ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

13. ožujka 2012.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-1.1. (10 bodova)

Odredi sve parove (a, b) cijelih brojeva takvih da je $a\,(a-b)=b$.

Prvo rješenje.

Napišimo jednadžbu u obliku $a^2 = b(a+1)$.

Broj $a+1$ je relativno prost s a, a mora biti djelitelj od a^2. 4 boda

Zato mora biti $a+1=1$ ili $a+1=-1$. 3 boda

U prvom slučaju je $a=0$ i $b=0$, a u drugom $a=-2$ i $b=-4$. 3 boda

Drugo rješenje.

Napišimo jednadžbu u obliku $a^2 = b(a+1)$.

Očito $a \neq -1$ nije rješenje, pa možemo podijeliti s $(a+1)$. 1 bod

Dobivamo $b = \dfrac{a^2}{a+1}$, 1 bod

i dalje

$$b = \frac{a^2}{a+1} = \frac{a^2-1+1}{a+1} = a-1+\frac{1}{a+1}.$$ 2 boda

Da bi b bio cijeli broj, $a+1$ mora biti djelitelj broja 1. 2 boda

Stoga je $a+1=1$ ili $a+1=-1$. 1 bod

U prvom slučaju je $a=0$, $b=0$. U drugom slučaju je $a=-2$, $b=-4$. 3 boda

Treće rješenje.

Transformirajmo danu jednadžbu:

$$\begin{gathered}
a(a-b)=b \\
a^2-ab-b=0 \\
a^2-b(a+1)=0 \\
a^2-1-b(a+1)=-1 \\
(a-1)(a+1)-b(a+1)=-1 \\
(a+1)(a-b-1)=-1
\end{gathered}$$ 4 boda

Odavde slijedi

$$\left\{\begin{array}{c} a+1=1 \\ a-b-1=-1 \end{array}\right. \qquad \text{ili} \qquad \left\{\begin{array}{c} a+1=-1 \\ a-b-1=1 \end{array}\right.$$ 3 boda

Rješenje prvog sustava je $a=0$, $b=0$, a rješenje drugog $a=-2$, $b=-4$ i to su jedina cjelobrojna rješenja polazne jednadžbe. 3 boda

Četvrto rješenje.

Odmah vidimo da za $a = 0$ dobivamo $b = 0$, pa je $(a, b) = (0, 0)$ jedno rješenje. 1 bod

Za $a \neq 0$ jednadžbu možemo napisati u obliku $a - b = \frac{b}{a}$, vidimo da $\frac{b}{a}$ mora biti cijeli broj. 1 bod

Stavimo li $\frac{b}{a} = k$, vrijedi $b = ka$, pa jednadžba poprima oblik $a - ka = k$, odnosno $a = \frac{k}{1-k}$. 2 boda

Kako je $\frac{k}{1-k} = \frac{1}{1-k} - 1$ 2 boda

broj $1 - k$ mora biti djelitelj od 1, tj. $1 - k = 1$ ili $1 - k = -1$, 2 boda

odakle dobivamo $k = 0$ i $k = 2$.

Za $k = 0$ dobije se $a = 0$, no pretpostavili smo da je $a \neq 0$. 1 bod

Za $k = 2$ dobije se $a = -2$, $b = -4$. 1 bod

Napomena:
Učeniku koji pogodi jedno ili oba rješenja treba dati 1 bod odnosno 2 boda.

Ukoliko učenik rješava zadatak na ispravan način, ali dobije samo jedno rješenje, može dobiti najviše 8 bodova.

Zadatak A-1.2. (10 bodova)

Jedan od brojeva x^2 i $(1-x)^2$ je manji, a drugi veći od 1.

Dokaži da vrijedi $0 < x^2 - x < 2$.

Prvo rješenje.

Prema uvjetima zadatka, vrijedi

$$x^2 < 1 < (1-x)^2 \qquad \text{ili} \qquad (1-x)^2 < 1 < x^2. \qquad (*)$$ 1 bod

U prvom slučaju je

$$x^2 < 1, \qquad \text{tj.} \qquad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

i

$$(1-x)^2 > 1, \quad \text{odnosno} \quad x^2 - 2x > 0, \quad \text{tj.} \quad x \in \langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 2, \infty \rangle.$$

Oba uvjeta su ispunjena za $x \in \langle -1, 0 \rangle$. 2 boda

U drugom slučaju je

$$x^2 > 1, \qquad \text{tj.} \qquad x \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle$$

i

$$(1-x)^2 < 1, \quad \text{odnosno} \quad x^2 - 2x < 0, \quad \text{tj.} \quad x \in \langle 0, 2 \rangle.$$

Oba uvjeta zadovoljavaju $x \in \langle 1, 2 \rangle$. 2 boda

To znači da je uvjet (*) ekvivalentan s $x \in \langle -1, 0\rangle \cup \langle 1, 2\rangle$. 1 bod

Odredimo kada vrijedi nejednakost $0 < x^2 - x < 2$. (**)

Iz $x(x-1) > 0$ dobivamo $x \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle$,

a iz $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) < 0$ dobivamo $x \in \langle -1, 2\rangle$.

Obje nejednakosti vrijede za $x \in \langle -1, 0\rangle \cup \langle 1, 2\rangle$, 3 boda

i time smo dokazali da brojevi za koje vrijedi (*) zadovoljavaju (**). 1 bod

Drugo rješenje.

Prema uvjetima zadatka, vrijedi

$$x^2 < 1 < (1-x)^2 \qquad \text{ili} \qquad (1-x)^2 < 1 < x^2$$ 1 bod

odnosno

$$x^2 - 1 < 0 < (1-x)^2 - 1 \qquad \text{ili} \qquad (1-x)^2 - 1 < 0 < x^2 - 1$$

tj.

$$x^2 - 1 < 0 < x^2 - 2x \qquad \text{ili} \qquad x^2 - 2x < 0 < x^2 - 1$$

U oba slučaja očito vrijedi

$$(x^2 - 1)(x^2 - 2x) < 0.$$ 3 boda

Kako je $x^2 - 1 = (x^2 - x) + (x - 1)$ i $x^2 - 2x = (x^2 - x) - x$, vrijedi

$$\begin{aligned}
\big((x^2 - x) + (x-1)\big)\big((x^2 - x) - x\big) &< 0 \\
(x^2 - x)^2 + (x-1)(x^2 - x) - x(x^2 - x) - x(x-1) &< 0 \\
(x^2 - x)^2 - 2(x^2 - x) &< 0 \\
(x^2 - x)(x^2 - x - 2) &< 0 \qquad (*)
\end{aligned}$$ 4 boda

Kako je $x^2 - x - 2 < x^2 - x$, iz nejednakosti (*) slijedi

$$x^2 - x > 0 \qquad \text{i} \qquad x^2 - x - 2 < 0,$$ 2 boda

a to je upravo ono što smo htjeli pokazati, $0 < x^2 - x < 2$.

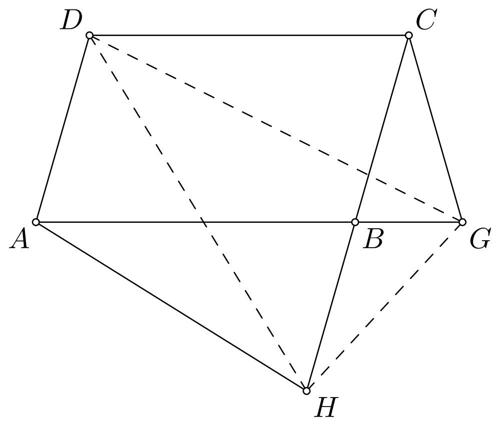
Zadatak A-1.3. (10 bodova)

Dan je paralelogram $ABCD$ sa šiljastim kutom u vrhu A. Na pravcu AB odabrana je točka G, različita od B, tako da je $|BC| = |CG|$, a na pravcu BC točka H, različita od B, tako da je $|AB| = |AH|$. Dokaži da je trokut DGH jednakokračan.

Rješenje.

Trokuti ABH i BCG su jednakokračni i vrijedi $\sphericalangle ABH = \sphericalangle CBG$ (vršni kutovi).

Stoga je i $\sphericalangle BAH = \sphericalangle BCG$. 3 boda



Kako je

$$\sphericalangle DAH = \sphericalangle DAB + \sphericalangle BAH = \sphericalangle BCD + \sphericalangle BCG = \sphericalangle DCG$$ 1 bod

i $|AD| = |BC| = |CG|$, $|AH| = |AB| = |CD|$ 2 boda

trokuti ADH i CGD su sukladni. 2 boda

Iz toga slijedi da je $|DH| = |DG|$, tj. trokut DGH je jednakokračan. 2 boda

Zadatak A-1.4. (10 bodova)

Koliko ima parova (x, y) cijelih brojeva za koje vrijedi:

$$(x + y + 2012)^2 = x^2 + y^2 + 2012^2 \ ?$$

Rješenje.

Kvadriranjem trinoma i sređivanjem jednakosti dobivamo

$$(x + y + 2012)^2 = x^2 + y^2 + 2012^2$$
$$x^2 + y^2 + 2012^2 + 2xy + 2x \cdot 2012 + 2y \cdot 2012 = x^2 + y^2 + 2012^2$$
$$xy + x \cdot 2012 + y \cdot 2012 = 0$$ 1 bod
$$xy + 2012x + 2012y + 2012^2 = 2012^2$$
$$(x + 2012)(y + 2012) = 2012^2.$$ 2 boda

Vrijedi $2012^2 = 2^4 \cdot 503^2$, a 503 je prost broj. 1 bod
(Odmah vidimo da nije djeljiv s 2, 3 i 5. Dovoljno je provjeriti da 503 nije djeljiv sa 7, 11, 13, 17 i 19, jer je $23 \cdot 23 = 529 > 503$.)

Stoga je broj pozitivnih djelitelja broja 2012^2 jednak $(4 + 1) \cdot (2 + 1) = 15$, 1 bod

a ukupan broj djelitelja jednak je 30, 1 bod

što je ujedno broj mogućih prikaza broja 2012^2 u obliku umnoška dvaju faktora. 1 bod

Svakom prikazu desne strane u obliku umnoška dvaju faktora odgovara jedno rješenje dane jednadžbe. 2 boda
(Za bilo koje $a, b \in \mathbb{Z}$ za koje je $a \cdot b = 2012^2$ postoje jedinstveni $x, y \in \mathbb{Z}$ takvi da je $x + 2012 = a$, $y + 2012 = b$.)

Zato dana jednadžba ima 30 rješenja u skupu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. 1 bod

Napomena: Djelitelji broja 2012 su:

$$-16 \cdot 503^2,\ -8 \cdot 503^2,\ -4 \cdot 503^2,\ -2 \cdot 503^2,\ -503^2,\ -16 \cdot 503,\ -8 \cdot 503,\ -4 \cdot 503,$$
$$-2 \cdot 503,\ -503,\ -16,\ -8,\ -4,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 503,\ 2 \cdot 503,$$
$$4 \cdot 503,\ 8 \cdot 503,\ 16 \cdot 503,\ 503^2,\ 2 \cdot 503^2,\ 4 \cdot 503^2,\ 8 \cdot 503^2,\ 16 \cdot 503^2$$

Zadatak A-1.5. (10 bodova)

Na početku se na ploči nalaze brojevi 2009, 2012 i 2015. Željko u svakom koraku označi brojeve na ploči s a, b i c u nekom poretku, a zatim ih zamjenjuje brojevima $3a - b$, $3b - c$ i $3c - a$. Može li Željko uzastopnom primjenom ovog postupka postići da na ploči u nekom trenutku pišu tri jednaka broja?

Prvo rješenje.

Na početku se na ploči nalaze jedan paran i dva neparna broja.

Dokažimo da će nakon svakog koraka na ploči također biti napisan jedan paran i dva neparna broja. 4 boda

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je u nekom trenutku broj a paran, a brojevi b i c neparni. Tada su brojevi $3a - b$ i $3c - a$ neparni, a broj $3b - c$ paran, što znači da i nakon koraka opet imamo dva neparna i jedan parni broj. 4 boda

Dakle, nije moguće da na ploči nakon nekog koraka sva tri broja budu parna ili sva tri neparna, što znači da nije moguće postići da su sva tri broja jednaka. 2 boda

Drugo rješenje.

Pretpostavimo da je moguće postići da su nakon nekog koraka svi brojevi jednaki,

tj. da u nekom trenutku vrijedi

$$3a - b = 3b - c = 3c - a = t. \qquad \text{3 boda}$$

Riješimo taj sustav, tj. izrazimo a, b i c pomoću t.

Vrijedi

$$\begin{aligned} b &= 3a + t \\ c &= 3b - t = 9a - 4t \\ a &= 3c - t = 27a - 13t \end{aligned}$$

pa iz $26a = 13t$ slijedi $a = \dfrac{t}{2}$ i dalje je $b = \dfrac{t}{2}$ i $c = \dfrac{t}{2}$, tj., $a = b = c$. 4 boda

To znači da možemo dobiti tri jednaka broja samo ako smo u prethodnom koraku imali tri jednaka broja. 2 boda

Zaključujemo da nije moguće dobiti tri jednaka broja ako krenemo od brojeva 2009, 2012 i 2015. 1 bod

Treće rješenje.

Pretpostavimo da je moguće postići da se nakon nekog koraka na ploči nalaze tri jednaka broja.

Neka se to prvi put dogodi kada iz trojke x, y, z prelazimo na trojku $3x-y$, $3y-z$, $3z-x$. Drugim riječima, pretpostavimo da je $3x-y=3y-z=3z-y$, a da brojevi x, y i z nisu svi jednaki. 3 boda

Nadalje, bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $x \geqslant y$ i $x \geqslant z$. 1 bod

Zbog jednakosti $3x-y=3z-x$ zaključujemo

$$4x = 3z + y \leqslant 3x + x = 4x. \quad \text{2 boda}$$

Prethodna nejednakost je moguća samo u slučaju $x=y=z$, 2 boda

što je u kontradikciji s pretpostavkom da x, y i z nisu svi jednaki. 1 bod

Zaključujemo da nije moguće u nekom koraku dobiti tri jednaka broja ako u prethodnom koraku nismo već imali tri jednaka broja. To znači da Željko ne može postići da na ploči pišu tri jednaka broja. 1 bod

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

13. ožujka 2012.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-2.1. (10 bodova)

Ovisno o realnom parametru a, riješi jednadžbu

$$(a-1)\left(1+x+x^2\right)^2=(a+1)\left(1+x^2+x^4\right)$$

u skupu realnih brojeva.

Rješenje.

Vrijedi

$$\begin{aligned} 1+x^2+x^4 &= (1+x+x^2)^2-(2x+2x^2+2x^3) \\ &= (1+x+x^2)^2-2x(1+x+x^2) \\ &= (1+x+x^2)\left((1+x+x^2)-2x\right). \end{aligned}$$ 2 boda

Stoga danu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$(a-1)\left(1+x+x^2\right)^2=(a+1)\left(1+x+x^2\right)\left((1+x+x^2)-2x\right)$$

$$\left(1+x+x^2\right)\left(((a-1)-(a+1))\left(1+x+x^2\right)+2x\,(a+1)\right)=0$$ 1 bod

$$\left(1+x+x^2\right)\left(-2\left(1+x+x^2\right)+2x\,(a+1)\right)=0$$

$$\left(1+x+x^2\right)\left(-2-2x-2x^2+2ax+2x\right)=0$$

$$\left(1+x+x^2\right)\left(1-ax+x^2\right)=0$$ 1 bod

Jednadžba $x^2+x+1=0$ nema realnih rješenja. 1 bod

Diskriminanta jednadžbe $x^2-ax+1=0$ je $D=a^2-4$, pa ona ima realna rješenja ako i samo ako je $|a|\geqslant 2$. 2 boda

Za $a\in\langle -2,2\rangle$ dana jednadžba nema realnih rješenja, 1 bod

za $a=2$ jednadžba ima jedno rješenje, $x=1$, a za $a=-2$ rješenje $x=-1$. 1 bod

Za $a<-2$ i $a>2$ jednadžba ima dva različita realna rješenja,

$$x_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}.$$ 1 bod

Zadatak A-2.2. (10 bodova)

Dokaži da za svaki prirodni broj $k>2$ postoji k prirodnih brojeva takvih da je njihov zbroj jednak njihovom umnošku.

Rješenje.

Za $k=2$, traženi brojevi a i b zadovoljavaju jednakost $a+b=ab$.
Jedno (i jedino) rješenje je $a=b=2$.

Za $k=3$ traženi brojevi a, b i c zadovoljavaju jednakost $a+b+c=abc$.
Takvi brojevi su $a=1$, $b=2$, $c=3$.

Za $k=4$ jednakost $a+b+c+d=abcd$ zadovoljavaju brojevi
$a=1$, $b=1$, $c=2$, $d=4$.

Za veće k pokušajmo zadovoljiti uvjet $a_1+a_2+\ldots+a_k=a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k$ brojevima $a_1=a_2=\ldots=a_{k-2}=1,\ \ a_{k-1}=x,\ \ a_k=y$.

Tada mora biti $(k-2)+x+y=xy$.

Jedno (općenito ne i jedino) rješenje je $x=2$, $y=k$.

Zaključujemo da traženih k prirodnih brojeva postoji za svaki k; to su (npr.) brojevi

$$1, \quad 1, \quad \ldots, \quad 1, \quad 2, \quad k.$$ 10 bodova

Njihov zbroj je $(k-2)\cdot 1+2+k=2k$, kao i njihov umnožak $1^{k-2}\cdot 2\cdot k=2k$.

Napomena: Učenik koji nađe primjere samo za male vrijednosti k:

- za primjere za $k=2$ i $k=3$ dobiva 1 bod,
- za primjer za $k=4$ dobiva 1 bod.

Zadatak A-2.3. (10 bodova)

Odredi sve prirodne brojeve n za koje vrijedi

$$5^n+2^{n+1}3^n=9^n+4^n.$$

Rješenje.

Danu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned} 5^n &= 3^{2n}-2\cdot 3^n\cdot 2^n+2^{2n} \\ 5^n &= (3^n-2^n)^2 \end{aligned}$$ 2 boda

Desna strana je potpun kvadrat, pa mora biti i lijeva.

Stoga je n paran broj, $n=2k$ $(k\in\mathbb{N})$. 1 bod

$$\begin{aligned} 5^k &= 3^{2k}-2^{2k} \\ 5^k &= \left(3^k-2^k\right)\left(3^k+2^k\right) \end{aligned}$$ 2 boda

Razlika brojeva 3^k-2^k i 3^k+2^k je 2^{k+1} pa nije moguće da su oba broja djeljiva s 5. 2 boda

Zato je jedina mogućnost $3^k-2^k=1$ i $3^k+2^k=5^k$, dakle $k=1$. 2 boda

Jedino rješenje dane jednadžbe je $n=2k=2$. 1 bod

Zadatak A-2.4. (10 bodova)

Neka je P točka u unutrašnjosti trokuta ABC. Neka su D, E i F nožišta okomica iz točke P na pravce BC, CA i AB redom. Ako su četverokuti $AEPF$, $BFPD$ i $CDPE$ tangencijalni, dokaži da je P središte trokutu ABC upisane kružnice.

Rješenje.

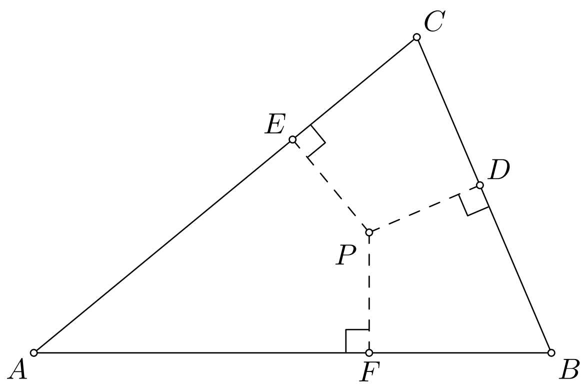
Kako su kutovi $\sphericalangle AEP$ i $\sphericalangle AFP$ pravi, iz Pitagorinog poučka slijedi

$$|PA|^2 = |PF|^2 + |FA|^2 = |PE|^2 + |EA|^2,$$ 1 bod

što možemo napisati u obliku

$$|AF|^2 - |PE|^2 = |AE|^2 - |PF|^2,$$ 1 bod

$$(|AF| + |PE|) \cdot (|AF| - |PE|) = (|AE| + |PF|) \cdot (|AE| - |PF|)\,. \qquad (*)$$ 2 boda



Budući da je četverokut $AFPE$ tangencijalan, vrijedi

$$|AF| + |PE| = |AE| + |PF|.$$ 1 bod

pa iz (*) slijedi

$$|AF| - |PE| = |AE| - |PF|.$$ 2 boda

Iz posljednjih dviju jednakosti dobivamo $|PE| = |PF|$. 1 bod

Analogno dobijemo i $|PD| = |PE|$ pa je P središte upisane kružnice trokuta ABC. 2 boda

Zadatak A-2.5. (10 bodova)

Koliko ima kvadratnih funkcija s koeficijentima iz skupa

$$S = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$$

kojima nijedna nultočka nije realna?

Rješenje.

Funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ nema realnih nultočaka ako i samo ako je $b^2 - 4ac < 0$.

Za $a, b, c \in S$, možemo staviti $a = 2^k$, $b = 2^s$, $c = 2^l$, gdje su $k, l, s \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. 1 bod

Tada je

$$b^2 - 4ac = (2^s)^2 - 4 \cdot 2^k \cdot 2^l = 2^{2s} - 2^{2+k+l}$$

pa je uvjet $b^2 - 4ac < 0$ ekvivalentan s $2s < 2 + k + l$, odnosno s $k + l + 1 \geqslant 2s$. 3 boda

Odredimo broj mogućih odabira brojeva k, l, $s \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ takvih da vrijedi $k + l + 1 \geqslant 2s$, ovisno o zbroju $k + l$: 1 bod

$k+l$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
broj izbora (k, l)	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
broj izbora s	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6

4 boda

Zato je ukupan broj funkcija sa željenim svojstvom jednak

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 6 = 135.$$

1 bod

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

13. ožujka 2012.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-3.1. (10 bodova)

Dan je trokut ABC i točka D na stranici $\overline{BC}$. Neka je $\alpha_1 = \sphericalangle DAB$ i $\alpha_2 = \sphericalangle CAD$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{|AD|} = \frac{\sin \alpha_1}{|AC|} + \frac{\sin \alpha_2}{|AB|}.$$

Prvo rješenje.

Površine trokuta su:

$$P(ABC) = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2),$$

$$P(ABD) = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot \sin \alpha_1, \qquad P(ADC) = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |AC| \cdot \sin \alpha_2.$$ 3 boda

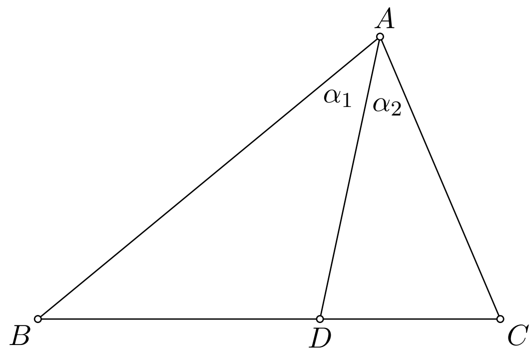
Budući da je $P(ABC) = P(ABD) + P(ADC)$ dobivamo

$$\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot \sin \alpha_1 + \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |AC| \cdot \sin \alpha_2.$$ 4 boda

Dijeljenjem s $\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot |AD|$ dobivamo traženu jednakost. 3 boda

Drugo rješenje.

Označimo $\sphericalangle ADB = \delta$. Tada je $\sphericalangle ADC = 180° - \delta$
i vrijedi $\sin \sphericalangle ADB = \sin \sphericalangle ADC = \sin \delta$. 1 bod



Prema poučku o sinusima vrijedi:

$$\frac{\sin \alpha_1}{|BD|} = \frac{\sin \delta}{|AB|} \quad \text{i} \quad \frac{\sin \alpha_2}{|DC|} = \frac{\sin \delta}{|AC|}.$$ 1 bod

Odatle slijedi:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin\alpha_1}{|AC|}+\frac{\sin\alpha_2}{|AB|} &= \frac{\sin\alpha_1}{|BD|}\cdot\frac{|BD|}{|AC|}+\frac{\sin\alpha_2}{|DC|}\cdot\frac{|DC|}{|AB|} \\
&= \frac{\sin\delta}{|AB|}\cdot\frac{|BD|}{|AC|}+\frac{\sin\delta}{|AC|}\cdot\frac{|DC|}{|AB|} \qquad \text{1 bod} \\
&= \frac{\sin\delta}{|AB|\cdot|AC|}(|BD|+|DC|)=\frac{\sin\delta}{|AB|}\cdot\frac{|BC|}{|AC|}. \qquad \text{3 boda}
\end{aligned}$$

Koristeći ponovno poučak o sinusima, tj. jednakosti $\frac{\sin\delta}{|AB|}=\frac{\sin\beta}{|AD|}$ i $\frac{\sin\beta}{|AC|}=\frac{\sin\alpha}{|BC|}$ dalje imamo 1 bod

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sin\beta}{|AD|}\cdot\frac{|BC|}{|AC|}=\frac{\sin\beta}{|AC|}\cdot\frac{|BC|}{|AD|} \\
&= \frac{\sin\alpha}{|BC|}\cdot\frac{|BC|}{|AD|}=\frac{\sin\alpha}{|AD|}. \qquad \text{3 boda}
\end{aligned}$$

čime je dokazana tvrdnja.

Zadatak A-3.2. (10 bodova)

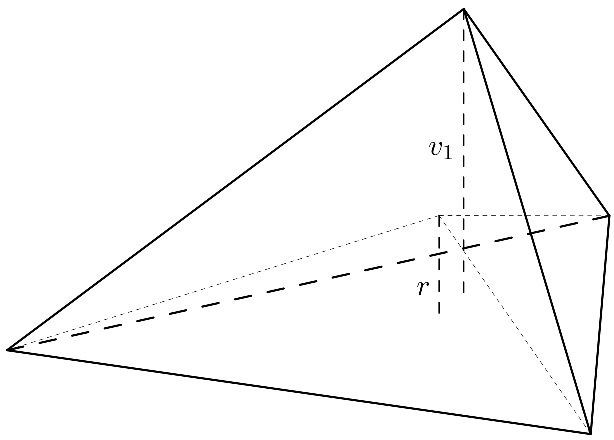
Kugli polumjera r opisan je tetraedar (trostrana piramida). Ako su duljine visina tog tetraedra v_1, v_2, v_3 i v_4, dokaži da vrijedi

$$\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}+\frac{1}{v_4}=\frac{1}{r}.$$

Rješenje.

Označimo s V volumen tetraedra, sa S njegovo oplošje, a s B_1, B_2, B_3 i B_4 površine njegovih strana (koje odgovaraju visinama v_1, v_2, v_3 i v_4, redom). Vrijedi $S=B_1+B_2+B_3+B_4$ i

$$V=\frac{1}{3}B_1v_1=\frac{1}{3}B_2v_2=\frac{1}{3}B_3v_3=\frac{1}{3}B_4v_4. \qquad \text{1 bod}$$



S druge strane, uočimo da je tetraedar sastavljen od četiri manja tetraedra s osnovkama površina B_i i visinama r, pa vrijedi:

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3}B_1r+\frac{1}{3}B_2r+\frac{1}{3}B_3r+\frac{1}{3}B_4r \qquad \text{1 bod} \\
&= \frac{1}{3}(B_1+B_2+B_3+B_4)\cdot r=\frac{1}{3}S\cdot r. \qquad \text{2 boda}
\end{aligned}$$

Iz $\frac{1}{3}B_i v_i = \frac{1}{3}Sr$ slijedi $\frac{1}{v_i} = \frac{B_i}{Sr}$ za $i = 1, 2, 3, 4$. 4 boda

Konačno,

$$\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4} = \frac{B_1 + B_2 + B_3 + B_4}{Sr} = \frac{S}{Sr} = \frac{1}{r}.$$ 2 boda

Zadatak A-3.3. (10 bodova)

Dokaži da ne postoji racionalni broj x takav da je $\{x^2\} + \{x\} = 1$.
Odredi barem jedan realni broj x koji zadovoljava tu jednakost.

Oznaka $\{x\}$ predstavlja razlomljeni dio od x, tj. $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ pri čemu je $\lfloor x \rfloor$ najveći cijeli broj koji nije veći od x. Npr. $\lfloor 3.4 \rfloor = 3$, $\{3.4\} = 0.4$.

Rješenje.

Racionalni broj x može se zapisati u obliku $x = \frac{p}{q}$, pri čemu su $p, q \in \mathbb{Z}$ relativno prosti. Tada je $\left\{x^2\right\} + \{x\} = \left\{\frac{p^2}{q^2}\right\} + \left\{\frac{p}{q}\right\}$. Očito je $\left\{\frac{p^2}{q^2}\right\} = \frac{m}{q^2}$ za neki $m \in \mathbb{N}$, $m < q^2$, relativno prost sa q, te $\left\{\frac{p}{q}\right\} = \frac{n}{q}$ za neki $n \in \mathbb{N}$, $n < q$, relativno prost sa q. 2 boda

No, tada je

$$\left\{x^2\right\} + \{x\} = \left\{\frac{p^2}{q^2}\right\} + \left\{\frac{p}{q}\right\} = \frac{m}{q^2} + \frac{n}{q} = \frac{m + nq}{q^2}$$

neskrativi razlomak. 3 boda

Njegova vrijednost bi mogla biti 1 samo ako je $q = 1$, no tada je $x = p \in \mathbb{Z}$, pa je $\left\{x^2\right\} + \{x\} = 0$. Stoga ne postoji racionalni broj x takav da je $\left\{x^2\right\} + \{x\} = 1$. 2 boda

Odredimo npr. $x \in \langle 0, 1 \rangle$ koji zadovoljava jednadžbu $\{x^2\} + \{x\} = 1$. Tada je $x^2 + x = 1$. Te uvjete zadovoljava $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$. 3 boda

Napomena: Za odgovor na drugo pitanje učenik dobiva 3 boda ako je na bilo koji način došao do nekog broja x s traženim svojstvom i to provjerio.

Zadatak A-3.4. (10 bodova)

Izračunaj sumu

$$\sum_{n=1}^{2012} \operatorname{tg} n \operatorname{tg}(n+1).$$

Rješenje.

Koristit ćemo adicijsku formulu za tangens, $\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$, tj. jednakost

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg}(x - y)} - 1.$$ 2 boda

Uvrstimo $x = n + 1$, $y = n$:

$$\operatorname{tg}(n+1) \operatorname{tg} n = \frac{\operatorname{tg}(n+1) - \operatorname{tg} n}{\operatorname{tg} 1} - 1.$$ 3 boda

Zbrajanjem se ponište svi članovi osim prvog i posljednjeg:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2012} \operatorname{tg} n \operatorname{tg}(n+1) &= \frac{\operatorname{tg} 2 - \operatorname{tg} 1}{\operatorname{tg} 1} - 1 + \frac{\operatorname{tg} 3 - \operatorname{tg} 2}{\operatorname{tg} 1} - 1 + \cdots + \frac{\operatorname{tg} 2013 - \operatorname{tg} 2012}{\operatorname{tg} 1} - 1 \\ &= \frac{\operatorname{tg} 2013 - \operatorname{tg} 1}{\operatorname{tg} 1} - 2012 = \frac{\operatorname{tg} 2013}{\operatorname{tg} 1} - 2013.\end{aligned}$$

5 bodova

Zadatak A-3.5. (10 bodova)

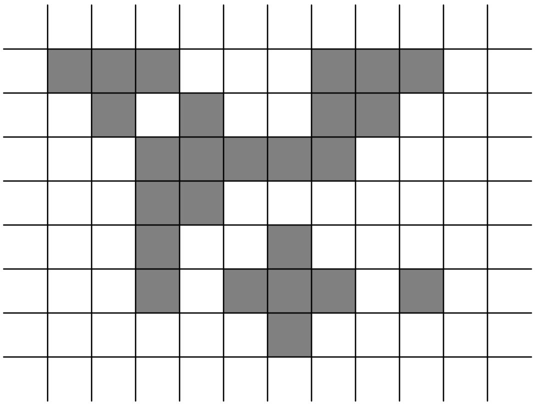
Dana je ploča dimenzija 1000×1000. Je li moguće obojati točno 125 polja te ploče tako da svako od obojanih polja ima neparan broj obojanih susjeda? Dva polja nazivamo *susjedima* ako imaju zajedničku stranicu.

Rješenje.

Budući da svako polje ima (najviše) 4 susjeda, broj obojanih susjeda pojedinog polja može biti 0, 1, 2, 3 ili 4.

Označimo s n_k broj polja s k obojanih susjeda. 1 bod

Neka je N ukupan broj zajedničkih stranica između dvaju susjednih obojanih polja.



Izračunamo li

$$n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4$$

1 bod

dobit ćemo $2N$ jer smo svaku zajedničku stranicu brojali točno dvaput. 2 boda

Dakle,

$$\begin{aligned}N &= \frac{1}{2}(n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4) \\ &= \frac{1}{2}(n_1 + n_3) + n_2 + n_3 + 2n_4.\end{aligned}$$

Budući da je N prirodni broj, broj $n_1 + n_3$ mora biti paran. 4 boda

Zato je nemoguće obojati 125 polja tako da svako od njih ima neparan broj obojanih susjeda (tj. jednog ili tri), jer je tada $n_1 + n_3 = 125$ neparan broj. 2 boda

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

13. ožujka 2012.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-4.1. (10 bodova)

Realni brojevi x, y i z su uzastopni članovi aritmetičkog niza. Ako su brojevi $\cos^2 x$, $\cos^2 y$ i $\cos^2 z$ međusobno različiti i uzastopni članovi nekog aritmetičkog niza, odredi sve moguće vrijednosti od y.

Prvo rješenje.

Kako su x, y i z uzastopni članovi aritmetičkog niza, postoji $t \in \mathbb{R}$ takav da je $x = y - t$ i $z = y + t$. 1 bod

Uvjet da su $\cos^2 x$, $\cos^2 y$ i $\cos^2 z$ uzastopni članovi aritmetičkog niza možemo zapisati u obliku

$$\cos^2 x + \cos^2 z = 2\cos^2 y.$$ 1 bod

Sada redom imamo

$$\begin{gathered}
\cos^2(y-t) + \cos^2(y+t) = 2\cos^2 y \\
(\cos y \cos t + \sin y \sin t)^2 + (\cos y \cos t - \sin y \sin t)^2 = 2\cos^2 y \\
\cos^2 y \cos^2 t + 2\sin y \cos y \sin t \cos t + \sin^2 y \sin^2 t + \\
\cos^2 y \cos^2 t - 2\sin y \cos y \sin t \cos t + \sin^2 y \sin^2 t = 2\cos^2 y \\
\cos^2 y \cos^2 t + \sin^2 y \sin^2 t = \cos^2 y
\end{gathered}$$ 2 boda

odakle dalje slijedi

$$\begin{gathered}
\sin^2 y \sin^2 t = \cos^2 y \left(1 - \cos^2 t\right) \\
\sin^2 y \sin^2 t = \cos^2 y \sin^2 t \\
\sin^2 t \left(\cos^2 y - \sin^2 y\right) = 0
\end{gathered}$$ 2 boda

Ovo je moguće jedino ako je $\sin t = 0$ ili $\cos y = \pm \sin y$.

Ako je $\sin t = 0$, onda je $t = k\pi$, za $k \in \mathbb{Z}$. No, tada je $x = y - k\pi$, $z = y + k\pi$ i stoga $\cos^2 x = \cos^2 z = \cos^2 y$. Dakle, ovaj slučaj otpada. 2 boda

Zato je $\cos y = \pm \sin y$, odnosno $\operatorname{tg} y = \pm 1$. Konačno, $y \in \left\{ \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$. 2 boda

Drugo rješenje.

Prema uvjetu zadatka je $x + z = 2y$ i $\cos^2 x + \cos^2 z = 2\cos^2 y$, 2 boda

odakle je

$$\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 2z}{2} = 1 + \cos 2y \qquad \text{1 bod}$$

$$\cos 2x + \cos 2z = 2\cos 2y$$

$$\cos(x+z)\cos(x-z) = \cos 2y \qquad \text{1 bod}$$

$$\cos 2y \cos(x-z) = \cos 2y$$

$$\cos 2y\,(1 - \cos(x-z)) = 0 \qquad \text{2 boda}$$

Ovo vrijedi ako je $\cos(x-z) = 1$ ili $\cos 2y = 0$.

Ako je $\cos(x-z) = 1$, onda je je $x - z = 2k\pi$. Tada je razlika niza x, y, z jednaka $k\pi$, no tada je drugi niz konstantan, pa ova mogućnost otpada. 2 boda

Ako je $\cos 2y = 0$, onda je $y = \frac{1}{4}(2k+1)\pi$, za $k \in \mathbb{Z}$. 2 boda

Zadatak A-4.2. (10 bodova)

Odredi skup svih realnih brojeva x koji zadovoljavaju jednadžbu

$$\left\lfloor \frac{2x-1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4x+1}{6} \right\rfloor = \frac{5x-4}{3},$$

gdje je s $\lfloor a \rfloor$ označen najveći cijeli broj koji nije veći od a.

Prvo rješenje.

Uočimo da je lijeva strana početne jednakosti cijeli broj pa to mora biti i desna. 1 bod

Stoga postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $\dfrac{5x-4}{3} = k$.

Tada je $x = \dfrac{3k+4}{5}$. 2 boda

Uvrštavanjem u početnu jednadžbu nakon sređivanja dobivamo:

$$\left\lfloor \frac{2k+1}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4k+7}{10} \right\rfloor = k. \qquad \text{2 boda}$$

Vrijedi $k = 5a + b$, za $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$:

$$\left\lfloor \frac{2(5a+b)+1}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4(5a+b)+7}{10} \right\rfloor = 5a + b$$

$$\left\lfloor \frac{10a+2b+1}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20a+4b+7}{10} \right\rfloor = 5a + b$$

$$2a + \left\lfloor \frac{2b+1}{5} \right\rfloor + 2a + \left\lfloor \frac{4b+7}{10} \right\rfloor = 5a + b$$

$$\left\lfloor \frac{2b+1}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4b+7}{10} \right\rfloor = a + b \qquad \text{2 boda}$$

Razlikujemo 5 slučajeva:

1. $b = 0$

   $$a+0 = \left\lfloor \frac{2b+1}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4b+7}{10} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2\cdot 0+1}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4\cdot 0+7}{10} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{7}{10} \right\rfloor = 0+0 = 0$$

   U ovom slučaju je $a = 0$, $b = 0$, $k = 0$, $x = \frac{4}{5}$.

2. $b = 1$

   $$a+1 = \left\lfloor \frac{2b+1}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4b+7}{10} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2\cdot 1+1}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4\cdot 1+7}{10} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{11}{10} \right\rfloor = 0+1 = 1$$

   U ovom slučaju je $a = 0$, $b = 1$, $k = 1$, $x = \frac{7}{5}$.

3. $b = 2$

   $$a+2 = \left\lfloor \frac{2b+1}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4b+7}{10} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2\cdot 2+1}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4\cdot 2+7}{10} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{5}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{15}{10} \right\rfloor = 1+1 = 2$$

   U ovom slučaju je $a = 0$, $b = 2$, $k = 2$, $x = 2$.

4. $b = 3$

   $$a+3 = \left\lfloor \frac{2b+1}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4b+7}{10} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2\cdot 3+1}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4\cdot 3+7}{10} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{7}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{19}{10} \right\rfloor = 1+1 = 2$$

   U ovom slučaju je $a = -1$, $b = 3$, $k = -2$, $x = -\frac{2}{5}$.

5. $b = 4$

   $$a+4 = \left\lfloor \frac{2b+1}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4b+7}{10} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2\cdot 4+1}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4\cdot 4+7}{10} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{9}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{23}{10} \right\rfloor = 1+2 = 3$$

   U ovom slučaju je $a = -1$, $b = 4$, $k = -1$, $x = \frac{1}{5}$.

Dakle, rješenje je $x \in \left\{ -\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{7}{5}, 2 \right\}$. 3 boda

Drugo rješenje.

Za sve realne brojeve r vrijedi $r - 1 < \lfloor r \rfloor \leqslant r$ pa vrijedi:

$$\frac{2x-1}{3} - 1 < \left\lfloor \frac{2x-1}{3} \right\rfloor \leqslant \frac{2x-1}{3}$$
$$\frac{4x+1}{6} - 1 < \left\lfloor \frac{4x+1}{6} \right\rfloor \leqslant \frac{4x+1}{6}$$

1 bod

Zbrajanjem tih nejednakosti dobivamo

$$\frac{2x-1}{3} - 1 + \frac{4x+1}{6} - 1 < \frac{5x-4}{3} \leqslant \frac{2x-1}{3} + \frac{4x+1}{6}.$$

(Uočimo da ova nejednakost nije ekvivalentna polaznoj jednadžbi!)

Sređivanjem dobivamo $-\frac{5}{2} < x \leqslant \frac{7}{2}$. (*) 2 boda

Lijeva strana početne jednakosti je cijeli broj pa to mora biti i desna. 1 bod

Stoga postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $\dfrac{5x-4}{3} = k$, tj. $x = \dfrac{3k+4}{5}$. 2 boda

Zbog nejednakosti (*) jedini kandidati za rješenje su

$$-\frac{11}{5}, \quad -\frac{8}{5}, \quad -1, \quad -\frac{2}{5}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{7}{5}, \quad 2, \quad \frac{13}{5}, \quad \frac{16}{5}.$$ 2 boda

Uvrštavanjem u početnu jednadžbu, vidimo da jednadžbu zadovoljavaju samo

$$x \in \left\{-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{7}{5}, 2\right\}.$$ 2 boda

Zadatak A-4.3. (10 bodova)

Neka su p i q realni brojevi. Graf funkcije $f(x) = x^2 + px + q$ siječe koordinatne osi u tri različite točke A, B i C. Dokaži da kružnica opisana trokutu ABC siječe os y u točki s ordinatom 1.

Prvo rješenje.

Neka su sjecišta grafa s koordinatnim osima točke $A(a,0)$, $B(b,0)$ i $C(0,c)$.

Tada su a i b nultočke dane kvadratne funkcije i vrijedi $ab = q$, 1 bod

a c je vrijednost funkcije za $x = 0$, tj. $c = f(0) = q$. 1 bod

Neka je $D(0,d)$ drugo sjecište kružnice opisane trokutu ABC i osi y. 1 bod

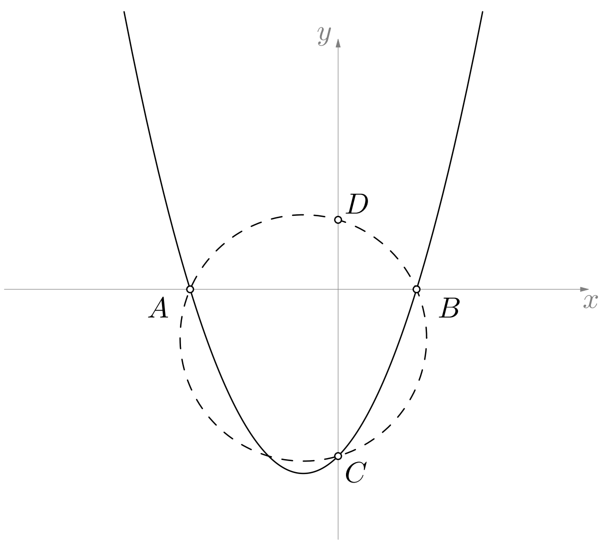
Kako se tetive $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ sijeku u ishodištu O, zbog svojstva potencije točke s obzirom na kružnicu vrijedi

$$|OA| \cdot |OB| = |OC| \cdot |OD|, \qquad (*)$$ 2 boda

tj. zbog $|OA| = |a|$, $|OB| = |b|$, $|OC| = |c|$, $|OD| = |d|$ vrijedi $|ab| = |cd|$. 1 bod

Uočimo da su brojevi ab i cd uvijek istog predznaka: negativni ako je ishodište unutar kružnice, a pozitivni ako je ishodište izvan kružnice. 2 boda

Sada iz $ab = cd$ zbog $ab = q = c$ slijedi $d = 1$, što je i trebalo pokazati. 2 boda



Napomena: Ovo rješenje može se provesti i bez direktnog korištenja potencije točke u odnosu na kružnicu.

Naime, vrijedi $\sphericalangle ADO = \sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC = \sphericalangle OBC$ i $\sphericalangle AOD = \sphericalangle COB = 90°$ pa su trokuti AOD i COB slični. Zato vrijedi $\dfrac{|OA|}{|OC|} = \dfrac{|OD|}{|OB|}$ tj. (*).

Drugo rješenje.

Neka su sjecišta grafa s koordinatnim osima točke $A(a,0)$, $B(b,0)$ i $C(0,c)$.

Tada su a i b nultočke dane kvadratne funkcije i vrijedi $a+b=-p$, $ab=q$ 1 bod

a c je vrijednost funkcije za $x=0$, tj. $c=f(0)=q$. 1 bod

Simetrala dužine $\overline{AB}$ je pravac $x=\dfrac{a+b}{2}$, a simetrala dužine $\overline{CD}$ pravac $y=\dfrac{c+1}{2}$.

Njihovo sjecište je točka $S=\left(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{c+1}{2}\right)$. 1 bod

Da bismo dokazali da točke A, B, C i $D(0,1)$ leže na istoj kružnici, dovoljno je pokazati da je točka S jednako udaljena od točaka A, B, C i D. S obzirom da je S na sjecištu simetrala dužina $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, vrijedi $|SA|=|SB|$ i $|SC|=|SD|$. Zato je dovoljno dokazati da vrijedi $|SA|=|SD|$. 1 bod

Pritom koristimo $a+b=-p$ i $c=q$.

$$\begin{aligned}|SD| &= \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{c+1}{2}-1\right)^2}\\ &= \sqrt{\left(\frac{-p}{2}\right)^2+\left(\frac{q-1}{2}\right)^2}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{p^2+(q-1)^2}\end{aligned}$$ 3 boda

S druge strane,

$$|SA| = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2+\left(\frac{c+1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(b-a)^2+(c+1)^2}$$

(vrijedi $(b-a)^2=(a+b)^2-4ab=(-p)^2-4q$)

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2}\sqrt{(p^2-4q)+(q+1)^2}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{p^2-4q+q^2+2q+1} = \frac{1}{2}\sqrt{p^2+q^2-2q+1}\end{aligned}$$ 3 boda

Sada vidimo da je $|SA|=|SD|$ čime je tvrdnja dokazana.

Zadatak A-4.4. (10 bodova)

Neka su a, b, c duljine stranica trokuta površine P. Dokaži da je $P < \frac{1}{6}\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

Rješenje.

Neka je α kut promatranog trokuta nasuprot stranice duljine a.
Iz formule $P = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ slijedi

$$P = \frac{1}{2}bc\sin\alpha \leqslant \frac{1}{2}bc$$ 2 boda

Odnosno $2P \leqslant bc$. Analogno je $2P \leqslant ca$ i $2P \leqslant ab$ 1 bod

pa zbrajanjem dobivamo

$$6P \leqslant bc + ca + ab.$$ 2 boda

Uočimo da je jednakost $P = \frac{1}{2}bc$ ispunjena samo ako je α pravi kut, pa ne može istovremeno biti $P = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}ca = \frac{1}{2}ab$.

Zato vrijedi i $6P < bc + ca + ab$. 2 boda

Sada preostaje dokazati da vrijedi $bc + ca + ab \leqslant a^2 + b^2 + c^2$.

Ta je nejednakost ekvivalentna s

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geqslant 0$$

a to očito vrijedi. 3 boda

Zadatak A-4.5. (10 bodova)

Na teniskom turniru sudjelovalo je 2^n igrača, gdje je n prirodan broj. Svaki je igrač odigrao po jedan meč sa svakim od preostalih igrača. Dokaži da možemo odabrati $n+1$ igrača i poredati ih u niz, tako da je svaki od njih pobijedio sve igrače koji su iza njega u nizu.

Rješenje.

Tvrdnju dokazujemo indukcijom po n.

Baza. Ako je $n = 1$, na turniru su točno dva igrača. Prvi u nizu je pobjednik turnira (tj. njihovog međusobnog meča). 1 bod

Korak. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodan broj n, tj. da među 2^n igrača koji su igrali svaki sa svakim možemo odabrati $n+1$ igrača i poredati ih u niz tako da je svaki od njih pobijedio sve igrače koji su iza njega u nizu. 1 bod

Pobjednik turnira s 2^{n+1} igrača pobijedio je najmanje njih 2^n. 2 boda

Naime, ako bi svi igrači imali manje od 2^n pobjeda, onda bi ukupan broj pobjeda bio najviše $2^{n+1} \cdot (2^n - 1)$. No znamo da je broj pobjeda jednak broju mečeva, što je $\frac{1}{2} \cdot 2^{n+1} \cdot (2^{n+1} - 1) = 2^n \cdot (2^{n+1} - 1) > 2^{n+1} \cdot (2^n - 1)$. Dakle, nemoguće je da su svi igrači imali manje od 2^n pobjeda. 2 boda

Po pretpostavci, među 2^n igrača koje je pobjednik pobijedio možemo odabrati njih $n+1$ i poredati ih tako da je svaki od njih pobijedio sve igrače koji su iza njega. Pobjednika dodamo na početak i tako dobivamo traženi niz od $n+2$ igrača. 4 boda