Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

26. travnja 2012.

1. Odredi sve parove (x, y) cijelih brojeva za koje vrijedi

$$6x^2y^2 - 4y^2 = 2012 - 3x^2.$$

2. Dokaži da za sve realne brojeve a, b, c vrijedi

$$\frac{1}{3}(a+b+c)^2 \leqslant a^2 + b^2 + c^2 + 2(a - b + 1).$$

3. Svaka znamenka prirodnog broja n (osim prve) strogo je veća od znamenke koja se nalazi neposredno lijevo od nje. Odredi zbroj svih znamenaka broja $9n$.

4. Neka je trokut ABC s tupim kutom kod vrha B, neka su D i E polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ redom, F točka na stranici $\overline{BC}$ takva da je $\sphericalangle BFE$ pravi, te G točka na dužini $\overline{DE}$ takva da je kut $\sphericalangle BGE$ pravi.

Dokaži da točke A, F i G leže na istom pravcu ako i samo ako je $2|BF| = |CF|$.

5. Azra je zamislila četiri realna broja i na ploču zapisala zbrojeve svih mogućih parova zamišljenih brojeva, a zatim obrisala jedan od tih zbrojeva. Na ploči su ostali brojevi -2, 1, 2, 3 i 6. Koje je brojeve Azra zamislila?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

26. travnja 2012.

1. Neka je x realan broj takav da su $x^2 - x$ i $x^4 - x$ cijeli brojevi. Dokaži da je x cijeli broj.

2. Odredi sva realna rješenja jednadžbe

$$4x^2 - 20\lfloor x \rfloor + 9 = 0,$$

gdje je s $\lfloor x \rfloor$ označen najveći cijeli broj koji nije veći od x.

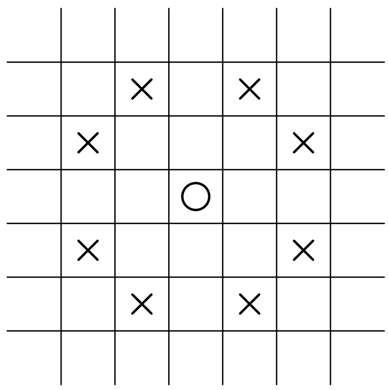
3. Jednakokračnom trokutu ABC ($|AB| = |AC|$) opisana je kružnica. Tangente te kružnice s diralištima u točkama A i C sijeku se u točki D. Ako je $\sphericalangle DBC = 30^\circ$, dokaži da je trokut ABC jednakostraničan.

4. Dokaži da za pozitivne realne brojeve a, b i c za koje je $a + b + c \leqslant 3$ vrijedi

$$\frac{a+1}{a(a+2)} + \frac{b+1}{b(b+2)} + \frac{c+1}{c(c+2)} \geqslant 2.$$

5. Može li skakač obići ploču dimenzija 4×2012 i vratiti se na polazno polje tako da pritom stane na svako polje točno jednom?

Skakač je figura koja se kreće kao u šahu: s polja označenog kružićem može se pomaknuti na jedno od osam polja označenih križićima (ako je to polje na ploči).



Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

26. travnja 2012.

1. Dokaži da ne postoji prirodni broj $n \geqslant 2$ takav da je funkcija

$$f(x) = \cos\left(x\sqrt{1}\right) + \cos\left(x\sqrt{2}\right) + \cdots + \cos\left(x\sqrt{n}\right)$$

periodična.

2. Neka je ABC trokut s pravim kutom u vrhu C. Neka je D točka na stranici $\overline{AC}$ i E točka na dužini $\overline{BD}$ tako da vrijedi $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DAE = \sphericalangle AED$. Dokaži da je $|BE| = 2\,|CD|$.

3. Za dani prosti broj p odredi sve cijele brojeve n takve da je $\sqrt{n^2 + pn}$ cijeli broj.

4. Duljine stranica četverokuta su cjelobrojne, a svaka od njih je djelitelj zbroja preostalih triju duljina. Dokaži da su bar dvije stranice tog četverokuta sukladne.

5. Na ploči su zapisani neki cijeli brojevi. U svakom koraku odabiremo brojeve a i b koji se nalaze na ploči, obrišemo ih i umjesto njih zapišemo brojeve $3a - b$ i $13a - 3b$.

Ako su na početku na ploči brojevi $1, 2, 3, 4, \ldots, 2011, 2012$, mogu li se nakon konačnog broja koraka na ploči nalaziti brojevi $2, 4, 6, 8, \ldots, 4022, 4024$?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

26. travnja 2012.

1.
a) Neka su x i y realni brojevi takvi da su $x+y$, x^2+y^2 i x^4+y^4 cijeli brojevi. Dokaži da je broj x^n+y^n cijeli za svaki prirodni broj n.

b) Nađi primjer realnih brojeva x i y koji nisu cijeli, takvih da su $x+y$, x^2+y^2 i x^4+y^4 cijeli brojevi.

c) Nađi primjer realnih brojeva x i y koji nisu cijeli, takvih da su $x+y$, x^2+y^2 i x^3+y^3 cijeli, ali x^4+y^4 nije cijeli broj.

2. Neka su p_1 i q_1 cijeli brojevi takvi da jednadžba $x^2+p_1x+q_1=0$ ima dva cjelobrojna rješenja. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definiramo brojeve p_{n+1} i q_{n+1} formulama

$$p_{n+1}=p_n+1, \quad q_{n+1}=q_n+\frac{1}{2}p_n.$$

Dokaži da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n za koje jednadžba $x^2+p_nx+q_n=0$ ima dva cjelobrojna rješenja.

3. Dan je trokut s ortocentrom H i središtem opisane kružnice O. Ako je mjera jednog kuta trokuta 60°, dokaži da je simetrala tog kuta okomita na pravac OH.

4. Neka su n i d prirodni brojevi takvi da d dijeli $2n^2$. Dokaži da broj n^2+d nije potpun kvadrat.

5. Za dva polja tablice 10×10 kažemo da su *prijateljska* ako imaju barem jedan zajednički vrh. U svako polje tablice upisan je po jedan prirodni broj manji ili jednak 10, tako da su brojevi u prijateljskim poljima relativno prosti. Dokaži da postoji broj koji se pojavljuje u toj tablici barem 17 puta.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.