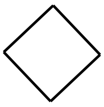
ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
13. ožujka 2012.

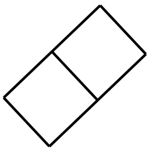
4. razred – rješenja

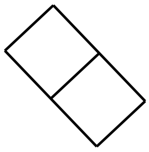
OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

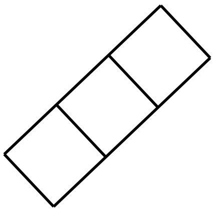
1. a) $62 = 9 \cdot (5 + 15) : 3 + 2$, 2 boda
b) $22 = (9 \cdot 5 + 15) : 3 + 2$, 2 boda
c) $92 = 9 \cdot (5 + 15 : 3) + 2$, 2 boda
d) $48 = 9 \cdot 5 + 15 : (3 + 2)$, 2 boda
d) $108 = 9 \cdot (5 + 15 : 3 + 2)$. 2 boda
..........UKUPNO 10 BODOVA

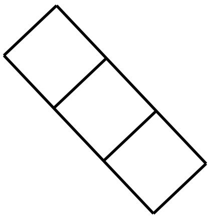
2. Za navedene sve oblike koji se javljaju 2 boda

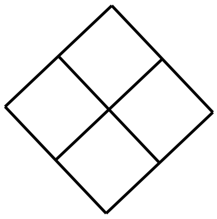

16


10


10


4


4


7

Za točno prebrojani oblik (po 1 bod) 6 bodova
Ukupno je pravokutnika 16+10+10+4+4+7=51. 2 boda
..........UKUPNO 10 BODOVA

3. Majstor je radio 3 dana pa je vrijednost njegovih dnevnica 510 kuna, a materijal i njegov rad bez dnevnica onda vrijede 2838 kuna: 2 boda
Ako majstorov rad vrijedi polovinu cijene materijala, onda je cijena materijala dvostruko veća od cijene majstora.
Neka je majstor Jure zaradio □ (ili x) kuna.
Onda je cijena materijala □□ (ili $2x$) kuna, a zajedno to iznosi □□□ (ili $3x$) kuna.
Dijeljenjem 2838:3, dobijemo da je □ (ili x) 946 kuna. 4 boda
Računajući i dnevnice, majstor Jure je zaradio $510 + 946 = 1456$ kuna. 2 boda
Cijena materijala je $2838 – 946$ ili $946 \cdot 2$, tj. 1892 kune. 2 boda
..........UKUPNO 10 BODOVA

4. Znamenka jedinica mora biti neparan broj, a zajedno sa znamenkom desetica daje 5. Imamo tri mogućnosti: 41, 23 ili 05. 4 boda
Zbroj prve dvije znamenke mora biti $11 – 5 = 6$.
Za njih postoji 6 mogućnosti: 60, 51, 42, 33, 24 i 15. 3 boda
Traženih brojeva ima $3 \cdot 6 = 18$. 3 boda
..........UKUPNO 10 BODOVA

5. Stranica a je za 1 cm kraća od stranice b ($a = b - 1$),
a stranica c je za 1 cm dulja od stranice b ($c = b + 1$).
Zbroj duljina svih triju stranica tada iznosi $3b$ 4 boda
Budući da je opseg trokuta 156 cm, dobijemo da je $b = 52$ cm. 3 boda
Opseg traženoga kvadrata je $4 \cdot 52 = 208$ cm. 3 boda
..........UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
13. ožujka 2012.

5. razred – rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Zbroj svih kućnih brojeva na parnoj strani od kuće do škole je:
$36 + 38 + 40 + ... + 168 = 2 \cdot (18 + 19 + 20 + ... + 84)$. 2 boda

$$\left.\begin{array}{l} 18 + 19 + 20 + ... + 83 + 84 \\ \underline{84 + 83 + 82 + ... + 19 + 18} \end{array}\right\} + \text{(zbroje se oba retka)}$$ 2 boda

$102 + 102 + 102 + ... + 102 + 102 = 102 \cdot (84 - 17) = 102 \cdot 67 = 6834$. 4 boda

Dakle, $36 + 38 + 40 + ... + 168 = 6834$. 1 bod

Ukupan zbroj svih kućnih brojeva na parnoj strani od kuće do škole je 6834. 1 bod

..........UKUPNO 10 BODOVA

2. 1. dan x banana.
2. dan $x + 6$ banana. 1 bod
3. dan $(x + 6) + 6 = x + 12$ banana. 1 bod
4. dan $(x + 12) + 6 = x + 18$ banana. 1 bod
5. dan $(x + 18) + 6 = x + 24$ banana. 1 bod

$x + x + 6 + x + 12 + x + 18 + x + 24 = 115$ 1 bod

$5x = 115 - 60 = 55$ 1 bod

$x = 55 : 5 = 11$ banana 1 bod

Peti dan majmun Muki je pojeo 35 banana. 1 bod

Deseti dan će pojesti $11 + (10 - 1) \cdot 6 = 11 + 54 = 65$ banana. 2 boda

..........UKUPNO 10 BODOVA

3. Iz jednakosti $\overline{3cccd} \cdot 18 = \overline{64a02b}$ slijedi da je broj $\overline{64a02b}$ djeljiv brojem 18. 1 bod

Kako je $18 = 2 \cdot 9$, onda je broj $\overline{64a02b}$ djeljiv i brojem 2 i brojem 9. 1 bod

Zbog djeljivosti brojem 2 $b \in \{0,2,4,6,8\}$. 1 bod

Zbog djeljivosti brojem 9 za $b = 0$ je $a = 6$,
za $b = 2$ je $a = 4$,
za $b = 4$ je $a = 2$,
za $b = 6$ je $a \in \{0, 9\}$,
za $b = 8$ je $a = 7$. 3 boda

S obzirom da je $646020 : 18 = 35890$, $644022 : 18 = 35779$, $642024 : 18 = 35668$, $640026 : 18 = 35557$, $649026 : 18 = 36057$ i $647028 : 18 = 35946$,
onda je $a = 0$, $b = 6$, $c = 5$, $d = 7$. 4 boda

..........UKUPNO 10 BODOVA

4. Pretpostavimo da je: $m = 8 \cdot a$ i $n = 8 \cdot b$, pri čemu je $D(a,b) = 1$. 2 boda

Kako za svaka dva prirodna broja m i n vrijedi: $m \cdot n = D(m,n) \cdot V(m,n)$,
imamo jednakost $m \cdot n = 8 \cdot 168$. 2 boda

Zamjenom $m = 8 \cdot a$ i $n = 8 \cdot b$ imamo jednakost:
$8a \cdot 8b = 8 \cdot 8 \cdot 21$, odnosno $a \cdot b = 21$. 2 boda

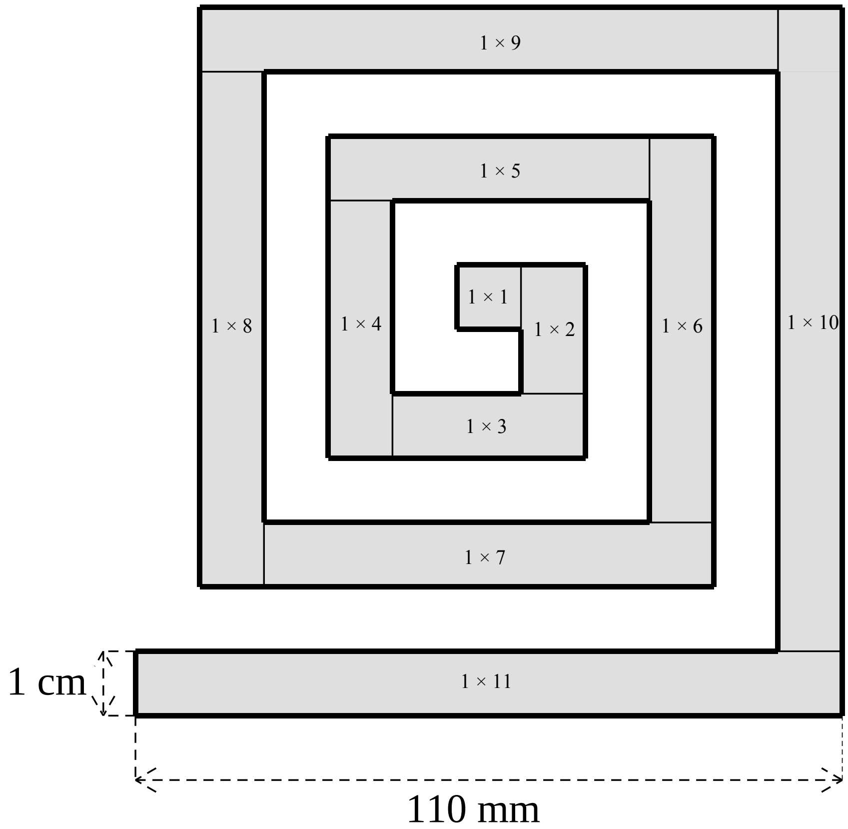
Kako je $a \cdot b = 21 = 1 \cdot 21 = 3 \cdot 7$, brojevi a i b mogu biti samo ovi parovi brojeva: (1, 21) i (3, 7). 2 boda

Konačno za m i n imamo ova rješenja:
a) $m = 8 \cdot a = 8 \cdot 1 = 8$ i $n = 8 \cdot b = 8 \cdot 21 = 168$, pa je rješenje (8, 168) i
b) $m = 8 \cdot a = 8 \cdot 3 = 24$ i $n = 8 \cdot b = 8 \cdot 7 = 56$, pa je rješenje (24, 56). 2 boda

....UKUPNO 10 BODOVA

5. Sa slike zaključujemo da je širina krakova spirale (sivih dijelova) 1 cm. 2 boda

Kvadratnu spiralu možemo podijeliti na pravokutnike.



6 bodova

Tako će tražena površina spirale biti jednaka zbroju površina pravokutnika.
$P = 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 66\ cm^2$. 2 boda

....UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
13. ožujka 2012.

6. razred – rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Da bismo odredili ukupan iznos novca kojeg su zaradili Marko, Jure i Ante, prvo ćemo odrediti koliko je zaradio Jure.

   Jure je dobio $\frac{1}{4}$ novog ostatka pa je Anti ostalo $\frac{3}{4}$ novog ostatka. 1 bod

   Dakle, $\frac{3}{4}$ novog ostatka je 900 kn pa $\frac{1}{4}$ novog ostatka iznosi 300 kn. 2 boda

   Jure je zaradio 800 + 300 = 1 100 kn. 1 bod

   Marko je dobio 500 kn i $\frac{1}{5}$ ostatka što znači da je za Juru i Antu ostalo $\frac{4}{5}$ ostatka, 1 bod

   tj. vrijedi da je $\frac{4}{5}$ ostatka = 1 100 + 900 = 2 000 kn pa je $\frac{1}{5}$ ostatka = 500 kn. 2 boda

   Dakle, Marko je zaradio 500 + 500 = 1 000 kn. 1 bod

   Konačno, Marko, Jure i Ante ukupno su zaradili 1 000 + 1 100 + 900 = 3 000 kn. 1 bod

   Najviše je zaradio Jure. 1 bod

   ....UKUPNO 10 BODOVA

2. Iz $|AC| = |BC|$ slijedi da je trokut ACB jednakokračan pa vrijedi $|\angle CBA| = |\angle CAB| = \beta$. 2 boda

   Iz $|AB| = |AD|$ slijedi da je trokut ABD jednakokračan pa vrijedi $|\angle DBA| = |\angle ADB| = \beta$. 2 boda

   Iz $|\angle BAD| = |\angle CAD|$ i $|\angle CAB| = \beta$ slijedi da je

   $|\angle BAD| = |\angle CAD| = \frac{\beta}{2}$. 1 bod

   U trokutu ABD vrijedi $\beta + \beta + \frac{\beta}{2} = 180°$, 1 bod

   odakle je $\frac{5}{2}\beta = 180°$, 1 bod

   odnosno $\beta = 180° : \frac{5}{2} = 72°$. 1 bod

   Veličine unutarnjih kutova u trokutu ABC su 72°, 72° i 180° – 144° = 36°. 2 boda

   ....UKUPNO 10 BODOVA

3. Kako je 24=2·2·2·3, odgovarajuće četvorke znamenaka su:
a)2,2,2,3, b)1,2,3,4, c)1,2,2,6, d)1,1,3,8, e)1,1,4,6.
Traženi brojevi su:
a)2223,2232,2322,3222, 1 bod
b)1234,1243,1324,1342,1423,1432,2134,2143,2314,2341,2413,2431,3124,3142,3214,3241,
3412,3421,4123,4132,4213,4231,4312,4321, 2 boda
c)1226,1262,1622,2126,2162,2216,2261,2612,2621,6122,6212,6221, 2 boda
d)1138,1183,1318,1381,1813,1831,3118,3181,3811,8113,8131,8311. 2 boda
e)1146,1164,1416,1461,1614,1641,4116,4161,4611,6114,6141,6411. 2 boda
Brojeva s traženim svojstvima ima 64. 1 bod
....UKUPNO 10 BODOVA

4. Neka je s x označena duljina puta od kuće do posla u kilometrima. 1 bod
Kada Matkov tata vozi brzinom 65 km/h, stiže 1 min ranije,
a kada vozi brzinom 60 km/h, 1 min kasnije.
Razlika je 2 minute ili $\frac{2}{60}=\frac{1}{30}$ sata. 2 boda
Vrijeme provedeno na putu pri brzini od 65 km/h je $\frac{x}{65}$ sati,
a vrijeme provedeno na putu pri brzini od 60 km/h je $\frac{x}{60}$ sati.
Možemo pisati:

$$\frac{x}{60}-\frac{x}{65}=\frac{1}{30}.$$ 4 boda

Tada redom imamo $65x - 60x = 130$,
$5x = 130$,
$x = 26$ km. 2 boda
Matkov tata svaki dan od kuće do posla i natrag prijeđe put duljine 52 km. 1 bod
....UKUPNO 10 BODOVA

5. Jednakosti $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}=1221$ odgovara jednakost:
$(100a + 10b + c) + (100b + 10c + a) + (100c + 10a + b) = 1221$, 2 boda
odnosno $111a + 111b + 111c = 1221$, 2 boda
tj. $111 \cdot (a + b + c) = 1221$, 2 boda
odakle je $a + b + c = 1221 : 111 = 11$. 2 boda
Budući da se traži najveći troznamenkasti broj takav da je
$\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}=1221$, a znamenke a, b i c moraju biti različite,
vrijedi $a = 8$, $b = 2$ i $c = 1$,
pa je traženi broj 821. 2 boda
....UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
13. ožujka 2012.

7. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Neka je V obujam prve bačve. Tada je obujam druge bačve jednak $2V$. 1 BOD

Budući da je omjer vode i octa u prvoj bačvi jednak 2 : 1, znači da je u prvoj bačvi obujam vode jednak $\frac{2}{3}V$, a obujam octa $\frac{1}{3}V$. 2 BODA

Budući da je omjer vode i octa u drugoj bačvi jednak 3 : 1, znači da je u drugoj bačvi obujam vode jednak $\frac{3}{4}\cdot 2V=\frac{3}{2}V$, a obujam octa $\frac{1}{4}\cdot 2V=\frac{1}{2}V$. 2 BODA

Nakon prelijevanja sadržaja prve i druge bačve u treću bačvu u noj se nalazi

$\frac{2}{3}V+\frac{3}{2}V=\frac{13}{6}V$ vode 2 BODA

i $\frac{1}{3}V+\frac{1}{2}V=\frac{5}{6}V$ octa. 2 BODA

Dakle, omjer vode i octa u trećoj bačvi je $\frac{13}{6}V:\frac{5}{6}V=13:5$. 1 BOD

…………………………………………………………………..……… UKUPNO 10 BODOVA

2. Vrijedi

$$\frac{n\cdot(n+1)}{2}=\overline{xxx}$$

$$n\cdot(n+1)=2\cdot x\cdot 111$$ 4 BODA

$$n\cdot(n+1)=2\cdot x\cdot 3\cdot 37$$

1 BOD

Kako je x znamenka, jedina mogućnost je x = 6. 3 BODA

Tada je n = 36 odnosno potrebno je zbrojiti 36 prvih prirodnih brojeva. 2 BODA

……………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

3.Vrijedi

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n},\ \ m,n\in\mathbb{N},\ m\neq n\ .$$ 1 BOD

$$\frac{1}{6}=\frac{m+n}{mn}$$
$$6m+6n=mn$$
$$6n=mn-6m$$
$$6n=m(n-6)$$

2 BODA

$$m=\frac{6n}{n-6}=\frac{6n-36}{n-6}+\frac{36}{n-6}=6+\frac{36}{n-6}$$

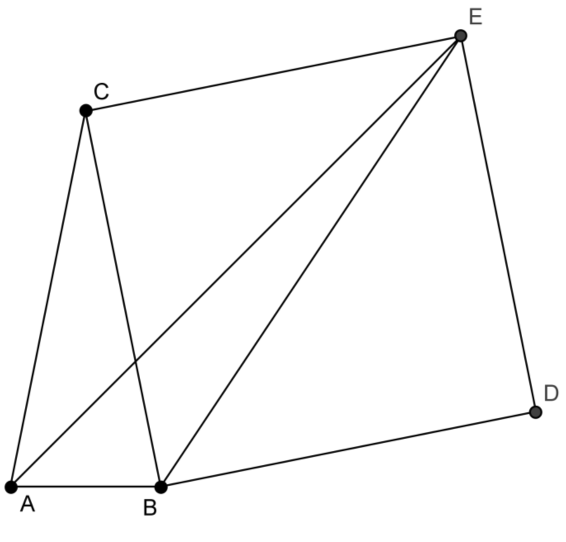
2 BODA

Nazivnik $n-6$ je djelitelj broja 36. 1 BOD

Prikaz: $\frac{1}{6}=\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$, $\frac{1}{6}=\frac{1}{8}+\frac{1}{24}$, $\frac{1}{6}=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}$, $\frac{1}{6}=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$. 4 BODA

…………………………………………………………………………...….. UKUPNO 10 BODOVA

4.



1 BOD

$|CE|=|CB|$ (stranice kvadrata), $|CB|=|CA|$ (jednaki kraci). Dakle, $|CE|=|CA|$ pa je trokut AEC jednakokračan. 2 BODA

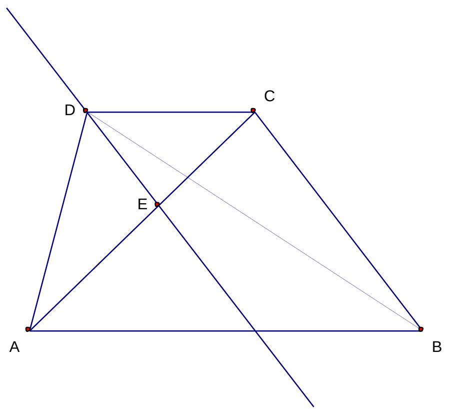
Slijedi $|\sphericalangle CEA| = \dfrac{180° - (30° + 90°)}{2} = 30°$. 2 BODA

Trokut BDE je jednakokračan pravokutan te je $|\sphericalangle BED| = 45°$. 3 BODA

Dakle, $|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle CED| - |\sphericalangle CEA| - |\sphericalangle BED| = 90° - 30° - 45° = 15°$. 2 BODA

…………………………………………………………...…………… UKUPNO 10 BODOVA

5. Nacrtajmo dijagonalu $\overline{BD}$.



2 BODA

Trokuti ACD i BCD imaju jednaku površinu jer imaju zajedničku osnovicu i visinu trapeza $ABCD$.

2 BODA

Kako je $DE \parallel BC$, to je četverokut $BCDE$ trapez. 2 BODA

Trokuti BCE i BCD imaju jednaku površinu jer imaju zajedničku osnovicu $\overline{BC}$ i visinu trapeza $BCDE$. 2 BODA

To znači da trokuti ACD i BCE imaju jednaku površinu što se i tražilo. 2 BODA

………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
13. ožujka 2012.

8. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1.Kako je $x+y=0$, onda je $(x+y)^2=0^2=0$. 1 BOD

No, $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2=0$, a kako je $x^2+y^2=\frac{1}{2}$, onda je $2xy=-\frac{1}{2}$ odnosno $xy=-\frac{1}{4}$.

2 BODA

Dalje je $x^8+y^8=x^8+2x^4y^4+y^8-2x^4y^4=$ 2 BODA

$$\begin{aligned}
&=(x^4+y^4)^2-2(xy)^4=\\
&=(x^4+2x^2y^2+y^4-2x^2y^2)^2-2(xy)^4=\\
&=((x^2+y^2)^2-2(xy)^2)^2-2(xy)^4=\\
&=((\frac{1}{2})^2-2\cdot(-\frac{1}{4})^2)^2-2\cdot(-\frac{1}{4})^4=\\
&=(\frac{1}{4}-\frac{1}{8})^2-\frac{1}{128}=\\
&=\frac{1}{128}
\end{aligned}$$

2 BODA

3 BODA

……………………………………………………………….……….. UKUPNO 10 BODOVA

2. Vrijedi

$x^2 + xy - 2xy - 2y^2 = 27$,

$x (x + y) - 2y (x + y) = 27$,

$(x + y) (x - 2y) = 27$ 2 BODA

S obzirom da su djelitelji broja 27 brojevi $\pm 1, \pm 3, \pm 9$ i ± 27, trebali bismo riješiti osam sustava jednadžbi da bi našli rješenja polazne jednadžbe. 2 BODA

Četiri sustava jednadžbi ne daju rješenje u skupu cijelih brojeva. 2 BODA

Četiri sustava jednadžbi daju rješenja i to su $(5,-2)$, $(-5, 2)$, $(7,2)$ i $(-7,-2)$. 4 BODA

……………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

3.Vrijedi $(9n+1)^2-(n+9)^2=(9n+1+n+9)(9n+1-n-9)=$

$$=(10n+10)(8n-8)=80(n+1)(n-1)$$ 2 BODA

Kako je n prost broj veći od 3, onda je n neparan pa su $n+1$ i $n-1$ parni brojevi. 2 BODA

Dakle, $n-1$ i $n+1$ su uzastopni parni brojevi. To znači da je jedan od njih djeljiv s 4, a drugi s 2.

2 BODA

Također, $n-1$, n, $n+1$ su tri uzastopna prirodna broja te jedan od njih mora biti djeljiv s 3. S obzirom da je n prost broj veći od 3, jedan od brojeva $n-1$ ili $n+1$ je djeljiv s 3. 2 BODA

Na kraju je $(9n+1)^2-(n+9)^2=80\cdot 4\cdot 2\cdot 3\cdot m=1920\cdot m$ za $m\in\mathbb{N}$ pa je time tvrdnja dokazana. 2 BODA

……………………………………………………………………………... UKUPNO 10 BODOVA

4. Trokuti ASB i ASC su međusobno sukladni pravokutni trokuti (imaju zajedničku stranicu $\overline{AS}$, $|SB| = |SC| = r$, $|\sphericalangle ABS|=|\sphericalangle ACS|=90°$), pa je $|\sphericalangle BAS|=|\sphericalangle CAS|=30°$ i $|\sphericalangle BSA|=|\sphericalangle CSA|=60°$. 2 BODA

Pravokutni trokut s kutovima veličine 30° i 60° možemo nadopuniti na jednakostranični trokut, tj. u takvom je trokutu hipotenuza dvostruko dulja od kraće katete. Prema tome je

$|SB| = |SC| = \frac{1}{2}|AS| = 3$ cm. 2 BODA

Primjenom Pitagorina poučka na pravokutni trokut ASB dobivamo da je $|AB|^2 = |AS|^2 - |SB|^2$, tj.

$|AB|^2 = 36 - 9$, odakle je $|AB| = \sqrt{27}=3\sqrt{3}$ cm. 1 BOD

Površina četverokuta $ACSB$ je dvostruko veća od površine pravokutnog trokuta ASB, tj.

$P_{\square ACSB} = 2\cdot\frac{1}{2}|AB|\cdot|BS|=3\sqrt{3}\cdot 3=9\sqrt{3}$ cm^2. 2 BODA

Površinu osjenčanog lika dobivamo tako da od površine četverokuta $ACSB$ oduzmemo površinu P_1 kružnog isječka kružnice polumjera 3 cm kojemu odgovara središnji kut veličine 120°.

Dakle, $P_1=\frac{1}{3}r^2\pi=3\pi$. 2 BODA

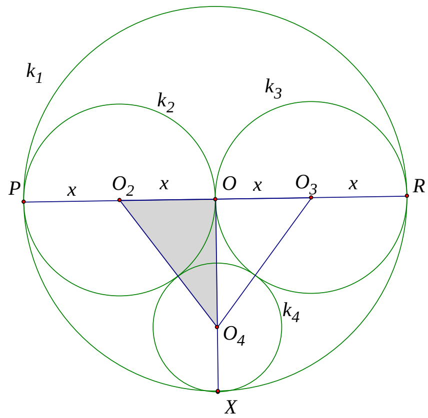
Površina osjenčanog lika je $(9\sqrt{3}-3\pi)$ cm^2. 1 BOD

……………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

5. Neka je $x = |PO_2| = |O_2O| = |OO_3| = |O_3R|$

Tada je $|O_2O_4| = x + 18$. 1 BOD

Uočimo pravokutan trokut O_4OO_2. Primjenom Pitagorina poučka slijedi



1 BOD

$$|O_2O_4|^2 = |O_2O|^2 + |OO_4|^2$$
$$(x+18)^2 = x^2 + (2x-18)^2$$
2 BODA

$$4x^2 - 108x = 0$$
$$4x(x-27) = 0$$
2 BODA

Dakle, $x_1 = 0$ što nije moguće i 1 BOD

$x_2 = 27$. 1 BOD

Na kraju $|PR| = 4x = 108$ cm. 2 BODA

……………………………………………………………………..…………… UKUPNO 10 BODOVA