Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

13. ožujka 2012.

1. Odredi sve parove (a, b) cijelih brojeva takvih da je $a\,(a-b)=b$.

2. Jedan od brojeva x^2 i $(1-x)^2$ je manji, a drugi veći od 1.
Dokaži da vrijedi $0 < x^2 - x < 2$.

3. Dan je paralelogram $ABCD$ sa šiljastim kutom u vrhu A. Na pravcu AB odabrana je točka G, različita od B, tako da je $|BC| = |CG|$, a na pravcu BC točka H, različita od B, tako da je $|AB| = |AH|$. Dokaži da je trokut DGH jednakokračan.

4. Koliko ima parova (x, y) cijelih brojeva za koje vrijedi:

$$(x+y+2012)^2 = x^2 + y^2 + 2012^2 \text{ ?}$$

5. Na početku se na ploči nalaze brojevi 2009, 2012 i 2015. Željko u svakom koraku označi brojeve na ploči s a, b i c u nekom poretku, a zatim ih zamjenjuje brojevima $3a-b$, $3b-c$ i $3c-a$. Može li Željko uzastopnom primjenom ovog postupka postići da na ploči u nekom trenutku pišu tri jednaka broja?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

13. ožujka 2012.

1. Ovisno o realnom parametru a, riješi jednadžbu

$$(a-1)\left(1+x+x^2\right)^2=(a+1)\left(1+x^2+x^4\right)$$

u skupu realnih brojeva.

2. Dokaži da za svaki prirodni broj $k>2$ postoji k prirodnih brojeva takvih da je njihov zbroj jednak njihovom umnošku.

3. Odredi sve prirodne brojeve n za koje vrijedi

$$5^n+2^{n+1}3^n=9^n+4^n.$$

4. Neka je P točka u unutrašnjosti trokuta ABC. Neka su D, E i F nožišta okomica iz točke P na pravce BC, CA i AB redom. Ako su četverokuti $AEPF$, $BFPD$ i $CDPE$ tangencijalni, dokaži da je P središte trokutu ABC upisane kružnice.

5. Koliko ima kvadratnih funkcija s koeficijentima iz skupa

$$S=\{1,2,4,8,16,32\}$$

kojima nijedna nultočka nije realna?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

13. ožujka 2012.

1. Dan je trokut ABC i točka D na stranici $\overline{BC}$. Neka je $\alpha_1 = \sphericalangle DAB$ i $\alpha_2 = \sphericalangle CAD$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}{|AD|} = \frac{\sin\alpha_1}{|AC|} + \frac{\sin\alpha_2}{|AB|}.$$

2. Kugli polumjera r opisan je tetraedar (trostrana piramida). Ako su duljine visina tog tetraedra v_1, v_2, v_3 i v_4, dokaži da vrijedi

$$\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4} = \frac{1}{r}.$$

3. Dokaži da ne postoji racionalni broj x takav da je $\{x^2\} + \{x\} = 1$.
Odredi barem jedan realni broj x koji zadovoljava tu jednakost.

Oznaka $\{x\}$ predstavlja razlomljeni dio od x, tj. $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ pri čemu je $\lfloor x \rfloor$ najveći cijeli broj koji nije veći od x. Npr. $\lfloor 3.4 \rfloor = 3$, $\{3.4\} = 0.4$.

4. Izračunaj sumu

$$\sum_{n=1}^{2012} \operatorname{tg} n \operatorname{tg}(n+1).$$

5. Dana je ploča dimenzija 1000×1000. Je li moguće obojati točno 125 polja te ploče tako da svako od obojanih polja ima neparan broj obojanih susjeda? Dva polja nazivamo *susjedima* ako imaju zajedničku stranicu.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

13. ožujka 2012.

1. Realni brojevi x, y i z su uzastopni članovi aritmetičkog niza. Ako su brojevi $\cos^2 x$, $\cos^2 y$ i $\cos^2 z$ međusobno različiti i uzastopni članovi nekog aritmetičkog niza, odredi sve moguće vrijednosti od y.

2. Odredi skup svih realnih brojeva x koji zadovoljavaju jednadžbu

$$\left\lfloor \frac{2x-1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4x+1}{6} \right\rfloor = \frac{5x-4}{3},$$

gdje je s $\lfloor a \rfloor$ označen najveći cijeli broj koji nije veći od a.

3. Neka su p i q realni brojevi. Graf funkcije $f(x) = x^2 + px + q$ siječe koordinatne osi u tri različite točke A, B i C. Dokaži da kružnica opisana trokutu ABC siječe os y u točki s ordinatom 1.

4. Neka su a, b, c duljine stranica trokuta površine P. Dokaži da je $P < \frac{1}{6}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$.

5. Na teniskom turniru sudjelovalo je 2^n igrača, gdje je n prirodan broj. Svaki je igrač odigrao po jedan meč sa svakim od preostalih igrača. Dokaži da možemo odabrati $n+1$ igrača i poredati ih u niz, tako da je svaki od njih pobijedio sve igrače koji su iza njega u nizu.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.