ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

13. ožujka 2012.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1. Koliko ima negativnih cijelih brojeva x za koje vrijedi $\dfrac{x-2011}{x+2012} \leq 1$?

Rješenje.

$$\frac{x-2011}{x+2012} \leq 1$$

$$\frac{x-2011}{x+2012} - 1 \leq 0$$

$$\frac{x-2011-x-2012}{x+2012} \leq 0$$

$$\frac{-4023}{x+2012} \leq 0 \qquad \text{(1 bod)}$$

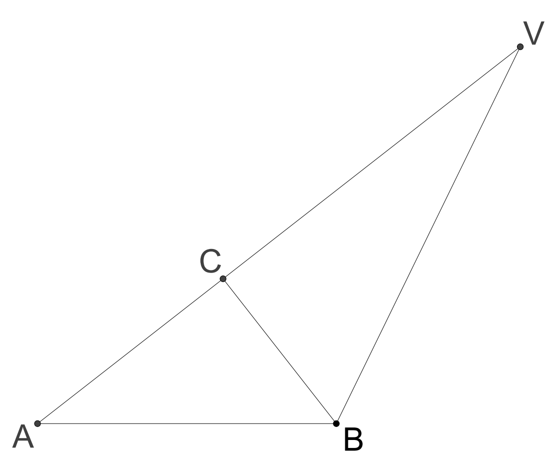
$$x+2012 > 0 \qquad \text{(1 bod)}$$

$$x > -2012 \qquad \text{(1 bod)}$$

Ima 2011 negativnih cijelih brojeva koji zadovoljavaju danu nejednakost. (1 bod)

Zadatak B-1.2. U trokutu $\triangle ABC$ mjere kutova pri vrhu A i vrhu B, redom iznose $\alpha = 38°$ i $\beta = 52°$. Izračunajte mjeru kuta što ga zatvara simetrala vanjskog kuta pri vrhu B s pravcem na kojem leži stranica $\overline{AC}$.

Rješenje.



Označimo presjek simetrale i pravca AC s V. Izračunajmo kut γ u trokutu $\triangle ABC$.

$$\gamma = 180^\circ - (38^\circ + 52^\circ) = 90^\circ. \qquad \text{(1 bod)}$$

Vanjski kut kuta β je $38^\circ + 90^\circ = 128^\circ$. Tada je $\angle CBV = 64^\circ$. (1 bod)

Iz pravokutnog trokuta BVC slijedi

$$\angle V = 90^\circ - 64^\circ = 26^\circ. \qquad \text{(2 boda)}$$

Napomena: Kut $\angle V$ možemo izračunati i iz trokuta ABV:

$$\angle V = 180^\circ - (38^\circ + 52^\circ + 64^\circ) = 26^\circ.$$

Zadatak B-1.3. Ako je $a + b = 2$ i $a^2 + b^2 = 6$, koliko je $a^{-1} + b^{-1}$?

Rješenje.

$$a^{-1} + b^{-1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b+a}{ab} = \frac{2}{ab}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Kvadrirajmo izraz $a + b = 2$. Iz

$$a^2 + 2ab + b^2 = 4 \qquad \text{(1 bod)}$$

slijedi $2ab = 4 - 6$ pa je $ab = -1$. (1 bod)

Tada je

$$a^{-1} + b^{-1} = -2. \qquad \text{(1 bod)}$$

Zadatak B-1.4. Tri su prijatelja ogladnila nakon napornog treninga. Marko je sa sobom ponio tri jednaka peciva, Ante četiri, a Luka je svoje u žurbi zaboravio uzeti. No, prijatelji su peciva međusobno ravnomjerno razdijelili i sve pojeli. Luka nikako prijateljima nije htio ostati dužan pa je izvadio sedam kuna i rekao da podijele novac pravedno. Koliko je kuna dobio Marko, a koliko Ante?

Rješenje. Ukupno je bilo 7 peciva, a svatko od trojice prijatelja je dobio $2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ peciva. (1 bod)

Marko je pojeo svojih $\frac{7}{3}$ peciva i Luki dao $\frac{2}{3}$ peciva, a Ante je, nakon što je pojeo svoj dio, Luki dao $\frac{5}{3}$ peciva. (1 bod)

Zato novac moraju podijeliti u omjeru $2 : 5$ pa Marko dobiva 2 kune, a Ante 5 kuna. (2 boda)

Zadatak B-1.5. Dokažite da je broj $100\ldots01$ (ima točno 2012 nula) složen.

Rješenje. Zapišimo zadani broj na drugačiji način.

$$\begin{aligned} 100\ldots01 &= 10^{2013} + 1 && \text{(1 bod)} \\ &= \left(10^{671}\right)^3 + 1 && \text{(1 bod)} \\ &= \left(10^{671} + 1\right)\left(10^{1342} - 10^{671} + 1\right), && \text{(1 bod)} \end{aligned}$$

a to je složeni broj. (1 bod)

Zadatak B-1.6. Riješite jednadžbu

$$\frac{x+3}{12(x+1)}:\left(\frac{2x-3}{3x-3}-\frac{3x-1}{4x+4}+\frac{x^2-7x+14}{12x^2-12}\right)=2015.$$

Rješenje. Jednadžbu rješavamo uz uvjet $x \neq 1$ i $x \neq -1$.

Izraz u zagradi svedemo na najmanji zajednički nazivnik i izvršimo naznačene operacije:

$$\frac{x+3}{12(x+1)}:\left(\frac{2x-3}{3(x-1)}-\frac{3x-1}{4(x+1)}+\frac{x^2-7x+14}{12(x-1)(x+1)}\right)=2015 \qquad \text{(2 boda)}$$

$$\frac{x+3}{12(x+1)}:\left(\frac{4(2x-3)(x+1)-3(3x-1)(x-1)+x^2-7x+14}{12(x-1)(x+1)}\right)=2015 \qquad \text{(2 boda)}$$

$$\frac{x+3}{12(x+1)}:\left(\frac{x-1}{12(x-1)(x+1)}\right)=2015 \qquad \text{(2 boda)}$$

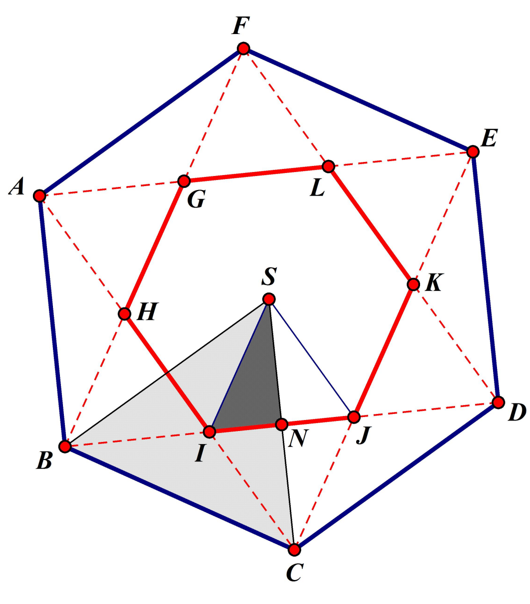
$$\frac{x+3}{12(x+1)}\left(\frac{12(x-1)(x+1)}{x-1}\right)=2015 \qquad \text{(2 boda)}$$

$$x+3=2015$$

$$x=2012 \qquad \text{(2 boda)}$$

Zadatak B-1.7. Ako u pravilnom šesterokutu $ABCDEF$ povučemo svih šest njegovih kraćih dijagonala, one određuju šesterokut $GHIJKL$. Dokažite da je šesterokut $GHIJKL$ također pravilan šesterokut i izračunajte koliko je puta njegova površina manja od površine polaznog šesterokuta.

Rješenje. Skica (2 boda)



Neka duljina stranice šesterokuta $ABCDEF$ iznosi a. Promotrimo, u pravilnom šesterokutu $ABCDEF$, karakterističan trokut SBC.

Kako je to jednakostraničan trokut, duljina $|IN| = \frac{1}{3}|BN| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, (1 bod)

$$|SI| = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad \text{(1 bod)}$$

a mjera kuta $\angle ISN$ iznosi $30°$. (1 bod)

Analogno je iz karakterističnog trokuta SCD, $|NJ| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $|SJ| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, a mjera kuta $\angle JSN = 30°$. Zaključujemo da je SIJ jednakostraničan sa stranicom duljine $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

(1 bod)

Isto vrijedi i za trokute SJK, SKL, SLG, SGH, SHI. Dakle, svi unutrašnji kutovi i stranice šesterokuta su sukladni pa je šesterokut $GHIJKL$ pravilan sa stranicom duljine $b = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. (1 bod)

Odredimo omjer površina.

$$P_1 = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad P_2 = 6\frac{b^2\sqrt{3}}{4}. \quad \text{(1 bod)}$$

Omjer površina je

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{6\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{6\frac{b^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2}{\frac{a^2}{3}} = 3. \quad \text{(2 boda)}$$

Površina šesterokuta $GHIJKL$ je tri puta manja od površine šesterokuta $ABCDEF$.

Zadatak B-1.8. Odredite sve troznamenkaste prirodne brojeve koji su djeljivi sa 7, a pri dijeljenju s 9 daju ostatak 5.

Prvo rješenje. Iz uvjeta u zadatku slijedi

$$n = 7x \quad \text{i} \quad n = 9y + 5, \quad x, y \in \mathbb{N}. \quad \text{(2 boda)}$$

Rješavamo Diofantsku jednadžbu $7x = 9y + 5$, odnosno

$$7x - 9y = 5. \quad \text{(1 bod)}$$

Jedno njezino rješenje je $x_0 = 2$ i $y_0 = 1$. (1 bod)

Tada je opće rješenje $x = 2 + 9t$, $y = 1 + 7t$, $t \in \mathbb{N}$. (1 bod)

Kako je $100 < n < 1000$, a $n = 7x = 14 + 63t$, vrijedi (1 bod)

$$\begin{aligned} 100 < 14 + 63t &< 1000 \\ 86 < 63t &< 986 \quad \text{(1 bod)} \\ 1.3 < t &< 15.6 \\ t &\in \{2, 3, 4, \ldots, 15\} \quad \text{(1 bod)} \end{aligned}$$

pa je $n = 14 + 63t$, $t \in \{2, 3, 4, \ldots, 15\}$, ili ispisano

$$n \in \{140, 203, 266, 329, 392, 455, 518, 581, 644, 707, 770, 833, 896, 959\}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Drugo rješenje. Učenik može pronaći prvi broj veći od 100 sa danim svojstvom, ispisujući redom višekratnike broja 7 i brojeve koje pri dijeljenju s 9 daju ostatak 5:

Višekratnici broja 7:

$$\ldots, 105, 112, 119, 126, 133, \mathbf{140}, 147, 154, 161, 168, 175, 182, 189, 196, \mathbf{203}, \ldots \qquad \text{(3 boda)}$$

Pri dijeljenju s 9 daju ostatak 5:

$$\ldots, 104, 113, 122, 131, \mathbf{140}, 149, 158, 167, 176, 185, 194, \mathbf{203}, \ldots \qquad \text{(3 boda)}$$

Kako je razlika prvog niza brojeva 7, a drugog 9, razlika niza zajedničkih brojeva (koji zadovoljavaju oba svojstva) je njihov najmanji zajednički višekratnik, odnosno 63.

(2 boda)

Tada su rješenja zadatka brojevi:

$$140, 203, 266, 329, 392, 455, 518, 581, 644, 707, 770, 833, 896, 959. \qquad \text{(2 boda)}$$

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

13. ožujka 2012.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1. Odredite sve vrijednosti realnog parametra a za koje je zbroj kvadrata rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 + 2ax + a - 3 = 0$, veći od 6.

Rješenje. Iz Vieteovih formula slijedi

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4a^2 - 2a + 6. \qquad \text{(1 bod)}$$

Mora vrijediti

$$\begin{aligned} 4a^2 - 2a + 6 &> 6 \\ 4a^2 - 2a &> 0 \qquad \text{(1 bod)} \\ 2a(2a - 1) &> 0. \end{aligned}$$

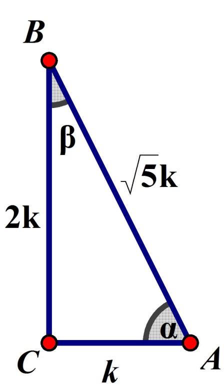
Tražene vrijednosti parametra a su rješenja ove nejednadžbe, to jest

$$a \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \left\langle \frac{1}{2}, \infty \right\rangle. \qquad \text{(2 boda)}$$

Zadatak B-2.2. U pravokutnom trokutu sa šiljastim kutovima α i β vrijedi $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Izračunajte točnu vrijednost izraza

$$\frac{3\sin\alpha + 2\sin\beta - \sqrt{5}}{3\cos\alpha - 2\cos\beta + \sqrt{5}}.$$

Prvo rješenje. Svi trokuti s danim svojstvom slični su nacrtanom trokutu ABC.



Ako je $\operatorname{tg}\alpha = 2$, odnosno ako je omjer kateta $2:1$, tada je kateta $a = 2k$, kateta $b = k$, a hipotenuza $c = \sqrt{5}k$. (2 boda)

Napomena: Ako su ove činjenice samo označene na slici, bez objašnjenja, dati također dva boda. Parametar k se može i izostaviti.

Dani je izraz tada jednak

$$\frac{3\sin\alpha + 2\sin\beta - \sqrt{5}}{3\cos\alpha - 2\cos\beta + \sqrt{5}} = \frac{3\frac{2}{\sqrt{5}} + 2\frac{1}{\sqrt{5}} - \sqrt{5}}{3\frac{1}{\sqrt{5}} - 2\frac{2}{\sqrt{5}} + \sqrt{5}} = \frac{\frac{8}{\sqrt{5}} - \sqrt{5}}{-\frac{1}{\sqrt{5}} + \sqrt{5}} = \frac{3}{4}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Drugo rješenje. Iz $\operatorname{tg}\alpha = 2$ slijedi $\sin\alpha = 2\cos\alpha$. (1 bod)

Tada je, iz $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $5\cos^2\alpha = 1$ (1 bod)

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} = \sin\beta$, $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \cos\beta$. (1 bod)

$$\frac{3\sin\alpha + 2\sin\beta - \sqrt{5}}{3\cos\alpha - 2\cos\beta + \sqrt{5}} = \frac{3\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5} + 2\cdot\frac{\sqrt{5}}{5} - \sqrt{5}}{3\cdot\frac{\sqrt{5}}{5} - 2\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5} + \sqrt{5}} = \frac{\frac{3\sqrt{5}}{5}}{\frac{4\sqrt{5}}{5}} = \frac{3}{4}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Zadatak B-2.3. Jednadžbe $x^2 + 2ax + b^2 = 0$ i $x^2 + 2bx + c^2 = 0$ imaju svaka po dva različita realna rješenja. Koliko realnih rješenja ima jednadžba $x^2 + 2cx + a^2 = 0$?

Rješenje. Kako prve dvije jednadžbe imaju dva različita realna rješenja, to znači da su im diskriminante pozitivne, tj.

$$4a^2 - 4b^2 > 0 \quad \text{i} \quad 4b^2 - 4c^2 > 0,$$

tj. dobili smo da je $a^2 > b^2 > c^2$. (2 boda)

Diskriminanta treće jednadžbe je

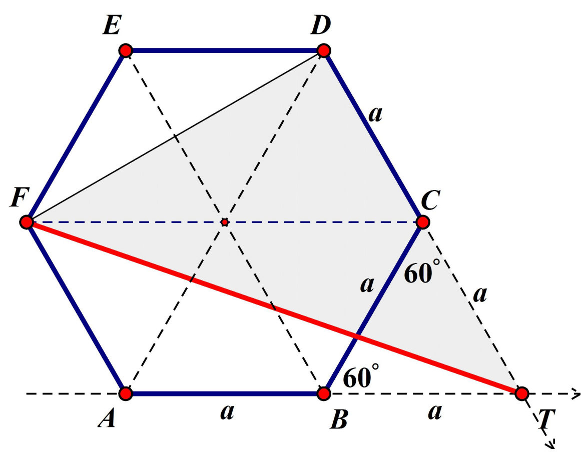
$$4c^2 - 4a^2 = 4(c^2 - a^2) < 0$$

pa zadnja jednadžba nema realnih rješenja. (2 boda)

Napomena: Treću nejednakost $4c^2 - 4a^2 < 0$ učenik može dobiti i zbrajanjem nejednakosti $4a^2 - 4b^2 > 0$ i $4b^2 - 4c^2 > 0$.

Zadatak B-2.4. Duljina stranice pravilnog šesterokuta $ABCDEF$ iznosi a. Pravci AB i CD sijeku se u točki T. Odredite udaljenost $|FT|$.

Prvo rješenje. Skica (1 bod)



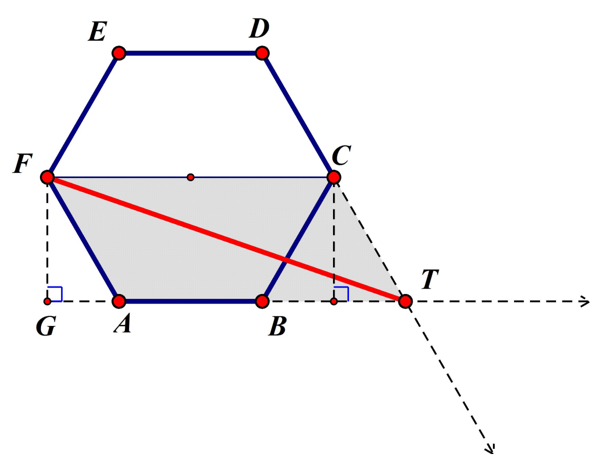
Trokut BCT je jednakostraničan (kutovi su mu sukuti unutrašnjem kutu pravilnog šesterokuta). Kateta FD je kraća dijagonala u pravilnom šesterokutu i okomita je na pravac CD pa je trokut FDT pravokutan. (1 bod)

Dužina FT je njegova hipotenuza i njezina je duljina

$$(|FT|)^2 = (a\sqrt{3})^2 + (2a)^2. \quad \text{(1 bod)}$$

Dakle, $|FT| = a\sqrt{7}$. (1 bod)

Drugo rješenje. Skica (1 bod)



Kako je $\angle CBT = \angle BCT = 60^\circ$, trokut BTC je jednakostraničan, stranice duljine a.

Nadalje, $\overline{FC} \parallel \overline{AT}$ i $|FC| = |AT| = 2a$, $\overline{FA} \parallel \overline{CT}$ i $|FA| = |CT| = a$. Stoga je četverokut $ATCF$ paralelogram. (1 bod)

Tražimo duljinu njegove dijagonale FT.

Duljina visine paralelograma $|FG|$ jednaka je duljini visine jednakostraničnog trokuta BTC. Tada je

$$|FT|^2 = |FG|^2 + (|GA| + |AT|)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} + 2a\right)^2. \qquad \text{(1 bod)}$$

Dakle, $|FT|^2 = 7a^2$, $|FT| = a\sqrt{7}$. (1 bod)

Treće rješenje. Ako stavimo ishodište koordinatnog sustava u središte šesterokuta, očigledne su koordinate točaka

$$F = (-a, 0) \quad \text{i} \quad T = \left(\frac{3}{2}a, -\frac{\sqrt{3}}{2}a\right). \qquad \text{(2 boda)}$$

Dalje je

$$|FT| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}a + a\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2} = \sqrt{\frac{28}{4}a^2} = a\sqrt{7}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Zadatak B-2.5. Kojom znamenkom završava broj $2012^3 + 3^{2012}$?

Rješenje. Broj 2012^3 završava znamenkom 8. (1 bod)

Potencije broja 3, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6, ... redom završavaju znamenkom 3, 9, 7, 1, 3, 9, ..., (1 bod)

odnosno, svaka se četvrta znamenka ponavlja.

Stoga broj $3^{2012} = (3^4)^{503}$ ima znamenku jedinica kao i broj 3^4, a to je broj 1. (1 bod)

Kako je $8 + 1 = 9$, to broj $2012^3 + 3^{2012}$ završava znamenkom 9. (1 bod)

Zadatak B-2.6. Riješite sljedeći sustav jednadžbi u skupu $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned}&(x + 2y)^2 - x - 2y - 12 = 0\\ &x \cdot y = 2\end{aligned}$$

Rješenje. Označimo $x + 2y = t$. (1 bod)

Tada je $t^2 - t - 12 = 0$, $t_1 = -3$, $t_2 = 4$. (2 boda)

a) $x+2y=-3$, $x \cdot y=2$.

Sustav svodimo na kvadratnu jednadžbu $2y^2+3y+2=0$, (1 bod)

čija su rješenja $y_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{7}i}{4}$. (1 bod)

Tada su rješenja sustava uređeni parovi (x,y):

$$\left(\frac{-3+i\sqrt{7}}{2}, \frac{-3-i\sqrt{7}}{4}\right), \left(\frac{-3-i\sqrt{7}}{2}, \frac{-3+i\sqrt{7}}{4}\right). \qquad \text{(2 boda)}$$

b) $x+2y=4$, $x \cdot y=2$.

Sustav svodimo na kvadratnu jednadžbu $y^2-2y+1=0$, (1 bod)

koja ima jedino rješenje $y=1$. (1 bod)

Rješenje ovog sustava je uređeni par $(x,y)=(2,1)$. (1 bod)

Zadatak B-2.7. Neka je $z_1=3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2-2\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$. Odredite sve kompleksne brojeve $z \in \mathbb{C}$ za koje vrijedi

$$|z_1 \cdot \overline{z}+z \cdot \overline{z_1}|=4, \quad \operatorname{Im}\frac{z_1 \cdot z}{1-i}=0.$$

Rješenje.

$$z_1=3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2-2\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3=3\cdot\frac{1+2i-1}{1-2i-1}-2\cdot\frac{1-3i-3+i}{1+3i-3-i}=-3-2\cdot\frac{-2-2i}{-2+2i}=-3-2i.$$

(2 boda)

Označimo $z=x+yi$. Treba riješiti sustav jednadžbi

$$|(-3-2i)\cdot(x-yi)+(x+yi)\cdot(-3+2i)|=4 \qquad \text{(1 bod)}$$

$$\operatorname{Im}\frac{(-3-2i)\cdot(x+yi)}{1-i}=0. \qquad \text{(1 bod)}$$

Nakon izvršenih operacija sustav se svodi na oblik:

$$|-6x-4y|=4, \quad \frac{5x+y}{2}=0. \qquad \text{(2 boda)}$$

Iz posljednje jednadžbe slijedi $y=-5x$ pa je $|14x|=4$. (1 bod)

Dvije su mogućnosti:

$$x=\frac{2}{7},\ y=-\frac{10}{7} \quad \text{ili} \quad x=-\frac{2}{7},\ y=\frac{10}{7}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Tada je $z=\frac{2}{7}-\frac{10}{7}i$ ili $z=-\frac{2}{7}+\frac{10}{7}i$. (1 bod)

Zadatak B-2.8. Trgovina na veliko prodaje teniske rekete po cijeni od 363 kune za jedan reket ako je broj naručenih reketa 40 ili manje. Ako je broj naručenih reketa veći od 40, cijena jednog reketa se umanjuje 0.60 kuna po svakom naručenom reketu iznad 40. U jednoj je narudžbi moguće naručiti maksimalno 400 reketa. Odredite koliki treba biti broj naručenih reketa pa da trgovina ostvari najveću dobit. Koliko iznosi najveća dobit i po kojoj bi cijeni kupac tada platio jedan reket?

Rješenje. Označimo s x broj naručenih reketa.

Cijena po jednom reketu je $363-(x-40)\cdot 0.6$, odnosno $387-0.6x$. (2 boda)

Dobit $d(x)$ koju će trgovina ostvariti ovisi o broju naručenih reketa, te se računa po formuli

$$d(x)=x\cdot(387-0.6x)=-0.6x^2+387x. \qquad \text{(2 boda)}$$

Budući da se radi o kvadratnoj funkciji koja ima maksimalnu vrijednost za

$$x_{maks}=-\frac{b}{2a}=\frac{387}{1.2}=322.5$$

i kako je $322.5\in[41,400]$, odnosno unutar domene funkcije d, maksimalna bi vrijednost te funkcije trebala biti za $x_{maks}=322.5$. (2 boda)

Ali, kako x mora biti cijeli broj, broj naručenih reketa koji trgovini donosi najveću dobit je 322 ili 323. Zbog simetrije grafa kvadratne funkcije, oba broja daju istu vrijednost funkciji dobiti:

$$d(322)=d(323)=62403.6 \text{ kn}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Cijena reketa je u tom slučaju 193.8 kn ili 193.2 kn. (2 boda)

Napomena: Ako učenik napiše samo jedno rješenje i za cijenu i za broj reketa, gubi 2 boda, a ako ne zaokruži broj reketa na cijeli broj, gubi 3 boda.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

13. ožujka 2012.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1. Riješite jednadžbu

$$\log_{5x-2} 2 + 2 \cdot \log_{5x-2} x = \log_{5x-2}(x+1).$$

Rješenje. Odredimo uvjete za koje dana jednadžba ima smisla.

$$5x-2>0, \quad 5x-2 \neq 1, \quad x>0, \quad x+1>0. \qquad \text{(1 bod)}$$

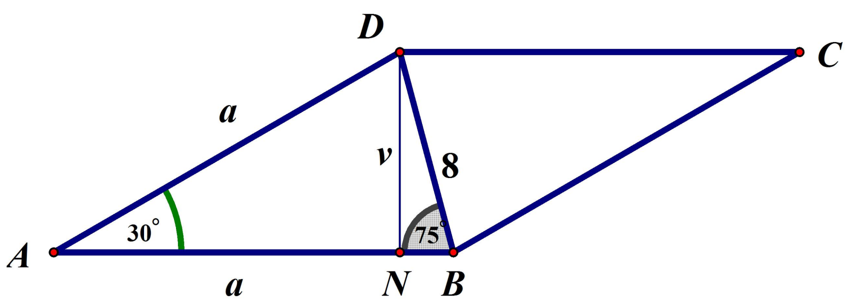
$$\begin{aligned} \log_{5x-2} 2 + 2 \cdot \log_{5x-2} x &= \log_{5x-2}(x+1) \\ \log_{5x-2}\left(2x^2\right) &= \log_{5x-2}(x+1) \\ 2x^2 &= x+1 \end{aligned} \qquad \text{(1 bod)}$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$. (1 bod)

Međutim, samo $x_1 = 1$ zadovoljava uvjet pa je to jedino rješenje. (1 bod)

Zadatak B-3.2. Izračunajte površinu romba kojemu je duljina kraće dijagonale 8 cm, a mjera tupog kuta iznosi 150°.

Rješenje.



Iz pravokutnih trokuta BND i AND slijedi

$$v = 8 \cdot \sin 75^\circ, \qquad \text{(1 bod)}$$

$$a = \frac{v}{\sin 30^\circ} = \frac{8 \cdot \sin 75^\circ}{\sin 30^\circ} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$P = a \cdot v = \frac{64 \cdot \sin^2 75^\circ}{\sin 30^\circ}$$

$$P = 128 \cdot \frac{1-\cos 150^\circ}{2} = 64 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 64 + 32 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^2. \qquad \text{(2 boda)}$$

Napomena: Bilo koji točan izraz za površinu trokuta koji uključuje trigonometrijske funkcije kutova $15°$, $75°$ vrijedi 2 boda. Na primjer, $P = 32 \operatorname{tg} 75°$, $P = \frac{32}{\operatorname{tg} 15°}$, $P = \frac{8}{\sin^2 15°}$. Izračunavanje točnog iznosa površine još 2 boda.

Zadatak B-3.3. Ako za duljine stranica nekog trokuta vrijedi $a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 2ac + 4bc$, izračunajte kutove tog trokuta.

Rješenje. Zapišimo danu jednakost u sljedećem obliku

$$a^2 - 2ac + c^2 + 2b^2 - 4bc + 2c^2 = 0, \qquad \text{(1 bod)}$$

$$(a-c)^2 + 2 \cdot (b-c)^2 = 0. \qquad \text{(1 bod)}$$

To je moguće jedino za $a = b = c$, (1 bod)

pa su sva tri kuta jednaka $60°$. (1 bod)

Zadatak B-3.4. Odredite funkciju $f(x) = A \sin(bx + c) + d$ ako joj je minimum u točki $(3, -1)$, a prvi maksimum iza te točke je u točki $(5, 7)$.

Rješenje. Amplituda je $A = \dfrac{7-(-1)}{2} = 4$ (1 bod)

Vertikalni pomak je $d = \dfrac{7+(-1)}{2} = 3$ (1 bod)

Pola perioda je udaljenost između $x_m = 3$ i $x_M = 5$ pa je period $T = 4$. Odatle dobivamo $\frac{2\pi}{b} = 4$ pa je $b = \frac{\pi}{2}$. (1 bod)

Preostaje odrediti horizontalni pomak.

Ravnotežni položaj je na polovištu između minimuma i maksimuma, dakle za $x = 4$, pa je $-\dfrac{c}{\frac{\pi}{2}} = 4$, odnosno $c = -2\pi$.

Tražena funkcija je

$$f(x) = 4 \sin\left(\frac{\pi}{2}x - 2\pi\right) + 3,$$

što se može zapisati i kao

$$f(x) = 4 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 3. \qquad \text{(1 bod)}$$

Napomena: Ako je učenik točno izračunao sva četiri parametra a, b, c, d, a nije napisao funkciju, oduzeti 1 bod. Za parametar c priznati bilo koji cjelobrojni višekratnik broja 2π.

Zadatak B-3.5. Neka su a, b i c tri različite znamenke, od kojih niti jedna nije jednaka nuli. Od a, b, c slažemo troznamenkaste brojeve različitih znamenaka. Ako je zbroj svih takvih troznamenkastih brojeva jednak 3552, odredite najmanji među njima.

Rješenje. Od znamenaka a, b i c možemo složiti 6 različitih troznamenkastih brojeva. (1 bod)

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba.$$

U njihovom se zbroju svaka znamenka pojavljuje dva puta, na mjestu stotica, desetica i jedinica:

$$(2a+2b+2c)\cdot 100+(2a+2b+2c)\cdot 10+(2a+2b+2c)\cdot 1. \qquad \text{(1 bod)}$$

Tada je $222(a+b+c)=3552$, odnosno $a+b+c=16$. (1 bod)

Najmanji troznamenkasti broj s traženim svojstvom dobije se za $a=1$, $b=6$ i $c=9$ pa je traženi broj 169. (1 bod)

Zadatak B-3.6. Odredite sve realne brojeve x i y za koje vrijedi

$$5\cdot\cos^2 y+x^2-2x\cdot\cos y-8x+20=0.$$

Prvo rješenje. Riješimo danu jednadžbu kao kvadratnu jednadžbu po x.

$$x^2-2x\cdot(\cos y+4)+20+5\cdot\cos^2 y=0.$$

$$x_{1,2}=\frac{2\cdot(\cos y+4)\pm\sqrt{4\cdot(\cos^2 y+8\cos y+16)-4\cdot(20+5\cos^2 y)}}{2} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$x_{1,2}=\cos y+4\pm\sqrt{-4\cdot\cos^2 y+8\cos y-4} \qquad \text{(2 boda)}$$

$$x_{1,2}=\cos y+4\pm\sqrt{-\left(2\cos y-2\right)^2} \qquad \text{(2 boda)}$$

Rješenje će biti realno samo ako je diskriminanta jednaka nuli, tj. $\cos y=1$. (2 boda)

Tada je $x=5$. (2 boda)

Rješenje je $x=5$, $y=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. (1 bod)

Drugo rješenje. Riješimo danu jednadžbu kao kvadratnu jednadžbu po $\cos y$.

Uvest ćemo supstituciju $\cos y=t$, nakon čega dana jednadžba prelazi u

$$5t^2-2x\cdot t+x^2-8x+20=0. \qquad \text{(1 bod)}$$

$$t_{1,2}=\frac{2x\pm\sqrt{4x^2-20\cdot(x^2-8x+20)}}{10} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$t_{1,2}=\frac{2x\pm\sqrt{-16x^2+160x-400}}{10} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$t_{1,2}=\frac{2x\pm\sqrt{-16(x-5)^2}}{10} \qquad \text{(2 boda)}$$

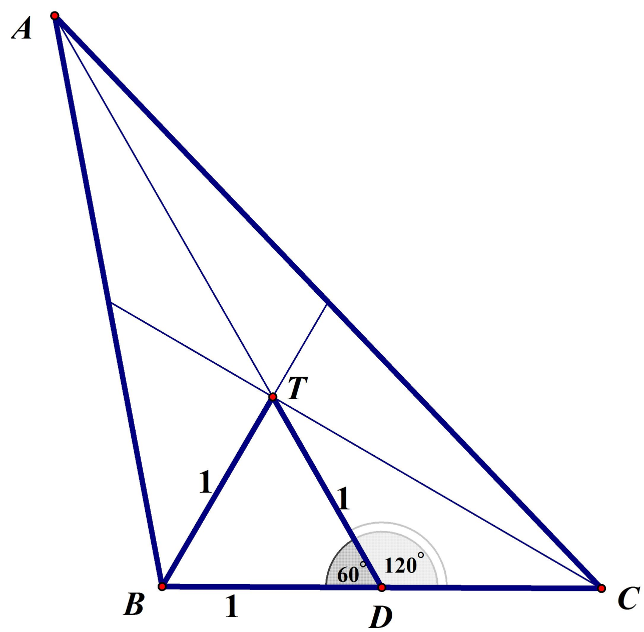
Rješenje će biti realno samo ako je diskriminanta jednaka nuli, tj. $x = 5$. (2 boda)

Tada je $t = 1$ ili $\cos y = 1$. (2 boda)

Rješenje je $x = 5$, $y = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. (1 bod)

Zadatak B-3.7. Točka T težište je trokuta ABC, a točka D polovište njegove stranice $\overline{BC}$. Ako je duljina stranice jednakostraničnog trokuta BDT jednaka 1 cm, odredite duljine stranica trokuta ABC i polumjer kružnice opisane trokutu ABC.

Rješenje.



Kako je D polovište stranice $\overline{BD}$, njezina je duljina $|BC| = 2 \cdot 1 = 2$ cm. (1 bod)

Točka T je težište trokuta ABC pa je $|TD| = \frac{1}{3}|AD|$, odnosno $|AD| = 3$ cm. (1 bod)

Trokut BDT je jednakostraničan pa je $\angle BDT = 60°$, a $\angle CDT = 120°$. (1 bod)

Primjenimo kosinusov poučak na trokut BDA.

$$|AB|^2 = |BD|^2 + |AD|^2 - 2|BD| \cdot |AD| \cos 60°$$

$$|AB|^2 = 1 + 9 - 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 7$$

$$|AB| = \sqrt{7} \text{ cm.}$$ (2 boda)

Primjenimo kosinusov poučak na trokut CDA.

$$|AC|^2 = |CD|^2 + |AD|^2 - 2|CD| \cdot |AD| \cos 120°$$

$$|AC|^2 = 1 + 9 + 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 13$$

$$|AC| = \sqrt{13} \text{ cm.}$$ (2 boda)

Površinu trokuta ABC računamo kao dvostruku površinu trokuta ADC jer trokuti ADC i ADB imaju istu osnovicu ($|BD| = |DC|$) i visinu na tu osnovicu.

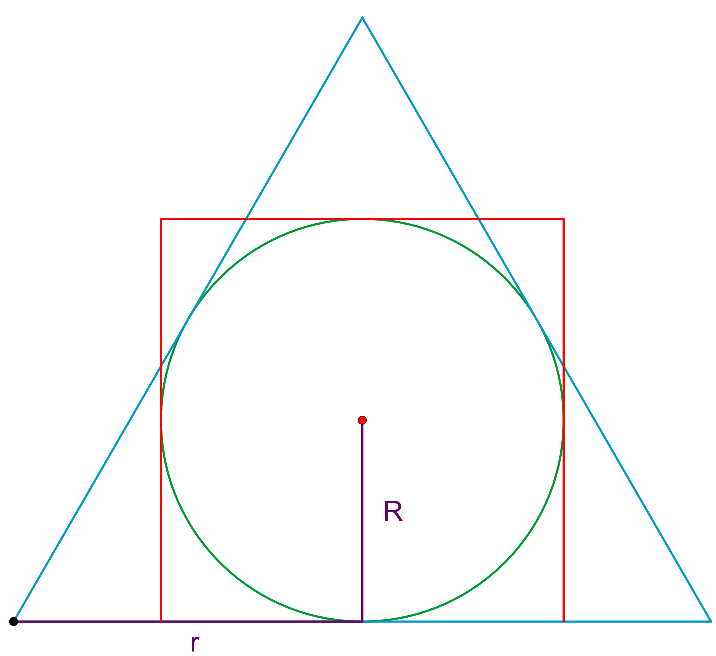
$$P = 2 \cdot \frac{1}{2}|CD| \cdot |AD| \sin 120^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2. \qquad \text{(2 boda)}$$

Polumjer opisane kružnice je

$$R = \frac{abc}{4P} = \frac{2 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{13}}{4 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{91}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{273}}{9} \text{ cm}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Zadatak B-3.8. Oko iste kugle opisani su jednakostraničan valjak i jednakostraničan stožac. Pokažite da je omjer oplošja ovih triju tijela jednak omjeru njihovih obujmova.

Rješenje. Nacrtajmo karakterističan presjek zadanih geometrijskih tijela.



Neka je R polumjer kugle, a r polumjer baze stošca. Računamo oplošje i obujam kugle.

$$O_K = 4R^2\pi, \quad V_K = \frac{4}{3}R^3\pi. \qquad \text{(1 bod)}$$

Računamo oplošje i obujam valjka.

$$v = 2R \qquad \text{(1 bod)}$$
$$O_V = 2R\pi(R + v) = 6R^2\pi \qquad \text{(1 bod)}$$
$$V_V = R^2\pi v = 2R^3\pi \qquad \text{(1 bod)}$$

Računamo oplošje i obujam stošsca. R je polumjer kružnice upisane u jednakostraničan trokut stranice $2r$ pa je

$$R = \frac{2r\sqrt{3}}{6} \quad \text{ili} \quad r = R\sqrt{3} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$s = 2r, \quad v = r\sqrt{3} \qquad \text{(1 bod)}$$

Tada je

$$O_S = r\pi(r+s) = 3r^2\pi = 9R^2\pi \qquad \text{(1 bod)}$$

$$V_S = \frac{1}{3}r^2\pi v = 3R^3\pi \qquad \text{(1 bod)}$$

$$O_K : O_V : O_S = 4R^2\pi : 6R^2\pi : 9R^2\pi = 4 : 6 : 9 \qquad \text{(1 bod)}$$

$$V_K : V_V : V_S = \frac{4}{3}R^3\pi : 2R^3\pi : 3R^3\pi = \frac{4}{3} : 2 : 3 = 4 : 6 : 9 \qquad \text{(1 bod)}$$

Prema tome, vrijedi $O_K : O_V : O_S = V_K : V_V : V_S$.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

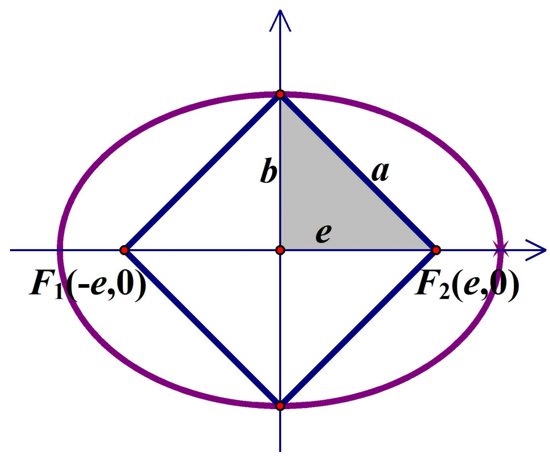
4. razred – srednja škola – B varijanta

13. ožujka 2012.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1. Izračunajte površinu kvadrata kojemu su dva vrha u žarištima, a druga dva u tjemenima elipse $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Žarišta elipse su na osi apscisa.

Rješenje. Skica (1 bod)



Kako se radi o kvadratu, mora vrijediti $e=b$, (1 bod)

odnosno $a^2=2b^2$, $b^2=4$, $b=2$. (1 bod)

Površina je $P=2b^2=8$ kvadratnih jedinica. (1 bod)

Zadatak B-4.2. Riješite u skupu $\mathbb{C}$ jednadžbu $z^5 i+(1-i)\cdot z^2=0$.

Rješenje.

$$z^5 i+(1-i)\cdot z^2=0$$

$$z^2\left(z^3 i+(1-i)\right)=0$$

$$z^2=0 \Leftrightarrow z=0 \text{ (dvostruko rješenje)} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$z^3 i+(1-i)=0$$

$$z^3=\frac{-1+i}{i}=1+i \qquad \text{(1 bod)}$$

$$z^3=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_k=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right),\quad k=0,1,2 \qquad \text{(1 bod)}$$

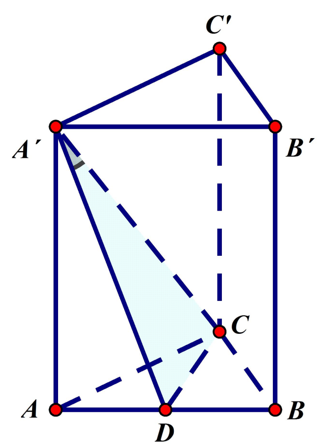
Rješenja jednadžbe su:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right),\\
z_1 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right), \qquad \text{(1 bod)}\\
z_2 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)
\end{aligned}$$

i dvostruko rješenje $z = 0$.

Zadatak B-4.3. Neka je $ABCA'B'C'$ uspravna pravilna trostrana prizma. Duljina brida osnovke ABC iznosi 10 cm, a duljina visine prizme je $10\sqrt{2}$ cm. Točka D je polovište brida $\overline{AB}$. Izračunajte mjeru kuta $DA'C$.

Rješenje.



Dovoljno je izračunati duljine bilo kojih dviju stranica trokuta $DA'C$.

$|DC|$ je visina jednakostraničnog trokuta pa je $|DC| = 5\sqrt{3}$ cm.

Trokut DAA' je pravokutan pa je $|DA'| = \sqrt{\left(10\sqrt{2}\right)^2 + 5^2} = 15$ cm.

Trokut CAA' je pravokutan pa je $|CA'| = \sqrt{\left(10\sqrt{2}\right)^2 + 10^2} = 10\sqrt{3}$ cm.

(Ili $\triangle CDA'$ je pravokutan pa je $|CA'| = \sqrt{\left(5\sqrt{3}\right)^2 + 15^2} = 10\sqrt{3}$ cm.) (2 boda)

Kut računamo pomoću bilo kojeg od trigonometrijskih omjera u pravokutnom trokutu, ovisno koje smo dvije stranice izračunali. Na primjer,

$$\operatorname{tg}\angle DA'C = \frac{|DC|}{|DA'|} = \frac{5\sqrt{3}}{15} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

pa je traženi kut $\angle DA'C = 30°$. (2 boda)

Zadatak B-4.4. Zbroj svih koeficijenata u izrazu $(1+x)^n + (1+x)^{n+1}$ jednak je 1536. Odredite koeficijent uz x^6.

Rješenje. Uvodimo oznaku $P(x) = (1+x)^n + (1+x)^{n+1}$. Suma koeficijenata u razvoju tog polinoma jednaka je vrijednosti polinoma u 1. (1 bod)

$$\begin{aligned} P(1) &= (1+1)^n + (1+1)^{n+1} = 2^n + 2^{n+1} = 3 \cdot 2^n \\ 3 \cdot 2^n &= 1536 \\ 2^n &= 512 \\ n &= 9 \end{aligned}$$ (1 bod)

U razvoju $(1+x)^9$ koeficijent uz x^6 je $\binom{9}{6}$, a u razvoju $(1+x)^{10}$ koeficijent uz x^6 je $\binom{10}{6}$. (1 bod)

Tada je koeficijent uz x^6 polinoma $P(x)$ jednak $\binom{9}{6} + \binom{10}{6} = 294$. (1 bod)

Zadatak B-4.5. Ako je $\cos 4\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\cdots}}}}}$, koliko je $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2$?

Rješenje. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ je geometrijski red kojemu je $a_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2} < 1$ pa je njegova suma

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$ (1 bod)

Tada je

$$\cos 4\alpha = \frac{3}{\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\cdots}}}}} = \frac{3}{5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots}} = \frac{3}{5}.$$ (1 bod)

$$(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 = \left(\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)^2 = \frac{4}{\sin^2 2\alpha} = \frac{8}{1-\cos 4\alpha} = \frac{8}{1-\frac{3}{5}} = 20.$$ (2 boda)

Zadatak B-4.6. Duljine stranica trokuta su tri uzastopna člana aritmetičkog niza, a duljine visina na te stranice, istim su redom tri uzastopna člana geometrijskog niza. Ako su duljine stranica dvoznamenkasti prirodni brojevi, koje sve vrijednosti može poprimiti opseg tog trokuta?

Rješenje. Ako su duljine stranica trokuta uzastopni članovi aritmetičkog niza s razlikom d, možemo ih zapisati u obliku $a-d$, a, $a+d$. (1 bod)

Duljine visina tog trokuta su tada redom

$$\frac{2P}{a-d}, \quad \frac{2P}{a}, \quad \frac{2P}{a+d}.$$ (2 boda)

Ako su to tri uzastopna člana geometrijskog niza, vrijedi

$$\left(\frac{2P}{a}\right)^2 = \frac{2P}{a-d} \cdot \frac{2P}{a+d}. \quad \text{(2 boda)}$$

Slijedi da je $a^2 = a^2 - d^2$ pa je $d = 0$. (1 bod)

Dakle, trokut je jednakostraničan. (1 bod)

Duljina stranice a je bilo koji dvoznamenkasti broj od 10 do 99 cm, (1 bod)

a opseg je bilo koji višekratnik broja 3 počevši od 30 do 297 cm. (2 boda)

Napomena: Ako je učenik samo napisao rješenje (pogodio da je $d = 0$) uz provjeru uvjeta za stranice i visine, a bez dokaza da je to jedina mogućnost, dodijeliti 2 boda.

Zadatak B-4.7. Odredite sva rješenja nejednadžbe

$$\sqrt{72 \cdot 3^{x+1} + 81} \geq \left|3^{x+1} - 9\right| + 3^x \log_x\left(x^3\right).$$

Rješenje. Kako je logaritam definiran samo za pozitivne realne brojeve i baza mora biti različita od jedan, vrijedi $x > 0$ i $x \neq 1$. (1 bod)

Tada zadana nejednadžba prelazi u

$$\sqrt{72 \cdot 3^{x+1} + 81} \geq \left|3^{x+1} - 9\right| + 3^x \cdot 3. \quad \text{(1 bod)}$$

i imamo dva slučaja.

1) Ako je $3^{x+1} - 9 \geq 0$, odnosno $x > 1$ $(x \neq 1)$, tada je

$$\sqrt{72 \cdot 3^{x+1} + 81} \geq 3^{x+1} - 9 + 3^{x+1}$$

što uz zamjenu $3^{x+1} = t$ daje

$$\sqrt{72 \cdot t + 81} \geq 2t - 9. \quad \text{(1 bod)}$$

Kako su obje strane pozitivne (jer je $t > 9$), nakon kvadriranja i sređivanja nejednadžbe dobivamo

$$4t^2 - 108t \leq 0. \quad \text{(1 bod)}$$

Rješenje ove nejednadžbe je interval $[0, 27]$.

Slijedi $3^{x+1} \leq 3^3$, odnosno $x + 1 \leq 3$. (1 bod)

Kako je $x > 1$, slijedi $x \in \langle 1, 2]$. (1 bod)

2) Ako je $3^{x+1} - 9 < 0$, odnosno $x < 1$, tada je

$$\sqrt{72 \cdot 3^{x+1} + 81} \geq -3^{x+1} + 9 + 3^{x+1}$$

$$\sqrt{72 \cdot 3^{x+1} + 81} \geq 9$$

$$72 \cdot 3^{x+1} + 81 \geq 81$$

$$3^{x+1} \geq 0 \quad \text{(1 bod)}$$

Ova je nejednakost, uz sve prethodne uvjete, ispunjena za sve $0 < x < 1$. (2 boda)

Konačno je rješenje interval $\langle 0, 2] \setminus \{1\}$. (1 bod)

Zadatak B-4.8. Tomislav, Filip i Nikola došli su sa svojim djevojkama Anom, Marijom i Ivom u veliki trgovački centar u kupovinu. Svatko od njih šest platio je za svaki kupljeni predmet onoliko kuna koliko je predmeta kupio, a svaki je mladić potrošio 63 kune više od svoje djevojke. Ako je Tomislav kupio 23 predmeta više od Marije, a Nikola 11 predmeta više od Ive, otkrijte sve parove.

Rješenje. Označimo s x broj predmeta koje je kupio mladić, a sa y broj predmeta koje je kupila njegova djevojka.

Za svaki par vrijedi jednadžba $x^2 - y^2 = 63$. (2 boda)

Iz $(x-y) \cdot (x+y) = 63$ lako nalazimo tri rješenja:

$$x = 32,\ y = 31 \quad \text{ili} \quad x = 12,\ y = 9 \quad \text{ili} \quad x = 8,\ y = 1. \qquad \text{(2 boda)}$$

Budući da je Tomislav kupio 23 predmeta više od Marije, zaključujemo da je Tomislav kupio 32, a Marija 9 predmeta. (2 boda)

Na isti je način Nikola kupio 12 predmeta, a Iva 1 predmet. (1 bod)

Na kraju zaključujemo da je Filip kupio 8 predmeta, a Ana 31 predmet. (1 bod)

Parovi su Tomislav i Ana, Nikola i Marija te Filip i Iva. (2 boda)