DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

Poreč, 26. travnja 2012.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1. Kratka poznanstva nisu uvijek najpouzdanija. Zato Barbara nije odmah izravno rekla broj svoga telefona novom prijatelju Luki, već je njegovoj želji udovoljila na zaobilazni način: "Imam dva telefona. Brojevi tih telefona su šesteroznamenkasti brojevi sa sljedećim svojstvima. U njihovom je dekadskom zapisu troznamenkasti broj na početku dvostruko manji od troznamenkastog broja na kraju. Zbroj tih dvaju troznamenkastih brojeva je broj između 800 i 850. Sva tri troznamenkasta broja sastavljena su od 9 različitih znamenaka."

Pomozite Luki i odredite o kojim se telefonskim brojevima radi.

Rješenje. Ako je troznamenkasti broj na početku n, onda je troznamenkasti broj na kraju $2n$, a njihov je zbroj $3n$. Ukupno je 17 višekratnika broja tri između 800 i 850, a ako odbacimo brojeve s istim znamenkama (822 i 828), ima ih 15. To su brojevi

$$801, 804, 807, 810, 813, 816, 819, 825, 831, 834, 837, 840, 843, 846, 849.$$

Podijelimo li te brojeve s tri, dobit ćemo troznamenkasti broj n koji može biti na početku, odnosno brojeve

$$267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 275, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283.$$

Odbacimo sve brojeve n koji nemaju različite znamenke kao i one za koje n i $3n$ nemaju različite znamenke. Ostaju samo brojevi 267, 269, 273. Odbacit ćemo i broj 269 jer bi tada $2n$, troznamenkasti broj na kraju, iznosio 538, što je nemoguće jer sadrži znamenku 8, kao i $3n$. Dakle, jedini šesteroznamenkasti brojevi koji zadovoljavaju sve uvjete su

$$267534 \text{ (zbroj 801)} \quad \text{i} \quad 273546 \text{ (zbroj 819)}.$$

Zadatak B-1.2. U skupu realnih brojeva riješite jednadžbu:

$$f(x)+f(2-x)=2,$$

gdje je

$$f(x)=\begin{cases}|x|, & x \leq 1 \\ 2-x, & x>1\end{cases}.$$

Rješenje.

$$f(2-x)=\begin{cases}|2-x|, & \text{za } 2-x \leq 1, \text{tj. } x \geq 1 \\ x, & \text{za } 2-x>1, \text{tj. } x<1\end{cases}$$

$\boxed{\text{1. slučaj}}$ Za $x>1$ jednadžba prelazi u

$$\begin{aligned} 2-x+|2-x| &= 2 \\ |2-x| &= x \end{aligned}$$

Tada je

$$2-x=x \quad \text{ili} \quad 2-x=-x.$$

Rješenje $x=1$ ne zadovoljava (zbog $x>1$).

$\boxed{\text{2. slučaj}}$ Za $x<1$ jednadžba prelazi u

$$|x|=2-x.$$

Rješenje $x=1$ ne zadovoljava (zbog $x=1$).

$\boxed{\text{3. slučaj}}$ Za $x=1$ jednadžba je

$$|x|+|2-x|=2.$$

Zaključujemo da je $x=1$ jedino rješenje.

Zadatak B-1.3. Dokažite da je $e+f<2a+h$, gdje su e i f duljine dijagonala romba, a duljina stranice, a h duljina visine romba.

Rješenje. Iz površine romba slijedi

$$\frac{e \cdot f}{2}=a h \quad \text{ili} \quad e \cdot f=2 a h.$$

Pitagorin poučak daje vezu između dijagonala i stranice romba.

$$\left(\frac{e}{2}\right)^{2}+\left(\frac{f}{2}\right)^{2}=a^{2}.$$

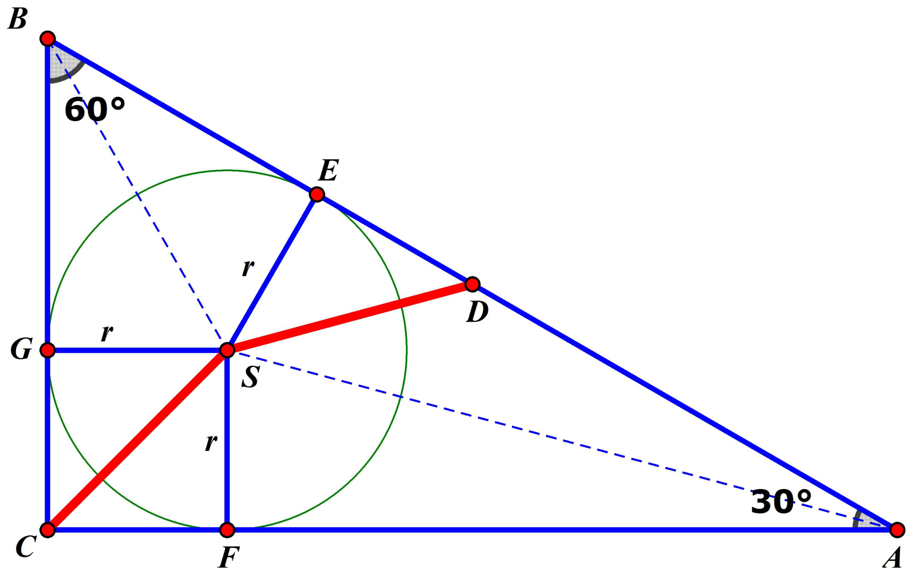
Primjenom prethodnih jednakosti na kvadrat zbroja dijagonala, slijedi

$$(e+f)^{2}=e^{2}+f^{2}+2 e f=4 a^{2}+4 a h<4 a^{2}+4 a h+h^{2}=(2 a+h)^{2}.$$

Tada je $|e+f|<|2a+h|$, odnosno $e+f<2a+h$.

Zadatak B-1.4. U pravokutnom trokutu ABC, s pravim kutom u vrhu C, duljina stranice $\overline{BC}$ iznosi a, a mjera nasuprotnog kuta je $30°$. Točka S je središte trokutu upisane kružnice, a točka D je polovište hipotenuze. Dokažite da je $|CS| = |DS|$ i odredite polumjer upisane kružnice.

Rješenje.



Kako su kutovi trokuta ABC $30°$ i $60°$, trokut ABC je polovina jednakostraničnog trokuta sa stranicom duljine $2a$.

Dakle, $|AB| = 2a$, $|AC| = a\sqrt{3}$.

Trokuti BGS i BES imaju dvije jednake stranice, r i zajedničku stranicu BS, te kut između njih ($60°$), pa su po poučku SKS sukladni. Isto vrijedi i za pravokutne trokute CFS i CGS (zajedno čine kvadrat $CFSG$). Tada vrijedi

$$|CF| = |CG| = r, \quad |BE| = |BG| = a - r.$$

$CFSG$ je kvadrat pa je $|CS| = r\sqrt{2}$.

Kako je $|BD| = \frac{1}{2}|AB| = a$, slijedi

$$|ED| = a - (a - r) = r.$$

Zaključujemo da je $|DS|^2 = 2r^2$ te je $|DS| = r\sqrt{2} = |CS|$.

Izračunajmo polumjer r.

Kutovi trokuta BES su $30°$ i $60°$ pa je trokut BES polovina jednakostraničnog trokuta sa stranicom duljine $2r$. Stranica BE je visina tog jednakostraničnog trokuta te vrijedi

$$|BE| = \frac{2r\sqrt{3}}{2}.$$

S druge je strane $|BE| = a - r$.

Dakle, $a - r = r\sqrt{3}$, odnosno

$$r = \frac{a\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}.$$

Zadatak B-1.5. U posudi, koja nije puna do vrha, nalazi se otopina koja sadrži 85% alkohola. Posudu dopunimo do vrha s otopinom koja sadrži 21% alkohola i dobro promiješamo. Ako odlijemo toliko tekućine koliko smo dolili i ponovimo postupak (opet ulijemo 21% otopinu alkohola), dobit ćemo otopinu koja sadrži 70% alkohola. Koliko alkohola sadrži otopina nakon prvog dopunjavanja? Koliki je dio posude bio ispunjen otopinom prije prvog dopunjavanja?

Prvo rješenje. Neka je x količina otopine u posudi prije dolijevanja, a y ukupna količina tekućine koja stane u posudu. Neka je p postotak alkohola u otopini nakon prvog dopunjavanja.

Tada za količinu alkohola nakon prvog dopunjavanja vrijedi

$$p\%y = 85\%x + 21\%(y - x)$$

što daje

$$\frac{x}{y} = \frac{p-21}{64}. \tag{1}$$

Za količinu alkohola nakon drugog dopunjavanja vrijedi

$$70\%y = p\%x + 21\%(y - x)$$

ili

$$\frac{x}{y} = \frac{49}{p-21}. \tag{2}$$

Rješavanjem sustava jednadžbi (1) i (2), dobivamo

$$\begin{aligned}(p-21)^2 &= 49 \cdot 64\\ p - 21 &= 7 \cdot 8\\ p &= 77.\end{aligned}$$

Postotak alkohola nakon prvog dopunjavanja je 77%.

Tada iz (1) ili (2) slijedi da je

$$\frac{x}{y} = \frac{56}{64} = \frac{7}{8}$$

pa je prije prvog dopunjavanja $\frac{7}{8}$ posude bilo ispunjeno otopinom.

Drugo rješenje. Neka je x količina tekućine prije dolijevanja. Bez smanjenja općenitosti, možemo uzeti da je zapremina posude 1. Tada je $x < 1$.

Na početku je u otopini $\dfrac{85}{100}x$ alkohola.

Dolijevanjem smo dodali $\frac{21}{100} \cdot (1-x)$ alkohola i sad ga u punoj posudi ima $\frac{21}{100} + \frac{64}{100}x$.

Odlijevanjem se količina alkohola smanji za $(1-x) \cdot \left(\frac{21}{100} + \frac{64}{100}x\right)$.

Ponavljanjem postupka dodajemo opet $\frac{21}{100} \cdot (1-x)$ alkohola i u toj smjesi ima 70% alkohola. Iz jednadžbe

$$\frac{21}{100} + \frac{64}{100}x - (1-x) \cdot \left(\frac{21}{100} + \frac{64}{100}x\right) + \frac{21}{100} \cdot (1-x) = \frac{70}{100}$$

nakon sređivanje dobivamo jednadžbu

$$\frac{21}{100} + \frac{64}{100}x - (1-x) \cdot \frac{64}{100}x = \frac{70}{100},$$

odnosno

$$\frac{64}{100}x^2 = \frac{49}{100} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{7}{8}.$$

Postotak alkohola nakon prvog dopunjavanja je $\frac{21}{100} + \frac{64}{100}x$ ili $0.21 + 0.56 = 0.77 = 77\%$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

Poreč, 26. travnja 2012.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1. Riješite jednadžbu

$$3^{1+4x+2x^2} + 2^{1+4x+2x^2} = 5 \cdot 6^{x(x+2)}.$$

Rješenje. Napišimo jednadžbu u drugom obliku:

$$3^{4x+2x^2} \cdot 3 + 2^{4x+2x^2} \cdot 2 = 5 \cdot 2^{x^2+2x} \cdot 3^{x^2+2x}.$$

Podijelimo jednadžbu s 3^{2x^2+4x} i uvedimo supstituciju $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+2x} = t$.

Dana jednadžba prelazi u kvadratnu jednadžbu $2t^2 - 5t + 3 = 0$.

Njezina su rješenja $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{3}{2}$.

Rješenja polazne jednadžbe su $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = -1$.

Zadatak B-2.2. Odredite sve kompleksne brojeve z takve da vrijedi $z^3 = \overline{z}$.

Rješenje. Neka je $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Tada je

$$\begin{aligned} (x+yi)^3 &= x - yi \\ x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i &= x - yi. \end{aligned}$$

Da bi jednakost vrijedila, moraju realni i imaginarni dijelovi s obje strane biti jednaki.

$$x^3 - 3xy^2 = x \quad \text{i} \quad 3x^2y - y^3 = -y.$$

Dobivamo sustav jednadžbi

$$x^3 - 3xy^2 - x = 0 \tag{1}$$
$$3x^2y - y^3 + y = 0 \tag{2}$$

Iz (1) slijedi

$$\begin{aligned} &x(x^2 - 3y^2 - 1) = 0 \\ &x = 0 \quad \text{ili} \quad x^2 - 3y^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Ako je $x = 0$, tada je iz (2)

$$-y^3 + y = 0,$$

odnosno $-y(y^2-1)=0$ pa je $y=0$ ili $y=1$ ili $y=-1$.

Ako je $x^2-3y^2-1=0$, odnosno $x^2=3y^2+1$, tada iz (2) slijedi

$$3(3y^2+1)y-y^3=-y,$$

odnosno $8y^3+4y=0$, što je moguće jedino za $y=0$.

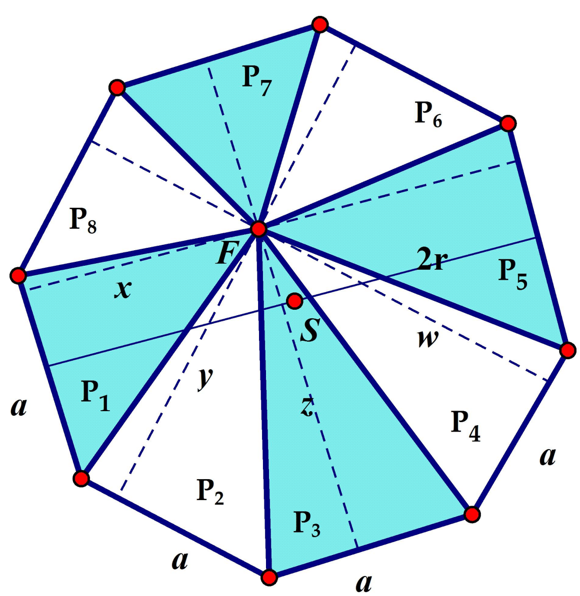
Tada je $x^2-1=0$ pa je $x=1$ ili $x=-1$.

Dakle, kompleksni brojevi z za koje vrijedi dana jednakost su

$$z_1=0, \quad z_2=i, \quad z_3=-i, \quad z_4=1, \quad z_5=-1.$$

Zadatak B-2.3. Gradski je trg oblika pravilnog osmerokuta. Gradsko je vijeće odlučilo urediti trg i unutar njega postaviti fontanu. Majstoru Matku nisu znali reći gdje treba staviti središte fontane, već su mu rekli: "Ako središte fontane spojimo s vrhovima osmerokuta, dobivenih osam trokuta treba popločiti naizmjence crnim i bijelim pločicama, tako da je ukupna površina popločena crnim pločicama jednaka ukupnoj površini popločenoj bijelim pločicama." Majstor Matko je ipak tražio da mu kažu točno mjesto, jer tvrdi da je njihov zahtjev ispunjen gdje god da unutar trga postavi fontanu. Dokažite da je majstor u pravu.

Rješenje.



Površina cijelog osmerokuta je $P=4ar$ (r je polumjer upisane kružnice)

$$P_1=\frac{xa}{2}, \quad P_2=\frac{ya}{2}, \quad P_3=\frac{za}{2}, \quad P_4=\frac{wa}{2}.$$

Nasuprotne stranice pravilnog osmerokuta su paralelne pa vrijedi:

$$P_5 = \frac{(2r-x)a}{2}, \quad P_6 = \frac{(2r-y)a}{2}, \quad P_7 = \frac{(2r-z)a}{2}, \quad P_8 = \frac{(2r-w)a}{2},$$

$$P_1 + P_5 = \frac{xa}{2} + \frac{(2r-x)a}{2} = ar = \frac{1}{4}P.$$

Analogno je

$$P_2 + P_6 = P_3 + P_7 = P_4 + P_8 = \frac{1}{4}P.$$

Dakle, ako promatramo trokute naizmjence

$$P_1 + P_3 + P_5 + P_7 = P_2 + P_4 + P_6 + P_8 = \frac{1}{2}P.$$

Zaključujemo da je majstor u pravu.

Zadatak B-2.4. Odredite sve sedmeroznamenkaste brojeve oblika $\overline{2012xyx}$ koji su djeljivi sa 72.

Rješenje. Broj je djeljiv sa 72 ako je djeljiv s 8 i ako je djeljiv s 9.

Da bi broj bio djeljiv s 9, mora njegov zbroj znamenaka biti djeljiv s 9.

Da bi broj bio djeljiv s 8, mora njegov troznamenkasti završetak, broj $\overline{xyx}$, biti djeljiv s 8.

Zbroj znamenaka danog broja je $5 + 2x + y$.

Kako su $x, y \leq 9$, vrijedi

$$\begin{aligned} 5 + 2x + y &= 9 \text{ ili} \\ 5 + 2x + y &= 18 \text{ ili} \\ 5 + 2x + y &= 27. \end{aligned}$$

(1) Neka je $5 + 2x + y = 9$. Tada je $y = 4 - 2x$.

Broj $\overline{xyx}$ možemo zapisati kao

$$\overline{xyx} = 100x + 10y + x = 101x + 10(4 - 2x) = 81x + 40 = 80x + 40 + x.$$

To će biti djeljivo s 8 samo ako je $x = 8$ ili $x = 0$. No, za $x = 8$ je $y = 4 - 2 \cdot 8 = -12$, što je nemoguće. Ako je $x = 0$, onda je $y = 4$ pa je traženi broj 2012040.

(2) Neka je $5 + 2x + y = 18$. Tada je $y = 13 - 2x$.

Broj $\overline{xyx}$ možemo zapisati kao

$$\overline{xyx} = 101x + 10y = 81x + 130 = 80x + 128 + 2 + x.$$

To će biti djeljivo s 8 samo ako je $2 + x = 8$, to jest $x = 6$. Tada je $y = 13 - 2 \cdot 6 = 1$.

(3) Neka je $5 + 2x + y = 27$. Tada je $y = 22 - 2x$.

Broj $\overline{xyx}$ možemo zapisati kao

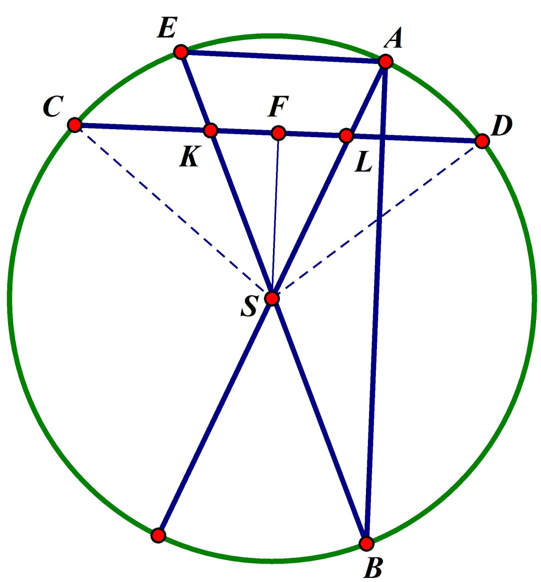
$$\overline{xyx} = 101x + 10y = 81x + 220 = 80x + 216 + 4 + x.$$

To će biti djeljivo s 8 samo ako je $4+x = 8$, to jest $x = 4$. Tada je $y = 22-2\cdot 4 = 14$, što je nemoguće.

Dakle, jedino rješenje su brojevi 2012616 i 2012040.

Zadatak B-2.5. $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ su dvije međusobno okomite tetive kružnice polumjera 10 cm. Dva promjera te kružnice, jedan kroz točku A, a drugi kroz točku B, dijele tetivu $\overline{CD}$ na tri jednaka dijela. Odredite sinus manjeg obodnog kuta nad tetivom $\overline{CD}$, ako je duljina tetive $\overline{AB}$ jednaka 16 cm.

Rješenje.



$$|CK| = |KL| = |LD| = \frac{1}{3}|CD|$$
$$|KF| = \frac{1}{2}|KL| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}|CD| = \frac{1}{6}|CD|$$

Kut BAE je pravi kut jer je nad promjerom pa je

$$|AE| = \sqrt{|BE|^2 - |AB|^2} = 12 \text{ cm}.$$

Iz sličnosti trokuta ABE i FSK slijedi

$$\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|SF|}{|KF|}, \quad \frac{16}{12} = \frac{|SF|}{\frac{1}{6}|CD|}, \quad |SF| = \frac{2}{9}|CD|.$$

Iz pravokutnog trokuta DFS je

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{2}{9}|CD|\right)^2 + \left(\frac{|CD|}{2}\right)^2 &= 100 \\
\frac{97}{324}|CD|^2 &= 100 \\
|CD| = \frac{180}{\sqrt{97}} &= \frac{180\sqrt{97}}{97} \text{ cm.}
\end{aligned}
$$

Obodni kut α, nad tetivom $\overline{CD}$, jednak je polovini pripadnog središnjeg kuta $\angle CSD$, odnosno

$$\alpha = \frac{1}{2}\angle CSD = \angle FSD.$$

Tada je

$$\sin\alpha = \frac{\frac{1}{2}|CD|}{r} = \frac{9\sqrt{97}}{97}.$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

Poreč, 26. travnja 2012.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1. Riješite nejednadžbu

$$\frac{\sin^2 x - 2\sin 2x + 3\cos^2 x}{1-\sin 2x} \geq 0, \quad \text{ako je } |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Rješenje. Kako je $|\sin 2x| \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, to je $1-\sin 2x \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, pa je dana nejednadžba ekvivalentna nejednadžbi

$$\sin^2 x - 2\sin 2x + 3\cos^2 x \geq 0, \quad \text{uz uvjet } \sin 2x \neq 1, \text{ odnosno } x \neq \frac{\pi}{4}.$$

Primjenom formule za $\sin 2x$, slijedi

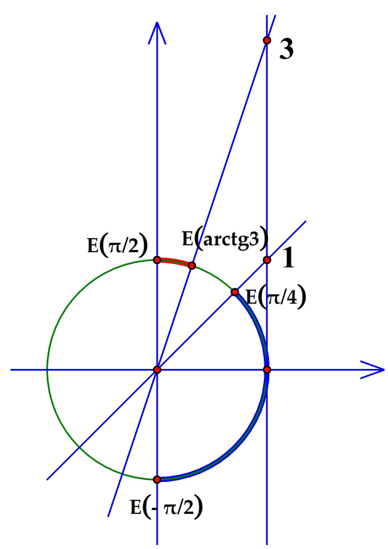
$$\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x \geq 0.$$

Kako je $x \neq \pm\frac{\pi}{2}$, to je $\cos x \neq 0$ i možemo danu nejednadžbu podijeliti s $\cos^2 x$. Slijedi

$$\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 3 \geq 0.$$

Uvedimo supstituciju $\operatorname{tg} x = t$.

Dobivamo kvadratnu nejednadžbu $t^2 - 4t + 3 \geq 0$ kojoj su rješenja brojevi $t \leq 1$ ili $t \geq 3$. Slijedi $\operatorname{tg} x \leq 1$ ili $\operatorname{tg} x \geq 3$. Tražimo rješenja ove nejednadžbe samo na intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.



S grafa čitamo rješenje, uz uvjet $x \neq \frac{\pi}{4}$,

$$x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \right\rangle \cup \left[\operatorname{arctg} 3, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

Zadatak B-3.2. Neka je skup $A = \{n : n \in \mathbb{N},\ n < 101\}$. Koliko ima četveročlanih podskupova skupa A kojima je razlika najvećeg i najmanjeg elementa jednaka 12?

Rješenje. Promatramo četveročlane podskupove danog skupa.

Razlika najvećeg i najmanjeg elementa biti će 12 u sljedećim slučajevima:

1) Ako izaberemo brojeve 1 i 13, preostala dva broja mogu biti bilo koja dva broja između 1 i 13. Njih možemo izabrati na $\frac{11 \cdot 10}{2}$ načina. Dijelimo s dva jer su npr. brojevi 2, 8 i 8, 2 isti izbor, a mi smo ih brojili dva puta.

2) Ako izaberemo brojeve 2 i 14, preostala dva broja između 2 i 14 možemo izabrati na $\frac{11 \cdot 10}{2}$ načina.

3) Ako izaberemo brojeve 3 i 15, preostala dva broja između 3 i 15 možemo izabrati na $\frac{11 \cdot 10}{2}$ načina.

$\vdots$

88) Ako izaberemo brojeve 88 i 100, preostala dva broja između 88 i 100 možemo izabrati na $\frac{11 \cdot 10}{2}$ načina.

Ukupan je broj mogućnosti

$$88 \cdot \frac{11 \cdot 10}{2} = 4840.$$

Zadatak B-3.3. Riješite jednadžbu $x^{\log_5 6} - 5 \cdot 6^{\log_5 \sqrt{x}} = 6$.

Rješenje. Jednadžba ima smisla za $x > 0$.

Kako iz $\log_6 x = \dfrac{\log_5 x}{\log_5 6}$ slijedi $\log_6 x \cdot \log_5 6 = \log_5 x$, to je

$$x^{\log_5 6} = \left(6^{\log_6 x}\right)^{\log_5 6} = 6^{\log_6 x \cdot \log_5 6} = 6^{\log_5 x}.$$

Nadalje,

$$6^{\log_5 \sqrt{x}} = 6^{\frac{1}{2}\log_5 x} = \left(6^{\log_5 x}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6^{\log_5 x}}.$$

Sada danu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$6^{\log_5 x} - 5 \cdot \sqrt{6^{\log_5 x}} = 6.$$

Supstitucijom $\sqrt{6^{\log_5 x}} = t$ dobivamo kvadratnu jednadžbu $t^2 - 5t - 6 = 0$ čija su rješenja $t_1 = 6$ i $t_2 = -1$.

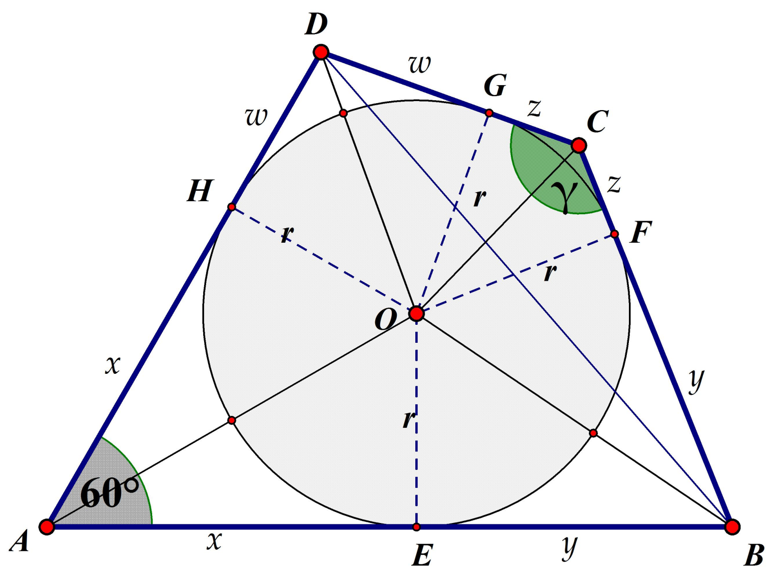
Kako je $t > 0$, imamo samo jedno rješenje.

$$\sqrt{6^{\log_5 x}} = 6 \quad \Rightarrow \quad \log_5 x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 25.$$

Zadatak B-3.4. Grupa je djece našla drvenu ploču u obliku četverokuta i odlučila je iskoristiti za igru "pikado". Kako je meta neobičnog oblika, trebalo je prilagoditi pravila igre. Upitali su za savjet Markovog starijeg brata, dobrog matematičara. On je nešto mjerio, računao, pisao ... i došao do važnog zaključka. Ustanovio je da postoji točka O jednako udaljena od svih stranica četverokuta. Zatim je podijelio ploču na područja tako da je nacrtao spojnice točke O sa svim vrhovima A, B, C, D. Područjima je dodijelio bodove obrnuto proporcionalno njihovoj površini. Koje područje donosi najviše bodova i zašto? Markov je brat dodao uvjet da se bodovi dobivaju samo ako udaljenost od pogođene točke T do točke O nije veća od udaljenosti točke O do bilo koje stranice ploče. Odredite omjer površina onog dijela ploče koji ne donosi i onog dijela koji donosi bodove.

Markov je brat izmjerio ove vrijednosti $|AB| = 5$ dm, $|BC| = 3$ dm, $|AD| = 4$ dm, $|\angle BAD| = 60°$.

Rješenje.



Ako je točka O jednako udaljena od stranica četverokuta, tada se u taj četverokut može upisati kružnica.

U tangencijalnom četverokutu vrijedi $a + c = b + d$. Zaključujemo da je $c = 2$ dm.

Ploča je podijeljena na 4 područja, trokute ABO, BCO, CDO, ADO. Trokut s najmanjom površinom je trokut CDO jer ima najkraću stranicu na koju je r visina pa je to područje koje donosi najviše bodova.

Bodovi se dobivaju ako se pogodi točka unutar četverokutu upisanog kruga.

Izračunajmo polumjer upisane kružnice, odnosno udaljenost točke O od stranica četverokuta.

Iz $\triangle ABD$ slijedi

$$|BD|^2 = 16 + 25 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos 60° = 21,$$
$$|BD| = \sqrt{21} \text{ dm}.$$

Iz $\triangle BCD$ slijedi

$$\cos\gamma = \frac{9+4-21}{2\cdot 2\cdot 3} = \frac{-2}{3},\ \text{a}\ \sin\gamma = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Promotrimo površinu četverokuta.

$$P(ABCD) = r\cdot\frac{a+b+c+d}{2} = r\cdot s = 7r.$$

Isto tako je

$$P(ABCD) = P(ABD) + P(BCD) = \frac{3\cdot 2\sin\gamma}{2} + \frac{4\cdot 5\sin 60^\circ}{2},$$

pa je

$$\begin{aligned} 7r &= \sqrt{5} + 5\sqrt{3} \\ r &= \frac{\sqrt{5}+5\sqrt{3}}{7}\ \text{dm}. \end{aligned}$$

Omjer traženih površina iznosi

$$\frac{7r - r^2\pi}{r^2\pi} = \frac{7}{r\pi} - 1 = \frac{7}{\pi}\cdot\frac{7}{\sqrt{5}+5\sqrt{3}} - 1 = \frac{7}{10\pi}\left(5\sqrt{3}-\sqrt{5}\right) - 1.$$

Napomena. Polumjer možemo izračunati i bez površina.

Iz $\triangle AEO$ je $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{r}{x}$, $x = r\sqrt{3}$,

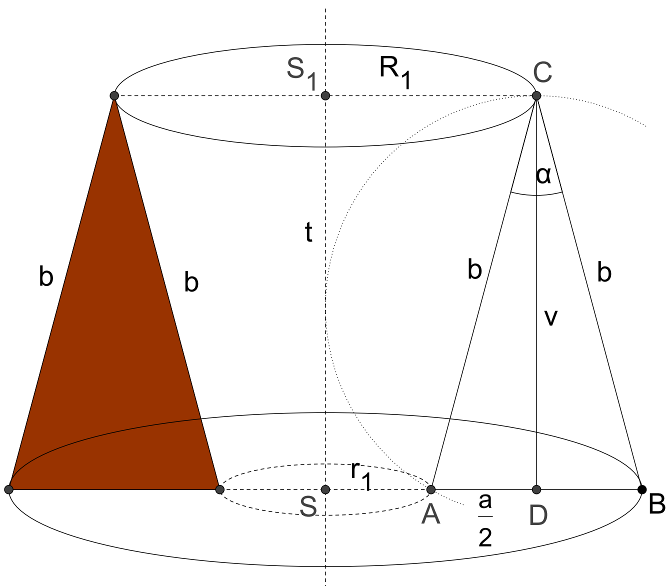
$$\begin{aligned} y &= 5 - r\sqrt{3} \\ \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} &= \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma}} = \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Iz $\triangle OGC$ je $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{z}$, $z = \frac{r\sqrt{5}}{5}$.

$$\begin{aligned} z &= 3 - y = 3 - (5 - r\sqrt{3}) = r\sqrt{3} - 2 \\ \frac{r\sqrt{5}}{5} &= r\sqrt{3} - 2, \\ r &= \frac{10}{5\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{3}+\sqrt{5}}{7}\ \text{dm}. \end{aligned}$$

Zadatak B-3.5. Jednakokračnom trokutu kojemu je duljina kraka $b = 10$ cm, a mjera kuta između krakova $\alpha = 30°$, opisana je kružnica. Neka je t tangenta te kružnice koja je paralelna s visinom na osnovicu. Izračunajte obujam tijela koje nastaje rotacijom danog trokuta oko tangente t.

Rješenje.



Volumen većeg krnjeg stošca je

$$V_1 = \frac{v\pi}{3}\left[\left(R_1 + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(R_1 + \frac{a}{2}\right)R_1 + R_1^2\right].$$

Volumen manjeg krnjeg stošca je

$$V_2 = \frac{v\pi}{3}\left[R_1^2 + R_1\left(R_1 - \frac{a}{2}\right) + \left(R_1 - \frac{a}{2}\right)^2\right].$$

Volumen rotacijskog tijela je

$$\begin{aligned}
V &= V_1 - V_2 = \\
&= \frac{v\pi}{3}\left[\left(R_1 + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(R_1 + \frac{a}{2}\right)R_1 + R_1^2\right] - \frac{v\pi}{3}\left[R_1^2 + R_1\left(R_1 - \frac{a}{2}\right) + \left(R_1 - \frac{a}{2}\right)^2\right] = \\
&= avR_1\pi.
\end{aligned}$$

Iz pravokutnog trokuta BCD računamo osnovicu i visinu danog jednakokračnog trokuta

$$a = 2b\sin\frac{\alpha}{2} = 20\sin 15^\circ \text{ cm}, \quad v = 10\cos 15^\circ \text{ cm}$$

Polumjer opisane kružnice je $R_1 = \dfrac{a}{2\sin 30^\circ} = 20\sin 15^\circ$ (ili $R_1 = \frac{a \cdot b \cdot b}{4P} = 20\sin 15^\circ$, gdje je $P = \frac{1}{2}b^2 \sin 30^\circ = 25\ \text{cm}^2$).

$$V = avR_1\pi = 20\sin 15^\circ \cdot 10\cos 15^\circ \cdot 20\sin 15^\circ\pi = 1000\sin 15^\circ\pi$$

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{ili} \quad \sin 15^\circ = \sin\frac{30^\circ}{2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$V = 250(\sqrt{6}-\sqrt{2})\pi\ \text{cm}^3.$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

Poreč, 26. travnja 2012.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1. Ako je

$$f\left(\log_3 x\right)=\frac{\log_3 \frac{9}{x^4}}{\log_{0.\dot{3}} x-\log_{\sqrt{3}} x} \quad \text{i} \quad (f \circ g)(x)=e^x,$$

koliko je $g(\ln 2)$?

Rješenje. Zapišimo izraz

$$f\left(\log_3 x\right)=\frac{\log_3 \frac{9}{x^4}}{\log_{0.\dot{3}} x-\log_{\sqrt{3}} x}$$

u jednostavnijem obliku.

$$f\left(\log_3 x\right)=\frac{\log_3 9-\log_3 x^4}{\log_{3^{-1}} x-\log_{3^{\frac{1}{2}}} x}=\frac{2-4 \log_3 x}{-\log_3 x-2 \log_3 x}.$$

Stavimo li $\log_3 x=t$, slijedi

$$f(t)=\frac{2-4 t}{-3 t} \quad \text{ili} \quad f(x)=\frac{4 x-2}{3 x}.$$

Ako je

$$(f \circ g)(x)=\frac{4 \cdot g(x)-2}{3 g(x)},$$

rješenje jednadžbe

$$\frac{4 \cdot g(x)-2}{3 g(x)}=e^x$$

je funkcija $g(x)$,

$$g(x)=\frac{2}{4-3 e^x}.$$

Tada je

$$g(\ln 2)=\frac{2}{4-6}=-1.$$

Zadatak B-4.2. Ako je $z+z^{-1}=2\cos\dfrac{\alpha}{2012}$, odredite α za koji je $z^{2012}+z^{-2012}=1$.

Rješenje. Riješimo jednadžbu

$$z+z^{-1}=2\cos\frac{\alpha}{2012}.$$

$$z^2-2z\cdot\cos\frac{\alpha}{2012}+1=0$$

$$z_{1,2}=\cos\frac{\alpha}{2012}\pm i\sin\frac{\alpha}{2012}.$$

Tada je

$$\frac{1}{z_1}=\cos\frac{\alpha}{2012}-i\sin\frac{\alpha}{2012}\quad\text{i}\quad\frac{1}{z_2}=\cos\frac{\alpha}{2012}+i\sin\frac{\alpha}{2012}.$$

$$z^{2012}+z^{-2012}=2\cos\alpha$$

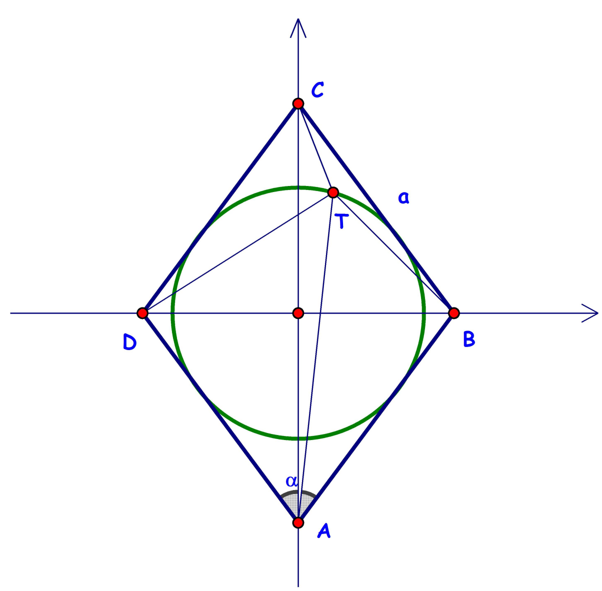
$$2\cos\alpha=1$$

i konačno

$$\alpha=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Zadatak B-4.3. U romb, kojemu je duljina stranice a i mjera šiljastog kuta α, upisana je kružnica. Dokažite da je zbroj kvadrata udaljenosti od proizvoljne točke kružnice do vrhova romba konstanta. Koliko ona iznosi?

Prvo rješenje.



Smjestimo romb u koordinatni sustav tako da su mu vrhovi na koordinatnim osima, a sjecište dijagonala u ishodištu. Vrhovi romba su točke $A(0,-c)$, $B(b,0)$, $C(0,c)$, $D(-b,0)$, a proizvoljna točka kružnice je $T(x,y)$. Tada je

$$\begin{aligned}
&d^2(A,T)+d^2(B,T)+d^2(C,T)+d^2(D,T)= \\
&\quad=(x-0)^2+(y+c)^2+(x-b)^2+(y-0)^2+(x-0)^2+(y-c)^2+(x+b)^2+(y-0)^2 \\
&\quad=4x^2+4y^2+2c^2+2b^2 \\
&\quad=4r^2+2(c^2+b^2).
\end{aligned}$$

Kako su c i b polovine dijagonala romba, po Pitagorinom poučku je $c^2+b^2=a^2$.

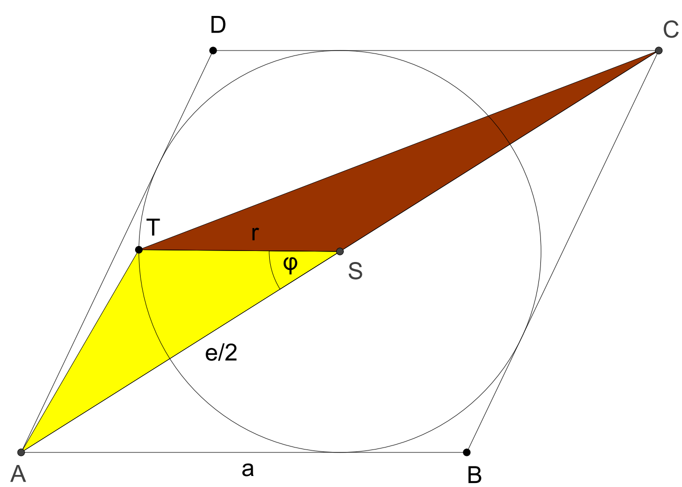
Polumjer upisane kružnice je polovina visine romba, $r=\frac{1}{2}v_a=\frac{1}{2}a\sin\alpha$,

ili računamo iz površine

$$2ar=a^2\sin\alpha, \quad r=\frac{1}{2}a\sin\alpha.$$

Konačno, zbroj kvadrata udaljenosti jednak je $a^2\sin^2\alpha+2a^2$, što je konstantna veličina.

Drugo rješenje.



Po poučku o kosinusu, iz trokuta AST je

$$d^2(A,T)=r^2+\left(\frac{e}{2}\right)^2-2r\frac{e}{2}\cos\varphi,$$

a iz trokuta TSC

$$d^2(T,C)=r^2+\left(\frac{e}{2}\right)^2-2r\frac{e}{2}\cos\left(180^\circ-\varphi\right).$$

Zbrojimo li ove dvije jednakosti, slijedi

$$d^2(A,T)+d^2(T,C)=r^2+\left(\frac{e}{2}\right)^2-2r\frac{e}{2}\cos\varphi+r^2+\left(\frac{e}{2}\right)^2-2r\frac{e}{2}\cos\left(180^\circ-\varphi\right)=2r^2+2\left(\frac{e}{2}\right)^2.$$

Analogno je

$$d^2(B,T)+d^2(T,D)=2r^2+2\left(\frac{f}{2}\right)^2,$$

gdje je f druga dijagonala romba.

Zato je

$$d^2(A,T) + d^2(T,C) + d^2(B,T) + d^2(T,D) = 4r^2 + 2\left(\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2\right) = a^2 \sin^2 \alpha + 2a^2.$$

Zadatak B-4.4. Odredite sve vrijednosti realnog parametra p za koje jednadžba $x^4 - (3p+2)x^2 + p^2 = 0$ ima četiri rješenja koja čine četiri uzastopna člana aritmetičkog niza.

Rješenje. Kako je jednadžba bikvadratna, njezina su rješenja x_1, $-x_1$, x_2 i $-x_2$ (simetrična u odnosu na ishodište). Neka su x_1 i x_2 pozitivni realni brojevi i neka je $x_1 < x_2$. Tada je redoslijed članova niza (od najmanjeg) $-x_2$, $-x_1$, x_1, x_2.

Slijedi $x_1 = -x_1 + d$ ili $x_1 = \frac{1}{2}d$.

Tada je $x_2 = x_1 + d = \frac{3}{2}d$, a $-x_2 = -\frac{3}{2}d$.

Dani je niz oblika $-\dfrac{3}{2}d$, $-\dfrac{1}{2}d$, $\dfrac{1}{2}d$, $\dfrac{3}{2}d$.

Stavimo li $t = x^2$ u danoj jednadžbi dobivamo $t^2 - (3p+2)t + p^2 = 0$.

Iz prethodnih razmatranja zaključujemo da su njezina rješenja $t_1 = \frac{1}{4}d^2$, $t_2 = \frac{9}{4}d^2$.

Koristeći Vieteove formule slijede jednakosti

$$\frac{1}{4}d^2 + \frac{9}{4}d^2 = 3p + 2, \quad \text{odnosno} \quad \frac{5}{2}d^2 = 3p + 2$$

$$\frac{1}{4}d^2 \cdot \frac{9}{4}d^2 = p^2, \quad \text{odnosno} \quad \frac{9}{16}d^4 = p^2.$$

Iz druge jednakosti je

$$d^2 = \frac{4}{3}|p|,$$

što s prvom jednakošću daje jednadžbu

$$\frac{10}{3}|p| = 3p + 2.$$

Tada je

$$\text{za } p \geq 0 \text{ je } 10p = 9p + 6, \text{ a } p = 6;$$

$$\text{za } p < 0 \text{ je } -10p = 9p + 6 \text{ i } p = -\frac{6}{19}.$$

Zadatak B-4.5. U utrci je sudjelovalo 100 ljudi i nikoje dvoje nije utrku završilo s istim vremenom. Svakom je natjecatelju na kraju utrke postavljeno pitanje na kojem je mjestu završio utrku i svi su odgovorili brojem između 1 i 100.

Zbroj svih odgovora iznosi 4000. Koji je najmanji broj krivih odgovora koje su trkači mogli dati? Obrazložite.

Rješenje. Da su svi trkači točno odgovorili na kojem mjestu su završili utrku, zbroj njihovih odgovora bi iznosio

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 100 = 5050.$$

Dakle, neki ljudi su preuveličali svoj rezultat, a najmanji broj krivih odgovora se postiže tako da trkači na zadnjim pozicijama kažu da su bili prvi.

Ako je n ljudi sa kraja poretka lagalo da su bili prvi, zbroj odgovora je

$$1 + 2 + \ldots + (100 - n) + 1 + 1 + \ldots + 1 = \frac{(100 - n)(100 - n + 1)}{2} + n.$$

Neposrednom provjerom možemo utvrditi da je za $n = 11$ zbroj jednak 4016 što je veće od 4000, a za $n = 12$ zbroj iznosi 3928.

Dakle, da bi zbroj iznosio točno 4000, uz najmanji broj krivih odgovora, potrebno je da 11 ljudi s kraja poretka kaže da su bili prvi i s obzirom da je razlika do 4016 jednaka 16, dovoljno je da trkač s rednim brojem 17 kaže da je bio prvi.

Dakle, minimalno 12 trkača je dalo krivi odgovor.