

dr. sc. Dubravka Glasnović Gracin  
Učiteljski fakultet Zagreb

# MODELI ARITMETIKE ZA RAZREDNU NASTAVU



6. Kongres nastavnika matematike, Zagreb 2014.

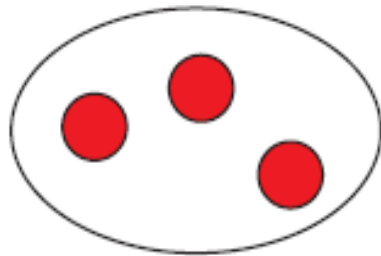
# Modeli aritmetike za razrednu nastavu

- Metodička tema
- Model - osnovni primjer koji se koristi u nastavi s ciljem prikaza matematičkog koncepta
- Modeli prirodnih brojeva
- Modeli zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja prirodnih brojeva
- Važnost prisutnosti svih modela
- Primjer: prelazak sa zbrajanja prirodnih brojeva na zbrajanje cijelih brojeva



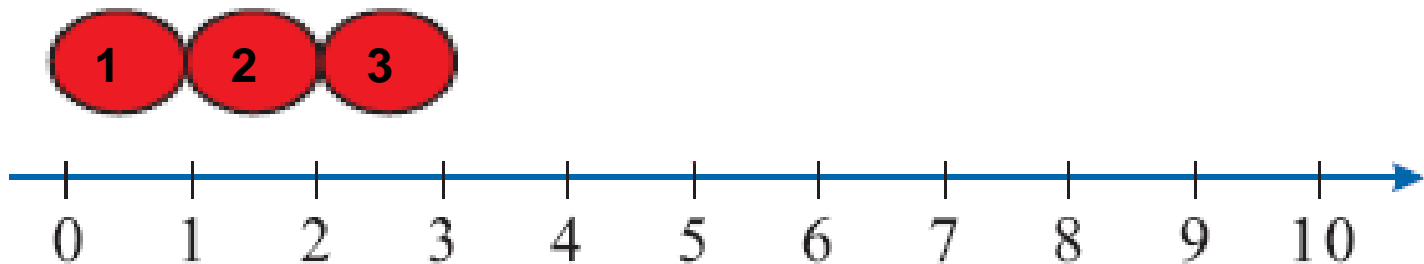
# Modeli prirodnih brojeva

## Model skupa



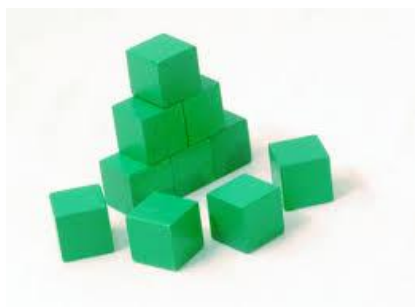
Problem: vertikala!

## Model brojevnog pravca



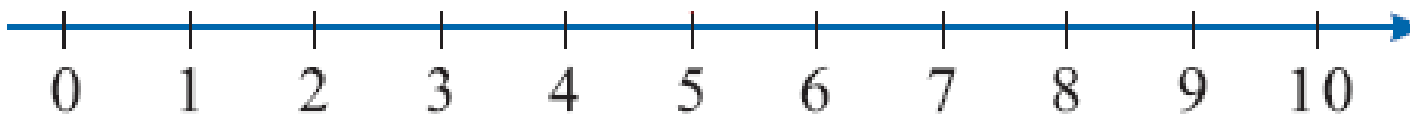
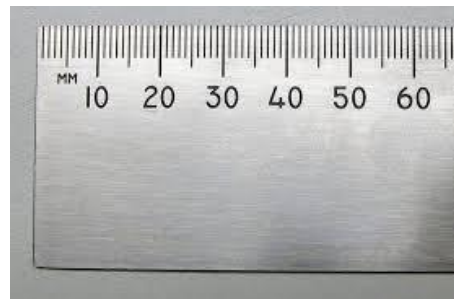
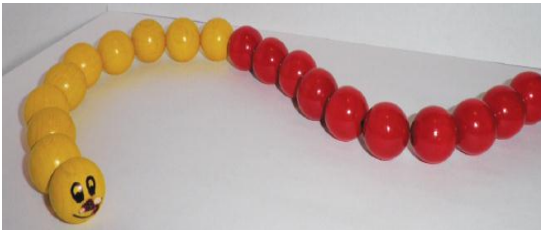
# Model skupa

- *Model skupa* ili skupovni model se odnosi na **kardinalni broj** promatranog konačnog skupa elemenata kao model za razumijevanje prirodnih brojeva u svakom početnom učenju matematike.
- Konkretni materijali, voće, kockice itd.



# Model brojevnog pravca

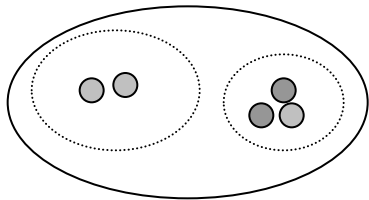
- *Model brojevnog pravca* za prirodne brojeve se odnosi na pravac kojem je određena jedinična dužina i pomoću koje su prirodnim brojevima pridružene određene točke pravca.
- Promatra se udaljenost od početne točke kojoj je pridružen broj 0
- Prebrojavanje, nizanje



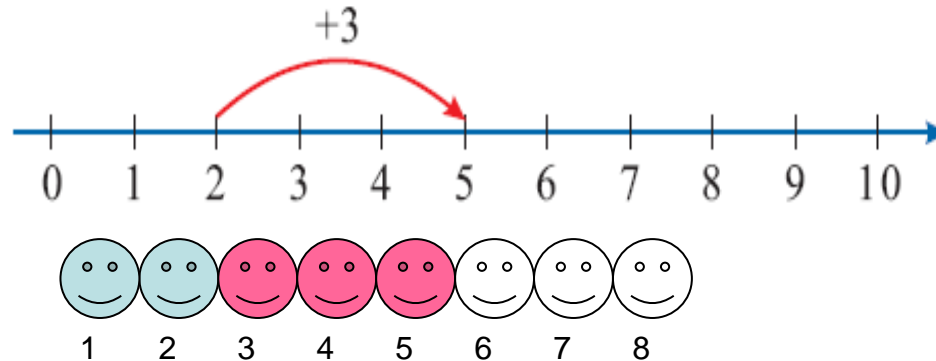
# Modeli zbrajanja

## Skupovni model

- Združivanje skupova
- *Ivana u lijevoj ruci ima dvije kuglice, a u desnoj tri. Koliko kuglica se nalazi ukupno u obje Ivanine ruke?*



Problem: vertikala!



## Model brojevnog pravca

- Model promjene

Zbrajanje  $2 + 3$  se može interpretirati kao „vrijednost 2 koja se uvećala za 3“. Novo „stanje“ iznosi 5.

# Modeli oduzimanja

- Model uzimanja
- Model brojevnog pravca
- Model nepoznatog pribrojnika (ili nadopunjavanja)
- Model usporedbe

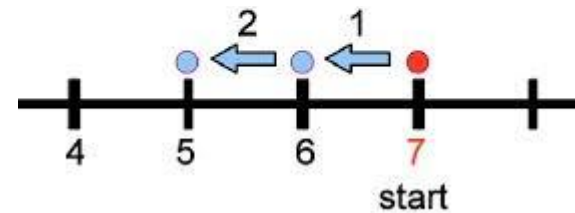
## Model uzimanja

Skupovni model

“Rastavljanje” skupova

# Oduzimanje: Model brojevnog pravca

- Krećemo se prema manjim brojevima
- Obično ulijevo na horizontalnom pravcu ili prema dolje na termometru
- Primjer: *Temperatura na termometru izmjerena u podne je iznosila 7 °C. Na večer se temperatura spustila za 4 °C. Koliko je iznosila temperatura navečer?*
- Dinamični programi na računalu / Model promjene

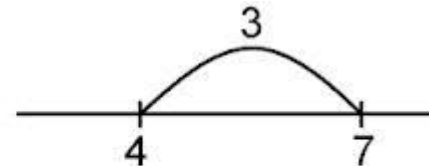
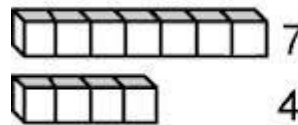
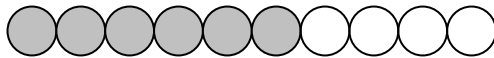


*Ivan ima 7 jabuka, a Ana ima 2 jabuke manje od Ivana.  
Koliko jabuka ima Ana?*



# Model nepoznatog pribrojnika (model nadopunjavanja)

- Ideja je da se oduzimanje svede na zbrajanje nadopunjavanjem
- Primjer: *Ivan je mjerio svoju visinu koja je iznosila 150 cm. Za nekoliko mjeseci se ponovo mjerio i zaključio je da je visok 154 cm. Za koliko centimetara je Ivan narastao u tih nekoliko mjeseci?*
- $150 + c = 154$
- Primjer: *Ana ima 6 bombona. Koliko bombona treba još kupiti kako bi imala ukupno 10 bombona?*

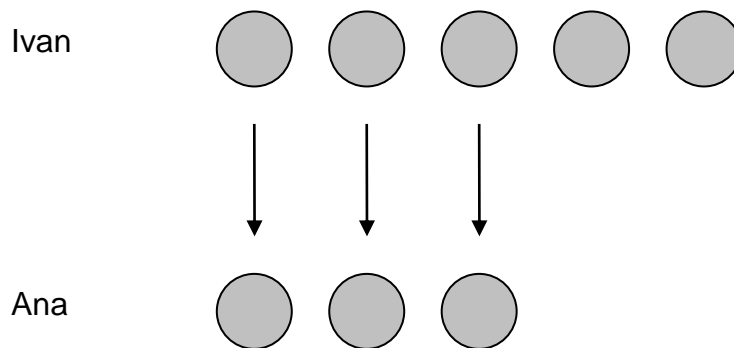


Još jedan primjer je onaj s blagajnicama: *Zamislimo da smo kupili bilježnicu koja košta 27 kn i na blagajni dajemo novčanicu od 100 kn.*

Kod ovog modela učenicima je posebno zgodno istaknuti da se rezultat oduzimanja naziva **razlika**

# Oduzimanje: Model usporedbe

- Model usporedbe se odnosi na tekstualne zadatke u kojima kontekst sugerira da umanjnik i umanjitelj uparujemo i uspoređujemo kako bismo dobili njihovu razliku.
- Npr. *Ivan ima 5 bombona, a Ana 3. Želimo znati koliko više bombona ima Ivan u odnosu na Anu.*

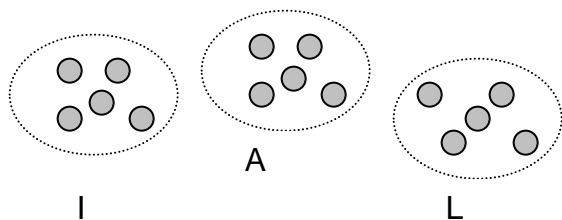


# Modeli množenja

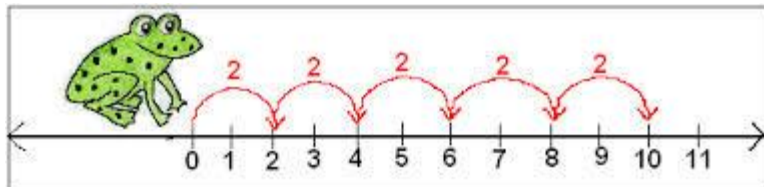
- Model skupa
- Model brojevnog pravca
- Uzastopno zbrajanje jednakih pribrojnika
- Model (površine) pravokutnika
- Skaliranje
- Kartezijev model
- Kombinatorni model

# Zbrajanje jednakih pribrojnika

- *Ivan ima 5 kn, Ana ima 5 kn i Luka ima 5 kn. Koliko novaca imaju zajedno?*
- *Ovo zbrajanje  $5 + 5 + 5 = 15$  možemo zapisati kao  $3 \cdot 5 = 15$ .*



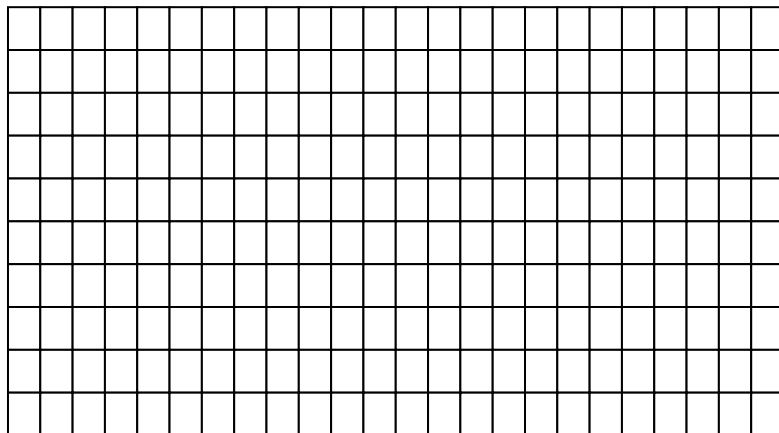
*Žabica u jednom skoku preskoči 2 cm. Koliko centimetara će prevaliti u pet takvih skokova?*



Problem: množenje brojeva

# Model površine pravokutnika

- Umnožak prirodnih brojeva  $a \cdot b$  možemo shvatiti kao površinu pravokutnika s  $a$  redaka, pri čemu u svakom retku ima  $b$  elemenata.
- Primjer: *Za terasu pravokutnog oblika potrebno je točno 24 pločice u jednom retku. Koliko će takvih pločica biti potrebno ako je za popločavanje cijele terase potrebno 10 takvih redaka? Nacrtaj sliku. Izračunaj.*



10 redova,  
u svakom po 24 pločice

$$10 \cdot 24 = 240$$

# Model množenja: Skaliranje

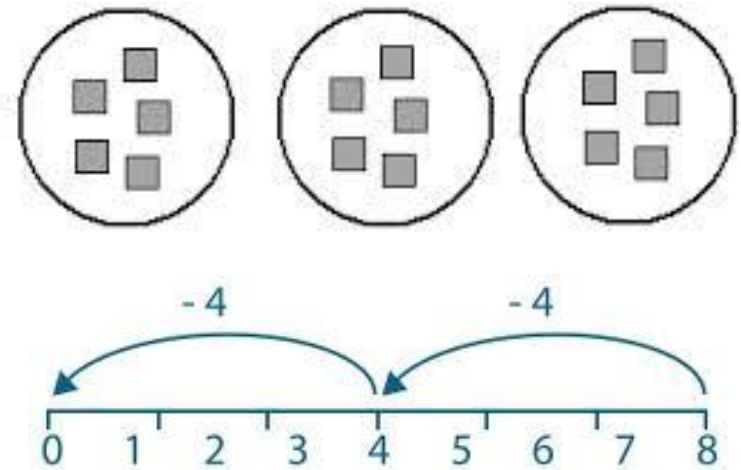
- Skaliranje se odnosi na aktivnosti množenja  $\lambda \cdot a$ , pri čemu  $\lambda$  može biti bilo koji broj. Takav model se prikazuje na brojevnom pravcu i ne odnosi se samo na skup  $\mathbf{N}$ . Ako su  $\lambda$  i  $a$  prirodni brojevi, onda se ovaj model svodi na spomenuti model množenja na brojevnom pravcu, ali zgodno ga je još jednom spomenuti u obliku skaliranja jer se kasnije lijepo može nadograditi i na skupove  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$ .
- Primjer: *Prilikom ispisa dokumenta s računala postoje opcije: 1x, 2x, 3x, 4x. Opcija 1x znači da će slika biti ispisana u prirodnoj veličini. Opcija 2x znači da će slika biti ispisana u dvostruko većoj veličini. Što bi značile opcije 3x i 4x? Navedi primjer. Što misliš, što bi značila opcija 0.5x?*

# Kombinatorni model

- Primjer: *U sendvič-baru moguće je birati 3 vrste sendviča (s kulenom, pršutom i vegetarijanski), te 2 vrste priloga (majoneza i ajvar). Koliko različitih vrsta sendviča je moguće dobiti u tom sendvič-baru?*
- Kombinatorni model možemo prikazati u obliku Kartezijevog modela i modela stabla. Oba oblika simbolički se mogu prikazati kao uređeni parovi  $(a, b)$  svih mogućnosti s elementima iz oba skupa.

# Modeli dijeljenja

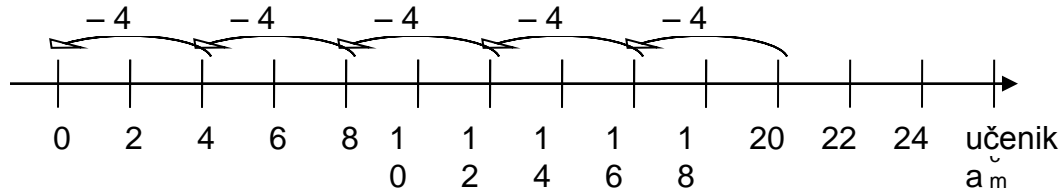
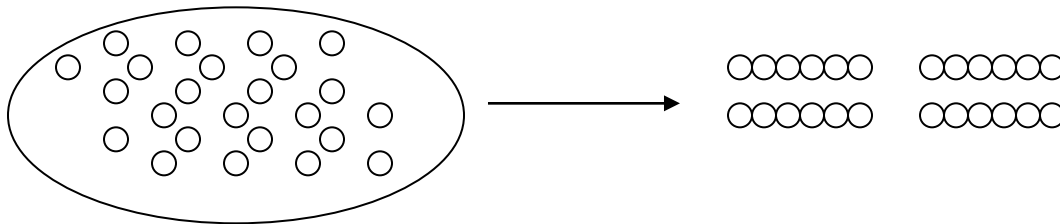
- Skupovni model
- Brojevni pravac





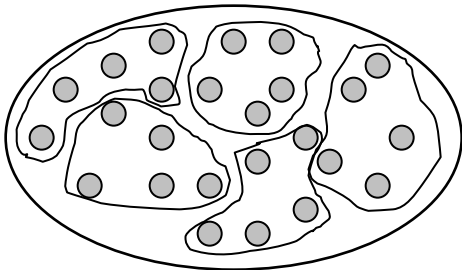
# Partitivno dijeljenje

- Kod partitivnog dijeljenja je poznata količina koju treba razdijeliti na jednake dijelove te je poznat i broj dijelova.
- *Razred od 20 učenika treba podijeliti u četiri ekipe tako da u svakoj ekipi bude jednako mnogo djece. Koliko članova će imati svaka ekipa?*
- $20 : 4 = ?$



# Mjerno dijeljenje

- Kod mjernog dijeljenja je poznata veličina svakog dijela, ali ne i broj jednakih dijelova na koje trebamo razdijeliti zadanu veličinu.
- *Razred od 25 učenika je podijeljen u ekipe tako da je u svakoj ekipi petero djece. Koliko ekipa ima?*
- $25 : ? = 5$



Ovo dijeljenje možemo gledati i na brojevnom pravcu, ali sada od 25 učenika oduzimamo po 5 učenika i gledamo koliko takvih skupina ima.

- Ovo su bili modeli zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja prirodnih brojeva
- Ne vrijede svi za cijele, racionalne i realne brojeve!
- Što se događa ako se forsira samo skupovni model?

$$-5 + 12 = 7$$

- *Navečer je bilo 5 stupnjeva ispod nule. Tijekom noći je zbog naleta toplog vjetrova temperatura narasla za 12 stupnjeva. Kolika je temperatura izmjerena ujutro?*

Radi se o toplom vjetru, zar ne? ... Zbog toga je noću plus 12 stupnjeva, dakle noću, jer je zapuhao vjetar... prvo na večer ... tada je bilo 5 stupnjeva, minus. I tada je, ... došao topao vjetar. On je donio topli zrak i tada je bilo plus 12 stupnjeva, i ujutro je još uvijek temperatura mogla biti u plusu.

**I: A koliko je iznosila?**

U: 7 stupnjeva. Zato što se zrak nekako izmiješao, zar ne?

**I: Možeš li to nekako nacrtati?**

U: Moram li crtati tri termometra?

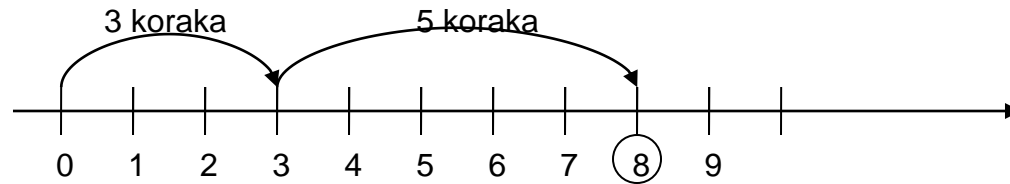
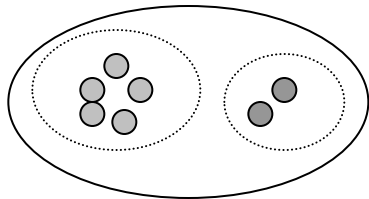
Izvor: Malle, G. (1988): *Die Entstehung neuer Denkgegenstände – untersucht am Beispiel der negativen Zahlen*. In: W. Dörfler (ed.), *Kognitive Aspekte mathematischer Begriffsentwicklung*, Hölder-Pichler-Tempsky, Vienna, 259-319.

# Hrvatska...

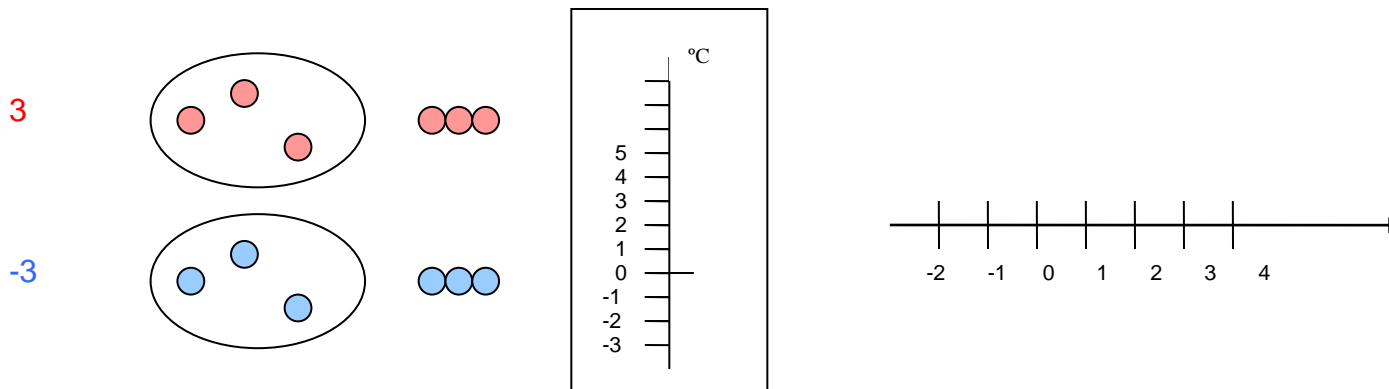
<b>Razr.</b>	<b>Skup</b>	<b>Broj. pravac (promjena)</b>	<b>Mješ. zad.</b>	<b>Ukupan broj zadataka riječima sa zbrajanjem</b>
1.	48,5 %	48,5 %	3,0 %	33
2.	68,3 %	26,8 %	4,9 %	82
3.	58,3 %	37,5 %	4,2 %	72
4.	63,6 %	13,6 %	22,7 %	44
5.	70 %	20 %	10 %	10
6.	0 %	0 %	0 %	0

# Modeli prirodnih i cijelih brojeva

- Prirodni brojevi: skupovni model i brojevni pravac



## Cijeli brojevi: model brojevnog pravca



# Zaključak

- Model skupa i model brojevnog pravca
- Rad s prirodnim brojevima bi trebao uključivati diskretnu pripremu za ostale skupove brojeva, gdje je to moguće.
- Rezultati istraživanja u Njemačkoj pokazuju da dominacija skupovnog modela kod prirodnih brojeva može dovesti do miskoncepcija kod uvođenja novih skupova brojeva
- Modeli trebaju biti utkani u sve segmente **kurikuluma** za matematiku (predviđeni, implementirani, postignuti)
- Modeli trebaju biti uklopljeni u **udžbenike** (potencijalno implementirani kurikulum)
- Udžbenički sadržaji bi pritom trebali biti prava podrška u pogledu modela i kvalitetnog odabira zadataka, pogotovo onih tekstualnih.
- **Nastavnici** trebaju poznavati modele i koristiti ih u nastavi

**Hvala na pažnji!**

