ŠKOLSKO / GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

14. veljače 2012.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-1.1. (4 boda)

Koliko se kvadrata prirodnih brojeva nalazi između 4^9 i 9^4, ne uključujući ta dva broja?

Rješenje.

Uočimo da je $4^9 = 2^{18} = 512^2$, $9^4 = 3^8 = 81^2$. 1 bod

Stoga su između danih brojeva kvadrati svih brojeva od 82 do 511. 1 bod

Dakle, broj kvadrata između 9^4 i 4^9 je $512 - 81 - 1 = 430$. 2 boda

Zadatak A-1.2. (4 boda)

Neka je a realan broj. Odredi zbroj svih triju rješenja jednadžbe

$$x^3 - a^2x + ax - x + a^2 - a = 0.$$

Rješenje.

Izraz na lijevoj strani dane jednadžbe možemo rastaviti na faktore:

$$\begin{aligned}
x^3 - a^2x + ax - x + a^2 - a &= (x^3 - x) + a^2(-x + 1) + a(x - 1) && \text{1 bod}\\
&= (x-1)\left(x^2 + x - a^2 + a\right) && \text{1 bod}\\
&= (x-1)((x^2 - a^2) + (x + a))\\
&= (x-1)(x+a)(x-a+1) && \text{1 bod}
\end{aligned}$$

Sada je jasno da su rješenja jednadžbe $(x-1)(x+a)(x-a+1) = 0$ brojevi $x = 1$, $x = -a$ i $x = a - 1$, a njihov zbroj je 0. 1 bod

Napomena: Kako je koeficijent uz x^2 jednak 0, zbog Vietéovih formula odmah slijedi da je zbroj rješenja dane jednadžbe jednak nuli.

Zadatak A-1.3. (4 boda)

Ako je $a + b = 4$ i $a^2 + b^2 = 14$, odredi $a^3 + b^3$.

Prvo rješenje.

Vrijedi $ab = \frac{1}{2}\left((a+b)^2 - (a^2 + b^2)\right) = \frac{1}{2}(4^2 - 14) = 1$. 1 bod

Sada je

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)((a^2 + b^2) - ab) = 4 \cdot (14 - 1) = 52.$$ 3 boda

Drugo rješenje.

Riješimo sustav jednadžbi $a+b=4$, $a^2+b^2=14$.

$$\begin{aligned} a^2+(4-a)^2&=14\\ a^2-4a+1&=0\\ (a-2)^2&=3 \end{aligned}$$ 1 bod

Odavde je $a-2=\pm\sqrt{3}$.

Rješenja sustava su $(a,b)=\left(2+\sqrt{3},2-\sqrt{3}\right)$ i $(a,b)=\left(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}\right)$. 1 bod

U oba slučaja je

$$\begin{aligned} a^3+b^3&=\left(2+\sqrt{3}\right)^3+\left(2-\sqrt{3}\right)^3\\ &=\left(2^3+3\cdot2^2\cdot\sqrt{3}+3\cdot2\cdot(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^3\right)+\left(2^3-3\cdot2^2\cdot\sqrt{3}+3\cdot2\cdot(\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^3\right)\\ &=2\cdot8+2\cdot3\cdot2\cdot(\sqrt{3})^2=52. \end{aligned}$$ 2 boda

Zadatak A-1.4. (4 boda)

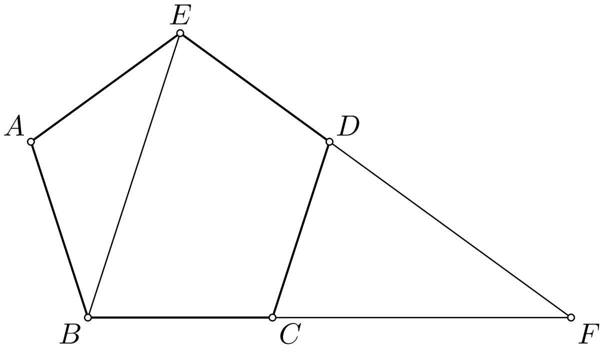
Dan je pravilni peterokut $ABCDE$. Pravci BC i DE sijeku se u točki F. Odredi kutove trokuta BEF.

Prvo rješenje.

Kutovi u vrhovima pravilnog peterokuta iznose 108°. 1 bod

Stoga je $\sphericalangle FDC=\sphericalangle DCF=180^\circ-108^\circ=72^\circ$, pa je

$$\sphericalangle EFB=\sphericalangle DFC=180^\circ-2\cdot72^\circ=36^\circ.$$ 1 bod



Trokut DCF je jednakokračan i vrijedi $|DF|=|FC|$. Budući je $|ED|=|BC|$, vrijedi $|EF|=|ED|+|DF|=|BC|+|CF|=|BF|$. 1 bod

Dakle, trokut BEF je jednakokračan pa je

$$\sphericalangle FEB=\sphericalangle FBE=\frac{1}{2}(180^\circ-\sphericalangle EFB)=72^\circ.$$ 1 bod

Kutovi trokuta BEF su $\sphericalangle BEF=\sphericalangle EBF=72^\circ$ i $\sphericalangle BFE=36^\circ$.

Drugo rješenje.

Kutovi u vrhovima pravilnog peterokuta iznose 108°. 1 bod

Stoga u jednakokračnom trokutu AEB imamo $\sphericalangle ABE = \sphericalangle AEB = 36°$, 1 bod

pa je $\sphericalangle EBF = \sphericalangle ABF - \sphericalangle ABE = 108° - 36° = 72°$ 1 bod
i analogno $\sphericalangle BEF = 72°$.

Treći kut u trokutu ABD iznosi $180° - 2 \cdot 72° = 36°$. 1 bod

Napomena: Učenik koji bez obrazloženja koristi činjenicu da je $BE \parallel CD$ gubi 1 bod.

Zadatak A-1.5. (4 boda)

Eleonora ima mnogo kocki čije su sve strane bijele boje. Najprije odvoji jednu kocku i stavi ju u praznu kutiju. Zatim uzima jednu po jednu kocku i oboji neke njene strane zelenom bojom, ali tako da se ta kocka razlikuje od svih koje su već u kutiji, te i tu kocku stavlja u kutiju. Koliko najviše kocki može biti u kutiji?

Rješenje.

U kutiji je samo jedna kocka bez zelenih strana, i jedna kocka s jednom zelenom stranom. Također, samo je jedna kocka kojoj su sve strane obojene i jedna kocka s pet obojenih strana. 1 bod

Kocke s dvije zelene strane nisu sve jednake, jer obojene strane mogu biti susjedne ili nasuprotne. Stoga su u kutiji dvije takve kocke.
Kocke s četiri obojene strane (i dvije obojene strane) su također dvije. 1 bod

Na kraju, postoje dvije kocke s tri zelene strane: na jednoj su obojene sve tri strane uz jedan vrh, a na drugoj dvije suprotne strane i jedna strana između njih. 1 bod

Dakle, Eleonora je u kutiju mogla staviti najviše $1+1+2+2+2+1+1 = 10$ različitih kocki. 1 bod

Zadatak A-1.6. (10 bodova)

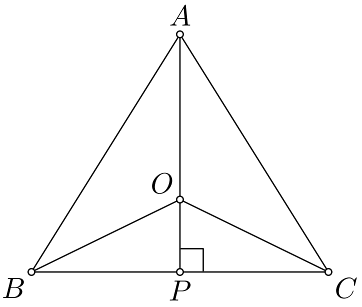
Polumjer opisane kružnice jednakokračnog trokuta s osnovicom duljine a i krakovima duljine b iznosi R. Dokaži da vrijedi jednakost $a^2R^2 + b^4 = 4b^2R^2$, bez obzira je li trokut šiljastokutan, pravokutan ili tupokutan.

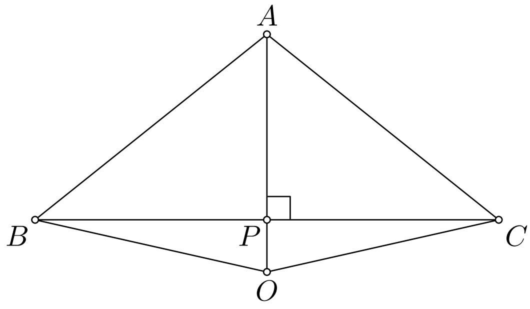
Prvo rješenje.

Neka je ABC jednakokračni trokut takav da je $|BC| = a$ i $|AB| = |AC| = b$. Neka je O središte tom trokutu opisane kružnice, a P polovište dužine $\overline{BC}$. Budući da je trokut ABC jednakokračan, točka O leži na pravcu AP. Označimo $|OP| = x$.

Iz pravokutnog trokuta APC dobivamo $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (R+x)^2 = b^2$, 1 bod

a iz trokuta OPC $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + x^2 = R^2$. 1 bod





Riješimo dobiveni sustav

$$\begin{cases} \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + (R+x)^2 = b^2 \\ \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + x^2 = R^2 \end{cases}$$

1 bod

$$\begin{cases} \frac{1}{4}a^2 + R^2 + 2Rx + x^2 = b^2 \\ \frac{1}{4}a^2 + x^2 = R^2 \end{cases}$$

Oduzimanjem dobivamo $2R^2 + 2Rx = b^2$, odnosno $x = \dfrac{b^2}{2R} - R$. 2 boda

Uvrštavanjem u $a^2 + 4x^2 = 4R^2$ dobivamo

$$a^2 + 4\left(\frac{b^2}{2R} - R\right)^2 = 4R^2$$

odakle slijedi $a^2 + \dfrac{b^4}{R^2} = 4b^2$ i željena jednakost. 3 boda

U slučaju pravokutnog trokuta vrijedi $a = b\sqrt{2}$ i $R = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\,b\sqrt{2}$,

pa je $a^2R^2 + b^4 = 2b^2 \cdot \dfrac{1}{2}b^2 + b^4 = 2b^4 = 4b^2 \cdot \dfrac{1}{2}b^2 = 4b^2R^2$. 2 boda

Napomena: Dokaz za šiljastokutni i tupokutni trokut vrijedi 8 bodova, a za pravokutni trokut 2 boda. Dokaz tvrdnje samo u slučaju šiljastokutnog (ili samo tupokutnog) trokuta vrijedi 6 bodova.

Drugo rješenje.

Koristeći formulu za površinu trokuta $P = \dfrac{abc}{4R}$ zadatak se rješava vrlo jednostavno.

Duljina visine trokuta je, zbog Pitagorinog poučka, $v = \sqrt{b^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}$, 1 bod

pa je njegova površina $P = \dfrac{av}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{b^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2}$. 2 boda

S druge strane, koristeći spomenutu formulu za površinu dobivamo $P = \dfrac{ab^2}{4R}$. 2 boda

Slijedi $\dfrac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2} = \dfrac{ab^2}{4R}$ 2 boda

odakle dobivamo $4b^2R^2 - a^2R^2 = b^4$ što je ekvivalentno željenoj jednakosti. 3 boda

Zadatak A-1.7. (10 bodova)

Ana ima četiri puta toliko godina koliko je imao Petar kada je Ana imala toliko godina koliko Petar ima sada. Kada Petar bude imao toliko godina koliko Ana ima sada, oboje zajedno će imati 95 godina. Koliko godina ima Ana, a koliko Petar?

Rješenje.

Označimo broj Aninih godina s A, a broj Petrovih godina s P.

Ana imala P godina (koliko Petar ima sada) prije $A - P$ godina. 1 bod

Prije $A - P$ godina Petar je imao $P - (A - P) = 2P - A$ godina, 1 bod

pa po uvjetu zadatka Ana danas ima $4(2P - A)$ godina, dakle vrijedi $A = 4(2P - A)$. 1 bod

Petar će imati A godina (koliko Ana ima sada) za $A - P$ godina, 1 bod

a Ana će tada imati $A + (A - P) = 2A - P$ godina 1 bod

pa prema uvjetu zadatka vrijedi $(2A - P) + A = 95$, tj. $3A - P = 95$. 1 bod

Rješavanjem dobivenog sustava $A = 4(2P - A)$, $3A - P = 95$ 1 bod

dobivamo $A = 40$, $P = 25$. 3 boda

Ana ima 40 godina, a Petar 25.

Zadatak A-1.8. (10 bodova)

Odredi sve parove prostih prirodnih brojeva p i q za koje postoji cijeli broj a takav da vrijedi $a^4 = pa^3 + q$.

Rješenje.

Ako su p i q prosti i a cijeli broj za koji vrijedi $a^4 = pa^3 + q$, onda je $a^3(a - p) = q$, te zaključujemo da a^3 dijeli q. 1 bod

Posebno, a dijeli q, a q je prost broj, stoga a može biti samo 1, -1, q ili $-q$. 1 bod

Budući da $a^3 \mid q$, a ne može biti q niti $-q$, što znači da je $a = 1$ ili $a = -1$. 1 bod

Ako je $a = 1$, onda je $1 - p = q$, no takvi prosti brojevi ne postoje. U ovom slučaju nema rješenja. 2 boda

Ako je $a = -1$, slijedi $-(-1 - p) = q$, odnosno $1 + p = q$. 1 bod

Dakle, točno jedan od prostih brojeva p i q je paran, tj. jednak 2 2 boda

pa lako zaključujemo da mora biti $p = 2$ i $q = 3$. 2 boda

Napomena: Par $p = 1$, $q = 2$ nije rješenje zadatka, jer 1 nije prost broj. Učeniku koji tvrdi da je i $(1, 2)$ rješenje, treba zbog toga oduzeti 1 bod, ukoliko bi inače imao 7 bodova ili više.

ŠKOLSKO / GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

14. veljače 2012.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-2.1. (4 boda)

Za koje vrijednosti realnog parametra m jednadžba

$$(m-1)x^2 - 2mx + 2 = 0$$

nema negativnih realnih rješenja?

Prvo rješenje.

Za $m = 1$ promatrana jednadžba je linearna ($-2x + 2 = 0$), a njeno rješenje $x = 1$ nije negativno. 1 bod

Za $m \neq 1$, diskriminanta jednadžbe

$$D = 4m^2 - 4 \cdot 2 \cdot (m-1) = 4m^2 - 8m + 8 = (2m-2)^2 + 4$$

je pozitivna, pa ta kvadratna jednadžba ima uvijek dva realna rješenja, x_1 i x_2.

Uvjeti $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$ su ispunjeni ako i samo ako je $x_1 + x_2 \geqslant 0$ i $x_1 x_2 \geqslant 0$. 1 bod

Primjenom Vietéovih formula dobivamo

$$x_1 + x_2 = \frac{2m}{m-1}, \quad x_1 x_2 = \frac{2}{m-1}.$$

Dakle, mora vrijediti $\dfrac{2m}{m-1} \geqslant 0$, $\dfrac{2}{m-1} \geqslant 0$. 1 bod

Iz prve nejednakosti slijedi $m \in \langle -\infty, 0] \cup \langle 1, \infty \rangle$, a iz druge $m > 1$. 1 bod

Konačno, početna jednadžba nema negativnih rješenja za $m \geqslant 1$.

Drugo rješenje.

Za $m \neq 1$, rješenja dane kvadratne jednadžbe su

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{2m \pm \sqrt{4m^2 - 4 \cdot 2 \cdot (m-1)}}{2(m-1)} \\ &= \frac{m}{m-1} \pm \frac{\sqrt{m^2 - 2m + 2}}{(m-1)}. \end{aligned}$$

Da bi oba rješenja bila nenegativna, mora biti

$$m - 1 > 0 \quad \text{i} \quad m - \sqrt{m^2 - 2m + 2} \geqslant 0$$

ili

$$m - 1 < 0 \quad \text{i} \quad m + \sqrt{m^2 - 2m + 2} \leqslant 0$$ 1 bod

1. slučaj

$m-1>0$ i $m-\sqrt{m^2-2m+2}\geqslant 0$

Slijedi $m^2 \geqslant m^2-2m+2$, tj. $m\geqslant 1$.
Rješenje su svi $m>1$. 1 bod

2. slučaj

$m-1<0$ i $m+\sqrt{m^2-2m+2}\leqslant 0$

Očito mora biti $m<0$, pa kvadriranjem $\sqrt{m^2-2m+2}\leqslant -m$ dobivamo $m^2-2m+2\leqslant m^2$, odnosno $m\geqslant 1$.
U ovom slučaju nema rješenja. 1 bod

Za $m=1$ jednadžba je linearna i nema negativnih realnih rješenja. 1 bod

Dakle, početna jednadžba nema negativnih rješenja za $m\geqslant 1$.

Zadatak A-2.2. (4 boda)

Ante je napisao redom sve prirodne brojeve od 1 do 40, jednog za drugim bez razmaka i tako dobio mnogoznamenkasti broj 12345...383940. Zatim je odlučio obrisati 60 znamenaka tog broja. Koji najveći broj Ante može dobiti na taj način?

Rješenje.

Napisani broj ima $9+31\cdot 2=71$ znamenku. Nakon što izbriše 60 znamenaka, Ante će dobiti 11-znamenkasti broj. 1 bod

Dobiveni broj će biti najveći mogući ako su mu početne znamenke što veće pa umjesto da brišemo znamenke, odlučit ćemo koje znamenke zadržati da dobijemo što veći 11-znamenkasti broj (ne mijenjajući poredak znamenaka).

Taj broj može početi s najviše tri znamenke 9. 1 bod

Naime, među napisanim znamenkama su četiri znamenke 9 (u brojevima 9, 19, 29, 39), no nakon četvrte znamenke 9 preostaju još samo dvije znamenke (4 i 0) pa ne bismo dobili 11-znamenkasti broj.

Dakle, prve tri znamenke su 9, i to iz brojeva 9, 19 i 29. Preostalih 8 znamenaka odabrat ćemo među znamenkama

$$30\ 31\ 32\ 33\ 34\ 35\ 36\ 37\ 38\ 39\ 40.$$

Četvrta znamenka ne može biti 8 niti 7 jer dobiveni broj ne bi mogao imati 13 znamenaka. Stoga uzmimo za četvrtu znamenku znamenku 6 (iz broja 36). 1 bod

Preostalih sedam znamenaka odabiremo među znamenkama: 37 38 39 40
pa je jasno da ćemo izbaciti još samo prvu znamenku 3.

Najveći broj koji može dobiti na opisani način je broj 99967383940. 1 bod

Zadatak A-2.3. (4 boda)

Trokut površine $1.5\,\mathrm{cm}^2$ upisan je u kružnicu polumjera $1.25\,\mathrm{cm}$ i pritom je jedna stranica trokuta promjer te kružnice. Kolike su duljine stranica tog trokuta?

Rješenje.

Ako je jedna stranica trokuta promjer opisane kružnice, prema Talesovom poučku slijedi da je trokut pravokutan i da je ta stranica hipotenuza.
Dakle, jedna stranica je $c = 2 \cdot 1.25 = 2.5$. 1 bod

Za duljine kateta a i b vrijedi

$$a^2 + b^2 = (2.5)^2, \qquad \frac{a \cdot b}{2} = 1.5. \qquad \text{1 bod}$$

Uvrštavanjem $b = 3/a$ u prvu jednadžbu dobivamo

$$a^2 + \left(\frac{3}{a}\right)^2 = \frac{25}{4},$$

odnosno $a^4 - 6.25a^2 + 9 = 0$. 1 bod

Odavde dobivamo $a^2 = 2.25$ ili $a^2 = 4$, odnosno $a = 1.5$ ili $a = 2$.

Konačno, $b = 3/1.5 = 2$ i $b = 3/2 = 1.5$. 1 bod

Prema tome, duljine stranica trokuta su $1.5\,\text{cm}$, $2\,\text{cm}$ i $2.5\,\text{cm}$.

Zadatak A-2.4. (4 boda)

Za koje $x \in \mathbb{R}$ je broj $\sqrt[3]{4+4x}$ veći od broja $1 + \sqrt[3]{x}$?

Rješenje.

Tražimo sve $x \in \mathbb{R}$ koji zadovoljavaju nejednakost $\sqrt[3]{4+4x} > 1 + \sqrt[3]{x}$. Ona je ekvivalentna sljedećim nejednakostima:

$$\sqrt[3]{4+4x} > 1 + \sqrt[3]{x}$$

$$4 + 4x > 1 + 3\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[3]{x^2} + x$$

$$x - \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1 > 0$$

$$(\sqrt[3]{x^2} - 1)(\sqrt[3]{x} - 1) > 0 \qquad (*) \qquad \text{2 boda}$$

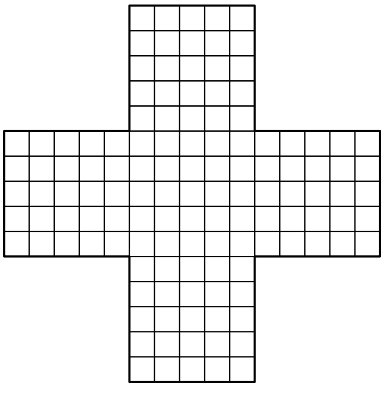
$$(\sqrt[3]{x} - 1)^2(\sqrt[3]{x} + 1) > 0.$$

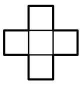
Prvi faktor je strogo pozitivan za sve $x \neq 1$, pa je cijeli izraz s lijeve strane pozitivan kada je $x \neq 1$ i $\sqrt[3]{x} + 1 > 0$, odnosno za $x \in \langle -1, 1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$. 2 boda

Broj $\sqrt[3]{4+4x}$ veći je od broja $1 + \sqrt[3]{x}$ ako i samo ako je x veći od -1 i različit od 1.

Napomena: Zadatak se može riješiti i analizirajući faktore u (*).

Zadatak A-2.5. (4 boda)



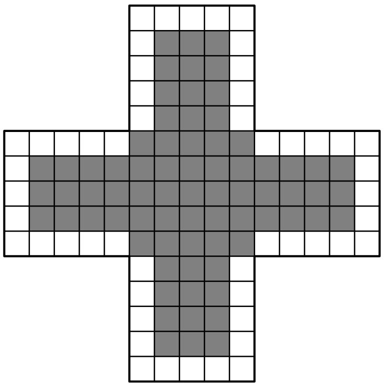
Lik  koji se sastoji od pet jediničnih kvadratića zovemo "*plus*". Na koliko se načina *plus* može smjestiti na *ploču* istog oblika koja se sastoji od $5 \cdot 5^2$ jediničnih kvadratića, tako da prekriva točno pet jediničnih kvadratića?

Prvo rješenje.

Primijetimo da je položaj plusa jednoznačno određen položajem njegovog središnjeg kvadratića. 1 bod

Središnji kvadratić možemo smjestiti na sve kvadratiće koji se nalaze u unutrašnjosti ploče (tj. koji su sa svih strana susjedni ostalim kvadratićima ploče), a ne možemo smjestiti na rubne kvadratiće ploče jer bi onda jedan od preostalih kvadratića plusa bio izvan ploče. 1 bod

Ploča ukupno ima 125 kvadratića, a rubnih kvadratića ima 52, pa plus možemo smjestiti na $125 - 52 = 73$ načina. 2 boda



Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju zaključimo da središnji kvadratić treba smjestiti u unutrašnjost ploče. 2 boda

Unutrašnji kvadratići su svi u unutrašnjem kvadratu 5×5 i po 3×4 kvadratića u svakom od četiri vanjska kvadrata 5×5.

Dakle, broj traženih položaja je $25 + 4 \cdot 12 = 73$. 2 boda

Zadatak A-2.6. (10 bodova)

Odredi sve prirodne brojeve manje od 1000 koji su jednaki zbroju kvadrata svojih znamenaka.

Rješenje.

Neka je traženi broj $n = \overline{abc}$. (Dozvolit ćemo da vodeće znamenke budu 0).
Želimo da bude $a^2 + b^2 + c^2 = 100a + 10b + c$.

Kako su a, b i c znamenke, vrijedi $a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 3 \cdot 9^2 = 243$ pa mora biti $a \leqslant 2$. 2 boda

Dalje zaključujemo da je $a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 2^2 + 9^2 + 9^2 = 166$ pa je $a \leqslant 1$. 2 boda

1. slučaj. Neka je $a = 1$. Tada je $b^2 + c^2 = 99 + 10b + c$.

No, $b^2 \leqslant 10b$ i $c^2 \leqslant 81 < 99 + c$, pa je lijeva strana strogo manja od desne i jednakost ne može biti ispunjena. 2 boda

2. slučaj. Neka je $a = 0$. Tada je $b^2 + c^2 = 10b + c$,

što možemo zapisati u obliku $b\,(10 - b) = c\,(c - 1)$. 1 bod

Izraz $b\,(10 - b)$ može biti $0 \cdot 10 = 0$, $1 \cdot 9 = 9$, $2 \cdot 8 = 16$, $3 \cdot 7 = 21$, $4 \cdot 6 = 24$ i $5 \cdot 5 = 25$,

a izraz $c\,(c - 1)$ može biti 0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56 ili 72. 1 bod

Stoga mora biti $b\,(10 - b) = c\,(c - 1) = 0$, tj. $b = 0$ i $c \in \{0, 1\}$. 1 bod

Jedini prirodni broj manji od 1000 sa zadanim svojstvom je broj 1. 1 bod

Zadatak A-2.7. (10 bodova)

Odredi i skiciraj u kompleksnoj ravnini skup svih brojeva z koji zadovoljavaju uvjet

$$\operatorname{Re}\left[(4 + 3i)z^2\right] \geqslant 0.$$

Prvo rješenje.

Uvrštavanjem $z = x + iy$ dobivamo

$$\begin{aligned}(4+3i)\,z^2 &= (4+3i)\,(x+iy)^2\\ &= 4x^2-4y^2-6xy+i\left(3x^2-3y^2+8xy\right),\end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}\left[(4+3i)z^2\right] = 4x^2-4y^2-6xy.$$ 2 boda

Treba odrediti skup svih parova (x, y) realnih brojeva koji zadovoljavaju uvjet

$$4x^2-4y^2-6xy \geqslant 0.$$

Sređivanjem dobijemo:

$$4x^2-6xy+\frac{9}{4}y^2 \geqslant 4y^2+\frac{9}{4}y^2$$

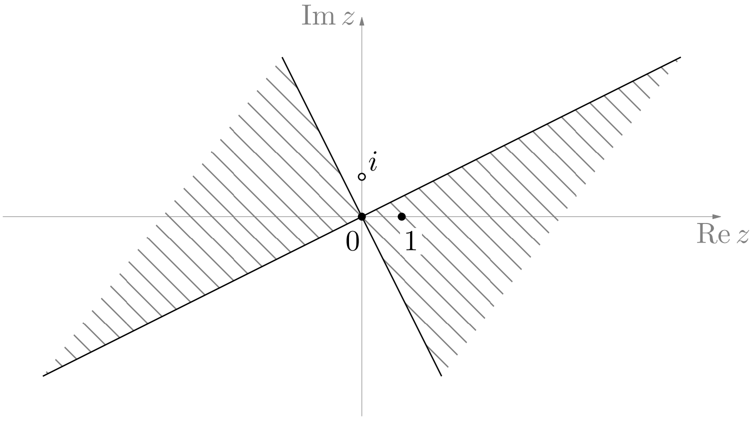
$$\left(2x-\frac{3}{2}y\right)^2 \geqslant \left(\frac{5}{2}y\right)^2$$ 2 boda

odakle slijedi:

$$(x-2y)(2x+y) \geqslant 0.$$ 2 boda

Traženi skup je dio ravnine omeđen pravcima $x - 2y = 0$ i $2x + y = 0$ 1 bod

kao na slici:



3 boda

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju dobijemo $\operatorname{Re}\left[(4+3i)z^2\right] = 4x^2-4y^2-6xy.$ 2 boda

Rješavamo nejednadžbu $4x^2-4y^2-6xy \geqslant 0$

$$2x^2-2y^2-3xy \geqslant 0$$

$$2\,\frac{y^2}{x^2}+3\,\frac{y}{x}-2 \leqslant 0.$$

Označimo li $k = \dfrac{y}{x}$, mora vrijediti $2k^2+3k-2 \leqslant 0.$ 2 boda

Ovu kvadratnu nejednadžbu zadovoljavaju svi $k \in \left[-2, \frac{1}{2}\right]$. 2 boda

Dakle $-2 \leqslant \frac{y}{x} \leqslant \frac{1}{2}$ pa je traženi skup omeđen pravcima

$$y = -2x \qquad \text{i} \qquad y = \frac{1}{2}x,$$ 1 bod

kao na slici (v. prvo rješenje). 3 boda

Zadatak A-2.8. (10 bodova)

U šiljastokutnom trokutu ABC točka M je nožište visine iz vrha A, a točka N nožište visine iz vrha B. Ako je $|AN| = |NM|$, dokaži da središte upisane kružnice trokuta ABC leži na visini $\overline{BN}$.

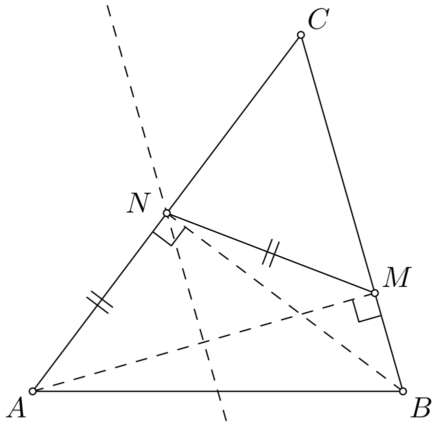
Prvo rješenje.

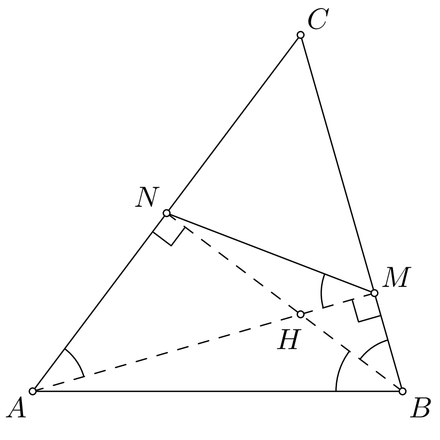
Kako je $|AN| = |NM|$, točka N leži na simetrali dužine $\overline{AM}$, 2 boda

a kako je trokut AMC pravokutan zaključujemo da je točka N polovište njegove hipotenuze $\overline{AC}$. 2 boda

Dakle, nožište visine iz vrha B je polovište nasuprotne stranice. To znači da je trokut ABC jednakokračan i vrijedi $|AB| = |BC|$. 4 boda

Sada je jasno da je pravac BN simetrala kuta $\sphericalangle ABC$ pa središte upisane kružnice trokuta leži na njemu. 2 boda





Drugo rješenje.

Vrijedi $\sphericalangle ANB = \sphericalangle AMB = 90^\circ$ pa prema Talesovom teoremu znamo da točke A, N, M i B leže na istoj kružnici. 2 boda

Sada vidimo da je $\sphericalangle NAM = \sphericalangle NBM$ (obodni kutovi nad lukom $\widehat{NM}$) i $\sphericalangle NMA = \sphericalangle NBA$ (obodni kutovi nad lukom $\widehat{AN}$). 2 boda

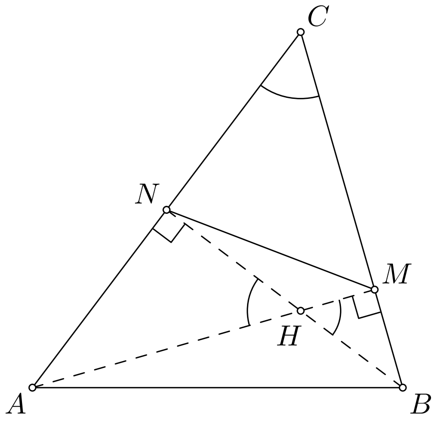
Kako je $|AN| = |NM|$, trokut ANM je jednakokračan pa je $\sphericalangle NAM = \sphericalangle NMA$. 2 boda

Iz svega slijedi da je $\sphericalangle NBA = \sphericalangle NBM$ 2 boda

pa zaključujemo da je $\overline{BN}$ simetrala kuta $\sphericalangle ABC$ i zbog toga središte upisane kružnice trokuta ABC leži na $\overline{BN}$. 2 boda

Treće rješenje.

Pokažimo i kako se zadatak može riješiti primjenom trigonometrije pravokutnog trokuta. Označimo ortocentar trokuta (sjecište dužina $\overline{AM}$ i $\overline{BN}$) s H. Neka je $\gamma = \sphericalangle BCA$ i $\alpha = \sphericalangle BAC$.



Uočimo da je $\sphericalangle NBC = \sphericalangle MAC = 90^\circ - \gamma$, $\sphericalangle BHM = \sphericalangle AHN = \gamma$.

Iz pretpostavke $|AN| = |NM|$ slijedi $\sphericalangle NMA = \sphericalangle MAN = 90^\circ - \gamma$. Stoga je $\sphericalangle BMN = 90^\circ + (90^\circ - \gamma) = 180^\circ - \gamma = \sphericalangle MHN$.

Zato su trokuti MNH i BNM slični (kut u vrhu N je zajednički), 3 boda

pa vrijedi

$$\frac{|MN|}{|HN|} = \frac{|BN|}{|MN|}.$$ 2 boda

Koristeći $|AM| = |MN|$, iz pravokutnog trokuta AHN dobivamo $\frac{|MN|}{|HN|} = \frac{|AN|}{|HN|} = \operatorname{tg}(\sphericalangle AHN) = \operatorname{tg}\gamma$. 1 bod

Iz pravokutnog trokuta ANB vidimo da je $\frac{|BN|}{|MN|} = \frac{|BN|}{|AN|} = \operatorname{tg}(\sphericalangle BAN) = \operatorname{tg}\alpha$. 1 bod

Stoga iz dokazane sličnosti slijedi $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\gamma$, odnosno $\alpha = \gamma$. 1 bod

Trokut je jednakokračan ($|AB| = |BC|$) pa je simetrala kuta $\sphericalangle ABC$ ujedno i visina, što dokazuje tvrdnju. 2 boda

Napomena: Učeniku koji nije uspio riješiti zadatak, ali je primijetio da treba dokazati da je $|AB| = |BC|$ za to treba dati 1 bod.

ŠKOLSKO / GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

14. veljače 2012.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-3.1. (4 boda)

Riješi jednadžbu $\sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x = 1$.

Prvo rješenje.

Kako su $\sin x$, $\cos 2x$ i $\cos 4x$ brojevi iz intervala $[-1, 1]$ vidimo da sva tri broja moraju biti 1 ili -1. 1 bod

1. slučaj.

Neka je $\sin x = 1$. Tada je $\cos x = 0$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = -1$, $\sin 2x = 0$ i $\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x = 1$. No, tada je $\sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x = -1$ pa u ovom slučaju nema rješenja. 1 bod

2. slučaj.

Neka je $\sin x = -1$. Tada je $\cos x = 0$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = -1$, $\sin 2x = 0$ i $\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x = 1$. U ovom slučaju je $\sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x = -1 \cdot (-1) \cdot 1 = 1$ pa danu jednadžbu zadovoljavaju svi x za koje je $\sin x = -1$. 1 bod

Rješenje dane jednadžbe su svi brojevi oblika $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$ gdje je k cijeli broj. 1 bod

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju zaključujemo da mora biti $\sin x \in \{1, -1\}$. 1 bod

To znači da je $x \in \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ pa dalje imamo $2x \in \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ i $4x \in \{2\pi + 4k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. 1 bod

Stoga je $\cos(2x) = -1$ i $\cos(4x) = 1$. 1 bod

Sada iz početne jednadžbe vidimo da mora biti $\sin x = -1$, pa su rješenja jednadžbe svi brojevi oblika $\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$, za $k \in \mathbb{Z}$. 1 bod

Zadatak A-3.2. (4 boda)

Maja je napisala redom sve prirodne brojeve od 100 do 130, jednog za drugim bez razmaka i tako dobila mnogoznamenkasti broj $100101102\ldots129130$. Zatim je odlučila obrisati 80 znamenaka tog broja. Koji najveći broj Maja može dobiti na taj način?

Rješenje.

Napisani broj ima $3 \cdot 31 = 93$ znamenke. Nakon što izbriše 80 znamenaka, Maja će dobiti 13-znamenkasti broj. 1 bod

Dobiveni broj će biti najveći mogući ako su mu početne znamenke što veće pa umjesto da brišemo znamenke, odlučit ćemo koje znamenke zadržati da dobijemo što veći 13-znamenkasti broj (ne mijenjajući poredak znamenaka).

Taj broj može početi s najviše dvije znamenke 9. 1 bod

Naime, od napisane 93 znamenke samo su tri znamenke 9 (znamenke brojeva 109, 119 i 129), no nakon treće devetke ostaju samo još tri znamenke (130) pa ne možemo dobiti 13-znamenkasti broj.

Dakle, prve dvije znamenke su 9, i to iz brojeva 109 i 119. Preostalih 11 znamenaka odabrat ćemo među znamenkama

$$120\ 121\ 122\ 123\ 124\ 125\ 126\ 127\ 128\ 129\ 130.$$

Treća znamenka ne može biti niti 8 (nakon 8 nalazi se samo šest znamenaka) niti 7 (nakon znamenke 7 nalazi se još devet znamenaka), jer tada dobiveni broj ne bi mogao imati 13 znamenaka. Stoga uzmimo za treću znamenku znamenku 6 (iz broja 126). 1 bod

Preostalih 10 znamenaka odabiremo među znamenkama: 127 128 129 130,

pa vidimo da je najveći broj koji može dobiti na opisani način 9967128129130. 1 bod

Zadatak A-3.3. (4 boda)

Izračunaj $144^{\log_5 1000} : 10^{6\log_5 12}$.

Prvo rješenje.

Vrijedi

$$\frac{144^{\log_5 1000}}{10^{6\log_5 12}} = \frac{\left(12^2\right)^{\log_5 10^3}}{10^{6\log_5 12}} = \frac{12^{6\log_5 10}}{10^{6\log_5 12}} = \left(\frac{12^{\log_5 10}}{10^{\log_5 12}}\right)^6 .$$ 2 boda

Općenito je

$$x^{\log_a y} = \left(a^{\log_a x}\right)^{\log_a y} = a^{\log_a x \log_a y} = \left(a^{\log_a y}\right)^{\log_a x} = y^{\log_a x}$$

pa je $12^{\log_5 10} = 10^{\log_5 12}$ 1 bod

i konačno dobivamo $144^{\log_5 1000} : 10^{6\log_5 12} = 1$. 1 bod

Drugo rješenje.

Odredimo logaritam (po bazi 5) traženog broja:

$$\begin{aligned}\log_5 \frac{144^{\log_5 1000}}{10^{6\log_5 12}} &= \log_5\left(144^{\log_5 1000}\right) - \log_5\left(10^{6\log_5 12}\right) \\ &= \log_5 1000 \cdot \log_5 144 - 6\log_5 12 \cdot \log_5 10 \\ &= \log_5 10^3 \cdot \log_5 12^2 - 6\log_5 12 \cdot \log_5 10 \\ &= 3\log_5 10 \cdot 2\log_5 12 - 6\log_5 12 \cdot \log_5 10 = 0.\end{aligned}$$ 1 bod, 2 boda

Odatle dobivamo $144^{\log_5 1000} : 10^{6\log_5 12} = 1$. 1 bod

Zadatak A-3.4. (4 boda)

Zadana je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$ brida duljine a. Njenim vrhovima A i C_1 te polovištem brida $\overline{BB_1}$ položena je ravnina. Izračunaj površinu presjeka kocke tom ravninom.

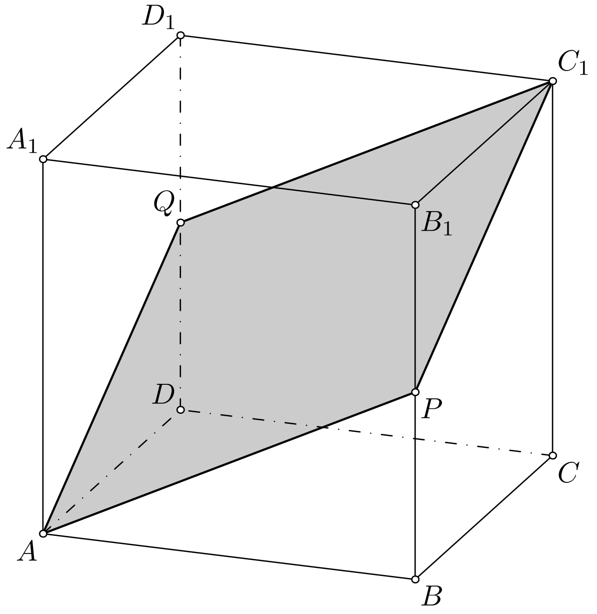
Rješenje.

Neka je P polovište brida $\overline{BB_1}$, a Q polovište brida $\overline{DD_1}$. Budući da je $AP \parallel QC_1$, $PC_1 \parallel AQ$, promatrana ravnina siječe brid $\overline{DD_1}$ u polovištu Q. 1 bod

Stoga je presjek romb APC_1Q, pa je njegova površina $P = \frac{1}{2} \cdot |AC_1| \cdot |PQ|$. 1 bod

Lako se vidi da je $|AC_1| = a\sqrt{3}$ i $|PQ| = a\sqrt{2}$, 1 bod

pa je površina romba $P = \frac{1}{2} \cdot |AC_1| \cdot |PQ| = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{2} = \frac{1}{2}a^2\sqrt{6}$. 1 bod



Napomena: Prvi bod dodjeljuje se za obrazloženje činjenice da ravnina siječe brid $\overline{DD_1}$ u polovištu. Učenik koji ima točan rezultat, ali nije obrazložio spomenutu tvrdnju može dobiti najviše 3 boda.

Napomena: Duljina stranice romba APC_1Q iznosi $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. Učenik koji odredi duljinu stranice, ali ne i površinu presjeka (niti duljine dijagonala), dobit će ukupno 1 bod ili 2 boda, ovisno o tome je li obrazložio gore spomenutu činjenicu.

Zadatak A-3.5. (4 boda)

Ako duljine stranica trokuta zadovoljavaju jednakost $\dfrac{a+b}{b+c}=\dfrac{c}{a-b}$, odredi mjeru najvećeg kuta tog trokuta.

Prvo rješenje.

Iz dane jednakosti redom slijedi

$$\begin{aligned}(a-b)(a+b)&=c(b+c)\\ a^2-b^2&=bc+c^2\\ b^2+c^2-a^2&=-bc\end{aligned}$$ 1 bod

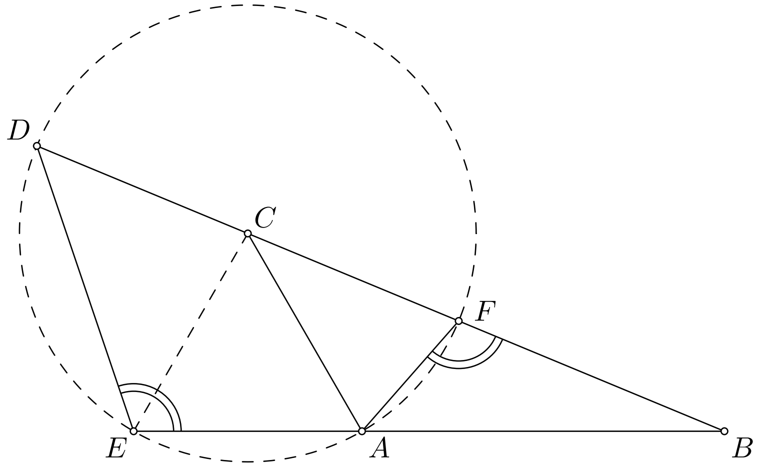
odnosno $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$. 1 bod

Stoga je $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$ 1 bod

te konačno $\alpha=120^\circ$, što je očito najveći kut u trokutu. 1 bod

Drugo rješenje.

Pokažimo i kako se zadatak rješava bez primjene trigonometrije.



Promotrimo trokut ABC sa stranicama duljina $|BC|=a$, $|CA|=b$ i $|AB|=c$ koje zadovoljavaju dani uvjet $\dfrac{a+b}{b+c}=\dfrac{c}{a-b}$.

Neka je D točka na produžetku stranice $\overline{BC}$, E na produžetku stranice $\overline{BA}$ i F na stranici $\overline{BC}$ i neka vrijedi $|CD|=|AE|=|CF|=b=|CA|$.

Tada je $|BD|=a+b$, $|BE|=b+c$ i $|BF|=a-b$ pa iz danog uvjeta slijedi da su trokuti DBE i ABF sa zajedničkim kutom u vrhu B slični. 1 bod

Stoga je $\sphericalangle DEB=\sphericalangle AFB$, odnosno $\sphericalangle DEA+\sphericalangle AFD=180^\circ$, pa je četverokut $DEAF$ tetivan. 1 bod

Uočimo da točke D, F i A leže na kružnici oko točke C polumjera b, pa zbog prethodnog zaključka i točka E leži na toj kružnici. To znači da je $|CE|=b$ pa je trokut ACE jednakostraničan. 1 bod

Zato je $\sphericalangle EAC=60^\circ$, pa vrijedi $\sphericalangle CAB=120^\circ$ i to je najveći kut trokuta ABC. 1 bod

Zadatak A-3.6. (10 bodova)

Odredi sve vrijednosti realnog parametra a za koje jednadžba

$$8^{a \sin^2 x} = 4 \cdot 2^{\cos^2 x}$$

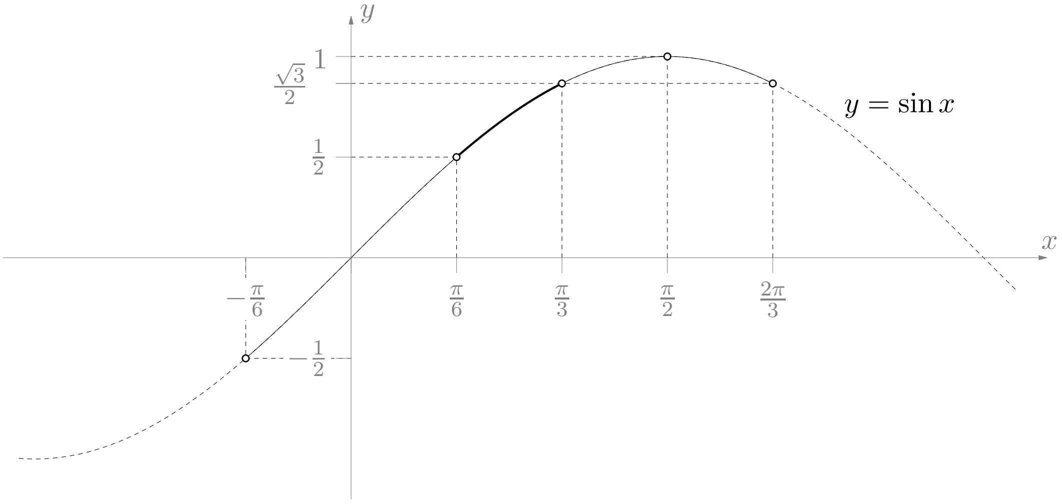
ima točno jedno rješenje u intervalu $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

Rješenje.

Danu jednakost možemo zapisati u obliku $2^{3a \sin^2 x} = 2^{2+\cos^2 x}$,
odakle slijedi $3a \sin^2 x = 2 + \cos^2 x$. 2 boda

Sada je $3a \sin^2 x = 3 - \sin^2 x$, odnosno $\sin^2 x = \dfrac{3}{3a+1}$. 2 boda

Kako je $\sin^2(-x) = \sin^2 x$, $\left|\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right| = \left|\sin\frac{\pi}{6}\right| = \dfrac{1}{2}$ i $\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,
promatrajući graf



zaključujemo da će rješenje dane jednadžbe u intervalu $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ biti jedinstveno ako i samo ako je $\sin x$ u skupu $\left\langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle \cup \{1\}$. 3 boda

Sada lagano zaključujemo da mora biti $\dfrac{1}{4} < \dfrac{3}{3a+1} < \dfrac{3}{4}$ ili $\dfrac{3}{3a+1} = 1$ 1 bod

odakle dobivamo $1 < a < \dfrac{11}{3}$ ili $a = \dfrac{2}{3}$. 2 boda

Napomena: Učenik koji ispusti rješenje $a = \frac{2}{3}$ može imati najviše 9 bodova.

Zadatak A-3.7. (10 bodova)

U trokutu ABC, duljina stranice $\overline{BC}$ je 6, kosinus kuta pri vrhu B jednak je $\dfrac{4}{5}$, a duljina polumjera upisane kružnice iznosi 1. Odredi duljine stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ tog trokuta.

Prvo rješenje.

Neka je $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$, $\sphericalangle ABC = \beta$ i neka je r polumjer trokutu ABC upisane kružnice. Vrijedi

$$P(ABC) = \frac{1}{2}\, r\,(a+b+c) = \frac{1}{2}\, ac \sin\beta. \qquad (*)$$ 2 boda

Kako je $\cos\beta = \frac{4}{5}$, vrijedi $\sin\beta = \frac{3}{5}$ pa zbog $a = 6$ iz jednakosti (*) dobivamo

$1 \cdot (6+b+c) = 6 \cdot c \cdot \frac{3}{5}$ tj. $b + 6 = \frac{13}{5}\, c.$ 2 boda

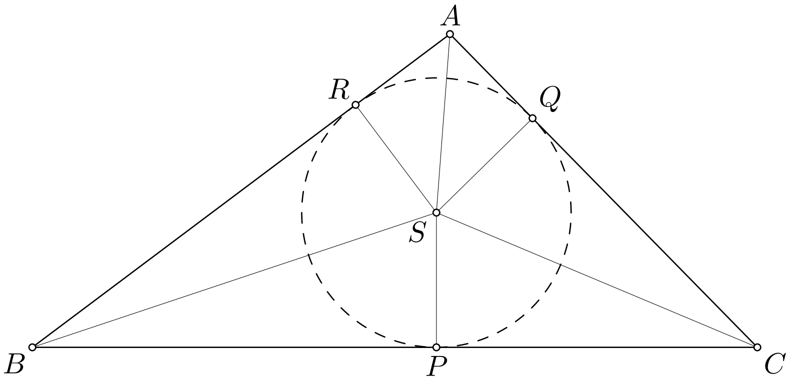
Prema poučku o kosinusu vrijedi

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta = 36 + c^2 - \frac{48}{5}\, c.$$ 2 boda

Iz zadnje dvije jednakosti dobivamo $c = b = \dfrac{15}{4}$. 4 boda

Drugo rješenje.

Označimo duljine stranica s a, b, c, kutove trokuta s α, β, γ i polumjer upisane kružnice s r. Neka je P diralište upisane kružnice sa stranicom $\overline{BC}$.



Kako je $\cos\beta = \frac{4}{5}$, to je $\sin\beta = \frac{3}{5}$. Zato vrijedi $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{1-\cos\beta}{\sin\beta} = \dfrac{1-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{1}{3}$. 2 boda

Iz pravokutnog trokuta BPS imamo $|BP| = r\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}$, pa je $|BP| = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$. 1 bod

Zato je i $|CP| = |BC| - |BP| = 6 - 3 = 3$. 1 bod

Sada slijedi (npr. zbog sukladnosti trokuta BPS i CPS) da su kutovi $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle ACB$ sukladni, tj. trokut ABC je jednakokračan i vrijedi $b = c$. 2 boda

Zato je $\sin\alpha = \sin(180^\circ - 2\beta) = \sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta = 2 \cdot \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{24}{25}$, 1 bod

pa iz poučka o sinusima dobivamo $b = \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} \cdot a = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{24}{25}} \cdot 6 = \dfrac{15}{4}$. 3 boda

Dakle, $|AB| = |AC| = \dfrac{15}{4}$.

Napomena: Nakon što znamo da je $b = c$, možemo primijeniti poučak o kosinusu da dobijemo $\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{a}{2c}$, odakle slijedi $c = \frac{15}{4}$.

Zadatak A-3.8. (10 bodova)

Odredi najmanji prirodni broj N veći od 1000 takav da točno polovina brojeva od 1 do N ima u dekadskom zapisu barem jednu znamenku 1.

Prvo rješenje.

Najprije utvrdimo koliko je brojeva bez ijedne znamenke 1 među brojevima od 1 do 999. Takvi brojevi zapisani su znamenkama 0, 2, 3, …, 9. Jednoznamenkastih je 8, dvoznamenkastih $8 \cdot 9 = 72$, 1 bod

a troznamenkastih $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$. Ukupno ih je $9^3 - 1$, tj. 728. 2 boda

Svi brojevi između 1000 i 1999 imaju znamenku 1, 1 bod

pa za N, $1000 \leqslant N < 2000$, među brojevima od 1 do N postoji 728 onih koji nemaju znamenku 1 u dekadskom zapisu. 3 boda

Sada iz uvjeta $728 = \frac{1}{2} N$ 1 bod

slijedi $N = 1456$. 2 boda

Drugo rješenje.

Od devet jednoznamenkastih brojeva (od 1 do 9) samo 1 ima znamenku jedan, a preostalih 8 ih nema znamenku jedan.

Od 90 dvoznamenkastih brojeva (od 10 do 99) njih 18 (10, 11, …, 19, 21, 31, …, 91) ima (barem jednu) znamenku 1, dok preostalih $90 - 18 = 72$ nema.

To znači da se među brojevima od 1 do 99 nalazi 19 onih koji imaju znamenku 1. 1 bod

Isto vrijedi i za brojeve od 200 do 299, za brojeve od 300 do 399, …, te za brojeve od 900 do 999. U svakoj od tih skupina je 19 brojeva sa znamenkom 1 i 81 broj bez znamenke 1. 1 bod

Svi brojevi između 100 i 199 imaju znamenku 1, pa je ukupan broj troznamenkastih brojeva sa znamenkom 1 jednak $100 + 8 \cdot 19 = 252$, a broj troznamenkastih brojeva bez znamenke 1 jednak je $8 \cdot 81 = 900 - 252 = 648$. 2 boda

Sveukupno, među brojevima od 1 do 999 postoji ukupno $1 + 18 + 252 = 271$ brojeva sa znamenkom 1 i $8 + 72 + 648 = 728$ brojeva bez znamenke 1. 1 bod

Slijedi 1000 brojeva sa znamenkom 1, 1 bod

pa samo treba odrediti nakon koliko njih će se izjednačiti broj onih koji imaju znamenku 1 i onih koji nemaju. Iz $271 + x = 728$ slijedi $x = 457$, što znači da trebamo još 457 brojeva nakon broja 999. 2 boda

To su brojevi 1000, 1001, …, 1456. Među brojevima od 1 do 1456 ima jednako onih s barem jednom znamenkom 1 i onih koji nemaju nijednu znamenku 1, tj. traženi broj je $N = 1456$. 2 boda

Napomena: Učenik koji dobije kao rezultat broj za 1 veći ili manji od točnog rezultata može dobiti najviše 8 bodova.

ŠKOLSKO / GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

14. veljače 2012.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-4.1. (4 boda)

Odredi sva rješenja jednadžbe $m! + 2 = n^2$, gdje su m i n prirodni brojevi.

Rješenje.

Uočimo da je za $m \geqslant 4$ broj $m!$ djeljiv s 4, pa je na lijevoj strani dane jednadžbe paran broj koji nije djeljiv s 4. 1 bod

Takav broj ne može biti potpun kvadrat, pa za $m \geqslant 4$ jednadžba nema rješenja. 2 boda

Očito je da za $m = 1$ nema rješenja, a za $m = 2$ dobijemo $n = 2$. Za $m = 3$ također nema rješenja. Jedino rješenje jednadžbe je $(m, n) = (2, 2)$. 1 bod

Napomena: Za napisano rješenje $(2, 2)$ može se dati 1 bod samo ako je provjereno da nema rješenja za $m = 1$ i $m = 3$.

Zadatak A-4.2. (4 boda)

U kompleksnoj ravnini skiciraj skup svih kompleksnih brojeva z koji zadovoljavaju uvjet

$$|z - 1| - |z + 1| = \sqrt{3}.$$

Prvo rješenje.

Skup svih točaka u ravnini čija razlika udaljenosti od točaka $z_1 = 1$ i $z_2 = -1$ iznosi $\sqrt{3}$ je hiperbola. 1 bod

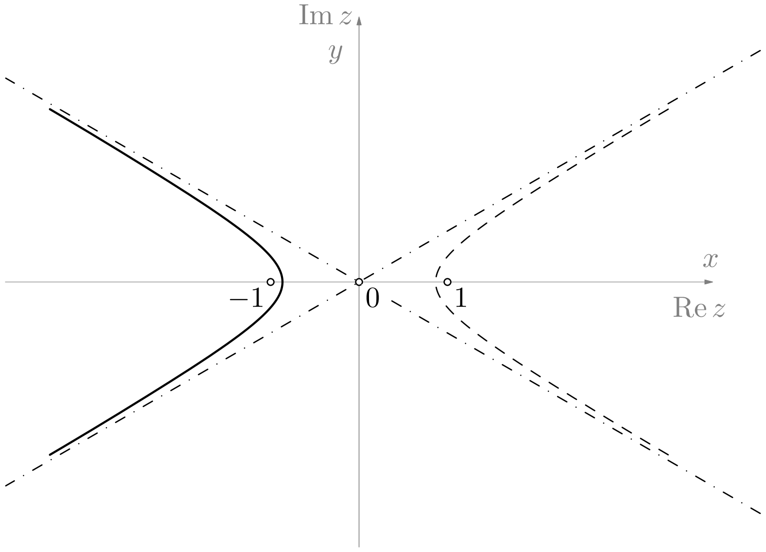
Fokusi te hiperbole su točke $z_1 = 1$ i $z_2 = -1$, tj. žarišna udaljenost (e) je 1, a iz uvjeta vidimo i da je velika os hiperbole ($2a$) jednaka $\sqrt{3}$. 1 bod

Zato je velika poluos $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, mala poluos $b = \frac{1}{2}$, tjemena su u točkama $\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, a koeficijenti smjera asimptota su $\pm\frac{b}{a} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Primijetimo da je za točke koje tražimo udaljenost od točke $z_1 = 1$ veća od udaljenosti od točke $z_2 = -1$, pa je rješenje lijeva grana opisane hiperbole. 1 bod

Skica . . . 1 bod

Napomena: Osnovne smjernice za bodovanje svih rješenja. Po 1 bod donose:
– tvrdnja da je traženi skup dio hiperbole,
– točnost parametara hiperbole,
– skica hiperbole,
– zaključak da se traži samo lijeva grana hiperbole.



Drugo rješenje.

Uvrštavanjem $z = x + iy$ slijedi:

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} - \sqrt{(x+1)^2+y^2} = \sqrt{3}$$
$$(x-1)^2+y^2 - 2\sqrt{\left((x-1)^2+y^2\right)\left((x+1)^2+y^2\right)} + (x+1)^2+y^2 = 3$$
$$2x^2+2y^2+2-2\sqrt{\left(x^2+y^2+1-2x\right)\left(x^2+y^2+1+2x\right)} = 3$$
$$\left(2x^2+2y^2-1\right)^2 = 4\left(\left(x^2+y^2+1\right)^2-(2x)^2\right)$$

te nakon sređivanja dobivamo

$$4x^2 - 12y^2 = 3$$ 1 bod

Odnosno $\dfrac{x^2}{\frac{3}{4}} - \dfrac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1.$

Dobili smo jednadžbu hiperbole kojoj su poluosi $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $b = \dfrac{1}{2}$, asimptote $y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}\,x$, a fokusi u točkama $(1, 0)$ i $(-1, 0)$. 1 bod

Zadani uvjet zadovoljavaju samo točke za koje je $\sqrt{(x-1)^2+y^2} > \sqrt{(x+1)^2+y^2}$, što je ekvivalentno s $(x-1)^2 > (x+1)^2$ odnosno $x < 0$.

Dakle rješenje je lijeva grana opisane hiperbole. 1 bod

Skica . . . 1 bod

Zadatak A-4.3. (4 boda)

Odredi realni broj A, ako se zna da je u razvoju polinoma

$$\left(1+x^4\right)^{12} + A\left(x(1-x^2)^2\right)^{12}$$

koeficijent uz x^{12} jednak 100.

Rješenje.

U prvom pribrojniku x^{12} pojavljuje se samo u članu $\binom{12}{3} \cdot 1^9 \cdot \left(x^4\right)^3$, 1 bod

pa je koeficijent uz x^{12} upravo $\binom{12}{3} = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$. 1 bod

U izrazu $A\left(x\left(1-x^2\right)^2\right)^{12}$, potencija x^{12} javlja se s koeficijentom A. 1 bod

Dakle, treba odrediti A tako da vrijedi $220 + A = 100$, pa je $A = -120$. 1 bod

Zadatak A-4.4. (4 boda)

U jednoj kutiji nalaze se tri plave i jedna crvena kuglica, a u drugoj kutiji tri crvene i jedna plava kuglica. Najprije iz prve kutije prebacimo jednu (slučajno odabranu) kuglicu u drugu, a zatim iz druge kutije izvučemo jednu kuglicu. Kolika je vjerojatnost da je ta kuglica crvena?

Rješenje.

Iz prve kutije mogli smo izvući plavu kuglicu, s vjerojatnošću $\frac{3}{4}$, ili crvenu kuglicu, s vjerojatnošću $\frac{1}{4}$. Zato se nakon tog prebacivanja u drugoj kutiji nalaze ili tri crvene i dvije plave kuglice (s vjerojatnošću $\frac{3}{4}$) ili četiri crvene i jedna plava kuglica (s vjerojatnošću $\frac{1}{4}$). 2 boda

U prvom slučaju vjerojatnost da izvučemo crvenu kuglicu iznosi $\frac{3}{5}$, a u drugom $\frac{4}{5}$. 1 bod

Konačno, tražena vjerojatnost je $\dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{13}{20}$ (odnosno 65%). 1 bod

Zadatak A-4.5. (4 boda)

Za koje $n \in \mathbb{N}$ postoje kut α i konveksan n-terokut s kutovima $\alpha, 2\alpha, \ldots, n\alpha$?

Rješenje.

Suma kutova konveksnog n-terokuta iznosi $(n-2) \cdot 180°$.

S druge strane, suma kutova $\alpha, 2\alpha, \ldots, n\alpha$ je

$$(1 + 2 + \ldots + n) \cdot \alpha = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \alpha.$$

Iz jednakosti $\dfrac{n(n+1)}{2} \cdot \alpha = (n-2) \cdot 180°$ slijedi $\alpha = \dfrac{2(n-2)}{n(n+1)} \cdot 180°$. 1 bod

Da bi mnogokut bio konveksan, moraju mu svi kutovi biti manji od ispruženog, dakle $n\alpha < 180°$. 1 bod

Time smo dobili uvjet $\dfrac{2(n-2)}{n+1} < 1$, iz čega slijedi $n < 5$. 1 bod

Dakle, jedina moguća rješenja su $n = 3$ i $n = 4$.

Lako je vidjeti da su to zaista rješenja:

Za $n = 3$ iz $\alpha + 2\alpha + 3\alpha = 180°$ slijedi $\alpha = 30°$, pa su kutovi trokuta $30°$, $60°$ i $90°$.
Za $n = 4$ iz $\alpha + 2\alpha + 3\alpha + 4\alpha = 360°$ slijedi $\alpha = 36°$, pa uvjet zadovoljava bilo koji četverokut s kutovima $36°$, $72°$, $108°$ i $144°$. 1 bod

Zadatak A-4.6. (10 bodova)

Odredi sve prirodne brojeve veće od 1 čiji svi djelitelji zapisani u rastućem poretku čine geometrijski niz.

Rješenje.

Neka je $n > 1$ prirodni broj čiji djelitelji čine geometrijski niz. Očito je najmanji djelitelj od n broj 1. Neka je d najmanji djelitelj od n veći od 1. Uočimo, d je prost.

Zbog uvjeta zadatka, svi djelitelji broja n članovi su geometrijskog niza $(d^k)_{k\in\mathbb{N}}$, tj. potencije su prostog broja d. 3 boda

To vrijedi i za sam broj n, dakle n je nužno potencija prostog broja d. 2 boda

To je i dovoljno, to jest svi brojevi oblika $n = d^k$, $k \in \mathbb{N}$, gdje je d prost broj, zadovoljavaju uvjet zadatka. 2 boda

Zaista, svi djelitelji takvog broja d^k su brojevi 1, d, d^2, …, d^{k-1}, d^k i oni čine geometrijski niz. 3 boda

Napomena: Tvrdnja da je n potencija prostog broja bez obrazloženja vrijedi 2 boda. Ta tvrdnja s provjerom da zaista svi takvi brojevi zadovoljavaju uvjet zadatka vrijedi 5 bodova. Tvrdnja da je broj n potencija nekog prirodnog broja donosi 1 bod.

Zadatak A-4.7. (10 bodova)

Neka su x i y realni brojevi za koje vrijedi $x + y \geqslant 0$. Dokaži da je

$$2^{n-1}(x^n + y^n) \geqslant (x+y)^n \qquad \text{za svaki} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Rješenje.

Nejednakost ćemo dokazati matematičkom indukcijom.

Baza indukcije: za $n = 1$ očito vrijedi $2^0\left(x^1 + y^1\right) = x + y = (x+y)^1$. 1 bod

Pretpostavimo da je $2^{k-1}\left(x^k + y^k\right) \geqslant (x+y)^k$ za neki prirodni broj k.

Korak indukcije:

$$\begin{aligned}
2^k\left(x^{k+1} + y^{k+1}\right) &= 2^{k-1}\left(2x\cdot x^k + 2y\cdot y^k\right)\\
&= 2^{k-1}\left(x\cdot x^k + y\cdot y^k + y\cdot x^k + x\cdot y^k - y\cdot x^k - x\cdot y^k + x\cdot x^k + y\cdot y^k\right)\\
&= 2^{k-1}\left((x+y)\left(x^k+y^k\right) + (x-y)\left(x^k-y^k\right)\right)\\
&= 2^{k-1}(x+y)\left(x^k+y^k\right) + 2^{k-1}(x-y)\left(x^k-y^k\right). \qquad (*)
\end{aligned}$$

2 boda

Dokažimo da su brojevi $(x-y)$ i $\left(x^k - y^k\right)$ za $x \neq 0$ istog predznaka.

1. slučaj: neparni k

Ako je $x > y$, onda je $x^k > y^k$, neovisno o predznacima brojeva x i y.
Ako je $x < y$ onda je $x^k < y^k$. 1 bod

2. slučaj: parni k

Zbog uvjeta $x + y > 0$, ako je $x > y$ onda je $x > 0$ i $|x| > |y|$.

Tada je i $|x|^k > |y|^k$, tj. $x^k > y^k$ (jer je k paran).

Analogno zaključujemo u slučaju $x < y$. 2 boda

Time smo dokazali da je $(x-y)\left(x^k - y^k\right) \geqslant 0$ pa zbog (*) vrijedi

$$2^k\left(x^{k+1}+y^{k+1}\right) \geqslant 2^{k-1}(x+y)\left(x^k+y^k\right).$$

Po pretpostavci indukcije,

$$2^{k-1}(x+y)\left(x^k+y^k\right) \geqslant (x+y)(x+y)^k = (x+y)^{k+1},$$

pa smo dokazali da iz pretpostavke slijedi $2^k\left(x^{k+1}+y^{k+1}\right) \geqslant (x+y)^{k+1}$. 3 boda

Konačno, po principu matematičke indukcije zaključujemo da nejednakost iz zadatka vrijedi za sve prirodne brojeve n. 1 bod

Napomena: Za nenegativne x i y, tvrdnja zadatka slijedi direktno primjenom nejednakosti za sredine reda n i 1:

$$\sqrt[n]{\frac{x^n+y^n}{2}} \geqslant \frac{x+y}{2}.$$

Učeniku koji na bilo koji način dokaže tvrdnju samo u slučaju $x, y \geqslant 0$ treba dodijeliti 5 bodova.

Napomena: U pretpostavci indukcije ne smije pisati "pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za *svaki* prirodni broj k". Za inače potpuno rješenje u kojem je to jedina greška dati 5 bodova.

Zadatak A-4.8. (10 bodova)

Na stolu se nalaze 1234 kamenčića. Ratko i Rudi igraju sljedeću igru: najprije Ratko uzme neki paran broj kamenčića, najmanje dva, ali ne više od 100, a zatim Rudi uzme neki neparan broj kamenčića, najmanje jedan, ali ne više od 99. Potezi se dalje vuku naizmjenično, poštujući iste uvjete. Igrač pobjeđuje ako pokupi sve kamenčiće ili ako drugi igrač ne može odigrati svoj potez. Tko ima pobjedničku strategiju, tj. može pobijediti neovisno o igri drugog igrača?

Prvo rješenje.

Uočimo da svaki od igrača može postići da oni u dva uzastopna poteza zajedno uzmu 101 kamenčić. Npr. Ratko može postići da on u svom potezu i Rudi u prethodnom potezu uzmu 101 kamenčić. Ako je Rudi uzeo 1 kamenčić, Ratko uzima 100 kamenčića; ako je Rudi uzeo 3 kamenčića, Ratko ih uzima 98 itd. 3 boda

Budući da je $1234 = 12 \cdot 101 + 22$, Ratko treba igrati ovako:

U svom prvom potezu Ratko uzima 22 kamenčića. 3 boda

Nakon toga, ako je Rudi uzeo x kamenčića, onda Ratko uzima $101 - x$ kamenčića (što je paran broj, jer je x neparan).

Nakon Ratkovog dvanaestog poteza na stolu ostaje još 101 kamenčić.
Nakon što Rudi odigra svoj potez, na stolu će ostati paran broj (najviše 100) kamenčića, koje Ratko može sve uzeti i tako pobijediti. 4 boda

Dakle, Ratko ima pobjedničku strategiju.

Napomena: Ako učenik napiše samo da Ratko ima pobjedničku strategiju, bez obrazloženja, dobiva 0 bodova.

Drugo rješenje.

Rješavamo zadatak analizom dobitnih i gubitnih pozicija.

Pozicija je dobitna (za igrača koji je sljedeći na potezu) ako postoji potez koji vodi u poziciju koja je gubitna za protivnika ili ako igrač može uzeti sve kamenčiće. Pozicija je gubitna za igrača na potezu ako svaki njegov potez iz te pozicije vodi u dobitnu poziciju za protivnika.

Za Rudija su pozicije 1, 3, 5, . . . , 99 dobitne jer može uzeti sve kamenčiće.
Te iste pozicije su za Ratka gubitne, jer koliko god uzeo kamenčića ostat će neparno mnogo kamenčića koje Rudi može sve uzeti. 1 bod

Za Ratka su sve pozicije u kojima je preostalo 2, 4, 6, . . . , 100 kamenčića dobitne jer tada može uzeti sve kamenčiće.
Te pozicije su dobitne i za Rudija jer može uzeti jedan kamenčić i ostaviti neparan broj kamenčića od 1 do 99, što je gubitna pozicija za Ratka. 1 bod

Pozicija 101 je gubitna i za Ratka i za Rudija jer ni jedan ni drugi ne mogu uzeti sve kamenčiće, a koliko god uzeli kamenčića, dovode protivnika u dobitnu poziciju prema prethodnom razmatranju. 1 bod

Za Rudija su pozicije 102, 104, . . . , 200 dobitne, jer može nakon svog poteza ostaviti na stolu 101 kamenčić.
Za Ratka su te pozicije gubitne jer nakon njegovog poteza ostaje parno mnogo kamenčića, a sve su takve pozicije prema dosadašnjem razmatranju dobitne za Rudija.
1 bod

Za Ratka su pozicije 103, 105, . . . , 201 dobitne, jer može nakon svog poteza ostaviti na stolu 101 kamenčić.
Za Rudija su te pozicije također dobitne jer može uzeti jedan kamenčić i ostaviti paran broj kamenčića od 102 do 200, što je gubitna pozicija za Ratka. 1 bod

Pozicija 202 je također gubitna za oba igrača.

Ovim načinom razmišljanja zaključujemo da su pozicije koje su višekratnici broja 101 gubitne za oba igrača. 2 boda

Ukoliko je $n = k \cdot 101 + m$, za $1 \leqslant m \leqslant 100$, onda je n dobitna pozicija za Rudija. Ako su k i m iste parnosti onda je n dobitna pozicija za Ratka, a ako su k i m različite parnosti, onda je n gubitna pozicija za Ratka.

Budući da je $1234 = 12 \cdot 101 + 22$, zaključujemo da je ta pozicija dobitna za Ratka, tj. budući da je Ratko prvi na potezu, on ima strategiju kako pobjediti bez obzira kako Rudi igrao. 3 boda

Ratko u prvom krugu uzima 22 kamenčića i u svakom sljedećem igra tako da broj kamenčića koji ostaju na stolu bude višekratnik od 101.