Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO / GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

14. veljače 2012.

1. (4) Koliko se kvadrata prirodnih brojeva nalazi između 4^9 i 9^4, ne uključujući ta dva broja?

2. (4) Neka je a realan broj. Odredi zbroj svih triju rješenja jednadžbe

$$x^3 - a^2x + ax - x + a^2 - a = 0.$$

3. (4) Ako je $a + b = 4$ i $a^2 + b^2 = 14$, odredi $a^3 + b^3$.

4. (4) Dan je pravilni peterokut $ABCDE$. Pravci BC i DE sijeku se u točki F. Odredi kutove trokuta BEF.

5. (4) Eleonora ima mnogo kocki čije su sve strane bijele boje. Najprije odvoji jednu kocku i stavi ju u praznu kutiju. Zatim uzima jednu po jednu kocku i oboji neke njene strane zelenom bojom, ali tako da se ta kocka razlikuje od svih koje su već u kutiji, te i tu kocku stavlja u kutiju. Koliko najviše kocki može biti u kutiji?

6. (10) Polumjer opisane kružnice jednakokračnog trokuta s osnovicom duljine a i krakovima duljine b iznosi R. Dokaži da vrijedi jednakost $a^2R^2 + b^4 = 4b^2R^2$, bez obzira je li trokut šiljastokutan, pravokutan ili tupokutan.

7. (10) Ana ima četiri puta toliko godina koliko je imao Petar kada je Ana imala toliko godina koliko Petar ima sada. Kada Petar bude imao toliko godina koliko Ana ima sada, oboje zajedno će imati 95 godina. Koliko godina ima Ana, a koliko Petar?

8. (10) Odredi sve parove prostih prirodnih brojeva p i q za koje postoji cijeli broj a takav da vrijedi $a^4 = pa^3 + q$.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO / GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

14. veljače 2012.

1. (4) Za koje vrijednosti realnog parametra m jednadžba

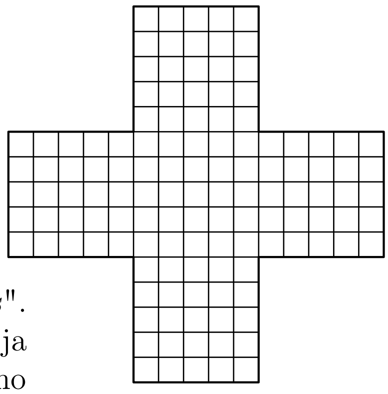
$$(m-1)x^2 - 2mx + 2 = 0$$

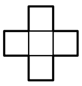
nema negativnih realnih rješenja?

2. (4) Ante je napisao redom sve prirodne brojeve od 1 do 40, jednog za drugim bez razmaka i tako dobio mnogoznamenkasti broj $12345\ldots383940$. Zatim je odlučio obrisati 60 znamenaka tog broja. Koji najveći broj Ante može dobiti na taj način?

3. (4) Trokut površine $1.5\,\mathrm{cm}^2$ upisan je u kružnicu polumjera $1.25\,\mathrm{cm}$ i pritom je jedna stranica trokuta promjer te kružnice. Kolike su duljine stranica tog trokuta?

4. (4) Za koje $x \in \mathbb{R}$ je broj $\sqrt[3]{4+4x}$ veći od broja $1+\sqrt[3]{x}$?



5. (4) Lik  koji se sastoji od pet jediničnih kvadratića zovemo "*plus*". Na koliko se načina *plus* može smjestiti na *ploču* istog oblika koja se sastoji od $5 \cdot 5^2$ jediničnih kvadratića, tako da prekriva točno pet jediničnih kvadratića?

6. (10) Odredi sve prirodne brojeve manje od 1000 koji su jednaki zbroju kvadrata svojih znamenaka.

7. (10) Odredi i skiciraj u kompleksnoj ravnini skup svih brojeva z koji zadovoljavaju uvjet

$$\operatorname{Re}\left[(4+3i)z^2\right] \geqslant 0.$$

8. (10) U šiljastokutnom trokutu ABC točka M je nožište visine iz vrha A, a točka N nožište visine iz vrha B. Ako je $|AN| = |NM|$, dokaži da središte upisane kružnice trokuta ABC leži na visini $\overline{BN}$.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO / GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

14. veljače 2012.

1. (4) Riješi jednadžbu $\sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x = 1$.

2. (4) Maja je napisala redom sve prirodne brojeve od 100 do 130, jednog za drugim bez razmaka i tako dobila mnogoznamenkasti broj 100101102...129130. Zatim je odlučila obrisati 80 znamenaka tog broja. Koji najveći broj Maja može dobiti na taj način?

3. (4) Izračunaj $144^{\log_5 1000} : 10^{6 \log_5 12}$.

4. (4) Zadana je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$ brida duljine a. Njenim vrhovima A i C_1 te polovištem brida $\overline{BB_1}$ položena je ravnina. Izračunaj površinu presjeka kocke tom ravninom.

5. (4) Ako duljine stranica trokuta zadovoljavaju jednakost $\dfrac{a+b}{b+c} = \dfrac{c}{a-b}$, odredi mjeru najvećeg kuta tog trokuta.

6. (10) Odredi sve vrijednosti realnog parametra a za koje jednadžba

$$8^{a \sin^2 x} = 4 \cdot 2^{\cos^2 x}$$

ima točno jedno rješenje u intervalu $\left[-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{2\pi}{3}\right]$.

7. (10) U trokutu ABC, duljina stranice $\overline{BC}$ je 6, kosinus kuta pri vrhu B jednak je $\dfrac{4}{5}$, a duljina polumjera upisane kružnice iznosi 1. Odredi duljine stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ tog trokuta.

8. (10) Odredi najmanji prirodni broj N veći od 1000 takav da točno polovina brojeva od 1 do N ima u dekadskom zapisu barem jednu znamenku 1.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO / GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

14. veljače 2012.

1. (4) Odredi sva rješenja jednadžbe $m! + 2 = n^2$, gdje su m i n prirodni brojevi.

2. (4) U kompleksnoj ravnini skiciraj skup svih kompleksnih brojeva z koji zadovoljavaju uvjet

$$|z-1| - |z+1| = \sqrt{3}.$$

3. (4) Odredi realni broj A, ako se zna da je u razvoju polinoma

$$\left(1+x^4\right)^{12} + A\left(x(1-x^2)^2\right)^{12}$$

koeficijent uz x^{12} jednak 100.

4. (4) U jednoj kutiji nalaze se tri plave i jedna crvena kuglica, a u drugoj kutiji tri crvene i jedna plava kuglica. Najprije iz prve kutije prebacimo jednu (slučajno odabranu) kuglicu u drugu, a zatim iz druge kutije izvučemo jednu kuglicu. Kolika je vjerojatnost da je ta kuglica crvena?

5. (4) Za koje $n \in \mathbb{N}$ postoje kut α i konveksan n-terokut s kutovima α, 2α, $\ldots$, $n\alpha$?

6. (10) Odredi sve prirodne brojeve veće od 1 čiji svi djelitelji zapisani u rastućem poretku čine geometrijski niz.

7. (10) Neka su x i y realni brojevi za koje vrijedi $x + y \geqslant 0$. Dokaži da je

$$2^{n-1}\left(x^n + y^n\right) \geqslant (x+y)^n \quad \text{za svaki} \quad n \in \mathbb{N}.$$

8. (10) Na stolu se nalaze 1234 kamenčića. Ratko i Rudi igraju sljedeću igru: najprije Ratko uzme neki paran broj kamenčića, najmanje dva, ali ne više od 100, a zatim Rudi uzme neki neparan broj kamenčića, najmanje jedan, ali ne više od 99. Potezi se dalje vuku naizmjenično, poštujući iste uvjete. Igrač pobjeđuje ako pokupi sve kamenčiće ili ako drugi igrač ne može odigrati svoj potez. Tko ima pobjedničku strategiju, tj. može pobijediti neovisno o igri drugog igrača?