DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Poreč, 25.travnja-27.travnja 2012.

5. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. S t označimo točne odgovore, s n netočne odgovore, a s m neodgovorene odgovore.

- 35 točnih odgovora $\Leftrightarrow 35\cdot 5=175$ bodova

- 34 točna odgovora $\Leftrightarrow \begin{cases} 34t+n \Leftrightarrow 34\cdot 5-2=168 \\ 34t+m \Leftrightarrow 34\cdot 5-1=169 \end{cases}$

- 33 točna odgovora $\Leftrightarrow \begin{cases} 33t+2n & \Leftrightarrow 33\cdot 5-4=161 \\ 33t+n+m & \Leftrightarrow 33\cdot 5-2-1=162 \\ 33t+2m & \Leftrightarrow 34\cdot 5-2=163 \end{cases}$

- 32 točna odgovora $\Leftrightarrow \begin{cases} 32t+3n & \Leftrightarrow 32\cdot 5-6=154 \\ 32t+2n+m & \Leftrightarrow 32\cdot 5-4-1=155 \\ 32t+n+2m & \Leftrightarrow 32\cdot 5-2-2=156 \\ 32t+3m & \Leftrightarrow 32\cdot 5-3=157 \end{cases}$

- 31 točan odgovor $\Leftrightarrow \begin{cases} 31t+4n & \Leftrightarrow 31\cdot 5-8=147 \\ 31t+3n+m & \Leftrightarrow 31\cdot 5-6-1=148 \\ 31t+2n+2m & \Leftrightarrow 31\cdot 5-4-2=149 \\ 31t+n+3m & \Leftrightarrow 31\cdot 5-2-3=150 \\ 31t+4m & \Leftrightarrow 31\cdot 5-4=151 \end{cases}$

Istinu govore Šime i Ivo.

2. Traže se četveroznamenkasti brojevi oblika $\overline{ab5c}$ koji su djeljivi s 36, a znamenke a, b i c su međusobno različite.

Broj je djeljiv s 36 ako je djeljiv brojevima 4 i 9.

Uvjet djeljivosti brojem 4 daje da je dvoznamenkasti završetak $\overline{5c}$ jednak 52 ili 56 , što znači da je znamenka $c=2$ ili $c=6$.

Prema tome, traže se brojevi oblika $\overline{ab52}$ ili $\overline{ab56}$ s međusobno različitim znamenkama koji su djeljivi s 9, odnosno kojima je zbroj znamenaka djeljiv s 9.

Zbroj znamenaka broja $\overline{ab52}$ je $7+a+b$ pa zbroj znamenaka $a+b$ može biti 2 ili 11.

Ako je zbroj znamenaka $a+b=2$, znamenke a i b mogu biti: a = 1 i b = 1 ili a = 2 i b = 0, ali obje mogućnosti otpadaju zbog ponavljanja znamenaka.

Ako je zbroj znamenaka $a+b=11$, znamenke a i b mogu biti: a = 2 i b = 9, a = 3 i b = 8, a = 4 i b = 7, a = 5 i b = 6, a = 6 i b = 5, a = 7 i b = 4, a = 8 i b = 3 ili a = 9 i b = 2. Zbog uvjeta različitosti znamenaka, preostaju: a = 3 i b = 8, a = 4 i b = 7, a = 7 i b = 4, a = 8 i b = 3**.**

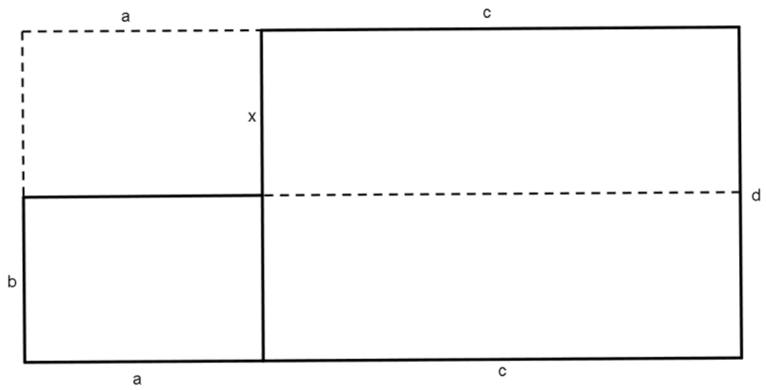
Zbroj znamenaka broja $\overline{ab56}$ je $11+a+b$ pa zbroj znamenaka $a+b$ može biti 7 ili 16.

Ako je zbroj znamenaka $a+b=7$, znamenke a i b mogu biti: a = 1 i b = 6, a = 2 i b = 5, a = 3 i b = 4, a = 4 i b = 3, a = 5 i b = 2, a = 6 i b = 1 ili a = 7 i b = 0. Zbog uvjeta različitosti znamenaka, preostaju: a = 3 i b = 4, a = 4 i b = 3, a = 7 i b = 0.

Ako je zbroj znamenaka $a+b=16$, znamenke a i b mogu biti: a = 7 i b = 9, a = 8 i b = 8 ili a = 9 i b = 7. Preostaju rješenja a = 7 i b = 9, a = 9 i b = 7.

Rješenja su brojevi: 3852, 4752, 7452 , 8352, 3456, 4356, 7056, 7956 i 9756.

3.



Prema uvjetima i uz oznake kao na slici vrijedi $ax=80$ i $cx=160$.

Dalje je $cx=160=2\cdot 80=2\cdot ax$ pa je $c=2\cdot a$.

Također iz uvjeta vrijedi $ab+cb=685-160=525$ te slijedi $ab+2ab=525$ odnosno $ab=175$.

Na kraju $cd=685-175=510$.

Površina većeg pravokutnika je 510 cm^2.

4.

1. mogućnost:

Ako je Borisov iskaz "*Ja sam odbojkaš*" točan, tada njegov iskaz "*Zoran igra košarku*" nije točan (lažan je). Očigledno je tada da Markov iskaz "*Boris igra košarku*" nije točan pa je točan iskaz "*Zoran je rukometaš*".

Prema tome, Boris je odbojkaš, Marko je košarkaš, a Zoran rukometaš.

Ovo možemo prikazati tablicom na sljedeći način:

	košarkaš	odbojkaš	rukometaš
Boris	–	+	–
Marko	+	–	–
Zoran	–	–	+

2. mogućnost:

Ako je Borisov iskaz "*Ja sam odbojkaš*" netočan, tada je njegov iskaz "*Zoran igra košarku*" točan. Očigledno je tada da Markov iskaz "*Zoran je rukometaš*" nije točan pa je točan iskaz "*Boris igra košarku*".

Kako sada i Zoran i Boris igraju košarku, ova mogućnost otpada.

5. Neka su *a*,*b*,*c*,*d* redom traženi brojevi.

Tada vrijedi $a+b+c+d=1000$ i $a+4=b-4=4c=\frac{d}{4}$.

Slijedi $a=4c-4$, $b=4c+4$ i $d=16c$.

Vrijedi

$$4c-4+4c+4+c+16c=1000$$
$$25c=1000$$
$$c=40$$

pa je $a=156$, $b=164$ i $d=640$.

Traženi brojevi su 156, 164, 40 i 640.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Poreč, 25.travnja-27.travnja 2012.

6. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Neka je x broj redova u voćnjaku.

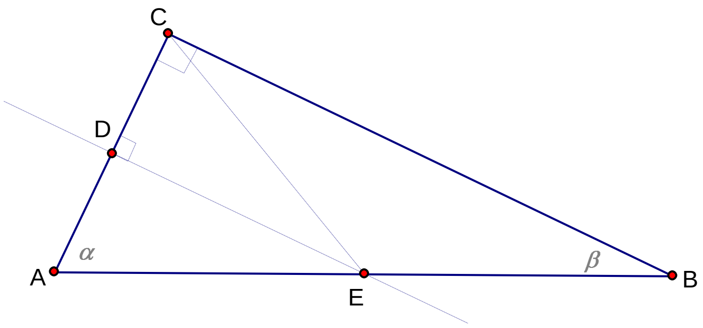
Tada u njemu ima $20 \cdot x$ voćaka.

U slučaju kada bi bila 3 reda manje vrijedilo bi $(x-3) \cdot 25 = 20 \cdot x + 40$.

Dalje je $25 \cdot x - 75 = 20 \cdot x + 40$ odnosno $5 \cdot x = 115$ pa je $x = 23$.

Zasađeno je 23 reda voćki.

2.



Trokut AEC je jednakokračan jer vrh E pripada simetrali njegove osnovice $\overline{AC}$ te je

$|AE| = |CE| = x$. Zbog toga je $|\sphericalangle CAE| = |\sphericalangle ACE| = \alpha$.

U trokutu BCE, $|\sphericalangle BCE| = |\sphericalangle BCA| - |\sphericalangle ACE| = 90° - \alpha$. Također je i $\beta = 90° - \alpha$ jer je β

šiljasti kut pravokutnog trokuta ABC. Dakle, i trokut BCE je jednakokračni trokut te vrijedi

$|BE| = |CE| = x$.

Iz uvjeta zadatka imamo ove jednakosti :

(opseg trokuta ABC) $a + b + c = 48$, (1)

(opseg trokuta AEC) $b + c = 32$, (2)

(opseg trokuta BCE) $a + c = 36$. (3)

Iz (1) i (2) slijedi da je $a = 48 - 32 = 16$.

Iz (1) i (3) slijedi da je $b = 48 - 36 = 12$.

Na kraju slijedi da je $c = 20$.

3. Od znamenki n, $n + 1$ i $n + 2$ mogu se napisati sljedeći troznamenkasti brojevi:

$\overline{n(n+1)(n+2)}$, $\overline{n(n+2)(n+1)}$, $\overline{(n+1)n(n+2)}$, $\overline{(n+1)(n+2)n}$, $\overline{(n+2)n(n+1)}$ i

$\overline{(n+2)(n+1)n}$.

Zbrajanjem tih brojeva i primjenom svojstva distributivnosti dobivamo

$100(6n+6)+10(6n+6)+6n+6=111(6n+6)=666(n+1)$.

Zbroj je djeljiv sa 666 jer se može prikazati kao umnožak broja 666 i prirodnog broja .

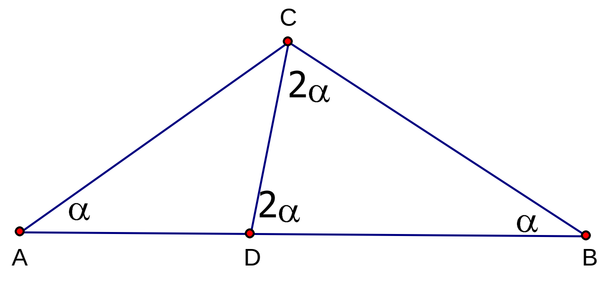
4. Krakovi zadanog trokuta ABC ne mogu biti krakovi novih trokuta, ali ni njihove osnovice (jer bi tada novodobiveni trokuti bili sukladni). Znači jednom od dobivenih trokuta je osnovica $\overline{AC}$, a drugom je osnovica $\overline{CD}$.

Kako je trokut ABC jednakokračan, onda je $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CBA| = \alpha$.

S obzirom da je trokut ADC jednakokračan, onda je $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle ACD| = \alpha$.

Tada je $|\sphericalangle CDB| = |\sphericalangle CAD| + |\sphericalangle ACD| = 2\alpha$.

Budući da je i trokut BCD jednakokračan, vrijedi $|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle CDB| = 2\alpha$.



Na temelju zbroja veličina unutarnjih kutova u trokutu BCD dobivamo $5 \cdot \alpha = 180°$.

Slijedi da je $\alpha = 36°$. Veličine kutova trokuta ABC su 36°, 36° i 108°.

5.

$$15=\frac{\frac{1}{x}+y}{x+\frac{1}{y}}=\frac{\frac{1+xy}{x}}{\frac{xy+1}{y}}=\frac{y(1+xy)}{x(1+xy)}=\frac{y}{x}$$

Traže se brojevi za koje je: $x+y\leq 100$ i $y=15x$.

Traženi parovi su (1,15), (2,30), (3,45), (4,60), (5,75) i (6,90).

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Poreč, 25.travnja-27.travnja 2012.

7. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Neka je x broj godina majke.

Tada je broj godina oca $x + 4$.

Vrijedi $x + 4 + x = 80$.

Rješavanjem jednadžbe dobivamo da otac danas ima 42 godine, a majka 38.

Za nekoliko godina (z), zbroj godina djece bit će 59% zbroja godina oca i majke:

$$13 + 10 + 6 + 3z = 0.59\ (\ 80 + 2z\ )$$

Rješavanjem te jednadžbe dobit ćemo $z = 10$.

Za 10 godina otac će imati 52, a majka 48 godina.

2. Neka je u svakom od 6 odjela s jednakim brojem učenika x učenika.

Tada je u njima ukupno $6x$ učenika.

Kako je $6x > 150$, onda je $x > 25$.

U ostalim odjelima je 15% više učenika, što znači $1.15 \cdot 6x = 6.9x$ učenika.

Ukupno ih ima $6x + 6.9x = 12.9x$ i taj broj je manji od 400.

Dakle, $12.9x < 400$ pa je $x < \dfrac{4000}{129}$.

To znači da je $25 < x < \dfrac{4000}{129}$.

Da bi $12.9x$ bio prirodni broj, mora x biti višekratnik broja 10.

Dakle, $x = 30$.

U školi ima 387 učenika.

3. Neka je $x = \overline{abc}$ traženi troznamenkasti broj.

Prema uvjetu zadatka vrijedi $x = 21 \cdot (a+b+c) = 3 \cdot 7 \cdot (a+b+c)$.

To znači da je *x* djeljiv s 3.

No, tada je zbroj njegovih znamenaka djeljiv s 3 odnosno postoji prirodni broj *k* takav da je

$a+b+c = 3 \cdot k$.

Slijedi $x = 3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot k = 9 \cdot 7 \cdot k$ i time je dokazano da je *x* djeljiv s 9.

Kako su *a*, *b* i *c* znamenke traženog troznamenkastog broja, za njih vrijedi

$0 < a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$, $0 \leq c \leq 9$.

Zbog toga za zbroj znamenki imamo tri mogućnosti:

1.) $a + b + c = 9$, 2.) $a + b + c = 18$, 3.) $a + b + c = 27$.

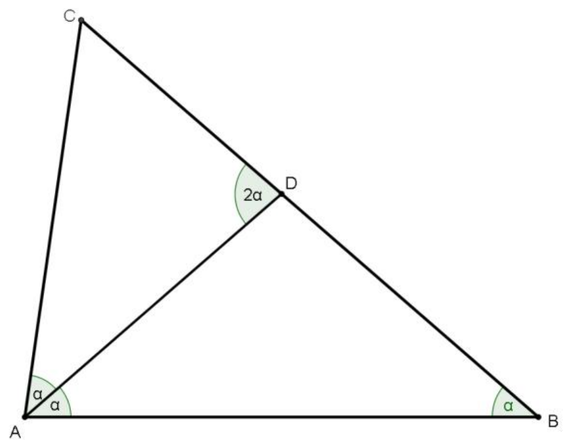
1.) $21 \cdot 9 = 189 \neq 21 \cdot (1+8+9) = 378$

2.) $21 \cdot 18 = 378 = 21 \cdot (3+7+8) = 378$

3.) $21 \cdot 27 = 567 \neq 21 \cdot (5+6+7) = 378$

Dakle, traženi troznamenkasti broj je 378.

4.



Kako je $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ABD| = \alpha$, onda je ΔABD jednakokračan pa je $|AD| = |BD| = 5$ cm.

Promatramo trokute *ABC* i *DAC*. S obzirom da je $|\sphericalangle CDA| = 2\alpha = |\sphericalangle CAB|$ i

$|\sphericalangle CAD| = \alpha = |\sphericalangle ABC|$, prema poučku K-K o sličnosti vrijedi $\Delta ABC \sim \Delta DAC$.

Iz sličnosti slijedi

$$|AC| : |CB| = |CD| : |AC|$$
$$|AC| : 9 = 4 : |AC|$$
$$|AC| \cdot |AC| = 36$$
$$|AC| = 6$$

odnosno

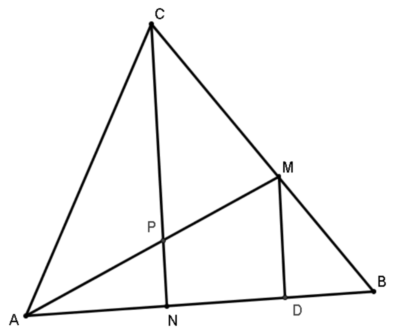
$$|BC| : |AB| = |AC| : |AD|$$
$$9 : c = 6 : 5$$
$$c = \frac{9 \cdot 5}{6}$$
$$c = 7\frac{1}{2}$$

Na kraju

$$O = a + b + c$$
$$O = 9 + 6 + 7\frac{1}{2}$$
$$O = 22.5$$

Opseg trokuta *ABC* je 22.5 cm.

5. Neka se $\overline{CN}$ i $\overline{AM}$ sijeku u točki P i neka je točka D na stranici $\overline{AB}$ takva da je $\overline{CN} \parallel \overline{MD}$.



Iz zadanih uvjeta vrijedi: $|AN| = 2k$, $|NB| = 3k$, $|BM| = 3m$ i $|MC| = 4m$, za $k, m \in \mathbb{Q}$.

Prema Talesovom poučku o proporcionalnim dužinama vrijedi

$|BD| : |DN| = |BM| : |MC| = 3 : 4$ pa je $|BD| = 3n$ i $|DN| = 4n$, za $n \in \mathbb{Q}$.

Slijedi $|NB| = |ND| + |DB|$ odnosno $3k = 4n + 3n$ te je $\frac{k}{n} = \frac{7}{3}$.

Prema Talesovom poučku o proporcionalnim dužinama vrijedi $|AP| : |PM| = |AN| : |ND|$

pa je $|AP| : |PM| = \frac{2k}{4n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7}{6} = 7 : 6$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Poreč, 25.travnja-27.travnja 2012.

8. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Zadana jednadžba može se pojednostavniti i zapisati u obliku

$$y(x+3)=(x+3)^2-9+12$$

$$y(x+3)=(x+3)^2+3$$

$$y=\frac{(x+3)^2+3}{x+3}$$

$$y=x+3+\frac{3}{x+3}$$

Razlomak $\frac{3}{x+3}$ je cijeli broj samo ako je nazivnik djelitelj brojnika.

U tom slučaju razlikujemo četiri mogućnosti :

1.) $x+3=-1$ => $x=-4$ i tada je $y=-4$,

2.) $x+3=1$ => $x=-2$ i tada je $y=4$,

3.) $x+3=3$ => $x=0$ i tada je $y=4$,

4.) $x+3=-3$ => $x=-6$ i tada je $y=-4$.

Dakle, rješenja zadane jednadžbe su uređeni parovi $(-4,-4)$, $(-2,4)$, $(0,4)$ i $(-6,-4)$.

2. Prije susreta Ana je prošla dio puta s_1 brzinom v_1 u vremenu t, a u istom tom vremenu Branka preostali dio puta s_2 brzinom v_2.

Zato vrijede ove jednakosti : $s_1 = v_1 t$ i $s_2 = v_2 t$.

Nakon susreta Ana je dio puta s_2 prošla za 4 sata pa imamo $s_2 = 4\, v_1$,

a Branka s_1 za 9 sati te vrijedi $s_1 = 9\, v_2$.

Slijedi $v_1 t = 9\, v_2$ odnosno $v_1 = \frac{9v_2}{t}$.

Isto tako je $v_2 t = 4\, v_1$ odnosno $v_1 = \frac{v_2 t}{4}$.

Dakle, $\frac{v_2 t}{4} = \frac{9v_2}{t}$ pa je $t^2 = 36$.

Slijedi da je $t = 6$. (Negativno rješenje $t = -6$, u ovom slučaju odbacujemo).

Dakle, Ana i Branka pošle su na put ujutro u 6 sati .

3. Umnožak znamenaka troznamenkastog broja kojemu je znamenka desetica ili znamenka jedinica jednaka nuli iznosi 0. Takvi brojevi neće utjecati na ukupni zbroj svih umnožaka.

Promatrajući brojeve prve stotice lako se vidi:

- zbroj umnožaka znamenki brojeva 111,112,113, ..., 118, 119 je 1 + 2 + 3 + ... + 8 + 9 = 45
- zbroj umnožaka znamenki brojeva 121,122,123, ..., 128, 129 je 2 · (1 + 2 + 3 + ... + 8 + 9) = = 2 · 45
- analogno, slijede zbrojevi umnožaka 3 · 45, 4· 45, ..., 8 · 45 i 9 · 45.

Ukupan zbroj umnožaka prve stotice iznosi

$$45 + 2 \cdot 45 + 3 \cdot 45 + \ldots + 8 \cdot 45 + 9 \cdot 45 = 45 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 8 + 9) = 45^2$$

Za brojeve druge stotice taj je zbroj umnožaka dvostruko veći (zbog znamenke stotice 2) i iznosi $2 \cdot 45^2$.

Analogno, za ostale su troznamenkaste brojeve zbrojevi umnožaka znamenaka jednaki

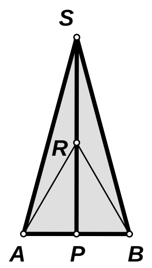
$3 \cdot 45^2$, $4 \cdot 45^2$, ..., $8 \cdot 45^2$ i $9 \cdot 45^2$.

Konačni zbroj svih umnožaka iznosi

$$45^2 + 2 \cdot 45^2 + 3 \cdot 45^2 + \ldots + 8 \cdot 45^2 + 9 \cdot 45^2 = 45^2(1 + 2 + 3 + \ldots + 8 + 9) = 45^3$$

4. Nacrtani lik je pravilni dvanaesterokut (sve su mu stranice jednakih duljina i svi unutarnji kutovi su veličine 60° + 90° = 150°).

Trokut *ABS* je karakteristični trokut tog pravilnog dvanaesterokuta, a krak $\overline{SA}$ polumjer je tom trokutu opisane kružnice.



Uz oznake kao na slici i uvjete zadatka vrijedi $|SR| = 2$ cm, $|RP| = \sqrt{3}$ cm.

Dakle, $|SP| = (2+\sqrt{3})$ cm.

Primjenom Pitagorina poučka na trokut *APS* dobivamo da je

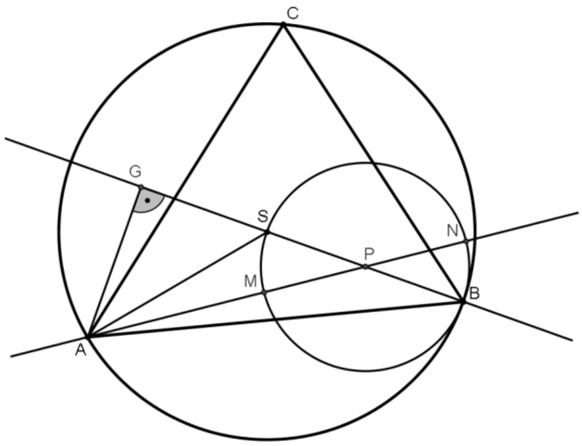
$|AS|^2 = |AP|^2 + |SP|^2$ pa je $|AS|^2 = 1^2 + (2+\sqrt{3})^2 = 1+4+4\sqrt{3}+3 = 8+4\sqrt{3} = 4(2+\sqrt{3})$.

Tada je $|AS| = 2\sqrt{2+\sqrt{3}} \approx 3.86$ cm.

5. S obzirom da je 45° < γ < 90° i prema poučku o obodnom i središnjem kutu, vrijedi

$90° < |\sphericalangle BSA| < 180°$ odnosno ΔABS je tupokutan.

Neka je točka G nožište okomice iz točke A na pravac BS i $p = |AG|$, $q = |SG|$, $x = |AP|$.



Kako su trokuti ΔASG, ΔAPG i ΔABG pravokutni, primjenom Pitagorina poučka slijedi

$r^2 = p^2 + q^2$, $x^2 = p^2 + (q+\frac{r}{2})^2$ i $c^2 = p^2 + (q+r)^2$.

Iz druge od ovih jednadžbi slijedi $p^2 = x^2 - (q+\frac{r}{2})^2$ što uvrstimo u preostale dvije jednadžbe

te nakon sređivanja vrijedi $r^2 = x^2 - qr - \frac{r^2}{4}$ i $c^2 = x^2 + qr + \frac{3r^2}{4}$.

Zbrajanjem ove dvije jednadžbe slijedi $r^2 + c^2 = 2x^2 + \frac{r^2}{2}$ odakle je $x = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + r^2}$.

Budući da je $|AM| = |AP| - |MP|$, onda je $2|AM| = 2|AP| - 2|MP| = \sqrt{2c^2 + r^2} - r$.

Iz određenosti trokuta ΔABS vrijedi $c < 2r$ odnosno $c - 2r < 0$.

Kako je $c > 0$, onda je $c \cdot (c - 2r) < 0$ odnosno $c^2 - 2cr < 0$.

Zatim je $c^2 - 2cr + c^2 + r^2 < c^2 + r^2$ pa je $2c^2 + r^2 < c^2 + 2cr + r^2$ odnosno $2c^2 + r^2 < (c+r)^2$.

Dalje je $\sqrt{2c^2 + r^2} < c + r$ odnosno $\sqrt{2c^2 + r^2} - r < c$.

Dakle, $2|AM| < |AB|$ te je time tvrdnja dokazana.