Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

13. ožujka 2012.

1. (4) Koliko ima negativnih cijelih brojeva x za koje vrijedi $\dfrac{x-2011}{x+2012} \leq 1$?

2. (4) U trokutu $\triangle ABC$ mjere kutova pri vrhu A i vrhu B, redom iznose $\alpha = 38°$ i $\beta = 52°$. Izračunajte mjeru kuta što ga zatvara simetrala vanjskog kuta pri vrhu B s pravcem na kojem leži stranica $\overline{AC}$.

3. (4) Ako je $a + b = 2$ i $a^2 + b^2 = 6$, koliko je $a^{-1} + b^{-1}$?

4. (4) Tri su prijatelja ogladnila nakon napornog treninga. Marko je sa sobom ponio tri jednaka peciva, Ante četiri, a Luka je svoje u žurbi zaboravio uzeti. No, prijatelji su peciva međusobno ravnomjerno razdijelili i sve pojeli. Luka nikako prijateljima nije htio ostati dužan pa je izvadio sedam kuna i rekao da podijele novac pravedno. Koliko je kuna dobio Marko, a koliko Ante?

5. (4) Dokažite da je broj $100\ldots01$ (ima točno 2012 nula) složen.

6. (10) Riješite jednadžbu

$$\frac{x+3}{12(x+1)} : \left(\frac{2x-3}{3x-3} - \frac{3x-1}{4x+4} + \frac{x^2-7x+14}{12x^2-12}\right) = 2015.$$

7. (10) Ako u pravilnom šesterokutu $ABCDEF$ povučemo svih šest njegovih kraćih dijagonala, one određuju šesterokut $GHIJKL$. Dokažite da je šesterokut $GHIJKL$ također pravilan šesterokut i izračunajte koliko je puta njegova površina manja od površine polaznog šesterokuta.

8. (10) Odredite sve troznamenkaste prirodne brojeve koji su djeljivi sa 7, a pri dijeljenju s 9 daju ostatak 5.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

13. ožujka 2012.

1. (4) Odredite sve vrijednosti realnog parametra a za koje je zbroj kvadrata rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 + 2ax + a - 3 = 0$, veći od 6.

2. (4) U pravokutnom trokutu sa šiljastim kutovima α i β vrijedi $\operatorname{tg}\alpha = 2$. Izračunajte točnu vrijednost izraza

$$\frac{3\sin\alpha + 2\sin\beta - \sqrt{5}}{3\cos\alpha - 2\cos\beta + \sqrt{5}}.$$

3. (4) Jednadžbe $x^2 + 2ax + b^2 = 0$ i $x^2 + 2bx + c^2 = 0$ imaju svaka po dva različita realna rješenja. Koliko realnih rješenja ima jednadžba $x^2 + 2cx + a^2 = 0$?

4. (4) Duljina stranice pravilnog šesterokuta $ABCDEF$ iznosi a. Pravci AB i CD sijeku se u točki T. Odredite udaljenost $|FT|$.

5. (4) Kojom znamenkom završava broj $2012^3 + 3^{2012}$?

6. (10) Riješite sljedeći sustav jednadžbi u skupu $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned}&(x+2y)^2 - x - 2y - 12 = 0\\ &x \cdot y = 2\end{aligned}$$

7. (10) Neka je $z_1 = 3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 - 2\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$. Odredite sve kompleksne brojeve $z \in \mathbb{C}$ za koje vrijedi

$$|z_1 \cdot \overline{z} + z \cdot \overline{z_1}| = 4, \quad \operatorname{Im}\frac{z_1 \cdot z}{1-i} = 0.$$

8. (10) Trgovina na veliko prodaje teniske rekete po cijeni od 363 kune za jedan reket ako je broj naručenih reketa 40 ili manje. Ako je broj naručenih reketa veći od 40, cijena jednog reketa se umanjuje 0.60 kuna po svakom naručenom reketu iznad 40. U jednoj je narudžbi moguće naručiti maksimalno 400 reketa. Odredite koliki treba biti broj naručenih reketa pa da trgovina ostvari najveću dobit. Koliko iznosi najveća dobit i po kojoj bi cijeni kupac tada platio jedan reket?

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

13. ožujka 2012.

1. (4) Riješite jednadžbu

$$\log_{5x-2} 2 + 2 \cdot \log_{5x-2} x = \log_{5x-2}(x+1).$$

2. (4) Izračunajte površinu romba kojemu je duljina kraće dijagonale 8 cm, a mjera tupog kuta iznosi 150°.

3. (4) Ako za duljine stranica nekog trokuta vrijedi $a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 2ac + 4bc$, izračunajte kutove tog trokuta.

4. (4) Odredite funkciju $f(x) = A\sin(bx + c) + d$ ako joj je minimum u točki $(3, -1)$, a prvi maksimum iza te točke je u točki $(5, 7)$.

5. (4) Neka su a, b i c tri različite znamenke, od kojih niti jedna nije jednaka nuli. Od a, b, c slažemo troznamenkaste brojeve različitih znamenaka. Ako je zbroj svih takvih troznamenkastih brojeva jednak 3552, odredite najmanji među njima.

6. (10) Odredite sve realne brojeve x i y za koje vrijedi $5 \cdot \cos^2 y + x^2 - 2x \cdot \cos y - 8x + 20 = 0$.

7. (10) Točka T težište je trokuta ABC, a točka D polovište njegove stranice $\overline{BC}$. Ako je duljina stranice jednakostraničnog trokuta BDT jednaka 1 cm, odredite duljine stranica trokuta ABC i polumjer kružnice opisane trokutu ABC.

8. (10) Oko iste kugle opisani su jednakostraničan valjak i jednakostraničan stožac. Pokažite da je omjer oplošja ovih triju tijela jednak omjeru njihovih obujmova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

13. ožujka 2012.

1. (4) Izračunajte površinu kvadrata kojemu su dva vrha u žarištima, a druga dva u tjemenima elipse $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Žarišta elipse su na osi apscisa.

2. (4) Riješite u skupu $\mathbb{C}$ jednadžbu $z^5 i+(1-i)\cdot z^2=0$.

3. (4) Neka je $ABCA'B'C'$ uspravna pravilna trostrana prizma. Duljina brida osnovke ABC iznosi 10 cm, a duljina visine prizme je $10\sqrt{2}$ cm. Točka D je polovište brida $\overline{AB}$. Izračunajte mjeru kuta $DA'C$.

4. (4) Zbroj svih koeficijenata u izrazu $(1+x)^n+(1+x)^{n+1}$ jednak je 1536. Odredite koeficijent uz x^6.

5. (4) Ako je $\cos 4\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\cdots}}}}}$, koliko je $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2$?

6. (10) Duljine stranica trokuta su tri uzastopna člana aritmetičkog niza, a duljine visina na te stranice, istim su redom tri uzastopna člana geometrijskog niza. Ako su duljine stranica dvoznamenkasti prirodni brojevi, koje sve vrijednosti može poprimiti opseg tog trokuta?

7. (10) Odredite sva rješenja nejednadžbe

$$\sqrt{72\cdot 3^{x+1}+81}\geq\left|3^{x+1}-9\right|+3^x\log_x\left(x^3\right).$$

8. (10) Tomislav, Filip i Nikola došli su sa svojim djevojkama Anom, Marijom i Ivom u veliki trgovački centar u kupovinu. Svatko od njih šest platio je za svaki kupljeni predmet onoliko kuna koliko je predmeta kupio, a svaki je mladić potrošio 63 kune više od svoje djevojke. Ako je Tomislav kupio 23 predmeta više od Marije, a Nikola 11 predmeta više od Ive, otkrijte sve parove.