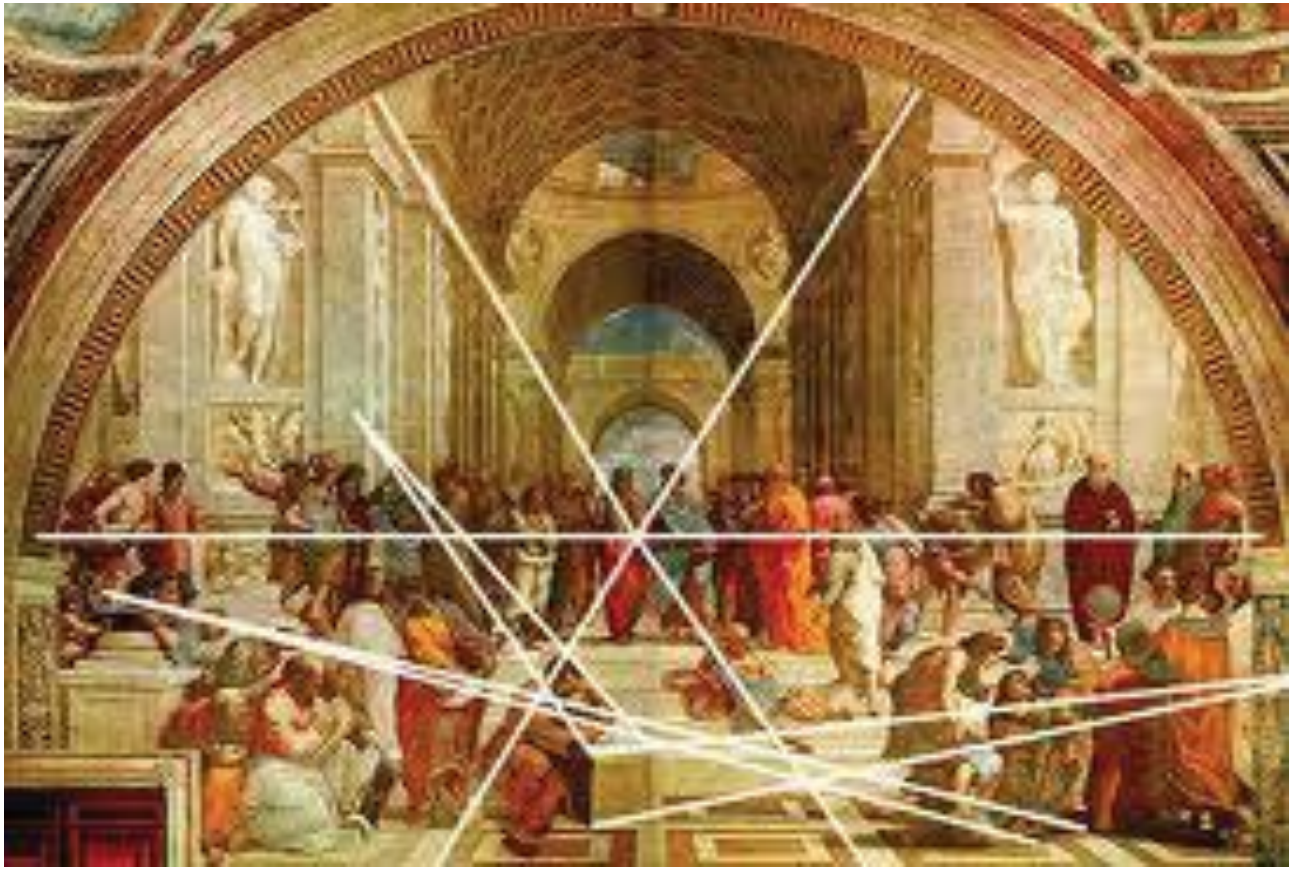
3 istaknuta smjera neparalelna s platnom, platno nagnuto prema zemlji:

3 istaknuta smjera neparalelna s platnom, platno nagnuto prema nebu:

1 istaknuti smjer neparalelan s platnom, platno nagnuto prema nebu:



Atenska škola, Raffaello 1510.



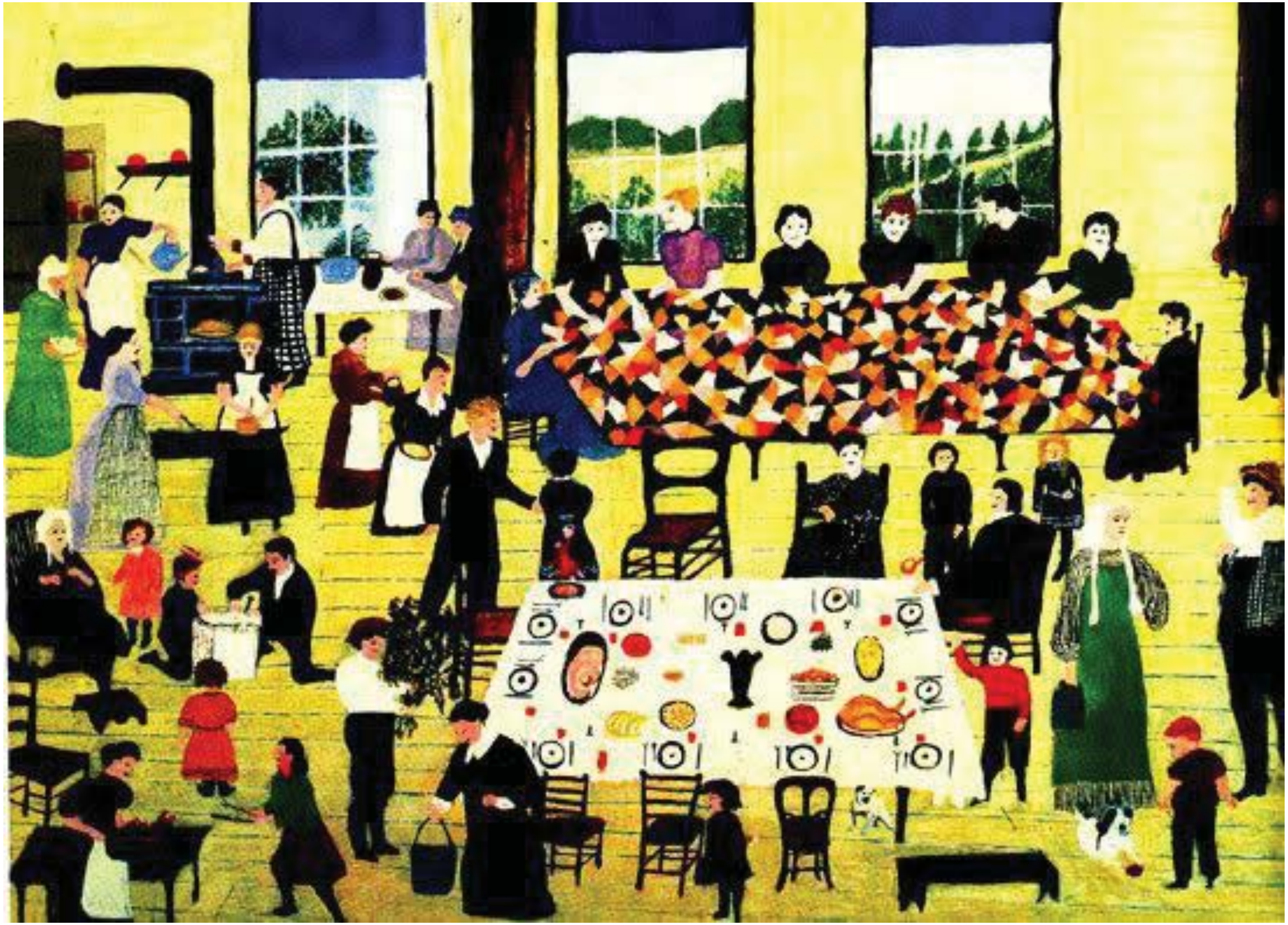
5 istaknutih smjerova?

Otvorena knjiga!

U SLIKARSTVU NALAZIMO POGREŠNE I

NAMJERNO “POGREŠNE” PERSPEKTIVE.

ILI ZANEMARIVANJE PERSPEKTIVE!

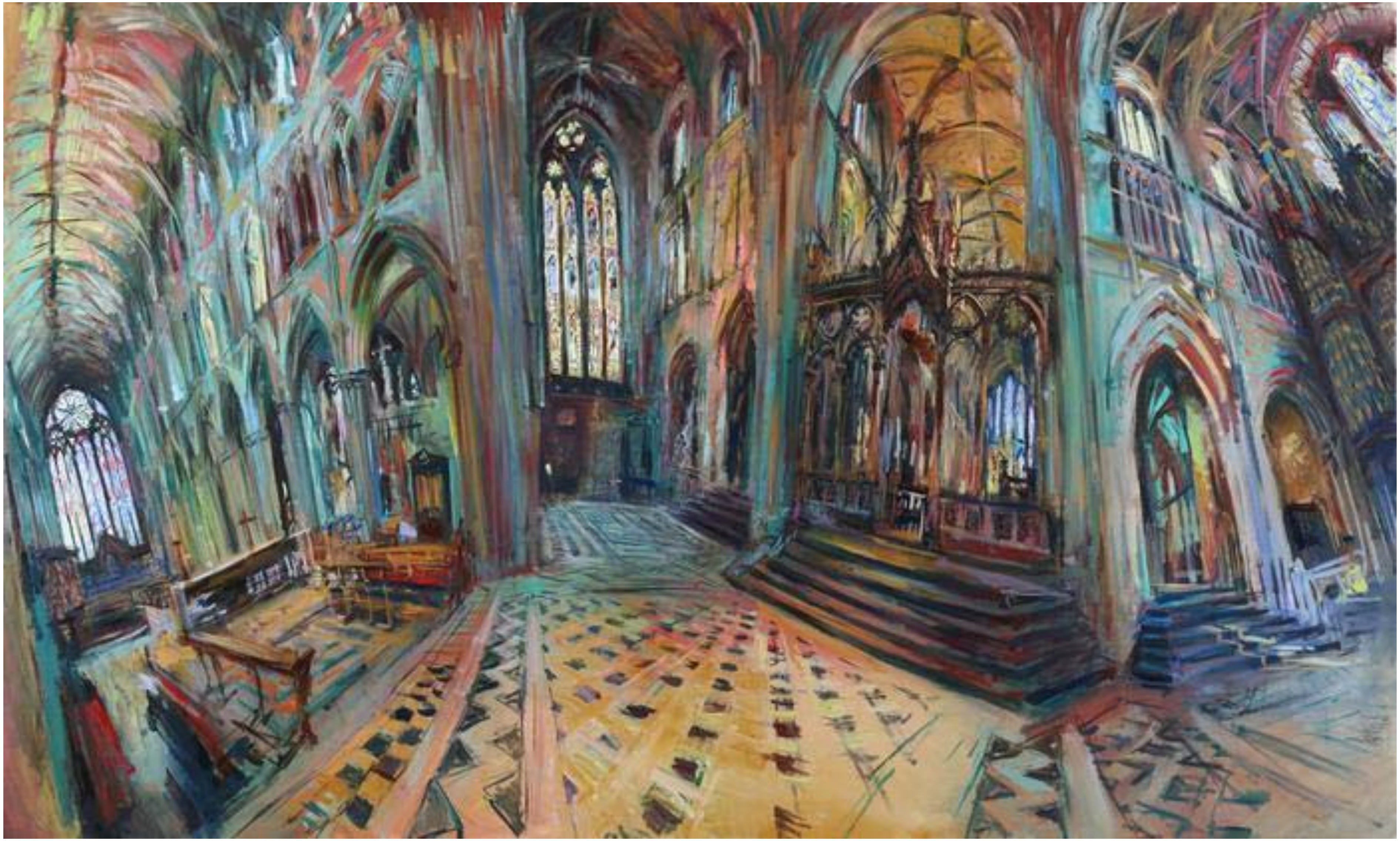


Što je pogrešno?

Ima li Hogarth problema s perspektivom (18. st.)?

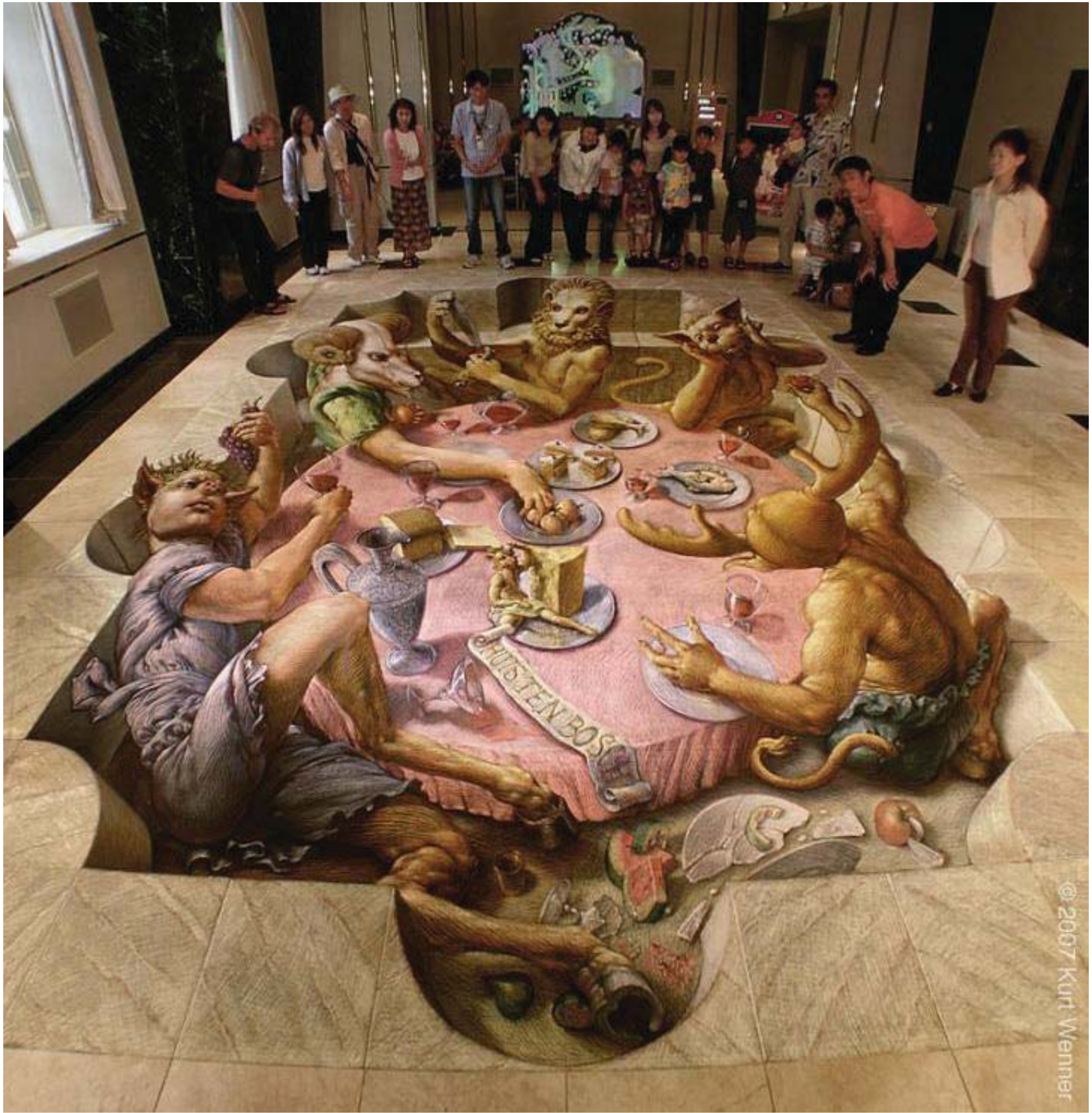
Nema!

Van Gogh, Bolnička soba.



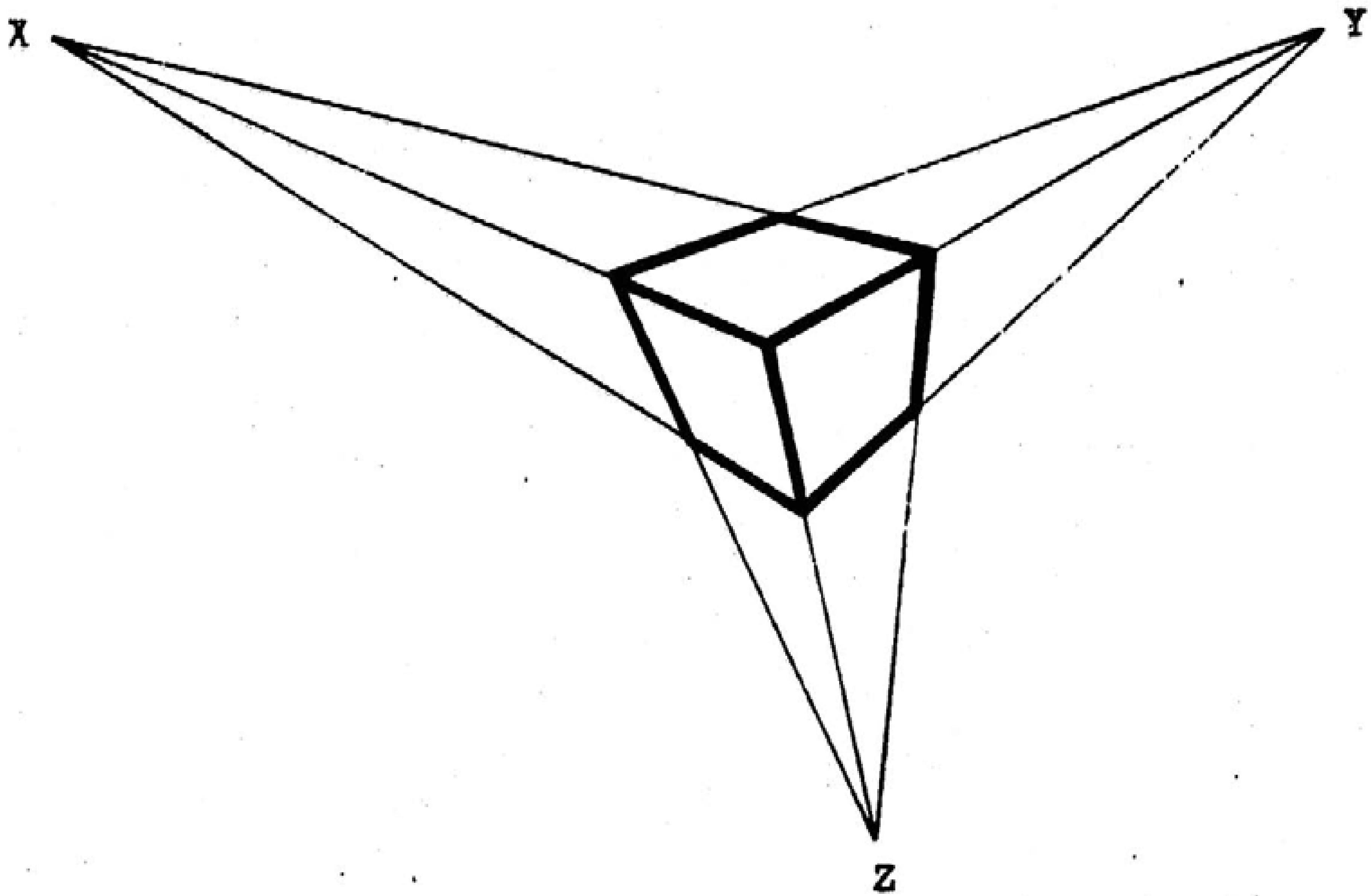
„Kupola” duž lađe Sv. Ignacija u Rimu (A. Pozzo)

Jezuiti u Beću, 1703.


© 2007 Kurt Wenner

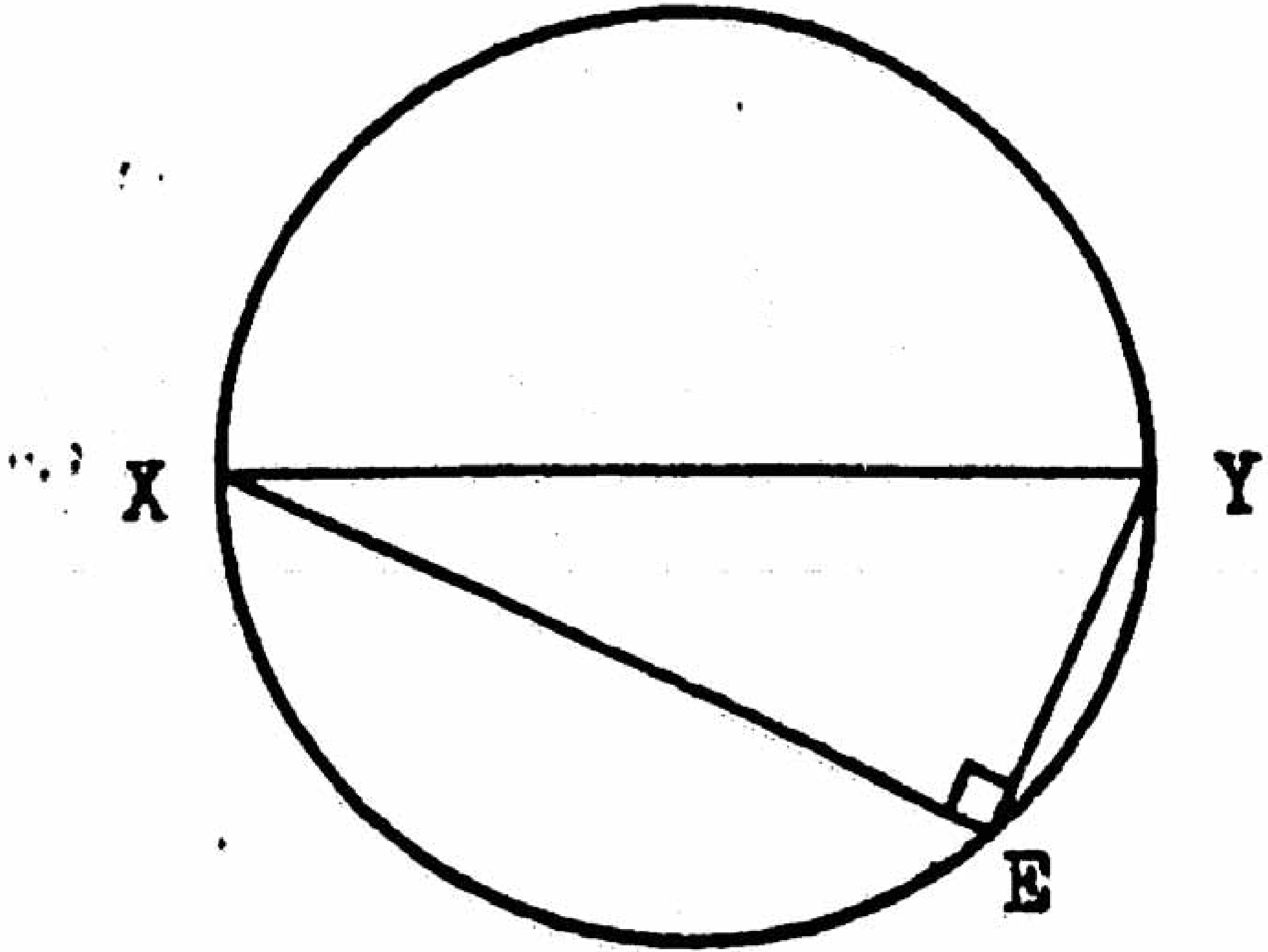

Filer 2008

Na kraju još malo matematike!



Kocka se ovako vidi samo iz jedne točke promatranja.
EX, EY i EZ su okomice koje „izlaze” iz oka E.
(Trokut XYZ mora biti šiljatokutan.)

Ako so EX i EY okomiti onda E leži na sferi s promjerom XY.

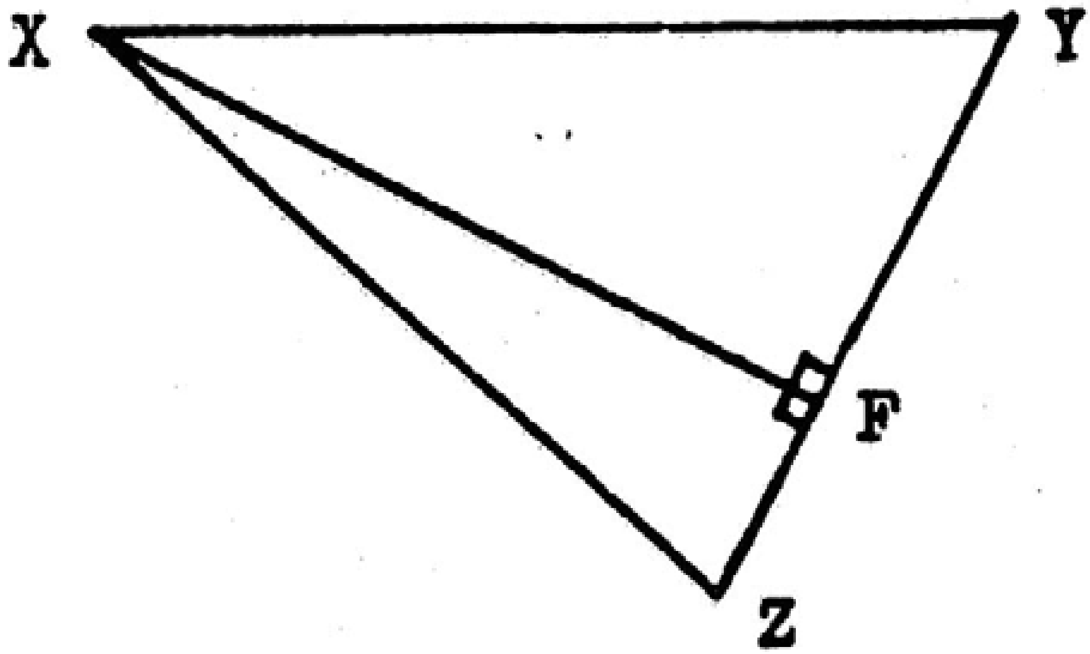


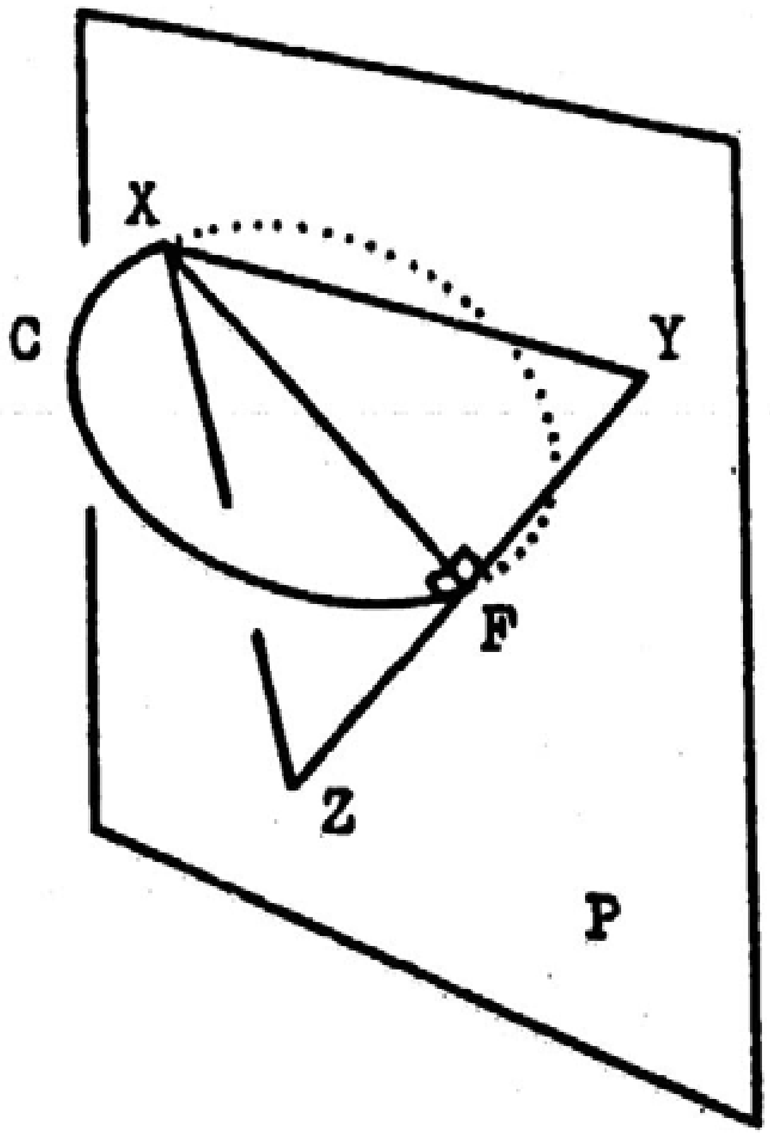
Dakle, tri sfere s dijametrima XY, YZ i ZX moraju se sijeći u jednoj točki (oku E).

Dvije sfere sijeku se u kružnici, diraju se ili se ne sijeku.

Na sferi XY i XZ su točke X i F. Dakle sijeku se u kružnici.

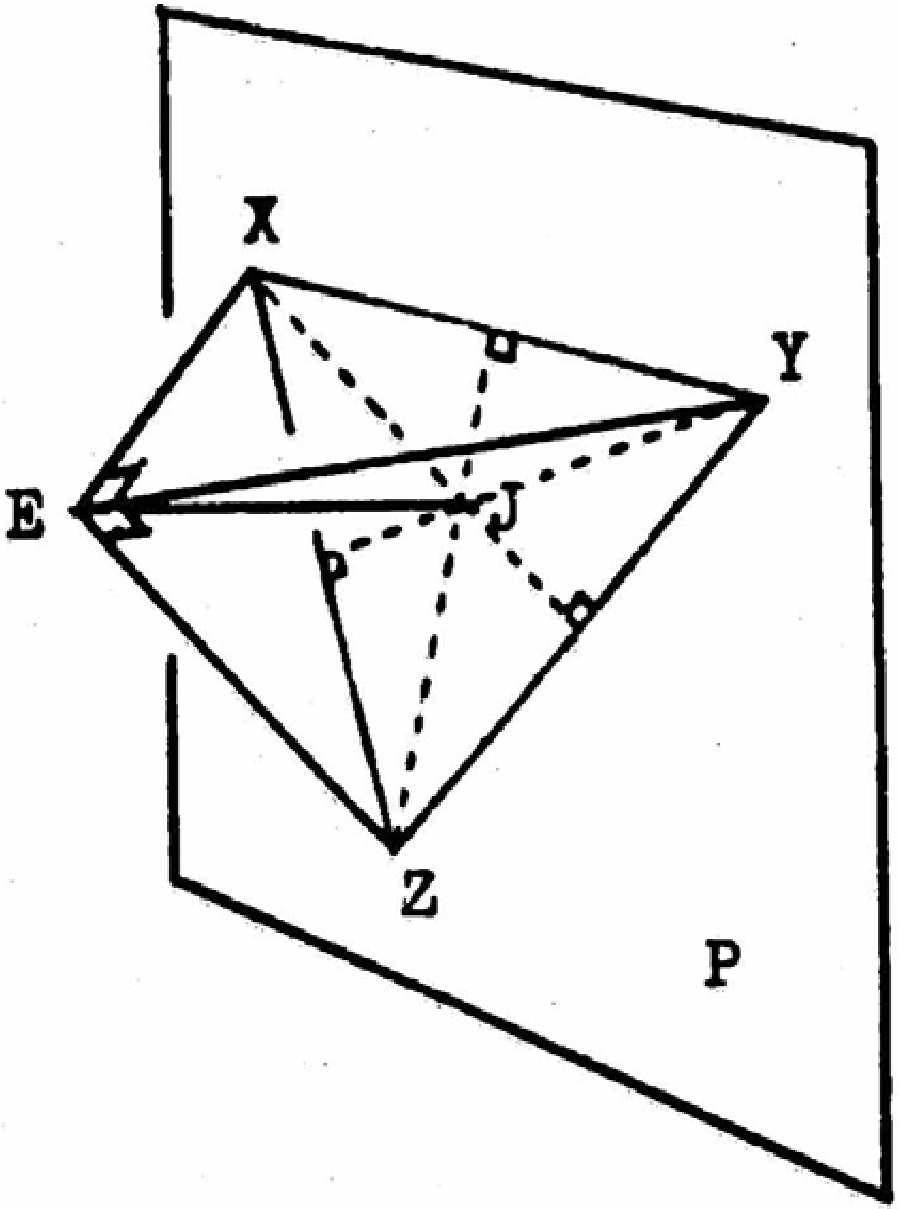
Sfera YZ siječe tu kružnicu u 2 točke (ako je F na YZ i zato trebamo šiljatokutnost), a 1 je ispred platna.



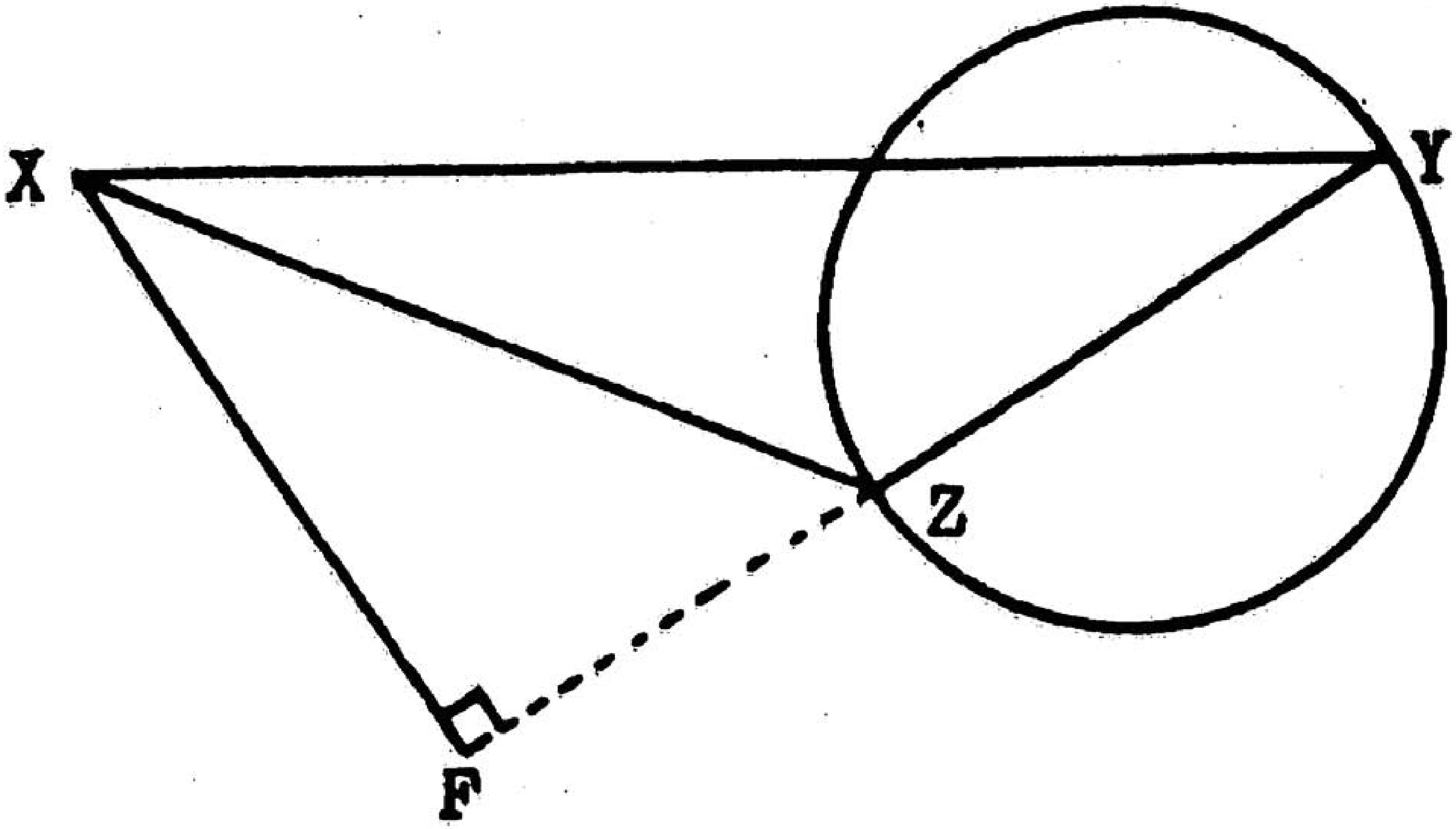


Sfere s dijametrima XY i XZ sijeku se u kružnici C koja je okomita na ravninu XYZ i kojoj je dijametar XF (F je nožište visine iz X).

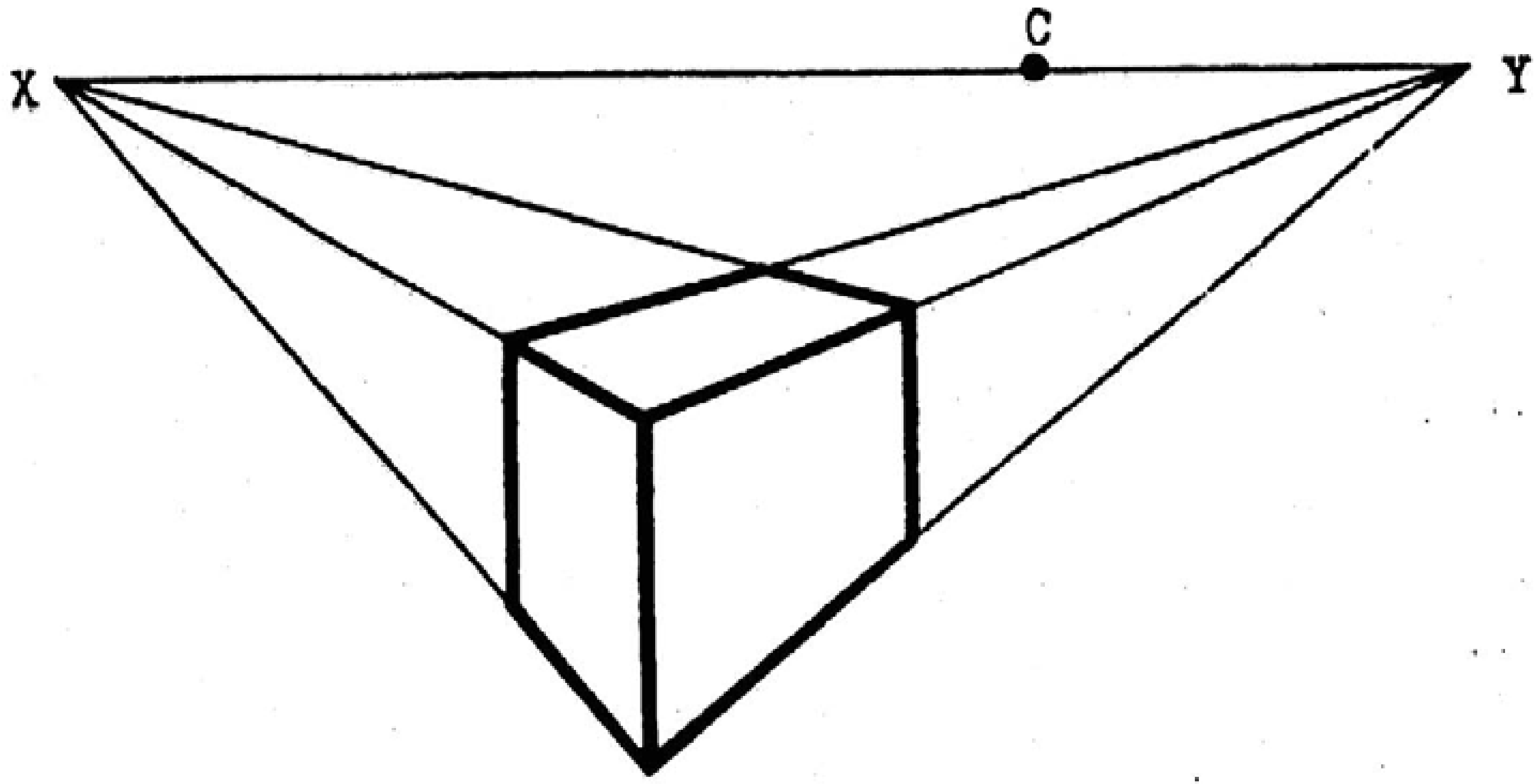
Sfera s dijametrom ZY siječe C u 2 točke (1 je ispred platna).



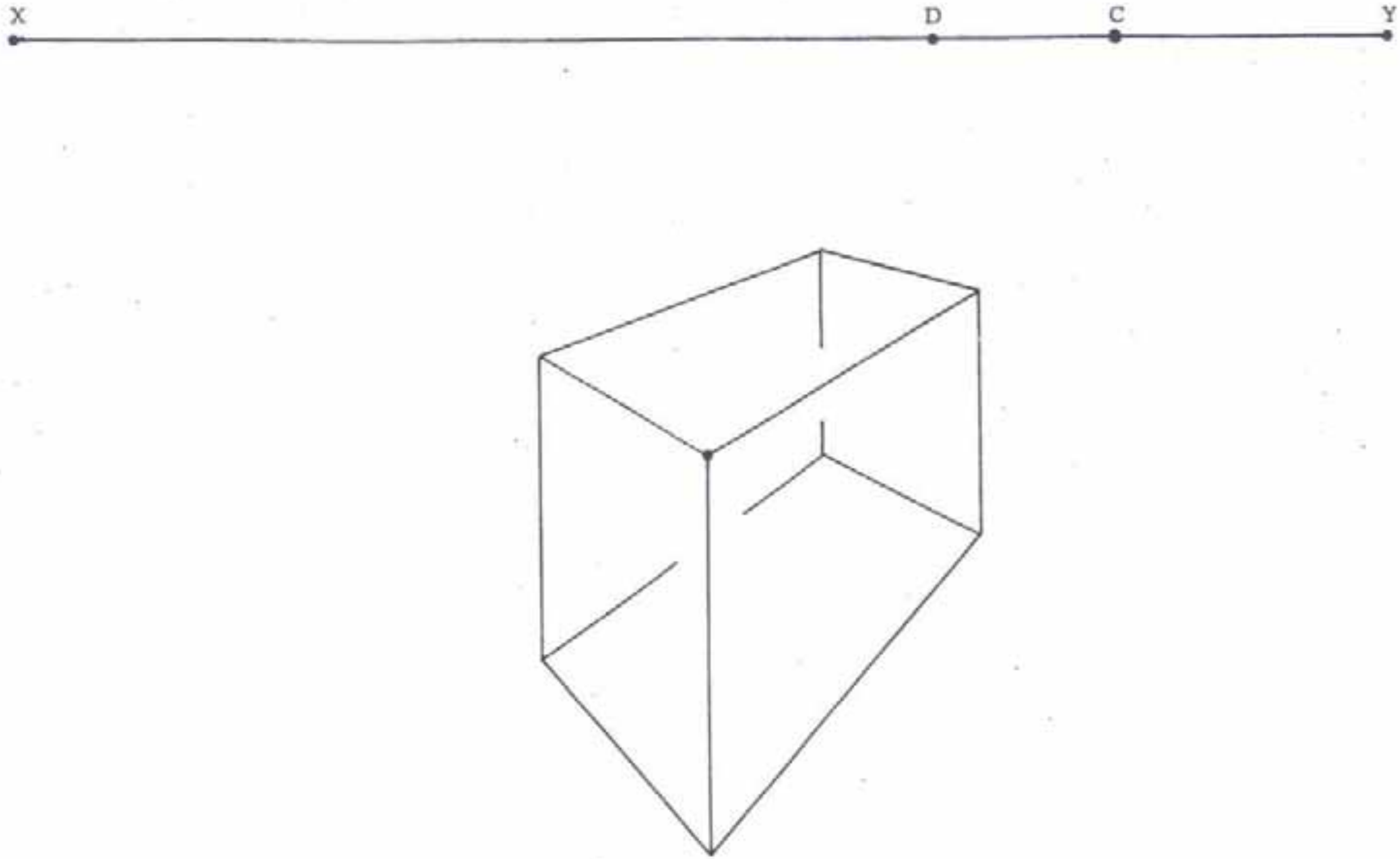
Ortogonalna projekcija oka E na platno nalazi se u ortocentru trokuta XYZ koji ćine nedogledi tri međusobno okomita smjera.

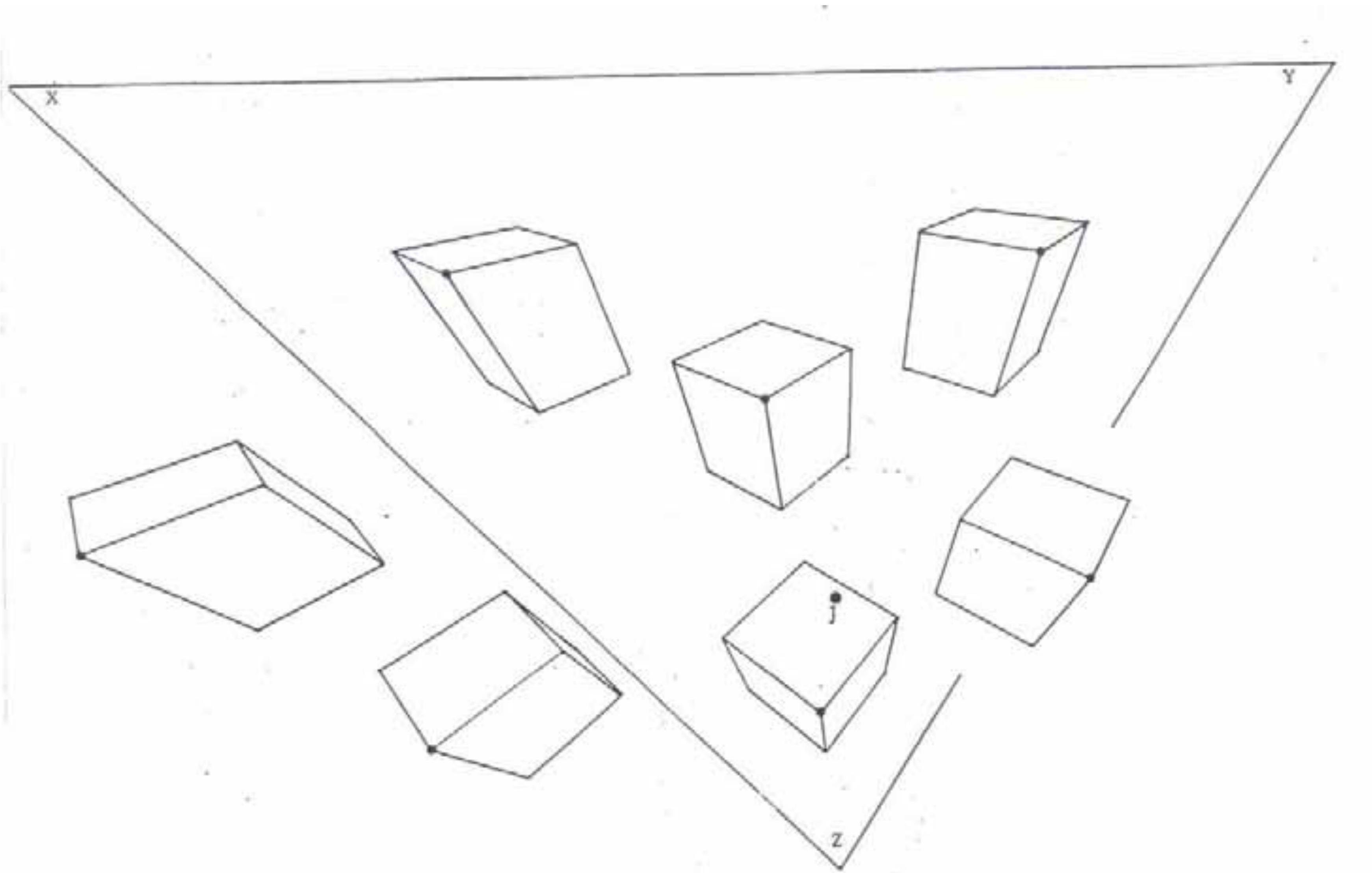


Ti nedogledi ne mogu ćiniti tupokutan trokut, jer kružnica nad dijametrom XF tada ne siječe sferu nad dijametrom YZ.

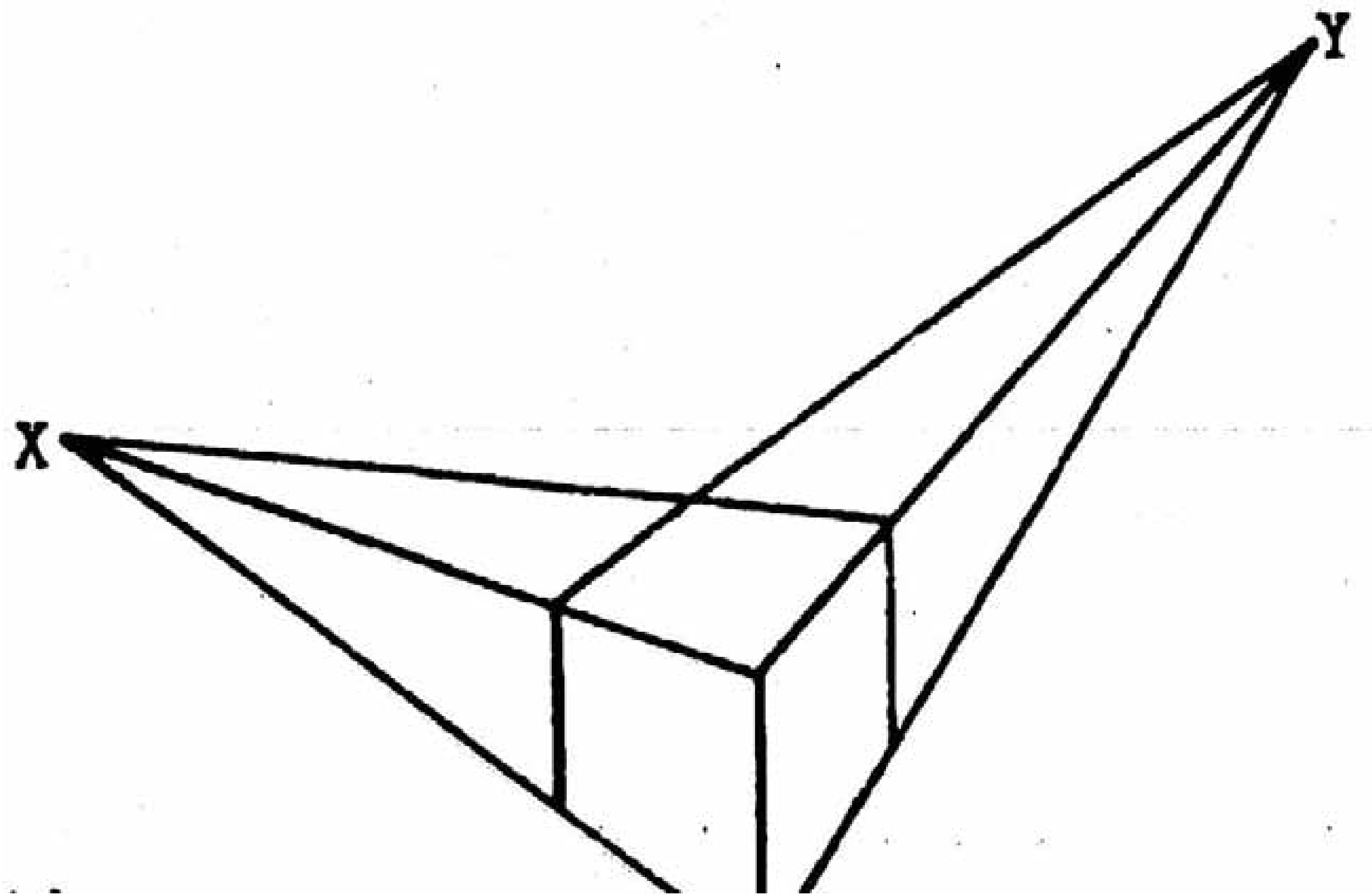


Slučaj u kojem Z ode u beskonačnost:
Sfere nad dijametrima XZ i YZ postaju ravninom kroz XY okomitom na platno. Ona siječe sferu nad XY u kružnici kojoj je dijametar XY i koja je okomita na platno.
Tijelo se iz svake njene točke vidi kao kvadar.
Samo direktno iznad C vidi se kao kocka.

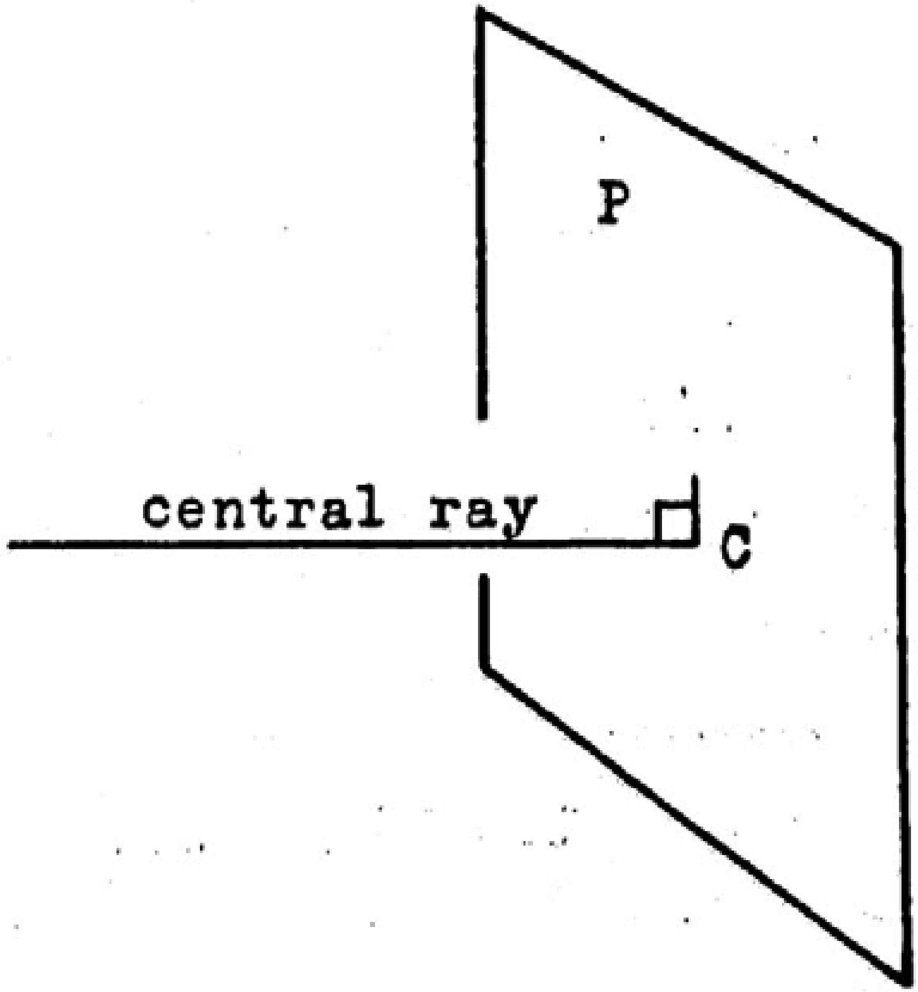

X
D
C
Y



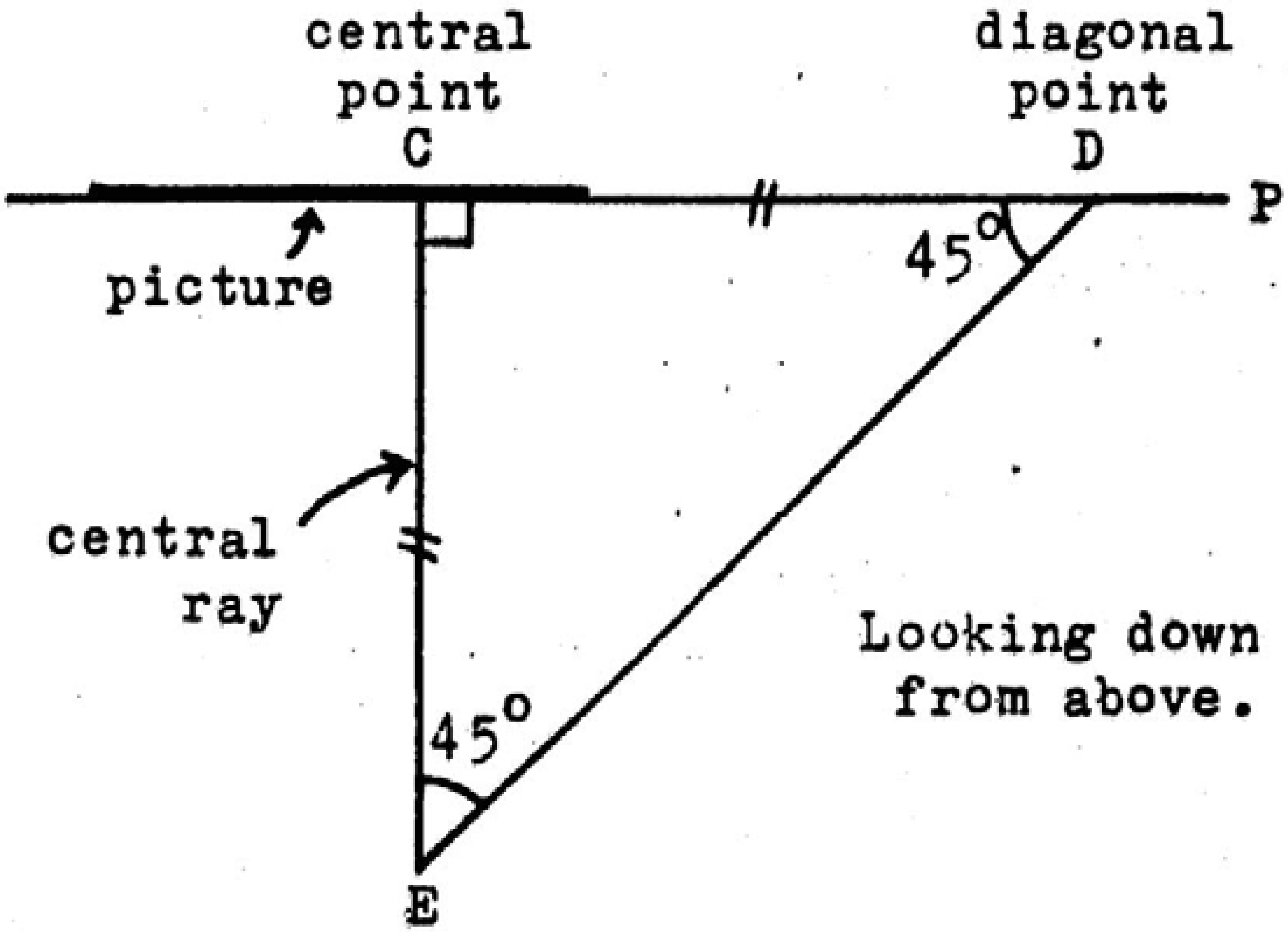
Na određenoj udaljenosti točno iznad J sva tijela izgledaju kao kocke. (J je ortocentar trokuta XYZ.)



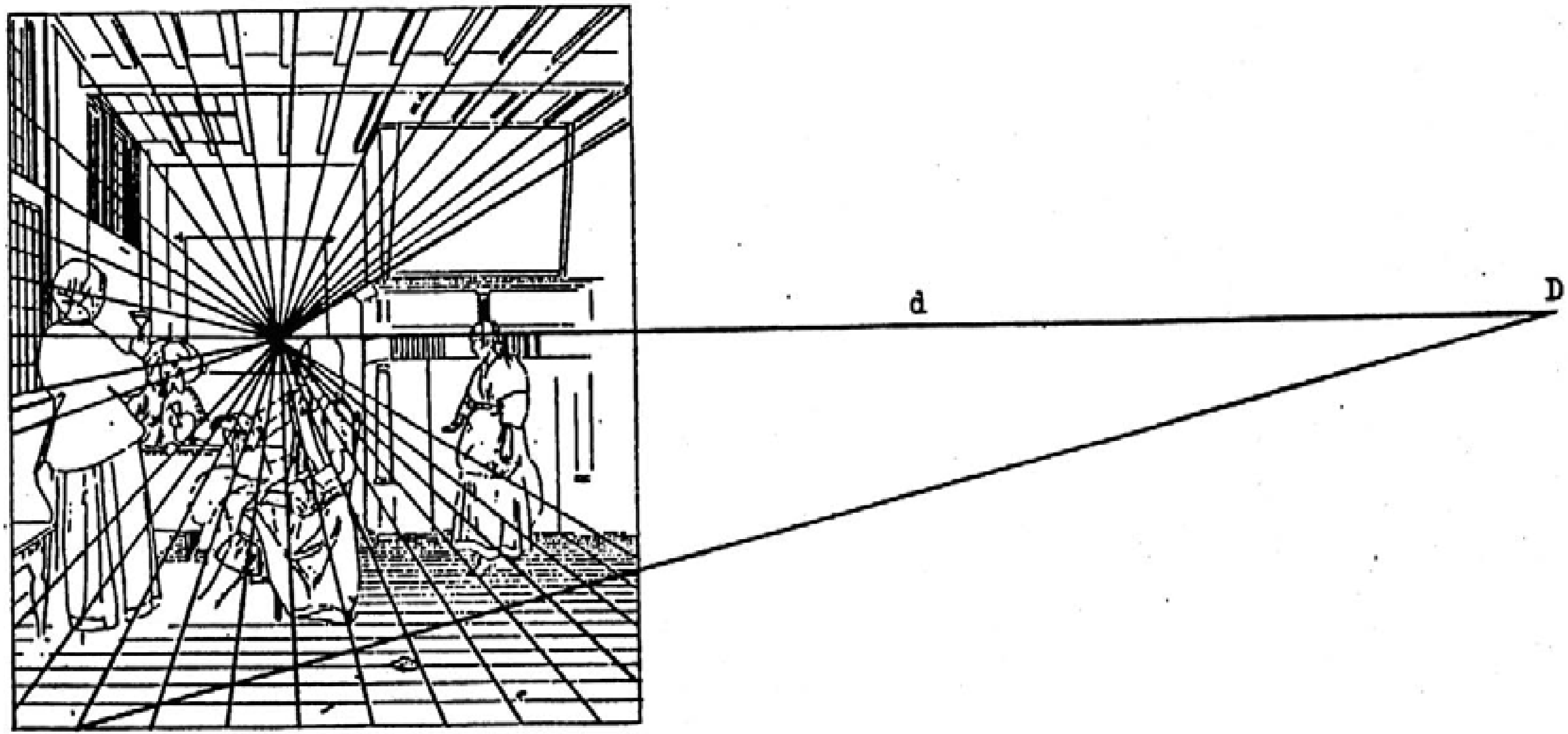
Ako je Z u beskonačnosti ovo je nemoguće.
Paralelne vertikale moraju biti okomite na XY.



Kako odrediti udaljenost oka na centralnoj vidnoj zraci?

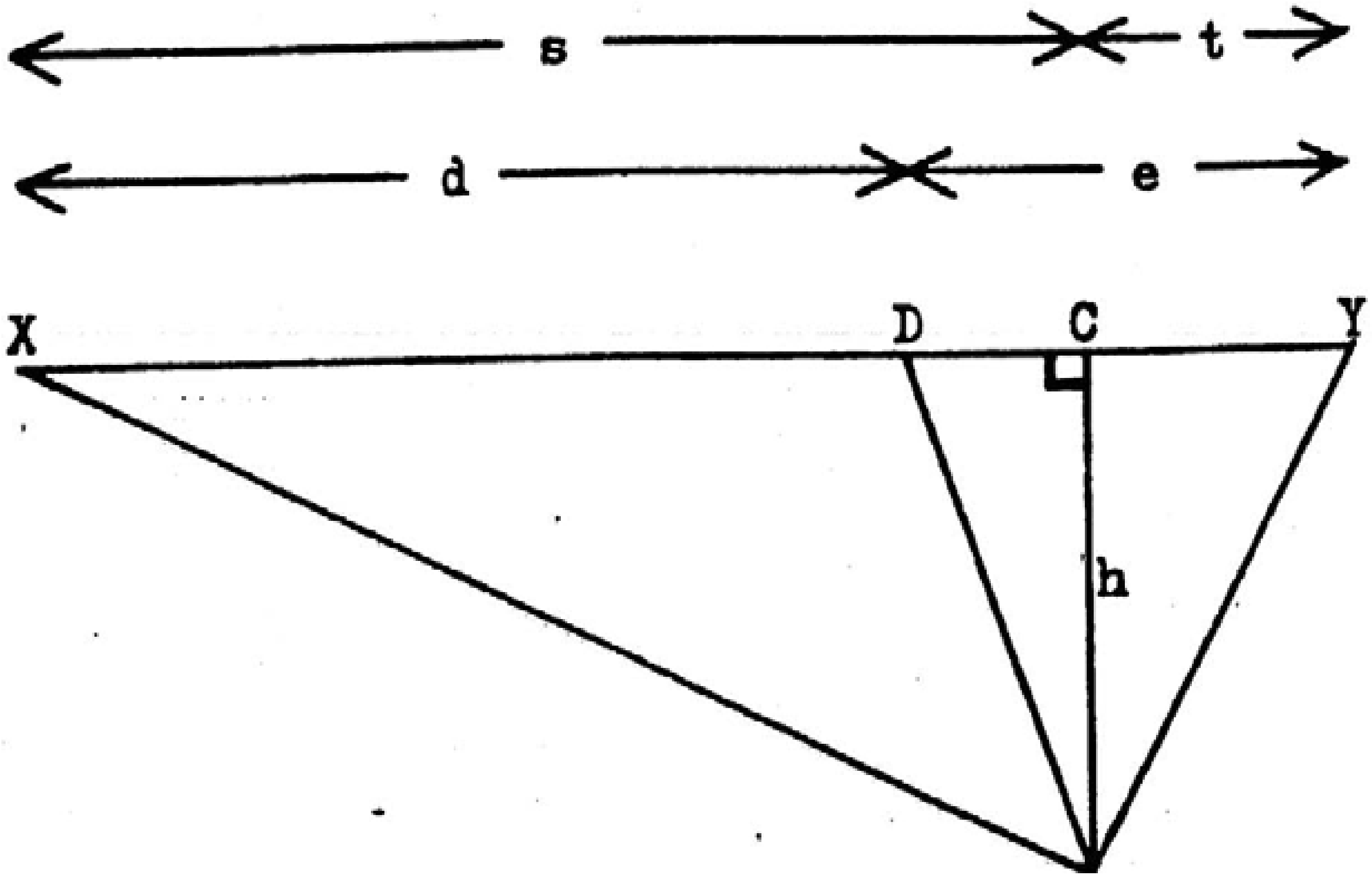


Za kut od 45º imamo EC=CD!



U perspektivi 1 točke s naslikanim kvadratom:
C i D odredimo pomoću 90º i 45º na kvadratu i CD=d!

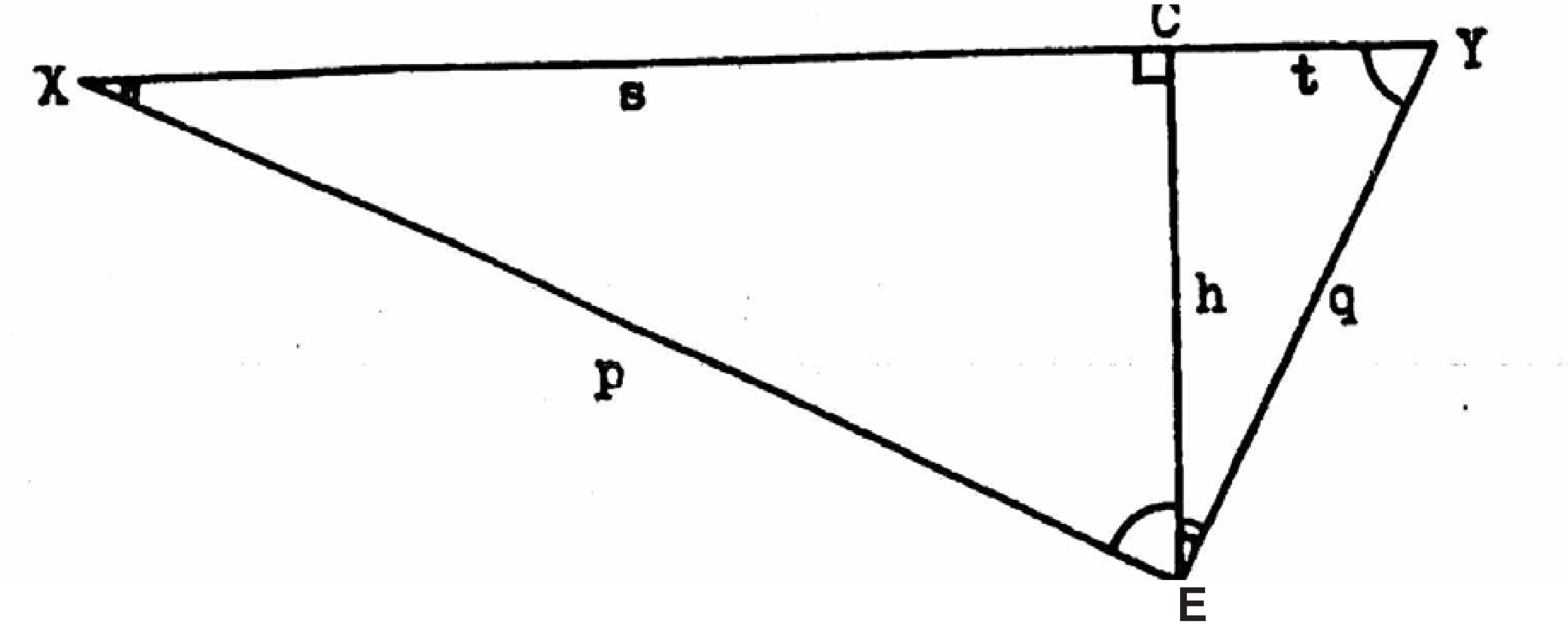
U perspektivi 2 točke s naslikanim kvadratom:



Položaj od D određuje položaj od C i visinu h, jer je:

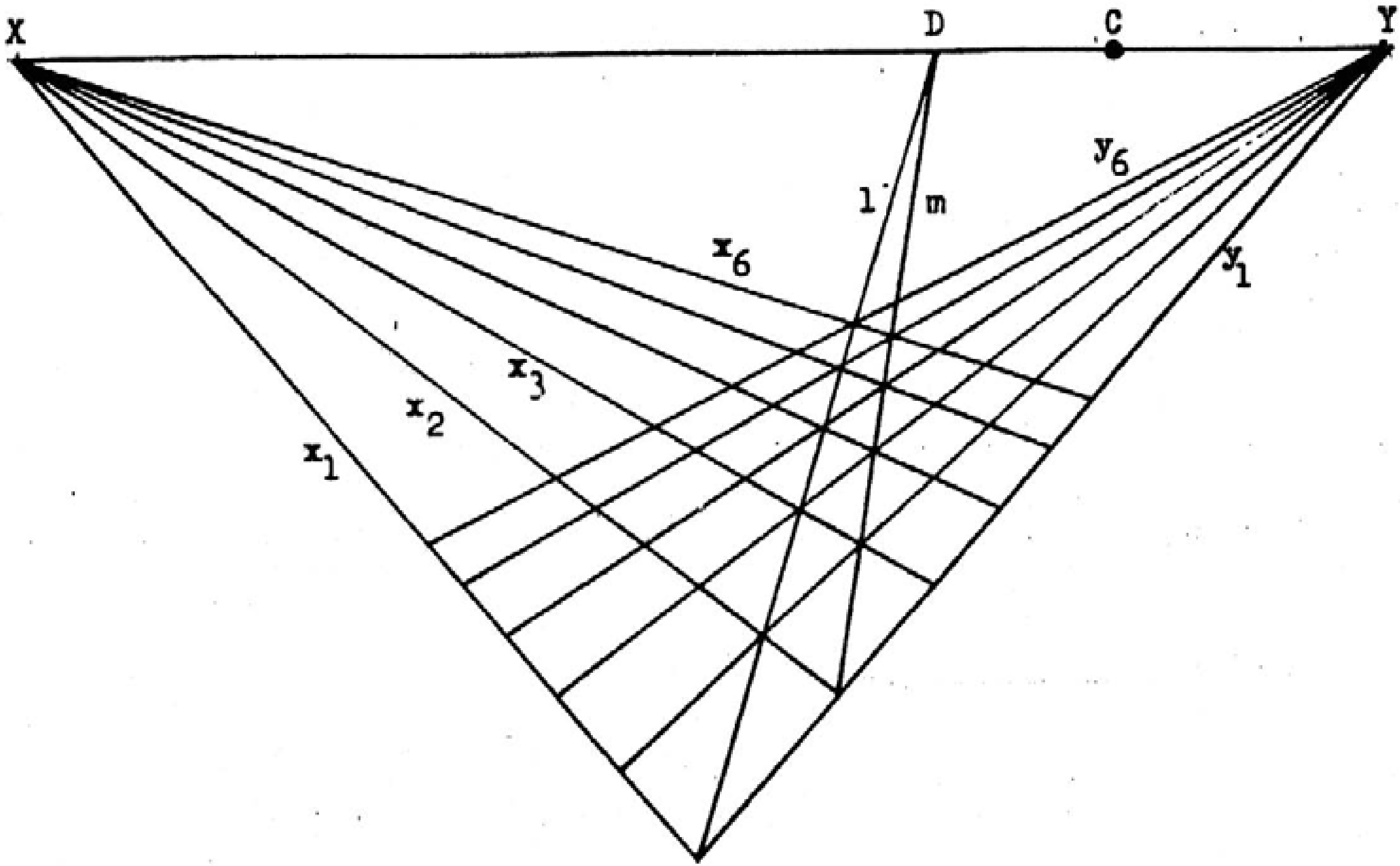
$$s/t=(d/e)^2 \qquad h^2=st$$

Dokaz:



$s/h = h/t = p/q$ daje $s/t = (s/h)(h/t) = (p/q)^2 = (d/e)^2$

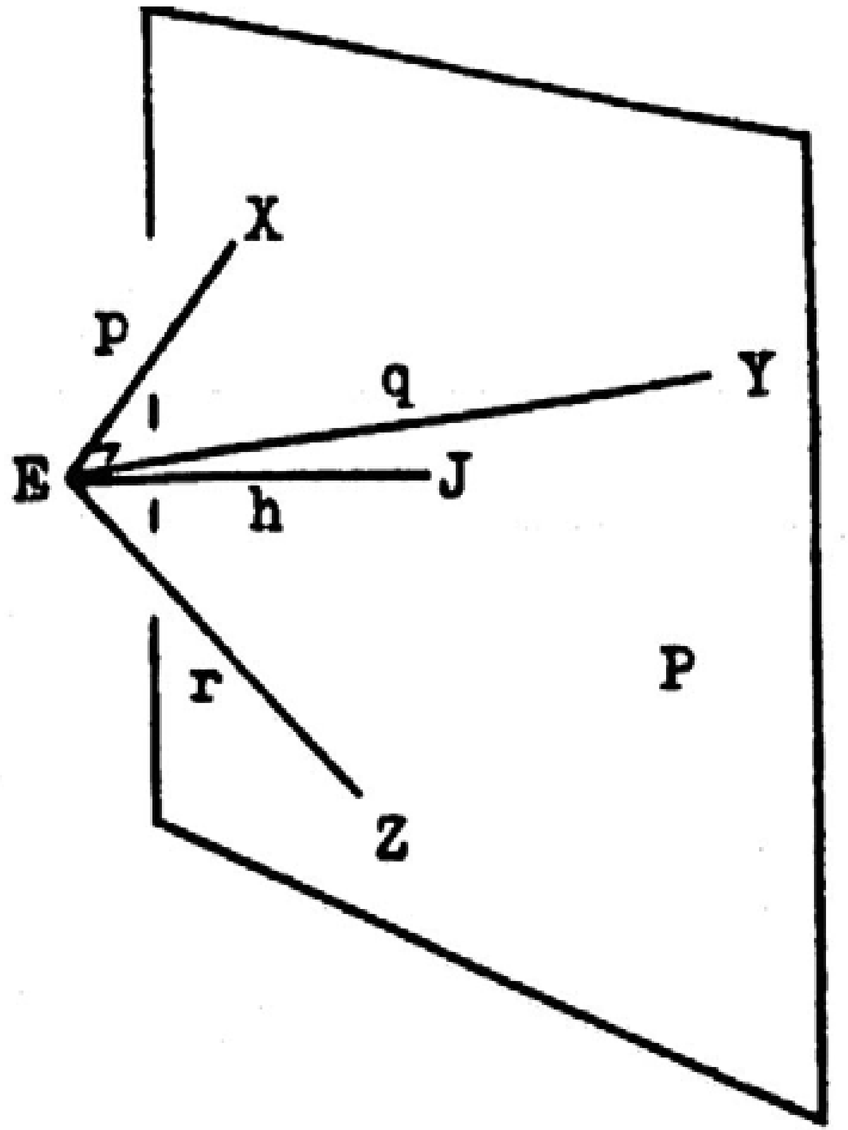
$s/h = h/t$ daje $h^2 = st$



X, Y i D određeni su slikom (i određuju sliku).

X, Y i D određuju C i visinu do oka h.

U perspektivi 3 točke:



$h^2=1/((1/p^2)+(1/q^2)+(1/r^2))$

$p^2=(-x^2+y^2+z^2)/2$ i analogno q^2 i r^2 ($x=YZ$ itd.)

U koordinatnom sustavu EX,EY,EZ jednadžba ravnine P je:

$$x/p + y/q + z/r = 1$$

No tada je udaljenost (h) ishodišta E od te ravnine:

$$h^2=1/((1/p^2)+(1/q^2)+(1/r^2))$$

Iz Pitagorinog teorema:

$$x^2=q^2+r^2 \quad y^2=r^2+p^2 \quad z^2=p^2+q^2$$

odakle slijedi:

$$p^2=(-x^2+y^2+z^2)/2$$ itd.

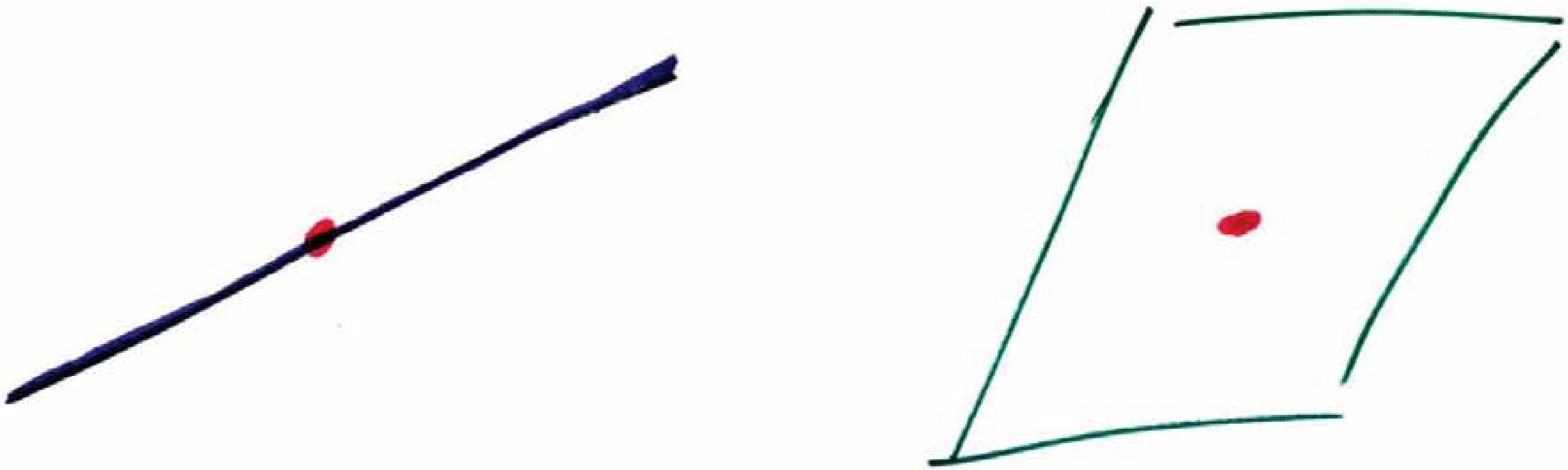
PROJEKTIVNA GEOMETRIJA

PROJEKTIVIZACIJU SCENE ČINE RADIJALNI PRAVCI (TJ. ZRAKE KROZ OKO) KOJI PROLAZE TOČKOM SCENE (OKOM)

OKO VIDI U SVIM SMJEROVIMA (ČAK I UNAZAD, ZATO PRAVCI A NE ZRAKE)

(1) RADIJALNI PRAVCI SU TOČKE
(IZGLEDAJU OKU KAO TOČKE)

RADIJALNE RAVNINE SU PRAVCI
(IZGLEDAJU OKU KAO PRAVCI)

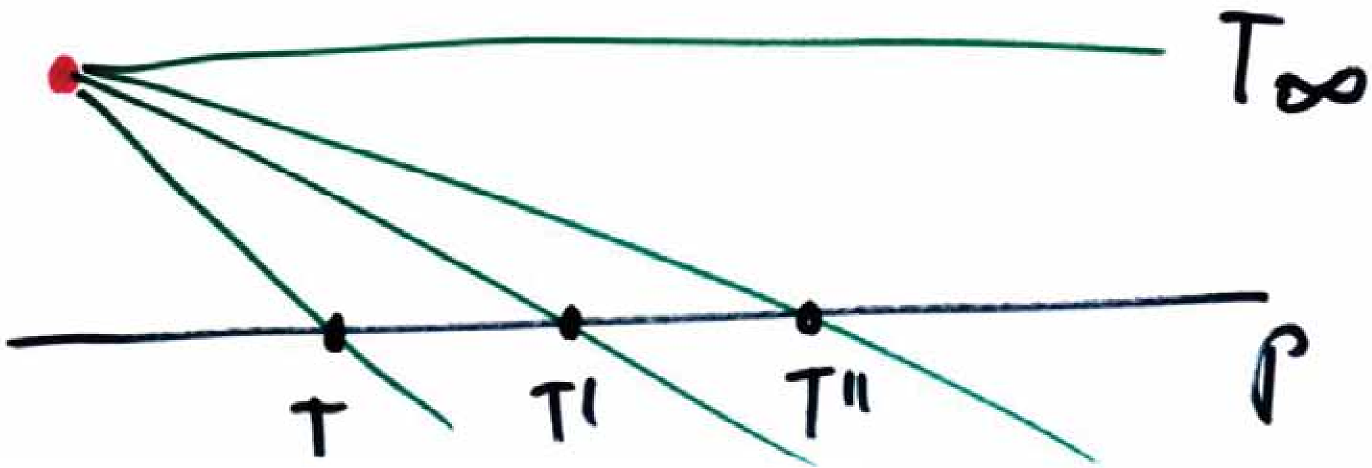


(2) PROJEKTIVIZACIJA NERADIJ. PRAVCA

~~JE ST~~ ČINI RAVNINA TOG PRAVCA I OKA

JEDAN R. PRAVAC TE RAVNINE NE PROLAZI TOČKOM TOG PRAVCA

TO JE ∞ TOČKA TOGA PRAVCA

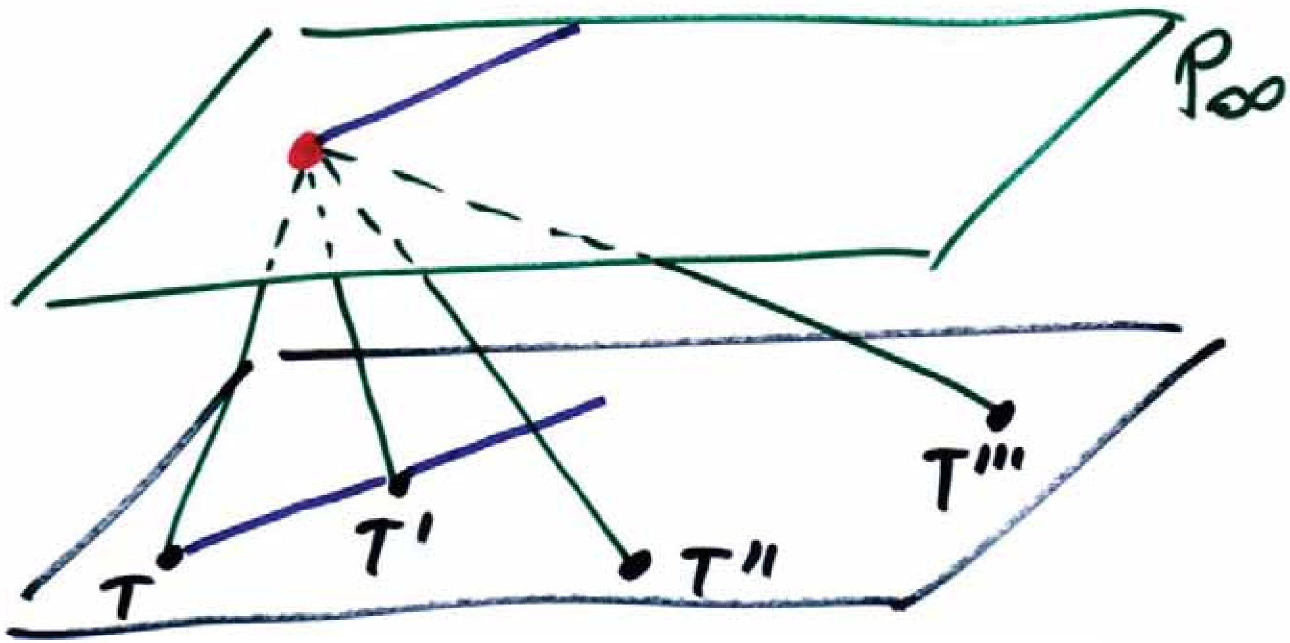


(3) PROJEKTIVIZACIJA NERAD. RAVNINE

~~JEST~~ ČINI CIJELI PROSTOR

JEDNA RADIJ. RAVNINA NE PROLAZI TOČKOM TE RAVNINE

TO JE ∞ PRAVAC TE RAVNINE



SADRŽI SVE T_∞ TE RAVNINE

SVAKI OBJEKT KOJI SE
PROTEŽE U BESKONAČNOST
DOBIVA TOČKE U BESKON-
AČNOSTI, KADA SE PROJE-
KTIVIZIRA

PERSPEKTIVNA SLIKA SCENE JE PRESJEK PLATNA PROJEKTIVIZACIJOM SCENE

TO JE ALBERTIJEV "VEO"

NEDOGLEDI // PRAVACA SU NJIHOVE ∞ TOČ.

HORIZONTI // RAVNINA SU NJIHOVI ∞ PRAVCI

⟹ PERSP. 1, 2, 3 TOČKE ITD.

PROJEKTIVNI PROSTOR

PROJEKTIVNA TOČKA P^0 JE RADIJALNI PRAVAC

PROJ. PRAVAC P^1 JE RADIJALNA RAVNINA

PROJ. RAVNINA P^2 JE SKUP RAD. PRAVACA

PROJ. PROSTOR P^n JE SKUP RADIJALNIH PRAVACA U EUKL. PROSTORU $\mathbb{R}^{n+1}$

PROJ. PROSTOR P^n JE $\mathbb{R}^n$ UPOTPUNJEN TOČKAMA U BESKONAČNOSTI

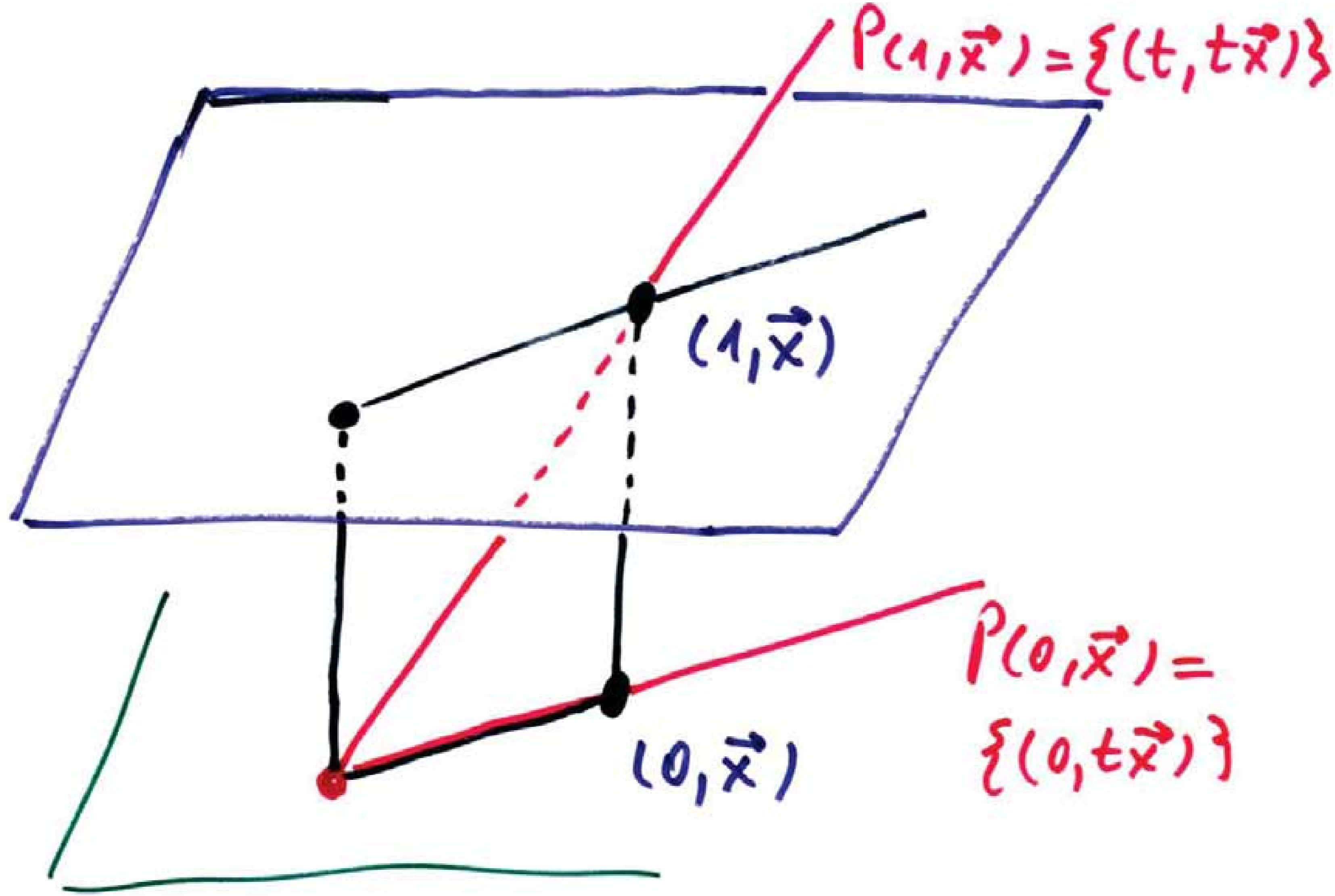
$$\mathbb{R}^{n+1} = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n)\} = \{(x_0, \vec{x})\}$$

$$\mathbb{R}^{n} = \{(1, x_1, \ldots, x_n)\} = \{(1, \vec{x})\}$$

$$p_{(1,\vec{x})} = \{(t, t\vec{x})\}$$

$p_{(0,\vec{x})} = \{(0, t\vec{x})\}$ TOČKE U ∞ NA $\mathbb{R}^n$

$\{$RAD. PRAVCI U $\mathbb{R}^{n+1}\}$ $\overset{1-1}{\longleftrightarrow}$ $\mathbb{R}^n \cup \{$TOČKE U $\infty\}$

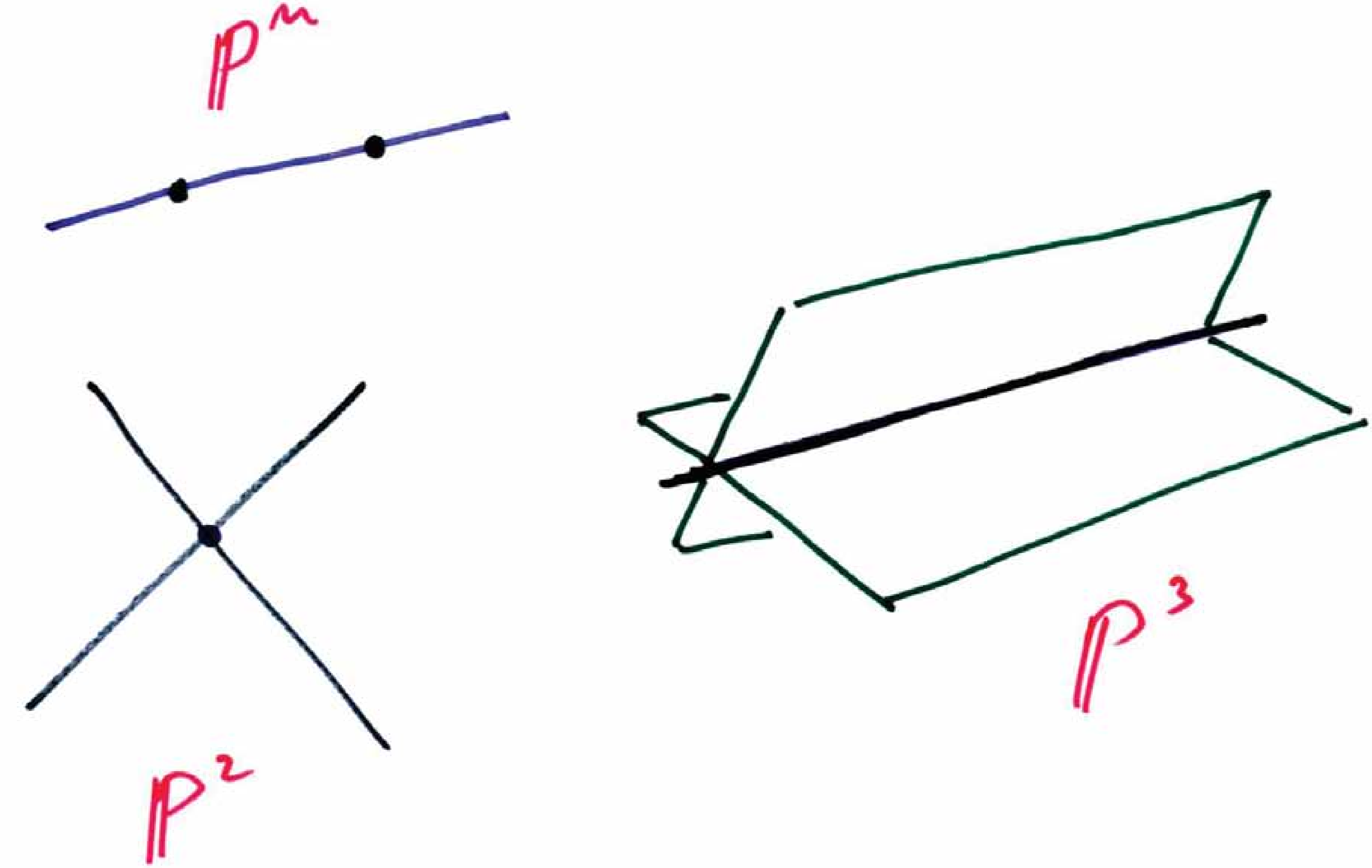


P(1, x⃗) = {(t, tx⃗)}
(1, x⃗)
P(0, x⃗) =
{(0, tx⃗)}
(0, x⃗)

(1) SVAKE 2 TOČKE U P^n LEŽE NA TOČNO JEDNOM PRAVCU

(2) SVAKA 2 PRAVCA U P^2 SI-JEKU SE U TOČNO 1 TOČKI

(3) SVAKE 2 RAVNINE U P^3 SIJEKU SE U TOČNO 1 PRAVCU


$\mathbb{P}^n$
$\mathbb{P}^2$
$\mathbb{P}^3$

3 NEKOLINEARNE TOČKE LEŽE U TOČNO 1 RAVNINI

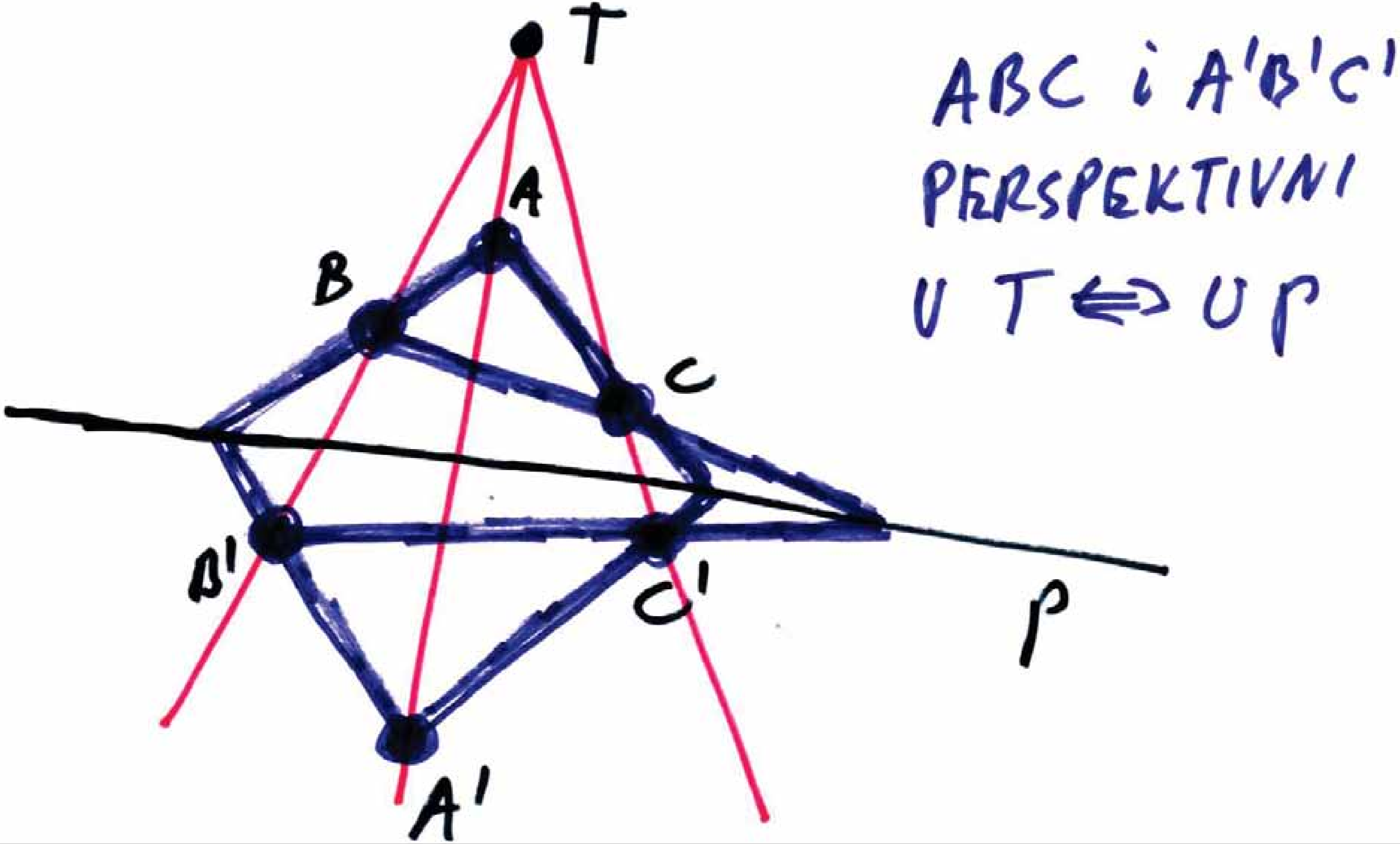
---

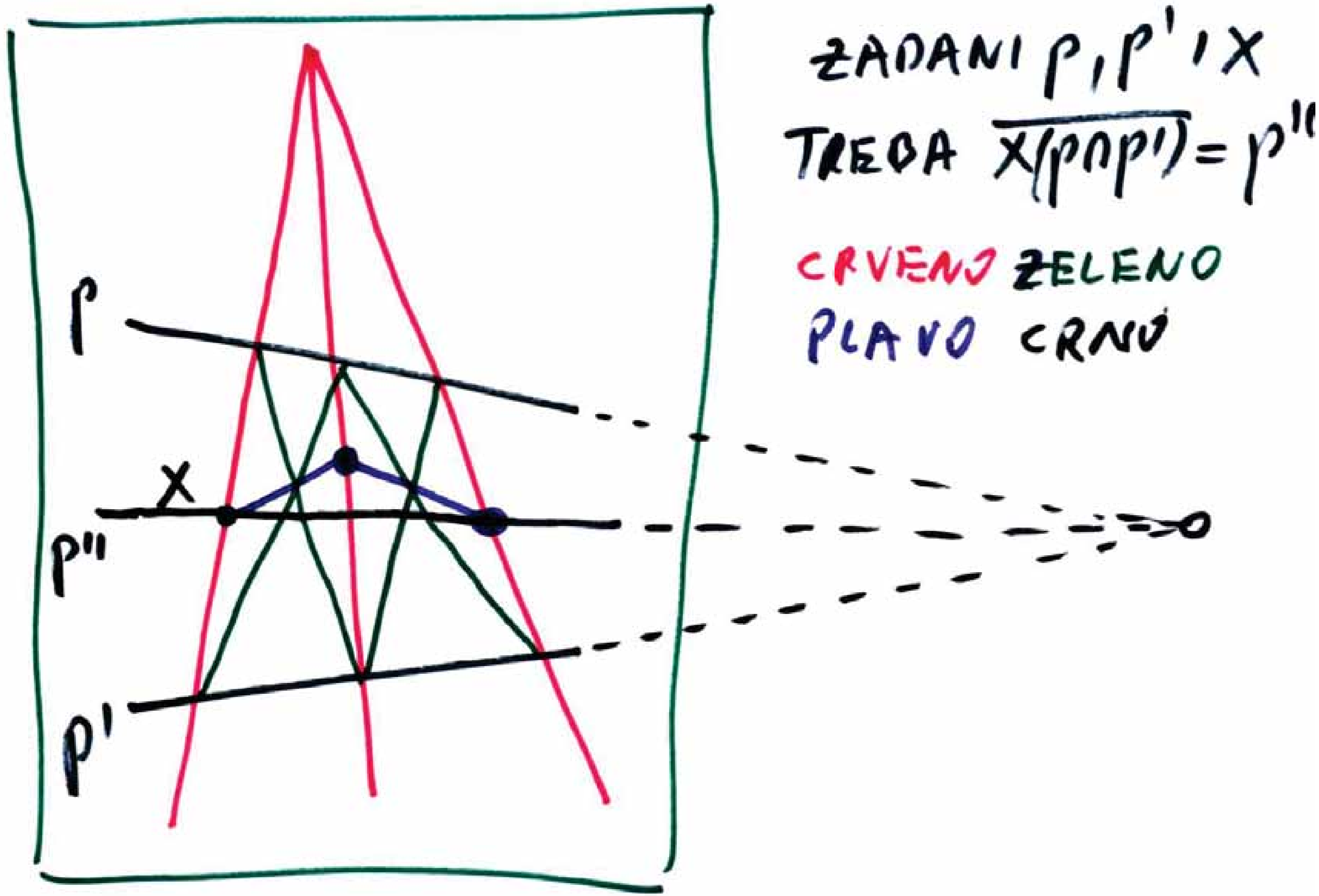
3 RAVNINE U P^3 PROLAZE 1 TOČKOM ILI 1 PRAVCEM

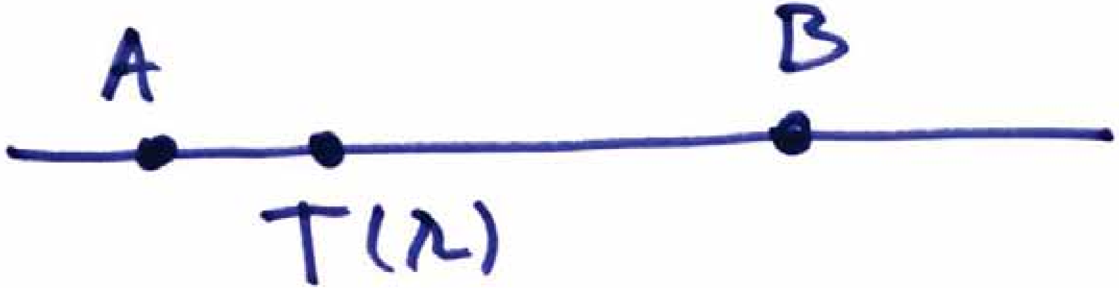
PRAVAC I RAVNINA U P^3 SIJEKU SE U 1 TOČKI (ILI PRAVAC LEŽI U NJOJ)

AKO 2 PRAVCA U P^3 NE LEŽE U RAVNINI ONDA SU MIMOSMJERNI

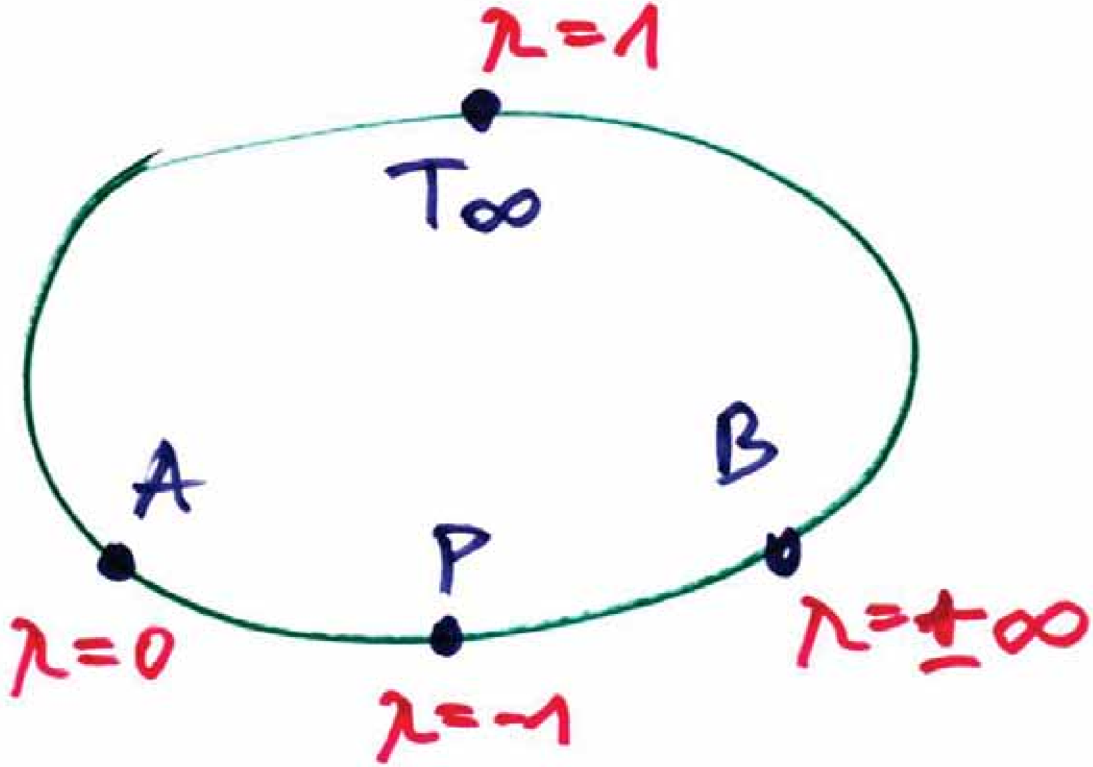
DESARGUESOV TEOREM




ZADANI p, p' I X
TREBA $\overline{X(p \cap p')} = p''$
CRVENO ZELENO
PLAVO CRNO
p
X
p''
p'

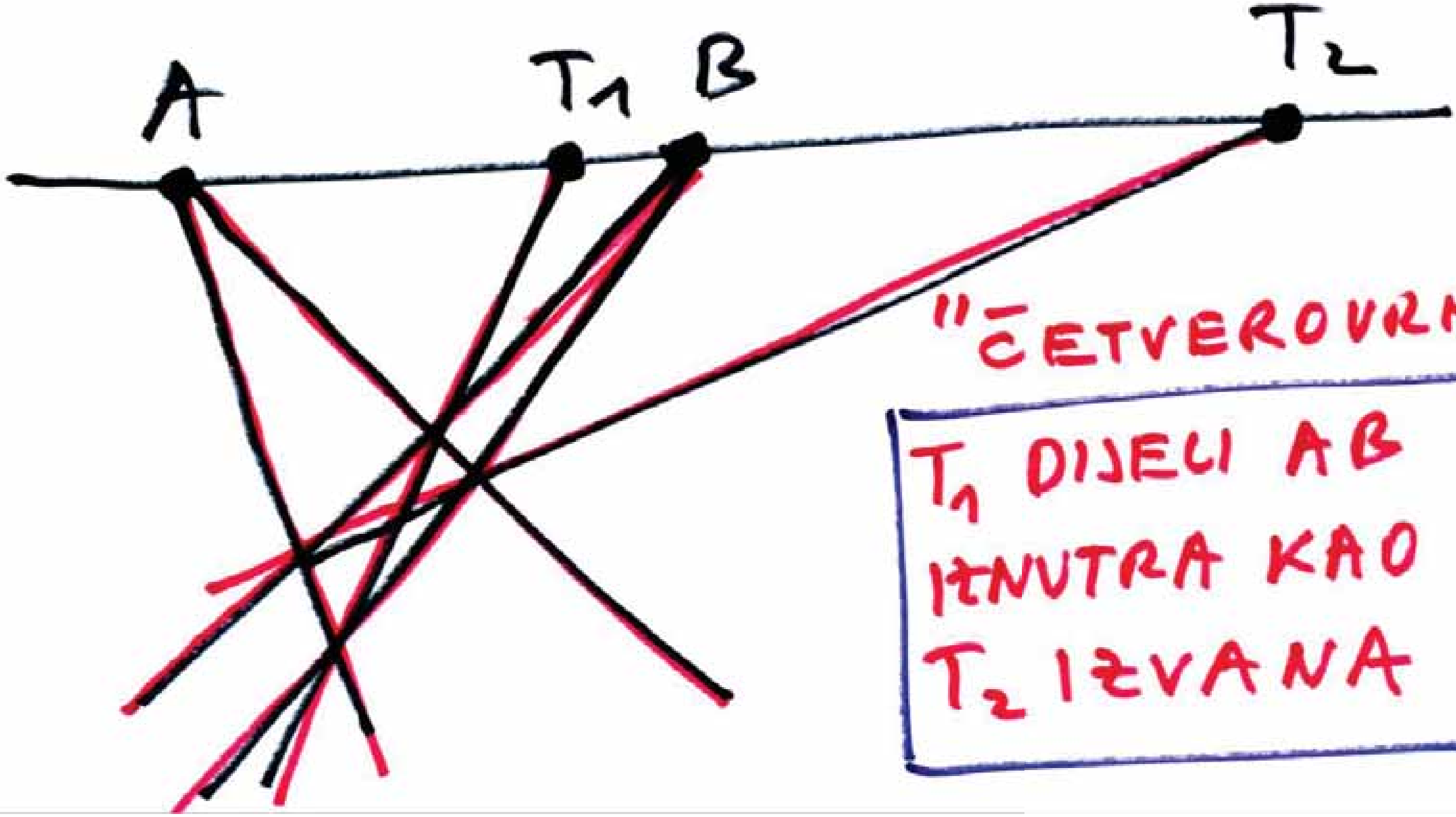


$$\lambda = \frac{TA}{TB}$$



T_1 I T_2 SU HARMONIJSKI PAR U ODN. NA AB:

$$T_1A : T_1B = - T_2A : T_2B$$



"ČETVEROVRH"

T

T_1 DIJELI AB IZNUTRA KAO T_2 IZVANA

DVOOMJER:

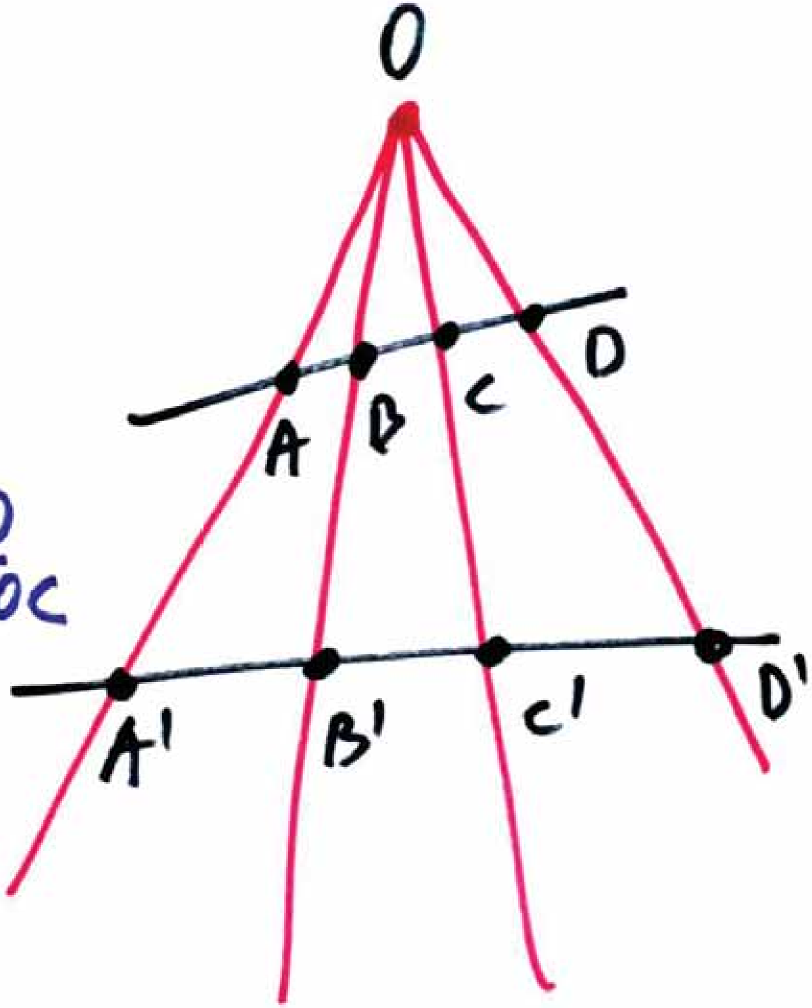
$$[A,B;C,D] := \frac{AC}{AD} \Big/ \frac{BC}{BD}$$

$$= \frac{AOC}{AOD} \cdot \frac{BOD}{BOC} =$$

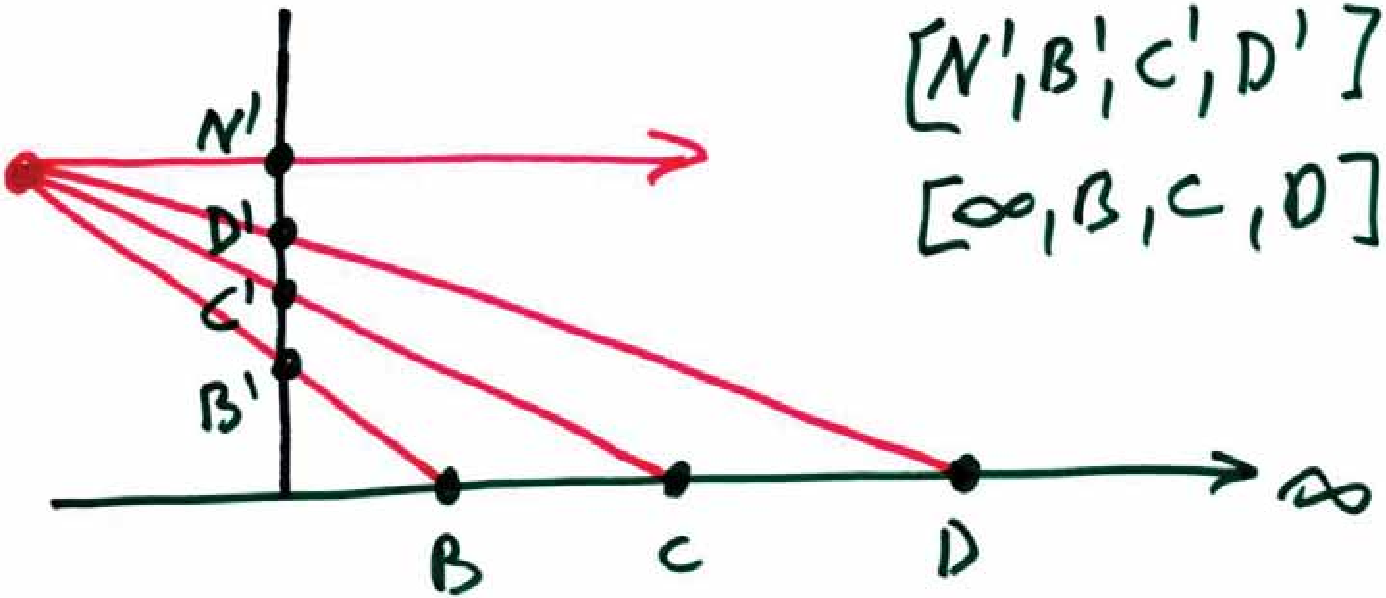
$$\frac{OA \cdot OC \cdot \sin AOC}{OA \cdot OD \cdot \sin AOD} \, \frac{OB \cdot OD \cdot \sin BOD}{OB \cdot OC \cdot \sin BOC}$$

$$= \frac{\sin AOC}{\sin AOD} \cdot \frac{\sin BOD}{\sin BOC} =$$

$$= [A',B';C',D']$$

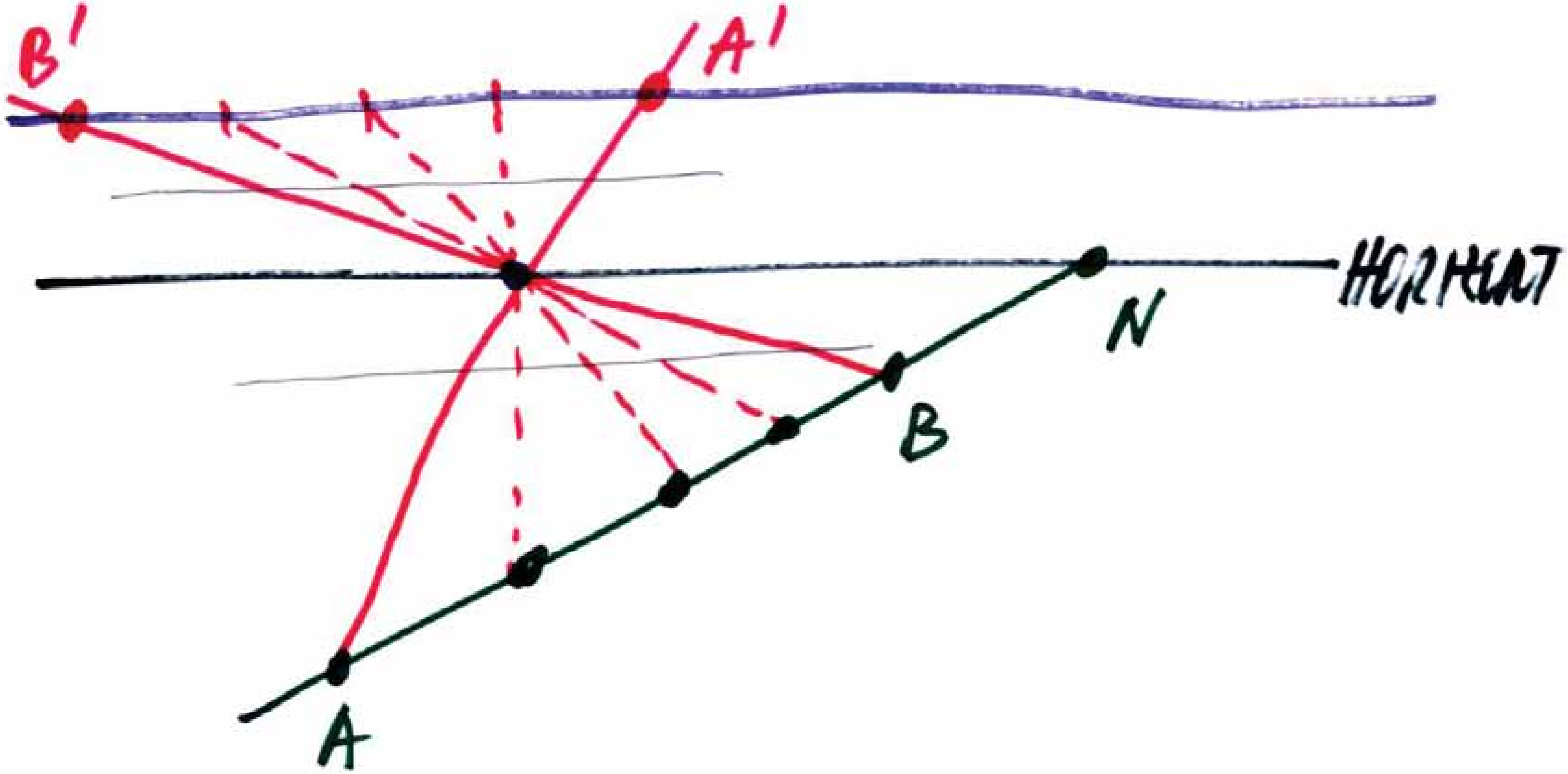


$$[\infty, B, C, D] = \frac{BC}{BD}$$



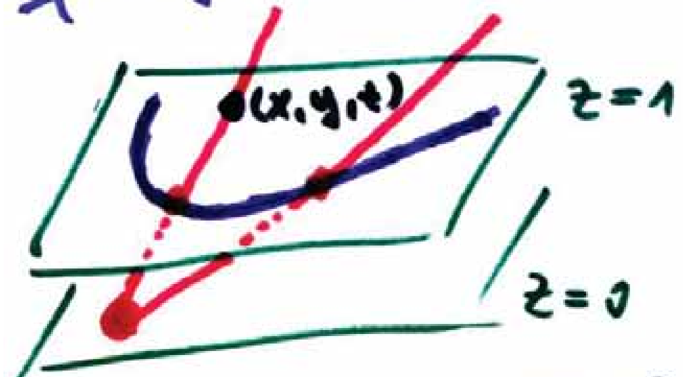
$$[N', B', C', D'] = [\infty, B, C, D] = \frac{BC}{BD}$$

KAKO NA SLICI DUŽINU AB PODIJELITI NA (NPR.) 4 JEDNAKA DIJELA?



PROJEKTIVIZACIJA = HOMOGENIZACIJA

$f(x,y)=0 \quad z=1$



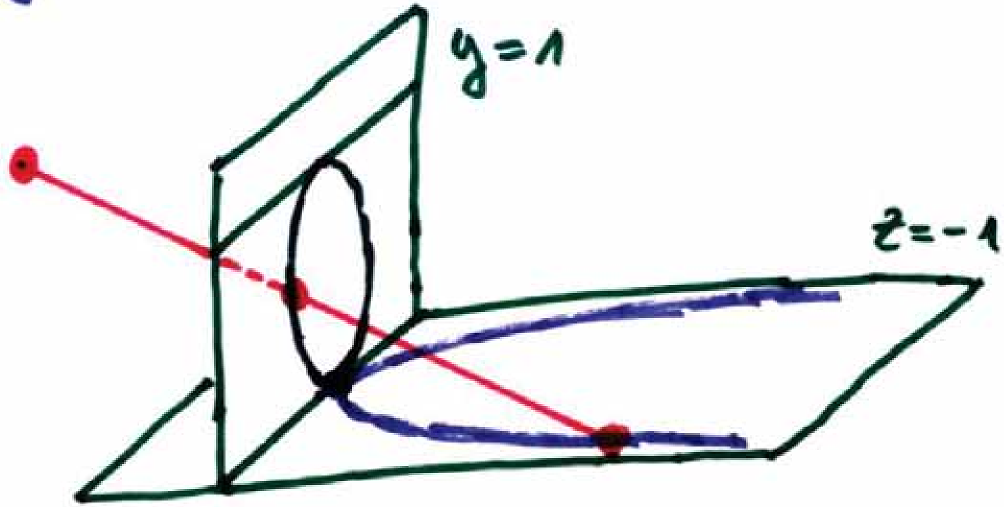
(x,y,t) JE NA PROJEKT. ALG. KRIVULJE AKO POSTOJI t TAKAV DA JE:

$f(tx,ty)=0 \quad tz=1$

$f(x/z, y/z)=0$

HOMOGENI POLINOM

$y=1+x^2/4 \quad z=-1$ PARABOLA



$ty=1+(tx)^2/4 \quad tz=-1$

$-y/z=1+(-x/z)^2/4$

$z^2+x^2/4+yz=0$

$y=1 \Rightarrow 4(z+1/2)^2+x^2=1$ ELIPSA

∞ TOČKE KONIKA

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad z = 1$$

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dxz + Eyz + Fz^2 = 0$$

$$z = 0 \implies Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0 \quad \text{tj.}$$

$$A\left(\frac{x}{y}\right)^2 + B\left(\frac{x}{y}\right) + C = 0$$

$$\frac{x}{y} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$D < 0$ ELIPSA

$D = 0$ PARABOL.

$D > 0$ HIPERB.

TANGENTA NA KONIKU

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0$$

TANGENTA $\left(\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y + \frac{\partial f}{\partial z} z = 0 \right)$

$$(Ax_0 + By_0 + Dz_0)x + (Bx_0 + Cy_0 + Ez_0)y + (Dx_0 + Ey_0 + Fz_0)z = 0$$

$$z = 1 \Rightarrow Axx_0 + B(xy_0 + x_0y) + Cyy_0 + D(x + x_0) + E(y + y_0) + F = 0$$

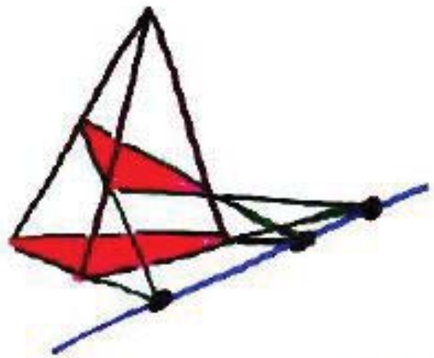
(TOČKA $(x_0\, y_0\, z_0)$ JE NA KONICI TJ. $z_0 = 1$)

(1) DVIJE TOČKE ODR. PRAVAC

(2) DVA PRAVCA ODR. TOČKU

(3) IMA MNOGO TOČAKA I PRAVACA

(4) DESARGUES (KV. U 3 dim.)

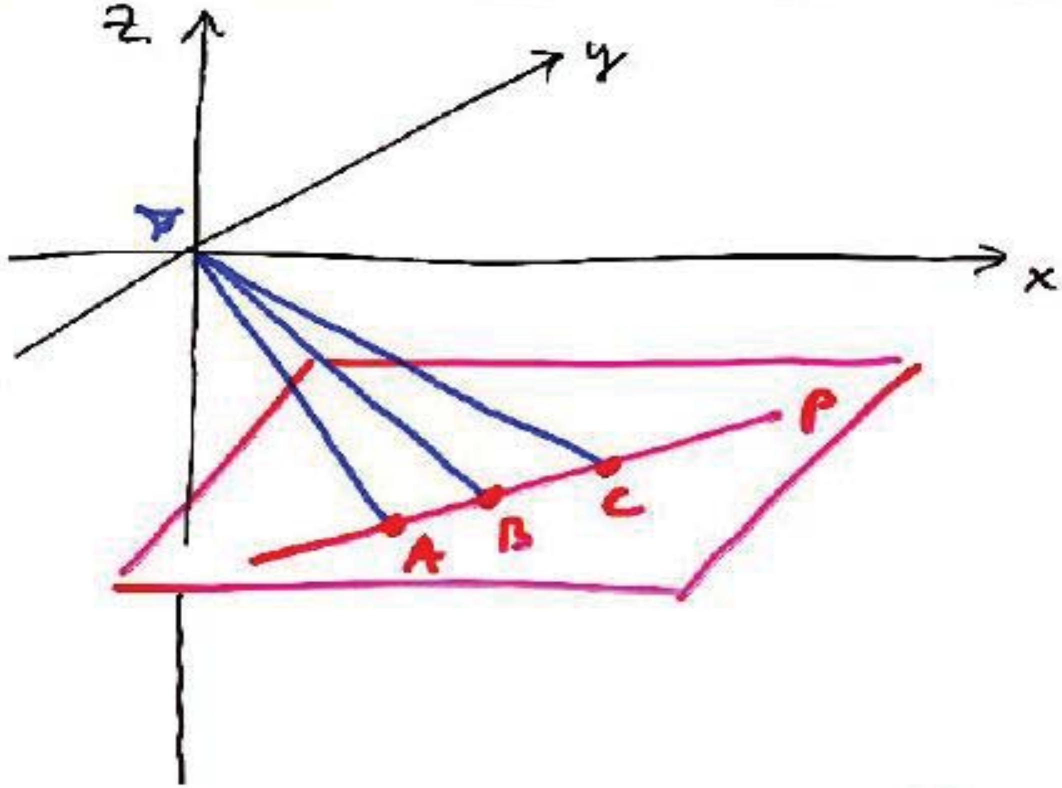


$\Rightarrow FP^2, \ldots, FP^n$ F-TIJELO

(NE POSTOJI OP^3 !)

↑ OKTONIONI

7



A, B, C – PRAVCI KROZ ISHODIŠTE
P – RAVNINA KROZ ISHODIŠTE

$ax + by + cz = 0$

(xt, yt, zt) TOČKA

(at, bt, ct) PRAVAC

} HOMOG. KOORD.

PROJEKCIJE SU LIN. RAZL. FUNKC.