DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

26. travnja 2012.

Zadatak A-1.1.

Odredi sve parove (x, y) cijelih brojeva za koje vrijedi

$$6x^2y^2 - 4y^2 = 2012 - 3x^2.$$

Rješenje.

Dana jednakost je ekvivalentna s

$$\begin{gathered}
6x^2y^2 - 4y^2 = 2012 - 3x^2 \\
6x^2y^2 + 3x^2 - 4y^2 = 2012 \\
3x^2(2y^2 + 1) - 4y^2 = 2012 \\
3x^2(2y^2 + 1) - 2(2y^2 + 1) = 2012 - 2 \\
(3x^2 - 2)(2y^2 + 1) = 2010
\end{gathered}$$

Kako je $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$, a $2y^2 + 1$ je neparan prirodan broj, zaključujemo

$$\begin{gathered}
2y^2 + 1 \in \{1, 3, 5, 15, 67, 201, 335, 1005\}\,, \\
2y^2 \in \{0, 2, 4, 14, 66, 200, 334, 1004\}\,, \\
y^2 \in \{0, 1, 2, 7, 33, 100, 167, 502\}\,.
\end{gathered}$$

Stoga je $y^2 \in \{0, 1, 100\}$.

Preostaju nam tri slučaja:

$$\left\{\begin{array}{c} 3x^2 - 2 = 2010 \\ 2y^2 + 1 = 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{c} 3x^2 - 2 = 670 \\ 2y^2 + 1 = 3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{c} 3x^2 - 2 = 10 \\ 2y^2 + 1 = 201 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c} 3x^2 = 2012 \\ y^2 = 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{c} 3x^2 = 672 \\ y^2 = 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{c} 3x^2 = 12 \\ y^2 = 100 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c} x^2 = \frac{2012}{3} \\ y^2 = 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{c} x^2 = 224 \\ y^2 = 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{c} x^2 = 4 \\ y^2 = 100 \end{array}\right.$$

Vidimo da jedino u trećem slučaju postoje cjelobrojna rješenja.

Dana jednadžba ima četiri rješenja:

$$(x, y) \in \{(2, 10), (-2, 10), (2, -10), (-2, -10)\}\,.$$

Zadatak A-1.2.

Dokaži da za sve realne brojeve a, b, c vrijedi

$$\frac{1}{3}(a+b+c)^2 \leqslant a^2+b^2+c^2+2(a-b+1).$$

Prvo rješenje.

Transformirajmo desnu stranu nejednakosti:

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2+2(a-b+1) &= a^2+2a+1+b^2-2b+1+c^2 \\ &= (a+1)^2+(b-1)^2+c^2 \end{aligned}$$

Koristeći nejednakost između kvadratne i aritmetičke sredine, dobivamo

$$\sqrt{\frac{(a+1)^2+(b-1)^2+c^2}{3}} \geqslant \frac{(a+1)+(b-1)+c}{3}$$

odnosno

$$(a+1)^2+(b-1)^2+c^2 \geqslant \frac{1}{3}(a+b+c)^2.$$

Drugo rješenje.

Dana nejednakost ekvivalentna je s

$$3\big(a^2+b^2+c^2+2(a-b+1)\big)-(a+b+c)^2 \geqslant 0.$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} &3\big(a^2+b^2+c^2+2(a-b+1)\big)-(a+b+c)^2 \\ &\quad= 3\big(a^2+b^2+c^2+2a-2b+2\big)-\big(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\big) \\ &\quad= 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca+6a-6b+6 \\ &\quad= \big(a^2+b^2-2ab\big)+\big(b^2+c^2-2bc\big)+\big(c^2+a^2-2ca\big)+6a-6b+6 \\ &\quad= \big(a^2+b^2-2ab+4a-4b\big)+\big(b^2+c^2-2bc-2b+2c\big)+\big(c^2+a^2-2ca-2c+2a\big)+6 \\ &\quad= \big(a^2+b^2-2ab+4a-4b+4\big)+\big(b^2+c^2-2bc-2b+2c+1\big)+\big(c^2+a^2-2ca-2c+2a+1\big) \\ &\quad= (a-b+2)^2+(b-c-1)^2+(c-a-1)^2 \end{aligned}$$

Ova suma je očito nenegativna, čime je nejednakost dokazana.

Zadatak A-1.3.

Svaka znamenka prirodnog broja n (osim prve) strogo je veća od znamenke koja se nalazi neposredno lijevo od nje. Odredi zbroj svih znamenaka broja $9n$.

Prvo rješenje.

Neka je $n = \overline{a_{m-1}a_{m-2}\ldots a_1a_0}$. Vrijedi $a_0 > a_1 > \ldots > a_{m-1}$. Sada je

$$\begin{aligned}
9n &= (10-1)\left(10^{m-1}a_{m-1} + 10^{m-2}a_{m-2} + \ldots + 10a_1 + a_0\right) \\
&= (10-1)10^{m-1}a_{m-1} + (10-1)10^{m-2}a_{m-2} + \ldots + (10-1)10a_1 + (10-1)a_0 \\
&= 10^m a_{m-1} + 10^{m-1}a_{m-2} + \ldots + 10^2 a_1 + 10a_0 - 10^{m-1}a_{m-1} - 10^{m-2}a_{m-2} - \ldots - 10a_1 - a_0 \\
&= 10^m a_{m-1} + 10^{m-1}(a_{m-2} - a_{m-1}) + \ldots + 10^2(a_1 - a_2) + 10(a_0 - a_1) - a_0 \\
&= 10^m a_{m-1} + 10^{m-1}(a_{m-2} - a_{m-1}) + \ldots + 10^2(a_1 - a_2) + 10(a_0 - a_1 - 1) + (10 - a_0)
\end{aligned}$$

Kako je $0 \leqslant a_{m-1}, (a_{m-2} - a_{m-1}), \ldots, (a_1 - a_2), (a_0 - a_1 - 1), (10 - a_0) \leqslant 9$, to su ti brojevi znamenke broja $9n$, a njihov zbroj je $a_{m-1} + (a_{m-2} - a_{m-1}) + \ldots + (a_1 - a_2) + (a_0 - a_1 - 1) + (10 - a_0) = 9$.

Drugo rješenje.

Neka je $n = \overline{a_{m-1}a_{m-2}\ldots a_1a_0}$. Vrijedi $a_0 > a_1 > \ldots > a_{m-1}$.
Oduzimanje $10n - n = 9n$ možemo zapisati ovako:

$$\begin{array}{rr}
 & a_{m-1}a_{m-2}a_{m-3}\ldots a_1a_0\,0 \\
- & a_{m-1}a_{m-2}\ldots a_2a_1a_0 \\
\hline
 & b_m\;\; b_{m-1}b_{m-2}\ldots b_2b_1b_0
\end{array}$$

Vrijedi redom $b_0 = 10 - a_0$, $b_1 = a_0 - (a_1 + 1)$, $b_2 = a_1 - a_2$, $b_3 = a_2 - a_3$, $\ldots$, $b_{m-1} = a_{m-2} - a_{m-1}$, $b_m = a_{m-1}$. Ti brojevi su znamenke broja $9n$,

a njihov zbroj je $a_{m-1} + (a_{m-2} - a_{m-1}) + \ldots + (a_1 - a_2) + (a_0 - a_1 - 1) + (10 - a_0) = 9$.

Zadatak A-1.4.

Neka je trokut ABC s tupim kutom kod vrha B, neka su D i E polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ redom, F točka na stranici $\overline{BC}$ takva da je $\sphericalangle BFE$ pravi, te G točka na dužini $\overline{DE}$ takva da je kut $\sphericalangle BGE$ pravi.

Dokaži da točke A, F i G leže na istom pravcu ako i samo ako je $2|BF| = |CF|$.

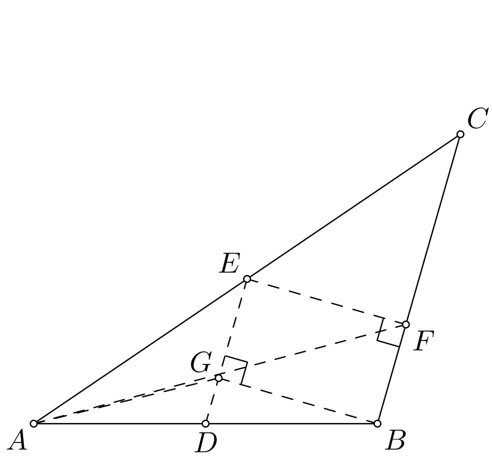
Rješenje.

Uočimo da je $BFEG$ pravokutnik. Trokuti ADE i ABC su slični s koeficijentom sličnosti 2. Stoga su točke A, F i G kolinearne ako i samo ako je $|FB| : |GD| = 2 : 1$.

Neka je $|BC| = a$ i $|BF| = x$. Tada je $|ED| = \frac{1}{2}a$, $|EG| = |FB| = x$ i $|GD| = |DE| - |EG| = \frac{1}{2}a - x$.

Zato je jednakost $|FB| = 2|GD|$ ekvivalentna s $x = 2\left(\frac{1}{2}a - x\right)$, odnosno $a = 3x$, tj. $|BC| = 3|BF|$, odnosno $|CF| = 2|BF|$.

Time je dokazana tvrdnja zadatka.



Zadatak A-1.5.

Azra je zamislila četiri realna broja i na ploču zapisala zbrojeve svih mogućih parova zamišljenih brojeva, a zatim obrisala jedan od tih zbrojeva. Na ploči su ostali brojevi -2, 1, 2, 3 i 6. Koje je brojeve Azra zamislila?

Rješenje.

Neka su a, b, c i d zamišljeni brojevi. Uzmimo, bez smanjenja općenitosti, da je obrisani zbroj $c+d$. Tada su na ploči napisani brojevi $a+b$, $a+c$, $a+d$, $b+c$ i $b+d$, tj.

$$\{-2,1,2,3,6\} = \{a+b, a+c, a+d, b+c, b+d\}\,.$$

Kako je

$$(a+c)+(b+d) = (a+d)+(b+c),$$

među brojevima na ploči možemo odabrati dva para brojeva s jednakim zbrojem.

Provjerom

$$-2+1=-1, \qquad -2+2=0, \qquad -2+3=1, \qquad -2+6=4, \qquad 1+2=3,$$

$$1+3=4, \qquad 1+6=7, \qquad 2+3=5, \qquad 2+6=8, \qquad 3+6=9$$

utvrđujemo da vrijedi $-2+6=1+3=4$.

Zaključujemo da je zbroj svih brojeva koje je Azra zamislila jednak 4.

Od brojeva na ploči, broj 2 ne pojavljuje se u prethodnoj jednakosti (pa je $a+b=2$) i stoga je obrisani broj $c+d$ jednak $4-2=2$.

Promijenimo sada oznake.
Neka su zamišljeni brojevi a, b, c, d, ali tako da je $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$.

Znamo da je $\{-2,1,2,2,3,6\} = \{a+b, a+c, a+d, b+c, b+d, c+d\}$.

Zbog $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$ očito je $a+b$ najmanji zbroj, a $c+d$ najveći, dakle $a+b=-2$, $c+d=6$.

Sada lagano zaključujemo da je $a+c$ manje od svih zbrojeva osim $a+b$, i analogno $b+d$ je veće od svih zbrojeva osim od $c+d$. To znači da je $a+c=1$ i $b+d=3$. Konačno, $a+d=b+c=2$.

Vrijedi $2a=(a+b)+(a+c)-(b+c)=-2+1-2=-3$, odnosno $a=-\frac{3}{2}$.

Dalje je $b=-2-a=-\frac{1}{2}$, $c=1-a=\frac{5}{2}$ i $d=2-a=\frac{7}{2}$.

Provjerimo još da su i ostale jednakosti ispunjene:

$b+c=-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=2$, $b+d=-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}=3$, $c+d=\frac{5}{2}+\frac{7}{2}=6$.

Azra je zamislila brojeve $-\dfrac{3}{2}$, $-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{5}{2}$ i $\dfrac{7}{2}$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

26. travnja 2012.

Zadatak A-2.1.

Neka je x realan broj takav da su $x^2 - x$ i $x^4 - x$ cijeli brojevi. Dokaži da je x cijeli broj.

Rješenje.

Neka je $A = x^2 - x$ i $B = x^4 - x$.

Uočimo najprije da je $A = 0$ samo za $x = 0$ i $x = 1$, a to su cijeli brojevi. Stoga možemo uzeti da je $A \neq 0$.

Vrijedi $A^2 = x^4 - 2x^3 + x^2$ pa je

$B - A^2 = 2x^3 - x^2 - x = 2x^3 - 2x^2 + x^2 - x = 2x^3 - 2x^2 + A = 2x(x^2 - x) + A = 2x \cdot A + A$

tj. $B - A^2 - A = 2xA$. Dakle, $x = \dfrac{B}{2A} - \dfrac{A+1}{2}$, pa je x racionalan broj.

Zapišimo x u obliku neskrativog razlomka, $x = \dfrac{p}{q}$.

Tada je $A = \dfrac{p^2}{q^2} - \dfrac{p}{q} = \dfrac{p(p-q)}{q^2}$ što ne može biti cijeli broj ako je $q > 1$, jer su p i q relativno prosti. Stoga mora biti $q = 1$ pa je x cijeli broj što smo i htjeli pokazati.

Napomena: Do zaključka da je x racionalan broj možemo doći na razne načine.
Npr. $2x = (x^2 + x) - (x^2 - x) = \frac{B-A}{A} - A$.

Zadatak A-2.2.

Odredi sva realna rješenja jednadžbe

$$4x^2 - 20\lfloor x \rfloor + 9 = 0,$$

gdje je s $\lfloor x \rfloor$ označen najveći cijeli broj koji nije veći od x.

Rješenje.

Vrijedi

$$4x^2 - 20\lfloor x \rfloor + 9 \geqslant 4x^2 - 20x + 9 = (2x - 9)(2x - 1)$$

pa mora biti $(2x - 9)(2x - 1) \leqslant 0$ tj. $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{9}{2}$. Zato je $0 \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant 4$.

Također, $x = \dfrac{1}{2}\sqrt{20\lfloor x \rfloor - 9}$.

Uvrštavamo redom $\lfloor x \rfloor = 0, 1, 2, 3, 4$. Za $\lfloor x \rfloor = 0$ nema rješenja, a u svim ostalim slučajevima dobivamo po jednu vrijednost koja zadovoljava polaznu jednadžbu:

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{11}, \qquad x = \frac{1}{2}\sqrt{31}, \qquad x = \frac{1}{2}\sqrt{51}, \qquad x = \frac{1}{2}\sqrt{71}.$$

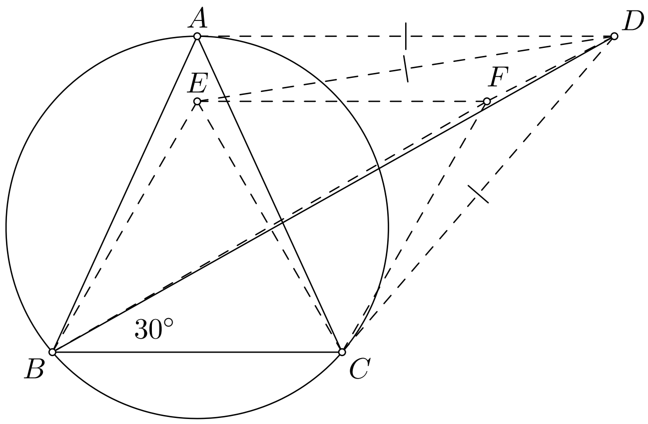
Zadatak A-2.3.

Jednakokračnom trokutu ABC ($|AB| = |AC|$) opisana je kružnica. Tangente te kružnice s diralištima u točkama A i C sijeku se u točki D. Ako je $\sphericalangle DBC = 30°$, dokaži da je trokut ABC jednakostraničan.

Prvo rješenje.

Neka su BCE i ECF jednakostranični trokuti tako da su A i E s iste strane pravca BC, a B i F s različitih strana pravca CE.

Pretpostavimo da je E različita od A jer u suprotnom tvrdnja vrijedi.



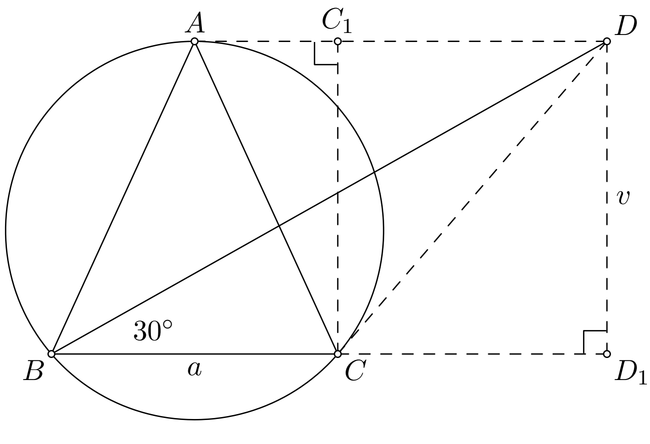
Budući da je kut $\sphericalangle FBC = 30°$, dakle $\sphericalangle FBC = \sphericalangle DBC$, zaključujemo da su B, F i D kolinearne točke.

Trokuti DFC i DFE su sukladni (SKS) pa je $|DE| = |DC| = |DA|$, no kako je AE okomito na BC pa tako i na AD, iz pravokutnog trokuta DAE vidimo da je $|DE| > |DA|$. Kontradikcija!

Drugo rješenje.

Neka je a duljina osnovice $\overline{BC}$ zadanog trokuta, v duljina odgovarajuće visine, točka C_1 ortogonalna projekcija točke C na pravac AD, a točka D_1 ortogonalna projekcija točke D na pravac BC.

S obzirom da je trokut ABC jednakokračan, tangenta AD njegove opisane kružnice je paralelna osnovici $\overline{BC}$ te je četverokut CD_1DC_1 pravokutnik.



Kako je $\sphericalangle DBD_1 = 30°$, pravokutni trokut DBD_1 je polovica jednakostraničnog trokuta i vrijedi $|BD| = 2\,|DD_1| = 2v$, $|BD_1| = v\sqrt{3}$.

Također je $|C_1D| = |CD_1| = |BD_1| - |BC| = v\sqrt{3} - a$.

Točka D je sjecište dviju tangenti opisane kružnice trokuta ABC pa je

$$|CD| = |AD| = |AC_1| + |C_1D| = \frac{a}{2} + \left(v\sqrt{3} - a\right) = v\sqrt{3} - \frac{a}{2}.$$

Sada se primjenom Pitagorina poučka u pravokutnom trokutu DCD_1 dobije:

$$|CD_1|^2 + |DD_1|^2 = |CD|^2,$$
$$\left(v\sqrt{3} - a\right)^2 + v^2 = \left(v\sqrt{3} - \frac{a}{2}\right)^2,$$

odnosno nakon sređivanja $\left(a\sqrt{3} - 2v\right)^2 = 0$.

Odatle je $v = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ i konačno:

$$|AB|^2 = |AC|^2 = v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \qquad \Longrightarrow \qquad |AB| = |BC| = |CA| = a.$$

Zadatak A-2.4.

Dokaži da za pozitivne realne brojeve a, b i c za koje je $a + b + c \leqslant 3$ vrijedi

$$\frac{a+1}{a(a+2)} + \frac{b+1}{b(b+2)} + \frac{c+1}{c(c+2)} \geqslant 2.$$

Prvo rješenje.

Primjenom A–H nejednakosti dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{a+1}{a(a+2)} + \frac{b+1}{b(b+2)} + \frac{c+1}{c(c+2)} &\geqslant \frac{9}{\dfrac{a(a+2)}{a+1} + \dfrac{b(b+2)}{b+1} + \dfrac{c(c+2)}{c+1}} \\
&= \frac{9}{\dfrac{(a+1)^2-1}{a+1} + \dfrac{(b+1)^2-1}{b+1} + \dfrac{(c+1)^2-1}{c+1}} \\
&= \frac{9}{(a+1)+(b+1)+(c+1) - \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}\right)}
\end{aligned}$$

Kako je $(a+1) + (b+1) + (c+1) = a + b + c + 3 \leqslant 6$ i

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \geqslant \frac{9}{(a+1)+(b+1)+(c+1)} \geqslant \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

vrijedi

$$\frac{9}{(a+1)+(b+1)+(c+1) - \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}\right)} \geqslant \frac{9}{6 - \frac{3}{2}} = 2$$

čime smo dokazali tvrdnju.

Drugo rješenje.

Vrijedi

$$\frac{x+1}{x(x+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2}\right)$$

pa je

$$\frac{a+1}{a(a+2)} + \frac{b+1}{b(b+2)} + \frac{c+1}{c(c+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2}\right).$$

Primjenom nejednakosti između aritmetičke i harmonijske sredine, dobivamo

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

a kako je $a+b+c \leqslant 3$ slijedi $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geqslant \dfrac{9}{a+b+c} \geqslant 3$.

Slično postupamo i s drugim dijelom. Primijenimo A–H nejednakost na brojeve $a+2$, $b+2$, $c+2$ i iskoristimo uvjet $(a+2)+(b+2)+(c+2) \leqslant 9$:

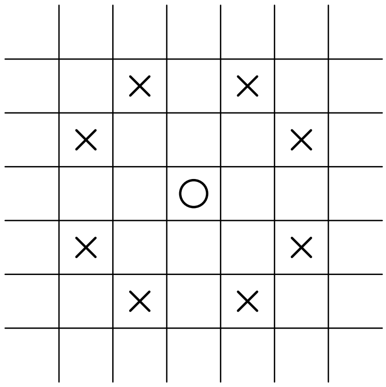
$$\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} \geqslant \frac{9}{(a+2)+(b+2)+(c+2)} \geqslant 1.$$

Konačno imamo

$$\frac{a+1}{a(a+2)} + \frac{b+1}{b(b+2)} + \frac{c+1}{c(c+2)} \geqslant \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 2.$$

Zadatak A-2.5.

Može li skakač obići ploču dimenzija 4×2012 i vratiti se na polazno polje tako da pritom stane na svako polje točno jednom?



Skakač je figura koja se kreće kao u šahu: s polja označenog kružićem može se pomaknuti na jedno od osam polja označenih križićima (ako je to polje na ploči).

Rješenje.

Obojimo ploču šahovski crnom i bijelom bojom (susjedna polja imaju različitu boju). Primjetimo da se pri svakom potezu mijenja boja polja na kojem se skakač nalazi.
Nadalje, označimo polja u prvom i četvrtom retku kružićem, a polja u drugom i trećem retku križićem. Skakač mora s polja označenog kružićem skočiti na polje označeno križićem.

Pretpostavimo da postoji način da skakač posjeti svako polje točno jednom i vrati se na početak. Broj polja označenih križićem je jednak broju polja označenih kružićem. Tada skakač mora s polja označenog križićem (2. i 3. redak) skočiti na polje označeno kružićem (1. i 4. redak) jer bi skakanje s križića na križić značilo da u nekom trenutku moramo skočiti s kružića na kružić što je nemoguće.

Skakač u nekom trenutku mora doći na bijelo polje označeno kružićem. U sljedećem potezu dolazi na crno polje označeno križićem, pa onda opet na bijelo polje označeno kružićem itd. Isto zaključivanje možemo provesti i "unatrag": neposredno prije dolaska na bijelo polje označeno kružićem, skakač je morao biti na crnom polju označenom križićem, itd.

Zato nikad ne dolazi na bijelo polje označeno križićem, što je kontradikcija s pretpostavkom da skakač posjećuje svako polje.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

26. travnja 2012.

Zadatak A-3.1.

Dokaži da ne postoji prirodni broj $n \geqslant 2$ takav da je funkcija

$$f(x) = \cos\left(x\sqrt{1}\right) + \cos\left(x\sqrt{2}\right) + \cdots + \cos\left(x\sqrt{n}\right)$$

periodična.

Rješenje.

Pretpostavimo da je za neki $n \geqslant 2$ promatrana funkcija periodična s periodom T ($T > 0$), tj. da vrijedi $f(x+T) = f(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Tada je $f(T) = f(0) = n$.

No, da bi bilo

$$f(T) = \cos(T\sqrt{1}) + \cos(T\sqrt{2}) + \cdots + \cos(T\sqrt{n}) = n$$

mora biti $\cos(T\sqrt{1}) = \cos(T\sqrt{2}) = \cdots = \cos(T\sqrt{n}) = 1$. Odatle slijedi $T = 2k\pi$ i $T\sqrt{2} = 2l\pi$, pri čemu su $k, l \in \mathbb{N}$. Stoga bi vrijedilo $\sqrt{2} = \frac{l}{k} \in \mathbb{Q}$, a to nije istina.

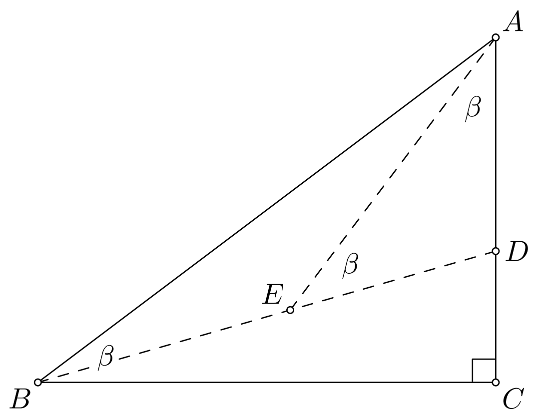
Dakle, ne postoji $n \geqslant 2$ takav da je funkcija f periodična.

Zadatak A-3.2.

Neka je ABC trokut s pravim kutom u vrhu C. Neka je D točka na stranici $\overline{AC}$ i E točka na dužini $\overline{BD}$ tako da vrijedi $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DAE = \sphericalangle AED$. Dokaži da je $|BE| = 2\,|CD|$.

Prvo rješenje.

Označimo $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DAE = \sphericalangle AED = \beta$.



Tada je

$$\sphericalangle BAC = 90^\circ - \beta,$$
$$\sphericalangle BAE = (90^\circ - \beta) - \beta = 90^\circ - 2\beta,$$
$$\sphericalangle BEA = 180^\circ - \beta.$$

Primijenimo poučak o sinusima na trokut ABE:

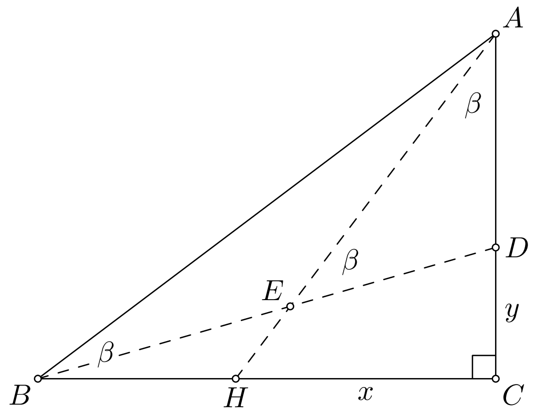
$$|BE| = \frac{\sin\sphericalangle BAE}{\sin\sphericalangle AEB}\cdot|AB| = \frac{\sin(90^\circ-2\beta)}{\sin(180^\circ-\beta)}\cdot|AB| = \frac{\cos(2\beta)}{\sin\beta}\cdot|AB|.$$

U trokutu BCD je $|CD| = |BC|\operatorname{ctg}\sphericalangle CDB = |BC|\operatorname{ctg}(2\beta)$. Konačno je

$$\frac{|BE|}{|CD|} = \frac{\frac{\cos(2\beta)}{\sin\beta}\cdot|AB|}{|BC|\operatorname{ctg}(2\beta)} = \frac{\cos(2\beta)|AB|}{\sin\beta\cdot|BC|\cdot\frac{\cos(2\beta)}{\sin(2\beta)}} = \frac{\sin(2\beta)|AB|}{\sin\beta\cdot|AB|\cos\beta} = 2.$$

Drugo rješenje.

Označimo s H sjecište pravaca AE i BC. Neka je $|CH| = x$, $|CD| = y$ te uobičajeno $|AB| = c$, $|BC| = a$ i $|CA| = b$.



Trokuti BHE i AHB su slični jer imaju zajednički kut u vrhu H i $\sphericalangle ABH = \sphericalangle BEH = \beta$. Imamo $|BE| : |AB| = |BH| : |AH|$, odnosno $|BE| : c = (a-x) : \sqrt{b^2+x^2}$.

Slični su i pravokutni trokuti AHC i BAC jer imaju sukladne kutove.
Stoga je $|CH| : |AC| = |AC| : |BC|$, odnosno $x : b = b : a$.

Dobivamo $x = \dfrac{b^2}{a}$ i

$$|BE| = \frac{c\,(a-x)}{\sqrt{b^2+x^2}} = \frac{c\left(a-\frac{b^2}{a}\right)}{\sqrt{b^2+\left(\frac{b^2}{a}\right)^2}} = \frac{c\,(a^2-b^2)}{b\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a^2-b^2}{b}.$$

S druge strane je $|BD| = |BE| + |DE| = |BE| + |DA|$, odnosno

$$\sqrt{a^2+y^2} = \frac{a^2-b^2}{b} + (b-y) = \frac{a^2}{b} - y.$$

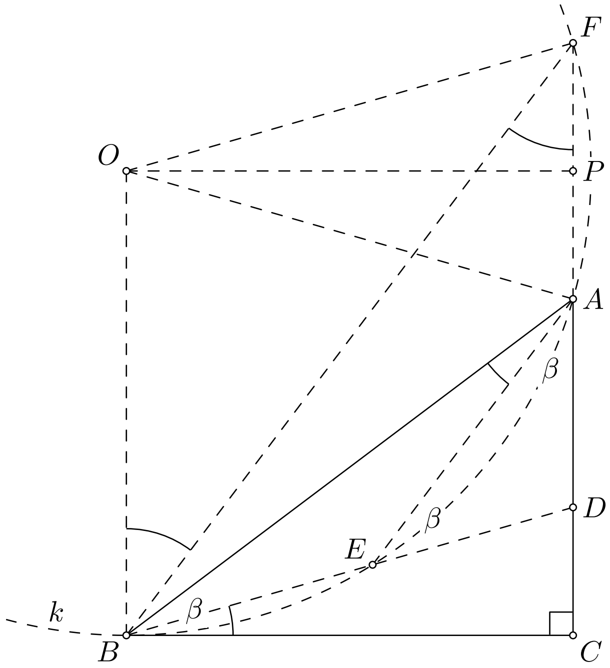
Sređivanjem dobivamo

$$\begin{aligned} a^2+y^2 &= \frac{a^4}{b^2} - 2\,\frac{a^2}{b}\,y + y^2,\\ b^2 &= a^2 - 2by \end{aligned}$$

te konačno $|CD| = y = \dfrac{a^2-b^2}{2b} = \dfrac{1}{2}|BE|.$

Treće rješenje.

Označimo $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DAE = \sphericalangle AED = \beta$.



Vrijedi $\sphericalangle EDC = 2\beta$ pa je $\sphericalangle DBC = 90^\circ - 2\beta$.

S druge strane, iz pravokutnog trokuta ABC imamo $2\beta + \sphericalangle EAB = 90^\circ$, odnosno $\sphericalangle EAB = 90^\circ - 2\beta$.

Vidimo da je $\sphericalangle DBC = \sphericalangle EAB$. Sada možemo zaključiti (prema obratu teorema o kutu između tetive i tangente) da je pravac BC tangenta na opisanu kružnicu trokuta ABE u točki B.

Neka je ta kružnica k, točka O njeno središte i neka je F drugo sjecište pravca CA s k.

Promotrimo pravce BE i AF koji se sijeku u D. Potencija točke D u odnosu na k je

$$|DE| \cdot |DB| = |DA| \cdot |DF|.$$

Znamo da je $|DA| = |DE|$ pa slijedi $|DB| = |DF|$ i $|BE| = |AF|$.

Dakle, trokut BDF je jednakokračan, a isto vrijedi i za trokut OBF. Pravci OB i FD su okomiti na BC pa su međusobno paralelni. Stoga je $\sphericalangle OBF = \sphericalangle BFD$, a to znači da spomenuti jednakokračni trokuti imaju sukladne kutove uz zajedničku osnovicu $\overline{BF}$. Oni su, dakle, sukladni, a četverokut $OBDF$ je romb.

Označimo sada polovište dužine $\overline{AF}$ s P. Trokuti BCD i OPF su pravokutni trokuti sa sukladnim hipotenuzama ($|BD| = |OF|$, jer je $OBDF$ romb) i s jednim parom sukladnih kutova ($\sphericalangle BDC = \sphericalangle OFP$, kutovi s paralelnim kracima) pa je $\triangle BCD \cong \triangle OPF$.

Konačno je

$$|CD| = |PF| = \frac{1}{2}|AF| = \frac{1}{2}|BE|.$$

Zadatak A-3.3.

Za dani prosti broj p odredi sve cijele brojeve n takve da je $\sqrt{n^2+pn}$ cijeli broj.

Prvo rješenje.

Razmatramo dva slučaja:

1. slučaj $\quad p \mid n$ $\qquad$ Tada je $n = pk$, $k \in \mathbb{Z}$ i vrijedi

$$\sqrt{n^2+pn} = \sqrt{p^2k^2+p^2k} = p\sqrt{k^2+k}.$$

No, $k^2+k = k(k+1)$ je potpun kvadrat samo ako je $k^2+k=0$, tj. za $k=0$ i $k=-1$. Odgovarajuća rješenja su $n=0$ i $n=-p$.

2. slučaj $\quad p \nmid n$ $\qquad$ Tada je $M(n, n+p) = 1$. Da bi izraz pod korijenom $n^2+pn = n(n+p)$ bio potpun kvadrat, mora biti $n = a^2$, $n+p = b^2$, ili $n = -b^2$, $n+p = -a^2$, za neke $a, b \in \mathbb{N}_0$.

U oba slučaja je $p = b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$ pa dobivamo (jer je $a+b>0$)

$$\begin{cases} b-a=1 \\ b+a=p \end{cases} \qquad \text{ili} \qquad \begin{cases} b-a=p \\ b+a=1 \end{cases}$$

Rješenje prvog sustava je $a = \dfrac{p-1}{2}$, $b = \dfrac{p+1}{2}$, a drugog $a = \dfrac{1-p}{2}$, $b = \dfrac{p+1}{2}$.

Ako je $n = a^2$ dobivamo $n = \left(\dfrac{p-1}{2}\right)^2$, a ako je $n = -b^2$ onda je $n = -\left(\dfrac{p+1}{2}\right)^2$. Ovo su cijeli brojevi pa onda i rješenja zadatka samo za $p>2$.

Drugo rješenje.

Neka je $\sqrt{n^2+pn} = m$, $m \in \mathbb{N}_0$. Tada dobivamo $n^2+pn-m^2=0$.

Rješenja te kvadratne jednadžbe su

$$n = \frac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{p^2+4m^2}\right).$$

Budući da se traže cjelobrojna rješenja, izraz pod korijenom mora biti potpun kvadrat tj. $p^2+4m^2 = w^2$, $w \in \mathbb{N}_0$.

Iz $p^2 = (w-2m)(w+2m)$, kako je $w+2m \geqslant 0$ i $w+2m \geqslant w-2m$, dobivamo sljedeće slučajeve:

$$\begin{cases} w-2m=1 \\ w+2m=p^2 \end{cases} \qquad \text{ili} \qquad \begin{cases} w-2m=p \\ w+2m=p \end{cases}$$

U prvom slučaju dobivamo $w = \dfrac{p^2+1}{2}$, $m = \dfrac{p^2-1}{4}$, pa je

$$n = \frac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{p^2+4\left(\frac{p^2-1}{4}\right)^2}\right)$$

$$n_1 = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2, \qquad n_2 = -\left(\frac{p+1}{2}\right)^2.$$

Ovo su cijeli brojevi samo kada je p neparan, tj. $p>2$.

U drugom slučaju je $w=p$, $m=0$, pa je $n = \frac{1}{2}(-p \pm p)$, odnosno $n_3 = 0$ i $n_4 = -p$.

Zadatak A-3.4.

Duljine stranica četverokuta su cjelobrojne, a svaka od njih je djelitelj zbroja preostalih triju duljina. Dokaži da su bar dvije stranice tog četverokuta sukladne.

Rješenje.

Pretpostavimo suprotno, da su sve stranice različitih duljina. Neka su njihove duljine a, b, c, d. Možemo pretpostaviti da je $a < b < c < d$ (nismo odredili poredak stranica).

Uočimo da je svaka od duljina djelitelj sume $S = a + b + c + d$ svih četiriju duljina.

Kako se radi o duljinama stranica četverokuta, mora biti $a + b + c > d$, pa je $S > 2d$, odnosno $\frac{S}{d} > 2$. Budući da je d djelitelj od S, vrijedi $\frac{S}{d} \geqslant 3$.

Sada imamo $c < d \leqslant \frac{S}{3}$, a kako je c djelitelj od S, slijedi $c \leqslant \frac{S}{4}$.

Analogno dobivamo $b \leqslant \frac{S}{5}$ i $a \leqslant \frac{S}{6}$.

Stoga je

$$S = a + b + c + d \leqslant \frac{S}{6} + \frac{S}{5} + \frac{S}{4} + \frac{S}{3} = S\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) = \frac{57}{60}S < S.$$

Ovo je nemoguće, pa je pretpostavka da su sve stranice različitih duljina pogrešna.

Zadatak A-3.5.

Na ploči su zapisani neki cijeli brojevi. U svakom koraku odabiremo brojeve a i b koji se nalaze na ploči, obrišemo ih i umjesto njih zapišemo brojeve $3a - b$ i $13a - 3b$.

Ako su na početku na ploči brojevi $1, 2, 3, 4, \ldots, 2011, 2012$, mogu li se nakon konačnog broja koraka na ploči nalaziti brojevi $2, 4, 6, 8, \ldots, 4022, 4024$?

Rješenje.

Odredimo za koliko se promijeni suma svih brojeva na ploči zamjenom brojeva a i b brojevima $3a - b$ i $13a - 3b$:

$$((3a - b) + (13a - 3b)) - (a + b) = 15a - 5b = 5\,(3a - b)\,.$$

Vidimo da se u svakom koraku suma brojeva zapisanih na ploči mijenja za višekratnik broja 5, tj. suma svih brojeva na ploči u svakom trenutku daje isti ostatak pri dijeljenju s 5.

Na početku, suma svih brojeva je

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 2012 = \frac{2012 \cdot 2013}{2} = 1006 \cdot 2013$$

i vrijedi

$$1006 \cdot 2013 \equiv 1 \cdot 3 \equiv 3 \pmod{5}.$$

Međutim,

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 4024 = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 2012) = 2012 \cdot 2013 \equiv 2 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{5}.$$

Stoga se na ploči ne mogu naći brojevi $2, 4, 6, \ldots, 4024$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

26. travnja 2012.

Zadatak A-4.1.

a) Neka su x i y realni brojevi takvi da su $x+y$, x^2+y^2 i x^4+y^4 cijeli brojevi. Dokaži da je broj x^n+y^n cijeli za svaki prirodni broj n.

b) Nađi primjer realnih brojeva x i y koji nisu cijeli, takvih da su $x+y$, x^2+y^2 i x^4+y^4 cijeli brojevi.

c) Nađi primjer realnih brojeva x i y koji nisu cijeli, takvih da su $x+y$, x^2+y^2 i x^3+y^3 cijeli, ali x^4+y^4 nije cijeli broj.

Rješenje.

a) Neka su $a=x+y$, $b=x^2+y^2$ i $c=x^4+y^4$ cijeli brojevi. Tada su i $a^2-b=2xy$ i $b^2-c=2x^2y^2$ cijeli brojevi.

Pretpostavimo da xy nije cijeli broj. Tada je $xy=\dfrac{m}{2}$, gdje je $m\in\mathbb{Z}$ neparan broj. No, u tom slučaju broj $2x^2y^2=\dfrac{m^2}{2}$ nije cijeli broj, što je kontradikcija. Ovim smo dokazali da je xy cijeli broj.

Sada indukcijom lako dokažemo da je x^n+y^n cijeli broj, za sve $n\in\mathbb{N}$:

Baza: brojevi $x+y$ i x^2+y^2 su prema pretpostavci cijeli brojevi.

Pretpostavimo da su, za neki prirodni broj $n>1$ brojevi $x^{n-1}+y^{n-1}$ i x^n+y^n cijeli. Tada vrijedi:

$$x^{n+1}+y^{n+1}=(x^n+y^n)(x+y)-(x^ny+xy^n)=(x^n+y^n)(x+y)-xy\left(x^{n-1}+y^{n-1}\right).$$

Kako su $x+y$ i xy cijeli brojevi, kao i $x^{n-1}+y^{n-1}$ i x^n+y^n, zaključujemo da je i $x^{n+1}+y^{n+1}$ cijeli broj.

Po principu matematičke indukcije slijedi da je x^n+y^n cijeli broj za sve $n\in\mathbb{N}$.

b) Npr. $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$.

c) Npr. $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Zadatak A-4.2.

Neka su p_1 i q_1 cijeli brojevi takvi da jednadžba $x^2 + p_1 x + q_1 = 0$ ima dva cjelobrojna rješenja. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definiramo brojeve p_{n+1} i q_{n+1} formulama

$$p_{n+1} = p_n + 1, \quad q_{n+1} = q_n + \frac{1}{2} p_n.$$

Dokaži da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n za koje jednadžba $x^2 + p_n x + q_n = 0$ ima dva cjelobrojna rješenja.

Rješenje.

Za svaki $n \in \mathbb{N}$, neka je D_n diskriminanta kvadratne jednadžbe $x^2 + p_n x + q_n = 0$:

$$D_n = p_n^2 - 4q_n.$$

Iz zadanog uvjeta zaključujemo da je D_1 kvadrat nekog cijelog broja.

Nadalje imamo:

$$D_{n+1} = p_{n+1}^2 - 4q_{n+1} = (p_n + 1)^2 - 4\left(q_n + \frac{1}{2} p_n\right) = p_n^2 - 4q_n + 1 = D_n + 1.$$

Pretpostavimo da za neki prirodni broj n jednadžba $x^2 + p_n x + q_n = 0$ ima dva cjelobrojna rješenja. Tada je $D_n = k^2$ za neki cijeli broj k, te imamo:

$$D_{n+2k+1} = D_n + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$$

Osim toga, kako su $\frac{1}{2}\left(-p_n + \sqrt{D_n}\right)$ i $\frac{1}{2}\left(-p_n - \sqrt{D_n}\right)$ cijeli brojevi, zaključujemo da su p_n i D_n iste parnosti. No, tada je i

$$p_{n+2k+1} \equiv p_n + 2k + 1 \equiv p_n + 1 \equiv D_n + 1 \equiv D_n + 2k + 1 \equiv D_{n+2k+1} \pmod{2}$$

pa i jednadžba $x^2 + p_{n+2k+1} x + q_{n+2k+1} = 0$ također ima dva cjelobrojna rješenja.

Time smo dokazali da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n za koje jednadžba $x^2 + p_n x + q_n = 0$ ima dva cjelobrojna rješenja.

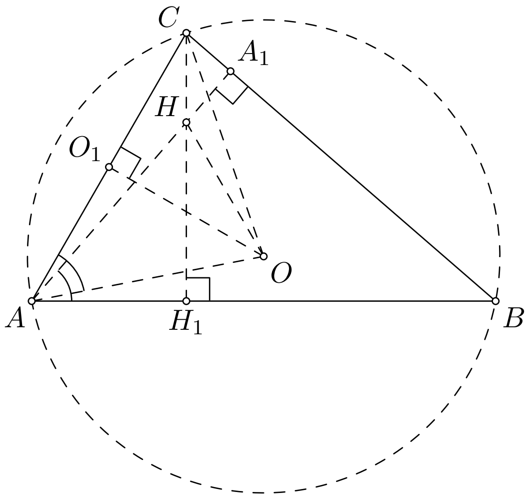
Zadatak A-4.3.

Dan je trokut s ortocentrom H i središtem opisane kružnice O. Ako je mjera jednog kuta trokuta 60°, dokaži da je simetrala tog kuta okomita na pravac OH.

Napomena: U svim rješenjima promatramo trokut ABC u kojem je $\sphericalangle BAC = 60^\circ$ i $|AB| > |CA|$ (to možemo pretpostaviti bez gubitka općenitosti).

Prvo rješenje.

Neka je točka A_1 nožište visine iz vrha A zadanog trokuta, točka O_1 nožište okomice iz točke O na stranicu $\overline{CA}$, a točka H_1 nožište okomice iz točke H na pravac AB. Označimo $|CA| = b$ i $\sphericalangle CBA = \beta$.



Trokut CAO je jednakokračan, a kut $\sphericalangle COA$ je središnji kut nad tetivom $\overline{CA}$ opisane kružnice trokuta ABC. Zato je $\sphericalangle O_1OA = \frac{1}{2}\sphericalangle COA = \frac{1}{2} \cdot 2\sphericalangle CBA = \beta$ i $|AO_1| = \frac{b}{2}$.

S druge strane, trokut AH_1C je polovica jednakostraničnog trokuta i vrijedi $2\,|AH_1| = |CA| = b$, odakle je $|AH_1| = \frac{b}{2}$. Pravokutni trokuti AH_1H i AA_1B su slični jer imaju zajednički šiljasti kut pri vrhu A te je $\sphericalangle AHH_1 = \sphericalangle ABA_1 = \beta$.

Sada se može zaključiti da su trokuti AOO_1 i AHH_1 sukladni pa je $|AO| = |AH|$, $\sphericalangle OAO_1 = \sphericalangle HAH_1$. Zbog simetrije pri vrhu A, simetrala kuta $\sphericalangle BAC$ ujedno je i simetrala kuta između krakova jednakokračnog trokuta AOH, pa je okomita na pravac OH.

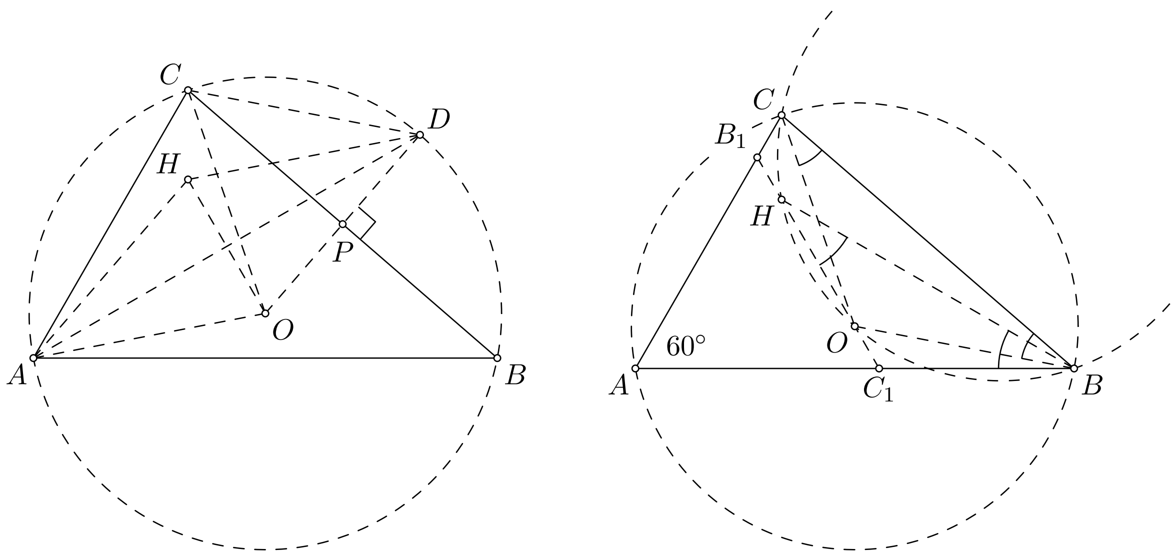
Drugo rješenje.

Neka je D sjecište simetrale kuta $\sphericalangle BAC$ i opisane kružnice. Ta točka leži i na simetrali dužine $\overline{BC}$. Označimo s P polovište dužine $\overline{BC}$. Kako je $|OC| = |OD|$ i $\sphericalangle COD = 2\sphericalangle CAD = 60°$, trokut COD je jednakostraničan. Točka P je i polovište dužine $\overline{OD}$ jer je $OD \perp BC$.

Poznato je da je $|AH| = 2|OP|$ pa zaključujemo da je $|AH| = |OD|$.

Također uočavamo da su pravci AH i OD međusobno paralelni jer su oba okomita na BC. Zato je četverokut $AHDO$ paralelogram.

Kako je i $|AO| = |DO|$, četverokut $AHDO$ je romb pa su njegove dijagonale, $\overline{AD}$ i $\overline{OH}$, međusobno okomite.



Treće rješenje.

Kako je $\sphericalangle BOC = 2\sphericalangle BAC = 120°$ i $\sphericalangle BHC = 180° - \sphericalangle BAC = 120°$ za šiljasti, a $\sphericalangle BHC = 60°$ za tupokutni trokut ABC, zaključujemo da točke H, O, B i C leže na istoj kružnici. Zato je $\sphericalangle OHB = \sphericalangle OCB = \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle BOC) = 30°$.

Označimo s B_1 i C_1 sjecišta pravca OH s pravcima AC i AB redom. Kut između pravaca AB i OH je vanjski kut trokuta C_1BH i iznosi $60°$ (jer je $\sphericalangle HBA = 30°$) te je trokut AB_1C_1 jednakostraničan. Sada je jasno da simetrala kuta $\sphericalangle BAC$ sadrži njegovu visinu pa je okomita na pravac OH.

Zadatak A-4.4.

Neka su n i d prirodni brojevi takvi da d dijeli $2n^2$. Dokaži da broj n^2+d nije potpun kvadrat.

Prvo rješenje.

Neka je $k \in \mathbb{N}$ takav da je $2n^2 = dk$. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} k^2(n^2+d) &= k^2n^2 + k^2d = k^2n^2 + 2kn^2 \\ &= n^2(k^2+2k) = n^2((k+1)^2-1). \end{aligned}$$

Izraz $(k+1)^2 - 1$ nije potpun kvadrat za $k \in \mathbb{N}$. Stoga ni broj $k^2(n^2+d)$, pa tako ni n^2+d ne može biti potpun kvadrat.

Drugo rješenje.

Pretpostavimo da je $n^2 + d = m^2$.
Iz uvjeta zadatka imamo $(m^2-n^2)k = 2n^2$, tj. $(k+2)n^2 = km^2$.

Ako neki prost broj $p \neq 2$ dijeli k onda p ne dijeli $k+2$ pa dijeli n^2. Iz toga slijedi da se p javlja s parnim eksponentom na lijevoj strani gornje jednakosti i stoga se u rastavu broja k na proste faktore svaki neparan prosti faktor pojavljuje s parnim eksponentom.

Analogno zaključujemo da se svaki prost faktor $p \neq 2$ u broju $k+2$ javlja s parnim eksponentom.

Broj 2 dijeli k ako i samo ako dijeli $k+2$. Ako pretpostavimo da 2 dijeli k i $k+2$. Onda je jedan od tih brojeva djeljiv s 4, a drugi nije. Zaključujemo da je jedan od tih brojeva oblika $2^r a^2$, a drugi $2b^2$ pri čemu je r neparan prirodni broj, a a i b prirodni brojevi. Razlika brojeva $\frac{1}{2}k$ i $\frac{1}{2}(k+2)$ tj. brojeva $2^{r-1}a^2$ i b^2 mora biti 1. Kako su ta dva broja potpuni kvadrati, to je nemoguće.

Treće rješenje.

1. slučaj. Neka je d neparan. Tada d dijeli n^2. Broj d možemo prikazati u obliku $d = a^2b$ gdje su a i b prirodni brojevi, i b nije djeljiv potpunim kvadratom većim od 1. Kako a^2b dijeli n^2, zaključujemo da ab dijeli n, pa je $n = abk$ za neki $k \in \mathbb{N}$.

Sada imamo

$$n^2 + d = (abk)^2 + a^2b = a^2b(bk^2+1),$$

iz čega vidimo da je $\dfrac{n^2+d}{a^2}$ prirodan broj.

Ako je $b > 1$, taj broj je djeljiv sa b ali ne i sa b^2. Stoga n^2+d nije potpun kvadrat.

Ako je $b = 1$, onda je $n^2 + d = a^2(k^2+1)$ što nije potpun kvadrat za $k \in \mathbb{N}$.

2. slučaj. Neka je d paran. Tada se d može prikazati u obliku $2a^2b$ gdje su a i b prirodni brojevi i b nije djeljiv potpunim kvadratom većim od 1. Iz $d \mid 2n^2$, odnosno $2a^2b \mid 2n^2$ zaključujemo da $ab \mid n$. Dakle, $n = abk$, $k \in \mathbb{N}$. Tada je

$$n^2 + d = (abk)^2 + 2a^2b = a^2b(bk^2+2).$$

Promotrimo prirodni broj $\dfrac{n^2+d}{a^2} = b(bk^2+2)$.

Ako je $b > 2$, taj broj je djeljiv sa b ali ne i sa b^2. Stoga n^2+d nije potpun kvadrat.

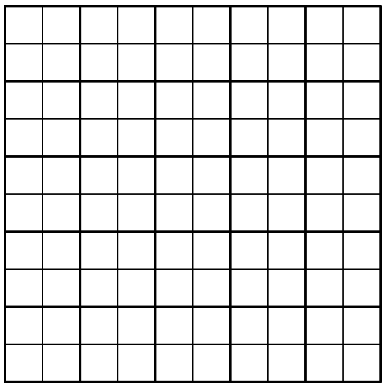
Ako je $b = 1$ onda je $b(bk^2+2) = k^2+2$, a ako je $b = 2$ onda je $b(bk^2+2) = 2(2k^2+2) = 4(k^2+1)$. Ni u tim slučajevima n^2+d nije potpun kvadrat.

Zadatak A-4.5.

Za dva polja tablice 10×10 kažemo da su *prijateljska* ako imaju barem jedan zajednički vrh. U svako polje tablice upisan je po jedan prirodni broj manji ili jednak 10, tako da su brojevi u prijateljskim poljima relativno prosti. Dokaži da postoji broj koji se pojavljuje u toj tablici barem 17 puta.

Rješenje.

Podijelimo tablicu na 25 malih 2×2 kvadrata.



U svakom od njih pojavljuje se najviše jedan paran broj i najviše jedan broj djeljiv s 3. Dakle, najviše 50 brojeva u čitavoj tablici je djeljivo s 2 ili 3.

Preostalo je barem 50 brojeva, a svaki od njih jednak je 1, 5 ili 7.

Prema Dirichletovom principu barem jedan od tih brojeva pojavljuje se 17 puta.