ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

26. siječnja 2017.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-1.1.

U jezeru žive crvene i žute ribe. Dvije petine ukupnog broja riba su žute, a ostale su crvene. Tri četvrtine žutih riba su ženke. Ako je poznato da je ukupan broj ženki jednak ukupnom broju mužjaka u jezeru, koliki je udio crvenih mužjaka među svim ribama u jezeru?

Prvo rješenje.

Udio žutih mužjaka među svim ribama je $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$. 3 boda

Zato je udio crvenih mužjaka $\frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$. 3 boda

Drugo rješenje.

Udio žutih ženki među svim ribama je $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$. 2 boda

Zato je udio crvenih ženki $\frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{1}{5}$. 2 boda

Konačno, udio crvenih mužjaka je $\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$. 2 boda

Treće rješenje.

Sljedeća tablica prikazuje ukupne udjele riba:

	žute	crvene	
muške	A	B	50%
ženske	C	D	50%
	40%	60%	

pri čemu vrijedi

$$A + B = 50\%, \quad C + D = 50\%, \quad A + C = 40\%, \quad B + D = 60\%.$$ 1 bod

Također vrijedi $A : C = 1 : 3$, tj. $C = 3A$. 1 bod

Zato je $A = \frac{1}{4} \cdot 40\% = 10\%$ i $C = \frac{3}{4} \cdot 60\% = 30\%$. 2 boda

Treba odrediti B. Slijedi da je $B = 50\% - A = 40\%$. 2 boda

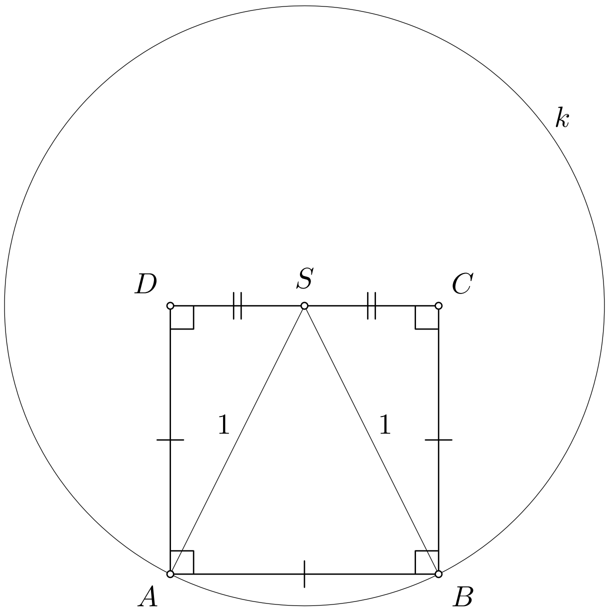
	žute	crvene	
muške	10%	40%	50%
ženske	30%	20%	50%
	40%	60%	

Zadatak A-1.2.

Neka je S središte kružnice k polumjera duljine 1. Vrhovi A i B kvadrata $ABCD$ leže na kružnici k, a stranica $\overline{CD}$ prolazi točkom S. Odredi duljinu stranice kvadrata $ABCD$.

Rješenje.

Budući da su točke A i B na kružnici k, njezino središte S se nalazi na simetrali dužine $\overline{AB}$. To znači da je točka S polovište stranice $\overline{CD}$. 2 boda



Prema Pitagorinom poučku vrijedi $|AS|^2 = |AD|^2 + |DS|^2$. 1 bod

Neka je a duljina stranice kvadrata $ABCD$. Tada je $|SD| = \frac{1}{2}a$ i $|AD| = a$. Budući da je $|AS| = 1$, vrijedi

$$1 = 1^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}a^2. \qquad \text{2 boda}$$

Dakle, duljina stranice kvadrata $ABCD$ je $a = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. 1 bod

Zadatak A-1.3.

Odredi znamenke a i b tako da broj $\overline{a2017b}$ bude djeljiv brojem 72.

Prvo rješenje.

Broj je djeljiv sa 72 ako i samo ako je djeljiv sa 8 i 9.

Broj je djeljiv s 8 ako i samo ako zadnje tri znamenke tog broja čine broj djeljiv s 8. Zato je zadani broj djeljiv s 8 ako i samo ako je $b = 6$. 2 boda

Broj je djeljiv s 9 ako i samo ako mu je zbroj svih znamenaka djeljiv s 9. Budući da je $a + 2 + 0 + 1 + 7 + 6 = 16 + a$, broj $\overline{a20176}$ je djeljiv s 9 ako i samo ako je $a = 2$. 4 boda

Drugo rješenje.

Zadani broj mora biti djeljiv s 9.

Broj je djeljiv s 9 ako i samo ako mu je zbroj svih znamenaka djeljiv s 9. Budući da je $a+2+0+1+7+b=a+b+10$, mora vrijediti $a+b=8$ ili $a+b=17$. 2 boda

Zadani broj mora biti paran, pa b mora biti paran. Zato su mogućnosti:

b	8	0	2	4	6
a	9	8	6	4	2

1 bod

Brojevi 920178, 820170 i 420174 nisu djeljivi s 4. 1 bod

Direktnom provjerom (dijeljenjem) vidimo da broj 620172 nije djeljiv sa 8. 1 bod

Također, direktnom provjerom vidimo da je 220176 djeljiv brojem 8. 1 bod

Dakle, odgovor je $a=2$ i $b=6$.

Napomena: Ako učenik previdom ispusti jednu od pet navedenih mogućnosti, treba izgubiti po 1 bod za svaku ispuštenu mogućnost.

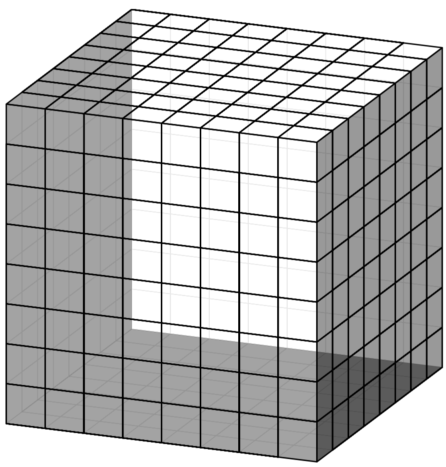
Napomena: Učenik koji napiše da je traženi par $a=2$ i $b=6$ bez obrazloženja treba dobiti 1 bod, bez obzira je li direktna provjera napravljena na testu ili nije.

Zadatak A-1.4.

Od 512 malih sivih kockica sastavljena je kocka $8\times 8\times 8$, a zatim su tri strane te kocke obojane bijelom bojom, a preostale tri strane crvenom bojom. Ako svaka od osam malih kockica u vrhovima velike kocke ima barem jednu bijelu i barem jednu crvenu stranu, koliko je ukupno malih kockica koje imaju barem jednu crvenu i barem jednu bijelu stranu?

Prvo rješenje.

Kocka ima tri para nasuprotnih strana. Ako bismo u svakom paru imali po jednu bijelu i jednu crvenu stranu, onda bi se tri bijele strane sastajale u nekom vrhu kocke i ne bi vrijedio uvjet zadatka. Zato postoji točno jedan par nasuprotnih crvenih strana kocke i točno jedan par bijelih. Do na rotaciju, kocka izgleda kao na slici. 2 boda



Tražene kockice su na bridovima u kojima se spajaju crvene i bijele strane. Takvih bridova ima 8 i povezani su u jednu liniju. Na svakom bridu je 8 kockica, i po dva brida imaju jednu zajedničku kockicu u vrhovima kocke. Dakle, ukupno je $64 - 8 = 56$ kockica obojano s obje boje. 4 boda

Drugo rješenje.

Promotrimo gornji lijevi vrh prednje strane kocke. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da se u tom vrhu sastaju dvije bijele i jedna crvena strane kocke. Također, možemo pretpostaviti da je lijeva strana kocke crvena (te su prednja i gornja strana kocke bijele). Gornji desni vrh prednje strane kocke također mora imati barem jednu crvenu stranu. Zato desna strana kocke mora biti crvena. Stražnja i donja strana kocke moraju bit različite boje, pa kocka do na rotaciju izgleda kao na slici. 2 boda

Tražene kockice su na bridovima u kojima se spajaju crvene i bijele strane. Imamo četiri horizontalna i četiri vertikalna brida. Na četiri horizontalna brida imamo $4 \cdot 8 = 32$ kockice, a na četiri vertikalna brida imamo još $4 \cdot 6 = 24$ kockice koje nisu na horizontalnim bridovima. Zato je ukupan broj traženih kockica 56. 4 boda

Treće rješenje.

Kao u prethodnom rješenju pokažemo da kocka do na rotaciju izgleda kao na slici. 2 boda

Na lijevoj strani imamo $8 + 7 + 7 = 22$ tražene kockice. Analogno, na desnoj strani imamo 22 tražene kockice. Na donjoj strani imamo $8 + 8 = 16$ traženih kockica. Dva puta smo brojali 4 kockice koje su na dvije crvene strane (u vrhovima donje strane kocke). Zato je ukupan broj traženih kockica $22 + 22 + 16 - 4 = 56$. 4 boda

Napomena: Bez obzira na pristup, učenik koji zbog računske greške ne dobije točan rezultat može dobiti najviše 5 bodova, a učenik koji zbog sustavne greške (na primjer, pri prebrojavanju ne oduzima broj kockica koje se višestruko broje) može dobiti najviše 4 boda.

Zadatak A-1.5.

Neka su x i y međusobno različiti realni brojevi takvi da vrijedi

$$x + 4 = (y - 2)^2 \quad \text{i} \quad y + 4 = (x - 2)^2.$$

Odredi $x^2 + y^2$.

Prvo rješenje.

Koristeći formulu za kvadrat binoma jednadžbe možemo zapisati na sljedeći način

$$x = y^2 - 4y \quad \text{i} \quad y = x^2 - 4x.$$

Oduzmemo li ove dvije jednadžbe, dobivamo

$$x - y = y^2 - x^2 - 4y + 4x.$$ 1 bod

Primijenimo li formulu za rastav kvadrata, dobivamo

$$x - y = (y - x)(y + x) - 4(y - x).$$

Budući da je $x \neq y$, smijemo dijeliti s $x - y$ i dobivamo $x + y = 3$. 2 boda

Zbrojimo li jednadžbe $x = y^2 - 4y$ i $y = x^2 - 4x$, dobivamo

$$x + y = y^2 - 4y + x^2 - 4x, \quad \text{1 bod}$$

tj. $x^2 + y^2 = 5(x + y)$. 1 bod

Zaključujemo da je $x^2 + y^2 = 5 \cdot 3 = 15$. 1 bod

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju pokažemo da je $x + y = 3$. 3 boda

Uvrstimo li $x = 3 - y$ u prvu jednadžbu, dobivamo $7 - y = (y - 2)^2$, tj. $y^2 - 3y - 3 = 0$. Zbog simetrije sustava, analogno izvodimo $x^2 - 3x - 3 = 0$. 1 bod

Zbrajanjem ovih jednadžbi dobivamo

$$x^2 + y^2 - 3(x + y) - 6 = 0, \quad \text{1 bod}$$

tj. $x^2 + y^2 = 3(x + y) + 6 = 3 \cdot 3 + 6 = 15$. 1 bod

Napomena: Navodimo još i rješenja u kojima se koriste rezultati o kvadratnim jednadžbama koji se redovno obrađuju na nastavi u 2. razredu.

Jednom kad utvrdimo da je $x + y = 3$ (3 boda) i da x i y zadovoljavaju jednadžbu $t^2 - 3t - 3 = 0$ (1 bod), prema Vièteovim formulama zaključujemo $xy = -3$ (1 bod). Tada slijedi $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 3^2 + 2 \cdot 3 = 15$ (1 bod).

Jednom kad utvrdimo da je $x + y = 3$ (3 boda) i da x i y zadovoljavaju jednadžbu $t^2 - 3t - 3 = 0$ (1 bod), koristeći formulu za rješenja kvadratne jednadžbe određujemo da x i y moraju biti brojevi $\frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$ (1 bod). Sada računamo

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \left(\frac{3 + \sqrt{21}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3 - \sqrt{21}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{9 + 6\sqrt{21} + 21 + 9 - 6\sqrt{21} + 21}{4} = 15. \quad \text{(1 bod)} \end{aligned}$$

Zadatak A-1.6.

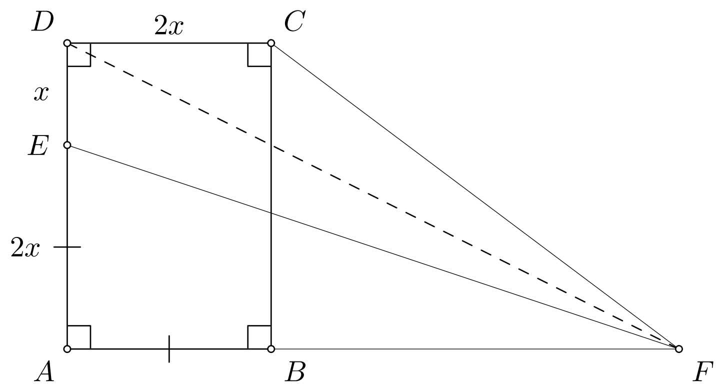
Neka je $ABCD$ pravokutnik takav da je $|AB| : |AD| = 2 : 3$ i neka je točka E na stranici $\overline{AD}$ takva da je $|AE| = |AB|$. Točka F odabrana je na polupravcu AB tako da trokut AFE i četverokut $CDEF$ imaju jednake površine. Odredi omjer $|AB| : |BF|$.

Prvo rješenje.

Iz $|AE| = |AB|$ i $|AB| : |AD| = 2 : 3$ slijedi $|AE| : |ED| = 2 : 1$. Trokuti AEF i DEF imaju jednake visine, pa slijedi $P(AEF) = 2P(DEF)$. Budući da je

$$2P(DEF) = P(AEF) = P(CDEF) = P(DEF) + P(CDF),$$

slijedi da je $P(DEF) = P(CDF)$. 4 boda



Neka je $|DE| = x$. Tada je $|DC| = 2x$ i duljina visine iz vrha F u trokutu CDF je $3x$. Zato je

$$P(CDF) = \frac{2x \cdot 3x}{2} = 3x^2.$$ 2 boda

S druge strane imamo

$$P(DEF) = \frac{x \cdot |AF|}{2}.$$ 1 bod

Izjednačavanjem slijedi

$$\frac{x \cdot |AF|}{2} = P(DEF) = P(CDF) = 3x^2,$$

odakle dobivamo $|AF| = 6x$. 2 boda

Sada imamo $|BF| = |AF| - |AB| = 4x$ i $|AB| : |BF| = 2x : 4x = 1 : 2$. 1 bod

Napomena: Nakon što pokažemo da je $P(DEF) = P(CDF) = 3x^2$ (2 boda), možemo zaključiti da je $P(AEF) = 2P(CDF)$ (1 bod). Sada slijedi

$$6x^2 = 2P(CDF) = P(AEF) = \frac{2x \cdot |AF|}{2} \quad \text{(1 bod)},$$

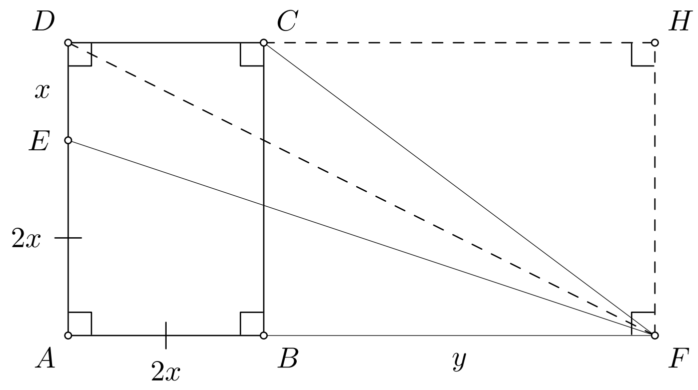
tj. $|AF| = 6x$ (1 bod) i $|AB| : |BF| = 1 : 2$ (1 bod).

Drugo rješenje.

Označimo $|DE| = x$, $|BF| = y$. Budući da je $|AE| = |AB|$ i $|AB| : |AD| = 2 : 3$, slijedi da je $|AB| = |AE| = 2x$. Površina trokuta AEF iznosi

$$P(AEF) = \frac{2x \cdot (2x+y)}{2} = x(2x+y).$$ 2 boda

Neka je točka H takva da je $AFHD$ pravokutnik. Tada je površina četverokuta $DEFH$ zbroj površina četverokuta $CDEF$ i trokuta CFH.



Površina trokuta CFH iznosi

$$P(CFH) = \frac{3x \cdot y}{2},$$ 1 bod

a površina trapeza $DEFH$ iznosi

$$P(DEFH) = \frac{x+3x}{2} \cdot (2x+y) = 2x(2x+y).$$ 2 boda

Slijedi

$$P(CDEF) = P(DEFH) - P(CFH) = 2x(2x+y) - \frac{3}{2}xy.$$ 2 boda

Izjednačavanjem dobivamo

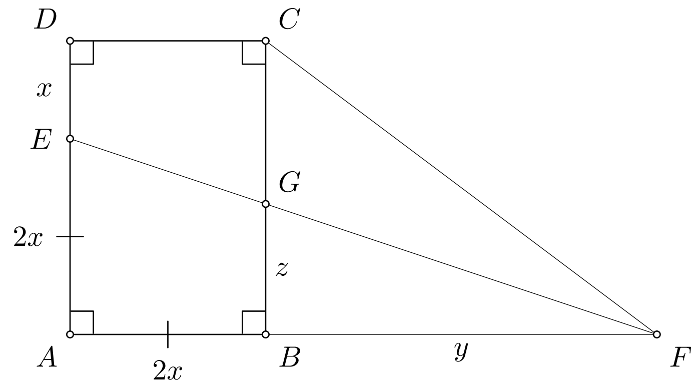
$$x(2x+y) = P(AEF) = P(CDEF) = 4x^2 + \frac{1}{2}xy,$$

iz čega slijedi $y = 4x$. 2 boda

Dakle, $|AB| : |BF| = 2x : 4x = 1 : 2$. 1 bod

Treće rješenje.

Neka EF siječe BC u točki G. Označimo $|DE| = x$, $|BF| = y$ i $|BG| = z$. Budući da je $|AE| = |AB|$ i $|AB| : |AD| = 2 : 3$, slijedi da je $|AB| = |AE| = 2x$.



Pravokutni trokuti AEF i BGF su slični, pa vrijedi

$$\frac{z}{2x} = \frac{y}{2x+y}, \qquad \text{tj.} \quad z = \frac{2xy}{2x+y}.$$ 2 boda

Površina trokuta AEF iznosi

$$P(AEF) = \frac{2x \cdot (2x+y)}{2} = x(2x+y).$$ 2 boda

Četverokut $CDEF$ možemo rastaviti na trapez $CDEG$ i trokut CGF. Tada je

$$P(CDEF) = \frac{x + 3x - z}{2} \cdot 2x + \frac{(3x-z) \cdot y}{2}.$$ 2 boda

Sređivanjem i uvrštavanjem dobivenog izraza za z, slijedi

$$P(CDEF) = 4x^2 + \frac{3}{2}xy + \frac{1}{2}z(2x+y) = 4x^2 + \frac{1}{2}xy.$$ 1 bod

Izjednačavanjem dobivamo

$$2x^2 + xy = P(AEF) = P(CDEF) = 4x^2 + \frac{1}{2}xy,$$

odakle slijedi $y = 4x$. 2 boda

Dakle, $|AB| : |BF| = 2x : 4x = 1 : 2$. 1 bod

Napomena: Načelno, za pristup sličan kao u drugom ili trećem rješenju, učenik treba dobiti 2 boda za $P(AEF) = x(2x+y)$, 5 bodova za $P(CDEF) = 4x^2 + \frac{1}{2}xy$, 2 boda za $y = 4x$ i 1 bod za konačan odgovor.

Zadatak A-1.7.

Dokaži da među bilo koja tri prirodna broja možemo odabrati dva, nazovimo ih a i b, tako da broj $a^3b - ab^3$ bude djeljiv brojem 10.

Rješenje.

Ako je barem jedan od brojeva a i b paran, onda je izraz $a^3b - ab^3$ razlika dva parna broja. Ako su a i b oba neparni, onda je taj izraz razlika dva neparna broja. Dakle, broj $a^3b - ab^3$ je paran za bilo koje prirodne brojeve a i b. 2 boda

Ako među dana tri broja postoji jedan koji je djeljiv s 5, onda možemo odabrati taj broj i bilo koji drugi broj iz trojke i zadani izraz će biti djeljiv s 5. Zato možemo pretpostaviti da nijedan od dana tri broja nije djeljiv s 5. 1 bod

Uočimo da je

$$a^3b - ab^3 = ab(a^2 - b^2) = ab(a-b)(a+b).$$ 1 bod

Sve ostatke pri dijeljenju s 5 (različite od 0) možemo podijeliti u dvije grupe: $\{1,4\}$ i $\{2,3\}$. Budući da imamo tri broja, među njima (po Dirichletovom principu) moraju biti dva koji imaju ostatke iz iste grupe. Neka su to a i b. Ako a i b daju isti ostatak, onda je $a - b$ djeljiv s 5. Ako a i b daju različite ostatke, onda je $a + b$ djeljiv s 5. U oba slučaja zaključujemo da je izraz $ab(a-b)(a+b)$ djeljiv s 5. 6 bodova

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

26. siječnja 2017.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-2.1.

Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi $z^3 = \overline{z}$.

Prvo rješenje.

Primijenimo li modul na zadanu jednadžbu, dobivamo

$$|z|^3 = |z^3| = |\overline{z}| = |z|.$$ 1 bod

Iz $|z|(|z|^2 - 1) = 0$, zaključujemo da je $|z| = 0$ ili $|z| = 1$.

Ako je $|z| = 0$, onda je $z = 0$. To je očito jedno rješenje početne jednadžbe. 1 bod

Dalje rješavamo početnu jednadžbu uz uvjet $|z| = 1$. Množenjem sa z dobivamo $z^4 = z\overline{z}$. 1 bod

Kako je $|z| = 1$, vrijedi

$$z^4 = \overline{z}z = |z|^2 = 1.$$ 1 bod

Rješenja jednadžbe $z^4 = 1$ su: $1, -1, i, -i$. 1 bod

Budući da je $|z| = 1$ rješenja jednadžbe $z^4 = 1$ su i rješenja jednadžbe $z^4 = z\overline{z}$, a budući da je $z \neq 0$ to su i rješenja jednažbe $z^3 = \overline{z}$. 1 bod

Dakle, rješenja su $0, 1, i, -1, -i$.

Napomena: Umjesto komentara da su rješenja jednadžbe $z^4 = 1$ zaista rješenja početne jednažbe, provjeru možemo napraviti uvrštavanjem rješenja u početnu jednadžbu.

Drugo rješenje.

Uvrstimo li $z = a + bi$ (za $a, b \in \mathbb{R}$) i primijenimo formulu za kub binoma, dobivamo

$$a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i = a - bi.$$ 1 bod

Izjednačavanjem realnih i imaginarnih dijelova dobivamo

$$a^3 - 3ab^2 = a, \qquad 3a^2b - b^3 = -b.$$ 1 bod

Zapišemo li sustav na sljedeći način

$$a(a^2 - 3b^2 - 1) = 0, \qquad b(3a^2 - b^2 + 1) = 0.$$

dobivamo 4 slučaja:

- Ako je $a = 0$, $b = 0$, imamo rješenje $z = 0$. 1 bod
- Ako je $a = 0$, $b \neq 0$, imamo $3a^2 - b^2 + 1 = 0$, tj. $b^2 = 1$. Dobili smo dva rješenja $z = i$, $z = -i$. 1 bod
- Ako je $a \neq 0$, $b = 0$, imamo $a^2 - 3b^2 - 1 = 0$, tj. $a^2 = 1$. Dobili smo dva rješenja $z = 1$ i $z = -1$. 1 bod
- Ako je $a \neq 0$ i $b \neq 0$, imamo $a^2 - 3b^2 = 1$ i $3a^2 - b^2 = -1$. Zbrajanjem dobivamo $4a^2 = 4b^2$, tj. $a^2 = b^2$, što uvrštavanjem u prvu jednadžbu daje

  $$1 = a^2 - 3b^2 = -2a^2,$$

  što nije moguće jer su a i b realni brojevi. U ovom slučaju nema rješenja. 1 bod

Dakle, rješenja su 0, 1, i, -1, $-i$.

Zadatak A-2.2.

Odredi skup svih realnih brojeva a za koje jednadžba

$$x^2 - (5-a)x + a^2 - 11a - 46 = 0$$

ima dva realna rješenja od kojih je jedno manje od 2, a drugo veće od 2.

Prvo rješenje.

Neka je $f(x) = x^2 - (5-a)x + a^2 - 11a - 46$.

Budući da je vodeći koeficijent pozitivan, vrijednost funkcije $f(x)$ je pozitivna za dovoljno velike pozitivne brojeve x (to jest, graf funkcije f je parabola koja je "otvorena prema gore"). Zato uvjet zadatka glasi $f(2) < 0$. 3 boda

Budući da je $f(2) = 4 - (5-a) \cdot 2 + a^2 - 11a - 46 = a^2 - 9a - 52$, mora vrijediti

$$a^2 - 9a - 52 < 0.$$ 1 bod

Budući da su $a_1 = -4$ i $a_2 = 13$ rješenja kvadratne jednadžbe $a^2 - 9a - 52 = 0$, 1 bod

traženi skup je $\langle -4, 13 \rangle$. 1 bod

Drugo rješenje.

Neka je $D = (5-a)^2 - 4(a^2 - 11a - 46) = -3a^2 + 34a + 209$.

Tada su rješenja zadane jednadžbe

$$x_{1,2} = \frac{5 - a \pm \sqrt{D}}{2}.$$ 1 bod

Uvjet zadatka glasi $x_1 < 2 < x_2$, što je ekvivalentno

$$-\sqrt{D} < 4 + a - 5 < \sqrt{D}.$$ 1 bod

Dakle, vrijedi

$$(a-1)^2 < D = -3a^2 + 34a + 209,$$ 1 bod

tj.

$$a^2 - 9a - 52 < 0.$$ 1 bod

Budući da su $a_1 = -4$ i $a_2 = 13$ rješenja kvadratne jednadžbe $a^2 - 9a - 52 = 0$, 1 bod

traženi skup je $\langle -4, 13 \rangle$. 1 bod

Zadatak A-2.3.

Neka su a i b prirodni brojevi takvi da je $8a^2 + 1 = b^2$. Dokaži da je broj ab djeljiv s 3.

Prvo rješenje.

Broj ab je djeljiv s 3 ako i samo ako je barem jedan od brojeva a ili b djeljiv s 3. Pretpostavimo suprotno da a i b nisu djeljivi s 3. 1 bod

Ako x nije djeljiv s 3, onda x^2 daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3. 2 boda

(Zaista, $(3k \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1$.)

Zato b^2 daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3, a $8a^2 + 1$ daje ostatak 0 pri dijeljenju s 3. To je kontradikcija s $b^2 = 8a^2 + 1$. 3 boda

Dakle, početna pretpostavka je kriva, tj. ab je djeljiv s 3.

Drugo rješenje.

Imamo dva slučaja: a je ili nije djeljiv s 3. Ako je a djeljiv s 3, tvrdnja vrijedi. 1 bod

Ako a nije djeljiv s 3, onda je $a = 3k \pm 1$, pa vrijedi

$$b^2 = 8a^2 + 1 = 8(9k^2 \pm 6k + 1) + 1 = 3(8 \cdot 3k^2 \pm 8 \cdot 2k + 3),$$

pa je u tom slučaju b^2 djeljiv s 3. 4 boda

To je moguće samo ako je b djeljiv s 3, pa je i u ovom slučaju ab djeljiv s 3. 1 bod

Zadatak A-2.4.

Neka su $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ promjeri kružnice k sa središtem S i neka je $\sphericalangle BAD = 28^\circ$. Kružnica sa središtem A koja prolazi kroz točku S siječe kružnicu k u točkama E i F, pri čemu su D i F s iste strane pravca AB. Odredi $\sphericalangle CFS$.

Prvo rješenje.

Trokut AFS je jednakostraničan, pa vrijedi $\sphericalangle ASF = 60^\circ$. 1 bod

Trokut CSF je jednakokračan, pa vrijedi $\sphericalangle CFS = \sphericalangle SCF$. 1 bod

Budući da su kutovi DCF i DAF obodni nad tetivom $\overline{DF}$, vrijedi

$$\sphericalangle CFS = \sphericalangle DCF = \sphericalangle DAF.$$ 2 boda

Konačno zaključujemo

$$\sphericalangle DAF = \sphericalangle SAF - \sphericalangle BAD = 60^\circ - 28^\circ = 32^\circ.$$ 2 boda

Drugo rješenje.

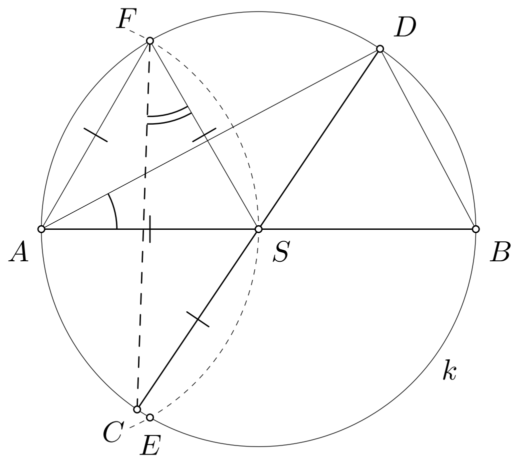
Trokut AFS je jednakostraničan, pa vrijedi $\sphericalangle ASF = 60°$. 1 bod

Budući da je $\sphericalangle BSD$ središnji kut, a $\sphericalangle BAD$ obodni nad tetivom $\overline{BD}$ vrijedi

$$\sphericalangle BSD = 2\sphericalangle BAD = 56°.$$ 2 boda

Uočimo da je trokut CFS jednakokračan, pa je

$$\sphericalangle CFS = \frac{180° - \sphericalangle CSF}{2}.$$ 1 bod



Budući da je $\sphericalangle ASC = \sphericalangle BSD = 56°$, slijedi

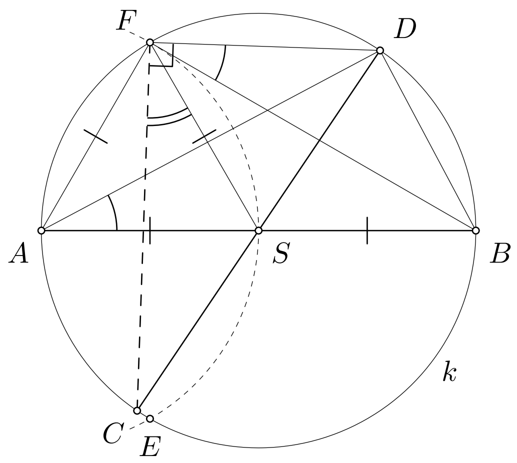
$$\sphericalangle CSF = \sphericalangle ASF + \sphericalangle ASC = 60° + 56° = 116°, \quad \sphericalangle CFS = \frac{180° - \sphericalangle CSF}{2} = 32°.$$ 2 boda

Treće rješenje.

Prema Talesovom poučku vrijedi $\sphericalangle CFD = 90°$. 1 bod

Kutovi $\sphericalangle BFD$ i $\sphericalangle BAD$ su obodni nad istom tetivom, pa je

$$\sphericalangle BFD = \sphericalangle BAD = 28°.$$ 2 boda



Trokut AFS je jednakostraničan, pa vrijedi $\sphericalangle ASF = 60°$ i $\sphericalangle FSB = 120°$. 1 bod

Budući da je trokut BFS jednakokračan, slijedi

$$\sphericalangle BFS = \frac{180° - \sphericalangle FSB}{2} = \frac{180° - 120°}{2} = 30°. \qquad \text{1 bod}$$

Konačno zaključujemo

$$\sphericalangle CFS = \sphericalangle CFD - \sphericalangle BFS - \sphericalangle BFD = 90° - 30° - 28° = 32°. \qquad \text{1 bod}$$

Zadatak A-2.5.

Neka je n prirodni broj. Vrhovi pravilnog $2n$-terokuta naizmjence su obojani crveno i plavo, te su nacrtane sve njegove stranice i dijagonale. Ako je broj dužina koje spajaju vrhove iste boje jednak 3192, odredi broj dužina koje spajaju vrhove različitih boja.

Prvo rješenje.

Broj dužina koje spajaju plave vrhove je $\frac{n(n-1)}{2}$. Isto vrijedi za dužine koje spajaju crvene vrhove, pa iz danog uvjeta slijedi

$$2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n(n-1) = 3192. \qquad \text{2 boda}$$

Rastavljanjem na proste faktore $3192 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19 = 56 \cdot 57$, vidimo da su rješenja dobivene kvadratne jednadžbe $n = 57$ i $n = -56$. Jedino pozitivno rješenje je $n = 57$. 2 boda

Svaka dužina koja spaja vrhove različite boje spaja jedan crveni vrh i jedan plavi vrh. Zato je traženi broj $n \cdot n = 57^2$. 2 boda

Drugo rješenje.

Svaki vrh je spojen s $n - 1$ drugih vrhova iste boje, a svaka dužina spaja dva vrha. Zato je broj dužina koje spajaju vrhove iste boje jednak

$$\frac{2n(n-1)}{2} = n(n-1) = 3192. \qquad \text{2 boda}$$

Dobivena kvadratna jednadžba ima točno jedno pozitivno realno rješenje (i točno jedno negativno rješenje). Budući da je $57 \cdot 56 = 3192$, slijedi da je $n = 57$. 2 boda

Svaki vrh je spojen s n drugih vrhove različite boje. Traženi broj je

$$\frac{2n \cdot n}{2} = n^2 = 57^2 = 3249. \qquad \text{2 boda}$$

Napomena: Učenik mora riješiti kvadratnu jednadžbu $n(n-1) = 3129$ ili na neki drugi način objasniti zašto je 57 jedino moguće rješenje. Bez tog obrazloženja treba dobiti 1 bod manje.

Zadatak A-2.6.

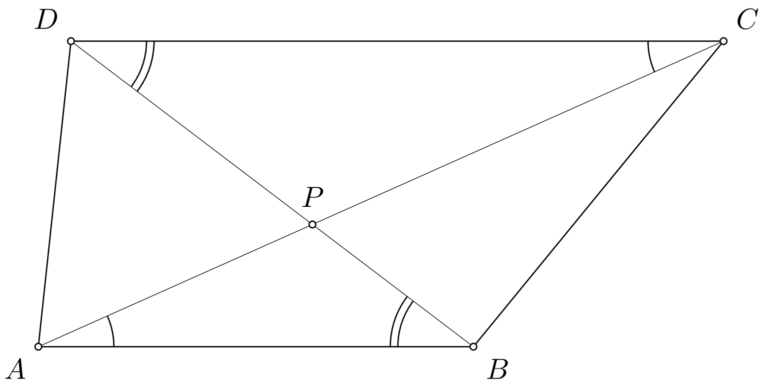
U trapezu $ABCD$ površine 25 s osnovicama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, točka P je sjecište dijagonala. Ako površina trokuta CDP iznosi 9, odredi površinu trokuta ABP.

Prvo rješenje.

Uočimo da trokuti APB i CPD imaju iste kutove, pa su slični. 1 bod

Neka je $a = |AB|$, $c = |CD|$, te neka su v_a i v_c duljine visina iz točke P na $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, redom. Označimo

$$k = \frac{a}{c} = \frac{v_a}{v_c}.$$ 2 boda



Površinu trapeza $ABCD$ možemo izraziti koristeći v_a i v_c na sljedeći način

$$25 = \frac{a+c}{2} \cdot (v_a + v_c).$$ 1 bod

Budući da je $a = kc$ i $v_a = kv_c$, slijedi

$$50 = (a+c)(v_a+v_c) = (kc+c)(kv_c+v_c) = (k+1)^2 cv_c.$$ 2 boda

Budući da je

$$9 = P(CDP) = \frac{cv_c}{2},$$

slijedi

$$50 = (k+1)^2 \cdot 18, \qquad \text{tj.} \quad k = \frac{2}{3}.$$ 2 boda

Konačno slijedi

$$P(ABP) = \frac{av_a}{2} = \frac{k^2 cv_c}{2} = \frac{4}{9} \cdot 9 = 4.$$ 2 boda

Drugo rješenje.

Uočimo da trokuti APB i CPD imaju iste kutove, pa su slični. 1 bod

Neka je $|AB| = k|CD|$. Tada je $P(ABP) = 9k^2$. 1 bod

Trokuti ABC i ABD imaju iste osnovice i suladne visine, pa zaključujemo da vrijedi $P(ABC) = P(ABD)$. Slijedi $P(ABP) + P(BCP) = P(ABP) + P(APD)$, pa je

$$P(BCP) = P(APD).$$ 2 boda

Označimo $P(BCP) = P(APD) = X$.

Trokuti ABC i CDA imaju sukladne visine, pa vrijedi

$$\frac{P(ABC)}{P(CDA)} = \frac{|AB|}{|CD|} = k.$$ 1 bod

Budući da je

$$P(ABC) = P(ABP) + P(BCP) = 9k^2 + X \quad \text{i}$$ 1 bod

$$P(CDA) = P(CDP) + P(ADP) = 9 + X$$ 1 bod

slijedi

$$9k^2 + X = k(9 + X), \qquad \text{tj.} \quad X = 9k.$$ 1 bod

Budući da je $P(ABCD) = 25$, slijedi

$$25 = 9k^2 + 2X + 9 = 9k^2 + 18k + 9.$$ 1 bod

Rješavanjem kvadratne jednadžbe $9k^2 + 18k - 17 = 0$ dobivamo $k = \frac{2}{3}$ (drugo rješenje je negativno). To znači da je $P(ABP) = 9k^2 = 4$. 1 bod

Zadatak A-2.7.

Za rastavljanje šahovske ploče dimenzija 8×8 na disjunktne pravokutnike kažemo da je *raznovrsno* ako su ispunjena sljedeća dva uvjeta:

- svaki pravokutnik u rastavu sadrži jednak broj crnih i bijelih polja
- ne postoje dva pravokutnika koja sadrže isti broj polja.

Odredi najveći prirodni broj n za koji postoji raznovrsno rastavljanje ploče dimenzija 8×8 na n pravokutnika.

Rješenje.

Pravokutnik sadrži jednak broj crnih i bijelih polja ako i samo ako je njegova površina paran broj (tj. ako i samo ako je duljina barem jedne stranice paran broj). 2 boda

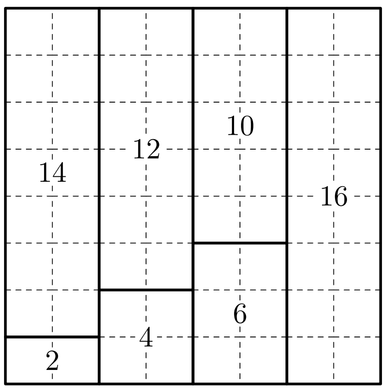
Tvrdimo da je odgovor 7, tj. da raznovrsno rastavljanje može imati najviše 7 pravokutnika. 1 bod

Pretpostavimo suprotno da postoji barem 8 pravokutnika u raznovrsnom rastavljanju ploče dimenzija 8×8. Tada bi ukupno površina ploče morala biti veća ili jednaka zbroju najmanjih 8 pravokutnika u rastavljanju, a to je barem

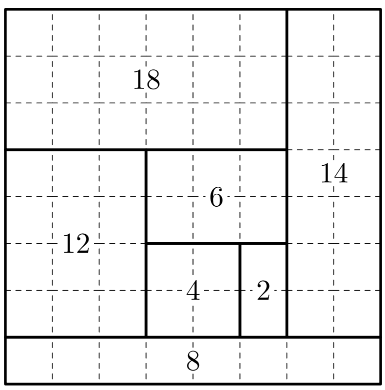
$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 = 72.$$

Budući da je $64 < 72$, dobili smo kontradikciju. Dakle, raznovrsno rastavljanje ploče 8×8 može imati najviše 7 pravokutnika. 4 boda

Sljedeći primjer pokazuje da zaista postoji raznovrsno rastavljanje ploče 8×8 na 7 pravokutnika. 3 boda



Napomena: Primjer nije jedinstven. Dapače, postoje raznovrsna rastavljanja ploče 8×8 na 7 pravokutnika koja imaju drugačije površine pravokutnika nego u primjeru u rješenju. Na primjer, imamo sljedeće raznovrsno rastavljanje:



ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

26. siječnja 2017.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-3.1.

Odredi racionalne brojeve a i b takve da vrijedi

$$\sin 75^\circ \cdot \cos 15^\circ = a + \sqrt{b}.$$

Prvo rješenje.

Uočimo da vrijedi

$$\begin{aligned}
\sin 75^\circ \cdot \cos 15^\circ &= \cos^2 15^\circ && \text{2 boda}\\
&= \frac{1+\cos 30^\circ}{2} && \text{2 boda}\\
&= \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\\
&= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} && \text{1 bod}\\
&= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{16}}. && \text{1 bod}
\end{aligned}$$

Dakle, $a = \frac{1}{2}$ i $b = \frac{3}{16}$.

Drugo rješenje.

Poznato je da je

$$\sin 75^\circ = \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}. \qquad \text{3 boda}$$

Zato je

$$\sin 75^\circ \cdot \cos 15^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2 = \frac{8+2\sqrt{12}}{16} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{12}}{8}. \qquad \text{2 boda}$$

Budući da je

$$\frac{\sqrt{12}}{8} = \sqrt{\frac{3}{16}}, \qquad \text{1 bod}$$

rješenje je $a = \frac{1}{2}$ i $b = \frac{3}{16}$.

Zadatak A-3.2.

Neka su x i y pozitivni realni brojevi za koje vrijedi

$$2^{x^2} = 16^y \qquad \text{i} \qquad \log_{\sqrt{2017}} x + \log_{2017} y > 0.$$

Dokaži da je $y > \frac{1}{2}$.

Prvo rješenje.

Prvu jednakost možemo zapisati kao $2^{x^2} = 2^{4y}$ odakle logaritmiranjem slijedi $x^2 = 4y$. 1 bod

Sređivanjem druge nejednakosti dobivamo

$$\begin{aligned} 0 < \log_{\sqrt{2017}} x + \log_{2017} y &= 2\log_{2017} x + \log_{2017} y && \text{1 bod} \\ &= \log_{2017}(x^2 y), && \text{1 bod} \end{aligned}$$

odnosno zbog $2017 > 1$ slijedi $x^2 y > 1$. 1 bod

Dakle, vrijedi $4y^2 = x^2 y > 1$. 1 bod

Budući da je y pozitivan realan broj slijedi $y > \frac{1}{2}$. 1 bod

Drugo rješenje.

Pretpostavimo suprotno, tj. da je $0 < y \leqslant \frac{1}{2}$.

Iz dane jednakosti slijedi $x^2 = 4y \leqslant 2$. 1 bod

Zato je

$$\begin{aligned} \log_{\sqrt{2017}} x &= \log_{2017} x^2 && \text{1 bod} \\ &\leqslant \log_{2017} 2. && \text{1 bod} \end{aligned}$$

Također vrijedi

$$\log_{2017} y \leqslant \log_{2017} \frac{1}{2}. \qquad \text{1 bod}$$

Zbrajanjem tih nejednakosti dobivamo

$$\log_{\sqrt{2017}} x + \log_{2017} y \leqslant \log_{2017} 2 + \log_{2017} \frac{1}{2} = \log_{2017} 2 \cdot \frac{1}{2} = \log_{2017} 1 = 0,$$

što je u suprotnosti s danom nejednakosti. 2 boda

Zadatak A-3.3.

Broj koji se sastoji samo od znamenki 2 i 3 nazivamo *veselim*. Dakle, veseli brojevi su redom $2, 3, 22, 23, \ldots$. Odredi 2050. veseli broj.

Rješenje.

Postoje dva jednoznamenkasta vesela broja (2 i 3) i četiri dvoznamenkasta (22, 23, 32, 33). Slično zaključujemo da ima 2^n veselih n-znamenkastih brojeva (jer svaku od n znamenaka možemo odabrati na 2 načina) za $n = 4, 5, \ldots, 10$. 2 boda

Ukupan broj veselih brojeva koji imaju najviše 10 znamenaka je

$$2 + 4 + 8 + \cdots + 1024 = 2046.$$

2 boda

Dakle, 2047. veseli broj je 11-znamenkasti broj čije su sve znamenke 2 (tj. 22 222 222 222), dok je 2050. veseli broj 22 222 222 233. 2 boda

Zadatak A-3.4.

Odredi sve parove prirodnih brojeva (m, n) koji zadovoljavaju jednadžbu

$$mn^2 = 100(n + 1).$$

Prvo rješenje.

Budući da su n i $n + 1$ relativno prosti, n^2 dijeli 100. 3 boda

Mogućnosti su $n = 1$, $n = 2$, $n = 5$ i $n = 10$. 1 bod

Rješenja su $(200, 1)$, $(75, 2)$, $(24, 5)$ i $(11, 10)$. 2 boda

Drugo rješenje.

Zadanu jednadžbu možemo zapisati na sljedeći način

$$n(mn - 100) = 100,$$

iz čega vidimo da n mora biti djelitelj broja 100. 1 bod

Broj 100 ima 9 prirodnih djelitelja i za svaki određujemo pripadni m koristeći formulu $m = \dfrac{100(n+1)}{n^2}$ (X označava da pripadni m nije prirodni broj):

n	1	2	4	5	10	20	25	50	100
m	200	75	X	24	11	X	X	X	X

5 bodova

Rješenja su $(200, 1)$, $(75, 2)$, $(24, 5)$ i $(11, 10)$.

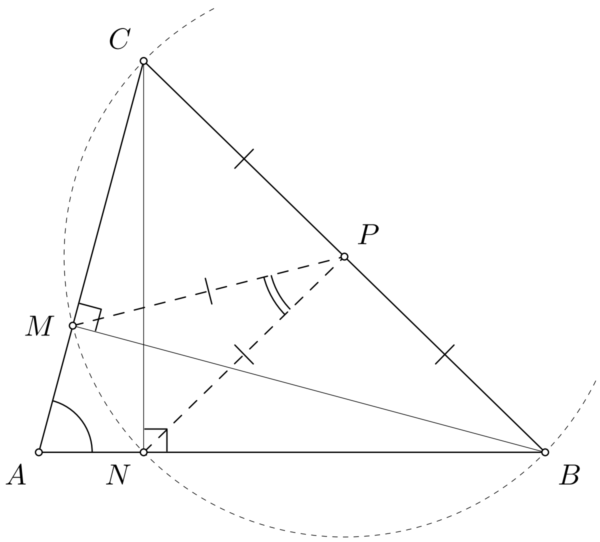
Napomena: Umjesto provjeravanja svih slučajeva, jednom kad zaključimo da n dijeli 100 možemo nastaviti na sljedeći način. Neka je $100 = n \cdot a$. Tada je $n(m - a) = a$, tj. n dijeli a. To znači da n^2 dijeli 100. Ovaj zaključak nosi 2 boda, a rješenje se nakon toga dovrši kao u prvom rješenju.

Zadatak A-3.5.

Neka je ABC šiljastokutan trokut u kojem je $\sphericalangle BAC = 75°$. Neka je P polovište stranice $\overline{BC}$, a M i N redom nožišta visina iz vrhova B i C. Odredi $\sphericalangle MPN$.

Prvo rješenje.

Prema obratu Talesovog teorema, kružnica kojoj je promjer $\overline{BC}$ (i središte točka P) prolazi točkama M i N. 2 boda



Zato vrijedi

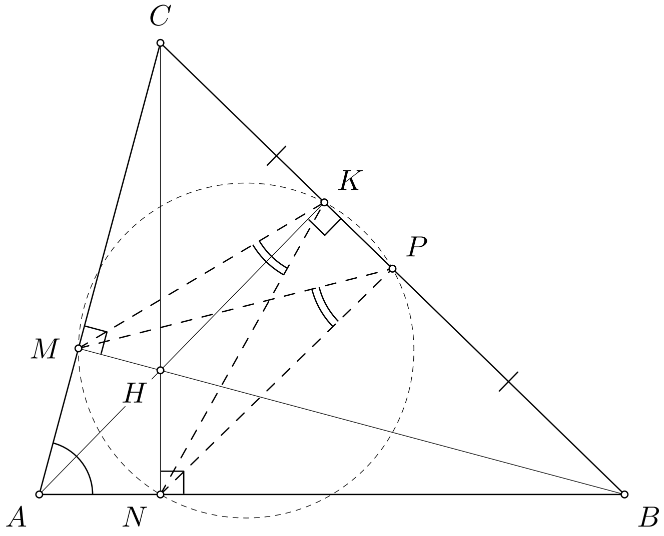
$$\begin{aligned}\sphericalangle MPN &= 2\sphericalangle MBN && \text{2 boda}\\ &= 2\sphericalangle MBA = 2(90° - \sphericalangle BAM) && \text{1 bod}\\ &= 2(90° - \sphericalangle BAC) = 30°. && \text{1 bod}\end{aligned}$$

Dakle, traženi kut iznosi $30°$.

Drugo rješenje.

Feuerbachova kružnica (*kružnica devet točaka*) prolazi kroz polovišta stranica i nožišta visina trokuta. Neka je K nožište visine iz vrha A.

Tada je $MNPK$ tetivni četverokut, tj. $\sphericalangle MPN = \sphericalangle MKN$. 3 boda



Trokut MKN je nožišni trokut trokuta ABC. Poznato je da u nožišnom trokutu vrijedi

$$\sphericalangle MKN = 180^\circ - 2\sphericalangle BAC.$$ 2 boda

Zato vrijedi $\sphericalangle MPN = \sphericalangle MKN = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ$. 1 bod

Napomena: Zbog potpunosti navodimo dokaz da u nožišnom trokutu MKN vrijedi $\sphericalangle MKN = 180^\circ - 2\sphericalangle BAC$.

Prvi način. Neka je H ortocentar trokuta ABC. Budući da su nasuprotni kutovi u četverokutu $BKHN$ pravi, slijedi da je taj četverokut tetivan. Zato je

$$\sphericalangle HKN = \sphericalangle HBN = 90^\circ - \sphericalangle BAC.$$

Analogno slijedi da je $\sphericalangle HKM = \sphericalangle HCM = 90^\circ - \sphericalangle BAC$. Za ovaj zaključak učenik može dobiti 1 bod.

Zato je $\sphericalangle MKN = \sphericalangle HKN + \sphericalangle HKM = 180^\circ - 2\sphericalangle BAC$.

Drugi način. Uočimo da su trokuti AMN, KBN i KMC slični trokutu ABC. Na primjer, trokuti AMN i ABC su slični jer je $|AN| : |AC| = \cos\alpha = |AM| : |AB|$, te je kut kod vrha A zajednički. Za ovaj zaključak učenik može dobiti 1 bod.

Zbog sličnosti zaključujemo $\sphericalangle NKB = \sphericalangle MKC = \sphericalangle BAC$ te je

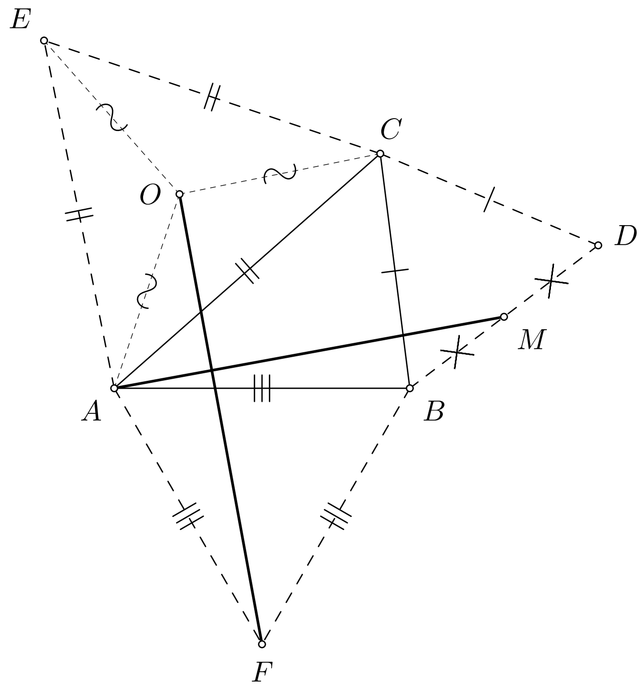
$$\sphericalangle MKN = 180^\circ - \sphericalangle NKB - \sphericalangle MKC = 180^\circ - 2\sphericalangle BAC.$$

Zadatak A-3.6.

Nad stranicama šiljastokutnog trokuta ABC nacrtani su prema van jednakostranični trokuti BCD, ACE i ABF. Neka je M polovište stranice $\overline{BD}$, a O središte trokuta ACE. Dokaži da je $|AM| : |OF| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Rješenje.

Neka je $\alpha = \sphericalangle BAC$ i $\beta = \sphericalangle ABC$, te neka je $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$.



Budući da je $\sphericalangle BAF = 60°$ i $\sphericalangle OAC = 30°$, slijedi da je $\sphericalangle OAF = \alpha + 90°$. 1 bod

Također, uočimo da je

$$|AO| = \frac{2}{3} \cdot \frac{b\sqrt{3}}{2} = \frac{b\sqrt{3}}{3}.$$ 1 bod

Primijenimo li poučak o kosinusu na trokut AOF, dobivamo

$$|OF|^2 = \frac{b^2}{3} + c^2 - 2 \cdot \frac{b\sqrt{3}}{3} \cdot c \cdot \cos(\alpha + 90°).$$ 1 bod

Budući da je $\sphericalangle CBD = 60°$, slijedi da je $\sphericalangle ABM = \beta + 60°$. Primijenimo li poučak o kosinusu na trokut ABM, dobivamo

$$|AM|^2 = \frac{a^2}{4} + c^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot c \cdot \cos(\beta + 60°).$$ 1 bod

Treba pokazati da je $2|AM| = \sqrt{3}|OF|$, tj. $4|AM|^2 - 3|OF|^2 = 0$.

Uvrstimo li dobivene rezultate, dobivamo

$$\begin{aligned}4|AM|^2 - 3|OF|^2 &= c^2 + a^2 - b^2 - 4ac\cos(\beta + 60°) + 2bc\sqrt{3}\cos(\alpha + 90°) \\ &= c^2 + a^2 - b^2 - 4ac\cos(\beta + 60°) - 2bc\sqrt{3}\sin\alpha && \text{1 bod} \\ &= 2ac\cos\beta - 4ac\cos(\beta + 60°) - 2bc\sqrt{3}\sin\alpha, && \text{2 boda}\end{aligned}$$

pri čemu zadnja jednakost vrijedi zbog poučka o kosinusu na trokut ABC.

Prema poučku o sinusima vrijedi $b\sin\alpha = a\sin\beta$, pa slijedi

$$4|AM|^2 - 3|OF|^2 = 2ac\cos\beta - 4ac\cos(\beta + 60°) - 2ac\sqrt{3}\sin\beta. \qquad \text{2 boda}$$

Konačno, budući da je

$$\cos(\beta + 60°) = \cos 60° \cos\beta - \sin 60° \sin\beta = \frac{1}{2}\cos\beta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta, \qquad \text{1 bod}$$

slijedi da je

$$4|AM|^2 - 3|OF|^2 = 0.$$

Napomena: Umjesto korištenja poučka o kosinusu za trokut ABM, vrijednost $|AM|^2$ možemo izraziti iz trokuta ACM:

$$|AM|^2 = b^2 + \frac{3a^2}{4} - ab\sqrt{3}\cos(\gamma + 30°).$$

Tada je

$$\begin{aligned}4|AM|^2 - 3|OF|^2 &= 3b^2 + 3a^2 - 3c^2 - 4ab\sqrt{3}\cos(\gamma + 30°) + 2bc\sqrt{3}\cos(\alpha + 90°) \\ &= 6ab\cos\gamma - 4ab\sqrt{3}\cos(\gamma + 30°) - 2bc\sqrt{3}\sin\alpha \\ &= 6ab\cos\gamma - 4ab\sqrt{3}\cos(\gamma + 30°) - 2ab\sqrt{3}\sin\gamma = 0.\end{aligned}$$

Budući da ovaj pristup ima sve korake kao i gornje rješenje, bodovanje je analogno.

Zadatak A-3.7.

U koordinatnoj ravnini označeno je 20 točaka s cjelobrojnim koordinatama, pri čemu nikoje tri točke ne leže na istom pravcu. Dokaži da postoji trokut čiji vrhovi su označene točke i čije težište je također točka s cjelobrojnim koordinatama.

(Kažemo da je $T(x, y)$ točka s cjelobrojnim koordinatama ako su x i y cijeli brojevi.)

Rješenje.

U trokutu s vrhovima $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ i $C(x_C, y_C)$ koordinate težišta su

$$\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right). \qquad \text{1 bod}$$

Prema ostatcima koordinata pri dijeljenju s 3, točke u ravnini možemo podijeliti u 9 tipova (ostatci mogu biti $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 0)$, …, $(2, 2)$). 3 boda

Budući da je označeno 20 točaka, a vrijedi $20 = 2 \cdot 9 + 2$, (prema Dirichletovom principu) postoje barem 3 označene točke istog tipa. Upravo su te tri točke vrhovi trokuta čije težište ima cjelobrojne koordinate. 6 bodova

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

26. siječnja 2017.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-4.1.

Odredi sve prirodne brojeve b za koje jednakost $11 \cdot 22 \cdot 33 = 13310$ vrijedi u brojevnom sustavu s bazom b.

Prvo rješenje.

Neka je b tražena baza brojevnog sustava.

Jednakost u zadatku je ekvivalentna jednakosti

$$(b+1)(2b+2)(3b+3) = b^4 + 3b^3 + 3b^2 + b.$$ 2 boda

Izraz možemo srediti izlučivanjem faktora na lijevoj strani, te primjenom formule za kub binoma na desnoj strani:

$$6(b+1)^3 = b(b+1)^3.$$ 2 boda

Budući da b ne može biti -1, slijedi $b = 6$. 2 boda

Drugo rješenje.

Neka je b tražena baza brojevnog sustava. Broj b mora biti prirodni broj veći od 3.

Ako je $b = 4$, onda lijeva strana iznosi $5 \cdot 10 \cdot 15$, a desna 500, što nije jednako.

Ako je $b = 5$, onda lijeva strana iznosi $6 \cdot 12 \cdot 18$, a desna 1080, što nije jednako.

Zaključujemo da b ne može biti ni 4 ni 5. 1 bod

Ako je $b = 6$, onda lijeva strana iznosi $7 \cdot 14 \cdot 21$, a desna 2058 i ti brojevi su jednaki. Dakle, $b = 6$ je jedno rješenje. 1 bod

Ako je $b \geqslant 7$, onda je zadnja znamenka broja na lijevoj strani jednakosti 6, dok je s desne strane zadnja znamenka 0. To nije moguće. 4 boda

Zaključujemo da je $b = 6$ jedino rješenje.

Zadatak A-4.2.

Nizovi (x_n) i (y_n) zadani su rekurzivno:

$$\begin{aligned} x_1 = 3, \quad y_1 &= 1, \\ x_{n+1} &= 3x_n + y_n, \quad \text{za sve } n \in \mathbb{N}; \\ y_{n+1} &= x_n + 3y_n, \quad \text{za sve } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dokaži da je $x_{2017}^2 - y_{2017}^2 = 8^{2017}$.

Rješenje.

Matematičkom indukcijom dokazujemo da za svaki prirodni broj n vrijedi $x_n^2 - y_n^2 = 8^n$.

Baza indukcije, $n = 1$, glasi: $x_1^2 - y_1^2 = 3^2 - 1^2 = 8$. 1 bod

Pretpostavimo da za neki prirodni broj k vrijedi $x_k^2 - y_k^2 = 8^k$.

Tada je

$$\begin{aligned} x_{k+1}^2 - y_{k+1}^2 &= (3x_k + y_k)^2 - (x_k + 3y_k)^2 \\ &= 9x_k^2 + 6x_k y_k + y_k^2 - (x_k^2 + 6x_k y_k + 9y_k^2) \\ &= 8x_k^2 - 8y_k^2 = 8(x_k^2 - y_k^2) && \text{2 boda} \\ &= 8 \cdot 8^k = 8^{k+1}. && \text{2 boda} \end{aligned}$$

Prema principu matematičke indukcije slijedi $x_n^2 - y_n^2 = 8^n$ za svaki prirodni broj n. 1 bod

Budući da smo tvrdnju dokazali za sve prirodne brojeve n, tvrdnja posebno vrijedi i za $n = 2017$, što je traženo u zadatku.

Napomena: Izrazimo li iz prve rekurzivne relacije $y_n = x_{n+1} - 3x_n$ i uvrstimo u drugu, dobivamo

$$x_{n+2} = 6x_{n+1} - 8x_n.$$

Iz zadanih početnih uvjeta dobivamo $x_1 = 3$, $x_2 = 10$. Postupak za rješavanje linearnih rekurzija prelazi okvire srednjoškolskog gradiva. Taj postupak daje zatvorenu formulu

$$x_n = \frac{1}{2} \cdot (4^n + 2^n) = 2^{2n-1} + 2^{n-1},$$

koju učenici mogu naslutiti na temelju malih slučajeva i onda dokazati matematičkom indukcijom. Za tvrdnju $x_n = 2^{2n-1} + 2^{n-1}$ učenik treba dobiti 2 boda, a za njezin dokaz još 2 boda.

Slijedi da je $y_n = x_{n+1} - 3x_n = 2^{2n-1} - 2^{n-1}$ i

$$x_n^2 - y_n^2 = (x_n + y_n) \cdot (x_n - y_n) = 2^{2n} \cdot 2^n = 8^n.$$

Za ovaj završetak rješenja, učenik treba dobiti još 2 boda.

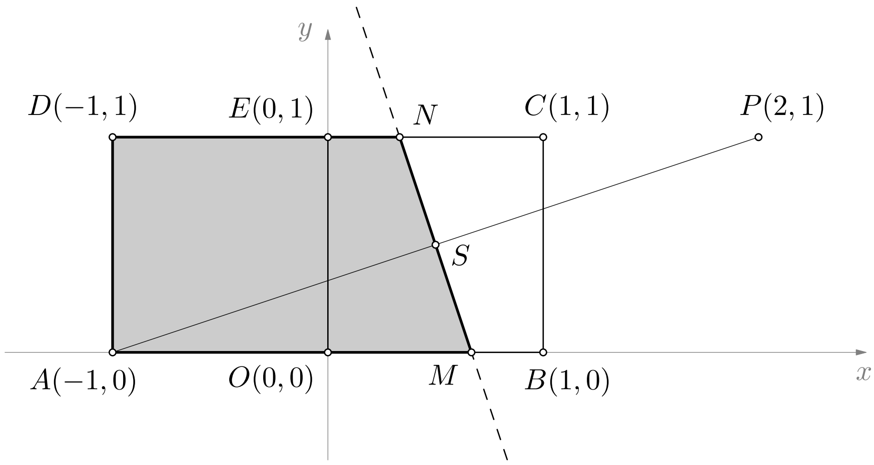
Zadatak A-4.3.

U pravokutniku s vrhovima $A(-1,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$, $D(-1,1)$ nasumično je odabrana točka T. Odredi vjerojatnost da je točka T bliža točki A nego točki $P(2,1)$.

Prvo rješenje.

Točke koje se nalaze bliže točki A nego točki P su one točke koje se nalaze s točkom A u istoj poluravnini određenoj simetralom dužine $\overline{AP}$. 2 boda

Neka ta simetrala siječe pravce AB i CD u točkama M i N, redom. Tražimo omjer površina trapeza $AMND$ i pravokutnika $ABCD$. 1 bod



Neka je $O(0,0)$ i $E(0,1)$. Uočimo da pravac MN dijeli kvadrat $OBCE$ na dva sukladna trapeza jer prolazi kroz njegovo središte $S(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, pa trapez $OMNE$ ima površinu $\frac{1}{2}$. Zato površina trapeza $AMND$ iznosi $\frac{3}{2}$. 2 boda

Površina pravokutnika $ABCD$ iznosi 2, pa je tražena vjerojatnost $\frac{3}{2} : 2 = \frac{3}{4} = 75\%$. 1 bod

Drugo rješenje.

Udaljenosti točke $T(x,y)$ od točaka A i P su redom

$$|AT| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \quad \text{i} \quad |PT| = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}.$$ 1 bod

Točka T je bliža točki A nego točki P ako i samo ako vrijedi

$$(x+1)^2 + y^2 < (x-2)^2 + (y-1)^2,$$

tj. ako i samo ako vrijedi

$$y < -3x + 2.$$ 2 boda

Neka pravac čija je jednadžba $y = 3x + 2$ siječe pravce AB $(y = 0)$ i CD $(y = 1)$ redom u točkama M i N. Točka M ima koordinate $(\frac{2}{3}, 0)$, a točka N ima koordinate $(\frac{1}{3}, 1)$. 1 bod

Tražimo omjer površina trapeza $AMND$ i pravokutnika $ABCD$. Površina trapeza $AMND$ iznosi

$$P(AMND) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{3} + \frac{4}{3}\right) \cdot 1 = \frac{3}{2}.$$ 1 bod

Budući da površina pravokutnika $ABCD$ iznosi 2, tražena vjerojatnost je $\frac{3}{2} : 2 = \frac{3}{4}$. 1 bod

Zadatak A-4.4.

Odredi najmanji višekratnik broja 84 koji u dekadskom zapisu ima samo znamenke 6 i 7.

Rješenje.

Broj je djeljiv s 84 ako i samo ako je djeljiv s 3, 4 i 7.

Budući da traženi broj mora biti djeljiv s 3, broj znamenki 7 mora biti djeljiv s 3. 1 bod

Traženi broj mora biti paran, pa mora završavati sa 6. 1 bod

Budući da je traženi broj djeljiv s 4, mora završavati sa 76. 1 bod

Zaključujemo da traženi broj sadrži barem 3 znamenke 7. 1 bod

Brojevi koji zadovoljavju navedene uvjete su redom 7776, 67776, 76776, 77676, ...

Budući da brojevi 7776 i 67776 nisu djeljivi sa 7, 1 bod

a broj 76776 jest, zaključujemo da je odgovor 76776. 1 bod

Zadatak A-4.5.

Koliko ima deveteroznamenkastih brojeva čije su znamenke 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9, a nikoje tri uzastopne znamenke nisu ni 123, ni 246, ni 678 ?

Rješenje.

Ukupno ima 9! deveteroznamenkastih brojeva koji imaju znamenke od 1 do 9. Od toga broja moramo oduzeti broj brojeva koji imaju tri uzastopne znamenke 123, 246 ili 678. 1 bod

Brojeva koji imaju uzastopne znamenke 123 ima 7! (permutiramo taj blok i preostalih 6 znamenaka). 1 bod

Analogno, brojeva koji sadrže 246 ima 7! i brojeva koji sadrže 678 ima 7!.

Uočimo da rješenje nije $9! - 3 \cdot 7!$ jer smo više puta oduzeli brojeve koji sadrže 123 i 678, odnosno one koji sadrže 246 i 678.

Ne postoji broj kojemu su i 123 i 246 uzastopne znamenke. 1 bod

Brojeva koji sadrže 123 i 678 ima 5!, 1 bod

a koji sadrže 246 i 678, tj. 24678, ima također 5!. 1 bod

Konačno rješenje je $9! - 3 \cdot 7! + 2 \cdot 5!$. 1 bod

Napomena: Princip koji smo koristili zove se formula uključivanja-isključivanja, no to nije potrebno navesti. Konačno rješenje iznosi $9! - 3 \cdot 7! + 2 \cdot 5! = 348000$.

Napomena: Učenik koji tvrdi da je rezultat $9! - 3 \cdot 7!$ treba dobiti 2 boda.

Zadatak A-4.6.

Neka su z_1 i z_2 kompleksni brojevi takvi da je $|z_1| = |z_2| = 1$ i neka su a i b realni brojevi za koje je $a + b = 1$. Dokaži da vrijedi

$$|az_1 + bz_2| \geqslant \frac{1}{2}|z_1 + z_2|.$$

Prvo rješenje.

Zapišimo $z_1 = x_1 + iy_1$ i $z_2 = x_2 + iy_2$, pri čemu su x_1, x_2, y_1 i y_2 realni brojevi.

Nejednakost u zadatku glasi

$$\sqrt{(ax_1 + bx_2)^2 + (ay_1 + by_2)^2} \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}.$$ 1 bod

Kvadriranjem i korištenjem identiteta $x_1^2 + y_1^2 = 1$ i $x_2^2 + y_2^2 = 1$ dobivamo ekvivalentnu nejednakost

$$a^2 + 2ab(x_1x_2 + y_1y_2) + b^2 \geqslant \frac{1}{4} \cdot (2 + 2x_1x_2 + 2y_1y_2).$$ 1 bod

Množeći nejednakost s 2 i uvrštavanjem $b = 1 - a$ dobivamo ekvivalentnu nejednakost

$$2a^2 + 2 \cdot 2a(1 - a)(x_1x_2 + y_1y_2) + 2(a^2 - 2a + 1) \geqslant 1 + x_1x_2 + y_1y_2,$$

što možemo zapisati na sljedeći način

$$4a^2 - 4a + 1 \geqslant (x_1x_2 + y_1y_2) \cdot (4a^2 - 4a + 1).$$ 2 boda

Dakle, početna nejednakost je ekvivalentna nejednakosti

$$(2a - 1)^2 \geqslant (2a - 1)^2 (x_1x_2 + y_1y_2).$$

Budući da je $(2a - 1)^2 \geqslant 0$, dovoljno je dokazati $x_1x_2 + y_1y_2 \leqslant 1$. 1 bod

Koristimo li trigonometrijski zapis kompleksnog broja, možemo pisati $x_k = \cos\varphi_k$, $y_k = \sin\varphi_k$, $k = 1, 2$. Tada je

$$x_1x_2 + y_1y_2 = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \leqslant 1.$$ 5 bodova

Time je dokaz završen.

Napomena: Nejednakost $x_1x_2 + y_1y_2 \leqslant 1$ je direktna posljedica SCB nejednakosti

$$(x_1x_2 + y_1y_2)^2 \leqslant (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)$$

i činjenice da je $x_1^2 + y_1^2 = 1$ i $x_2^2 + y_2^2 = 1$. Učenik za ovakvo obrazloženje treba dobiti odgovarajućih 5 bodova.

Spomenutu SCB nejednakost ne treba dokazivati, ali zbog cjelovitosti navodimo njezin dokaz. Nejednakost SCB je ekvivalentna nejednakosti (raspišemo i pokratimo)

$$2x_1x_2y_1y_2 \leqslant x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2,$$

koja je pak ekvivalentna nejednakosti

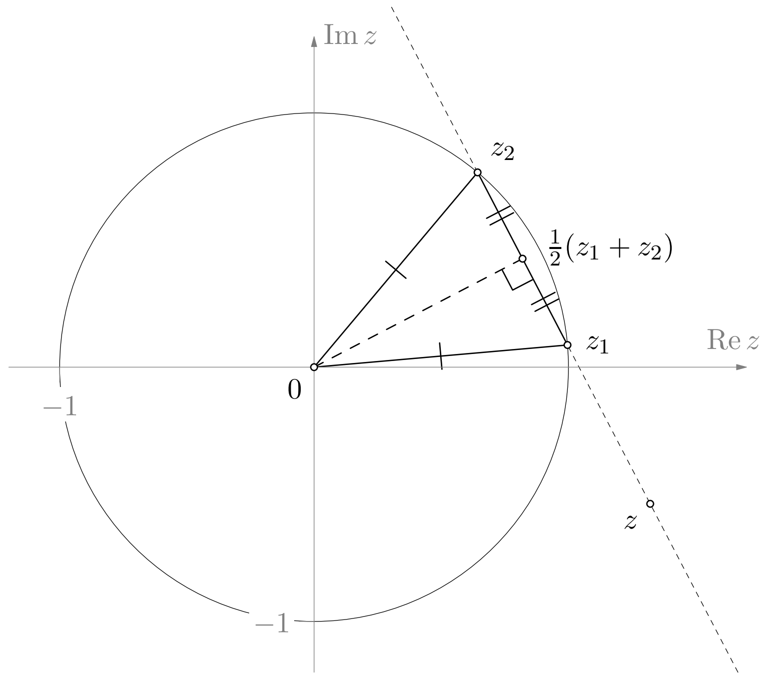
$$0 \leqslant (x_1y_2 - y_1x_2)^2.$$

Drugo rješenje.

Promotrimo jednakokračan trokut u kompleksnoj ravnini kojem su vrhovi 0, z_1 i z_2.

Točka $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ je polovište stranice kojoj su vrhovi z_1 i z_2. Budući da je trokut jednakokračan, ta točka je ujedno i nožište visine iz točke 0. 2 boda

To znači da točka $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ ima najmanju udaljenost od točke 0 među svim točakama na pravcu koji prolazi kroz z_1 i z_2. 5 bodova



Točka z se nalazi na pravcu kroz z_1 i z_2 ako i samo ako je $z = z_2 + t(z_1 - z_2)$ za neki realni broj t. 1 bod

Ako je $a + b = 1$, onda točka oblika $az_1 + bz_2 = a(z_1 - z_2) + z_2$ leži na pravcu kroz z_1 i z_2, pa vrijedi

$$|az_1 + bz_2| \geqslant \left|\frac{1}{2}(z_1 + z_2)\right| = \frac{1}{2}|z_1 + z_2|.$$ 2 boda

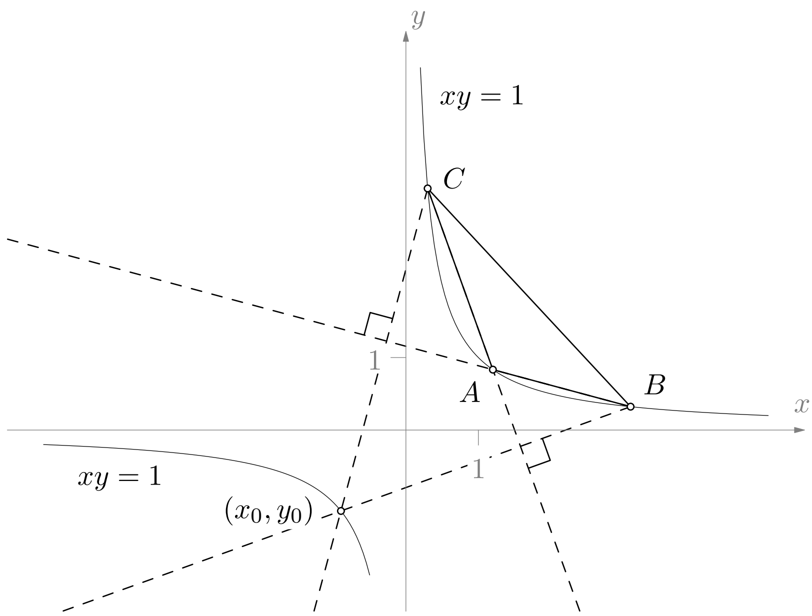
Zadatak A-4.7.

Točke A, B i C leže na krivulji (hiperboli) čija je jednadžba $xy = 1$. Dokaži da ortocentar trokuta ABC također leži na toj krivulji.

Rješenje.

Neka su (x_A, y_A), (x_B, y_B) i (x_C, y_C) redom koordinate točaka A, B i C.

Vrijedi $x_A y_A = x_B y_B = x_C y_C = 1$.



Pravac AB ima koeficijent smjera

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{1}{x_B} - \frac{1}{x_A}}{x_B - x_A} = -\frac{1}{x_A x_B},$$ 2 boda

pa jednadžba pravca koji sadrži visinu trokuta ABC iz vrha C glasi

$$y - y_C = x_A x_B (x - x_C).$$ 1 bod

Analogno, jednadžba pravca koji sadrži visinu trokuta ABC iz vrha B glasi

$$y - y_B = x_A x_C (x - x_B).$$

Presjek ta dva pravca je točka (x_0, y_0) koja zadovoljava obje jednadžbe. Za apscisu vrijedi

$$y_B + x_A x_C x_0 - x_A x_C x_B = y_C + x_A x_B x_0 - x_A x_B x_C,$$

tj.

$$y_B - y_C = x_0 x_A (x_B - x_C).$$ 2 boda

Dakle, apscisa ortocentra je

$$x_0 = \frac{1}{x_A} \cdot \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = -\frac{1}{x_A x_B x_C}.$$ 2 boda

Iz jednadžbe pravca koji sadrži visinu računamo ordinatu ortocentra

$$y_0 = y_C + x_A x_B (x_0 - x_C) = \frac{1}{x_C} - x_A x_B \left(\frac{1}{x_A x_B x_C} + x_C \right) = -x_A x_B x_C.$$ 2 boda

Dakle, vrijedi $x_0 y_0 = -\frac{1}{x_A x_B x_C} \cdot (-x_A x_B x_C) = 1$, tj. ortocentar trokuta ABC također leži na krivulji čija je jednadžba $xy = 1$. 1 bod

Napomena: Skica krivulje ne nosi bodove. Također, učenik ne smije gubiti bodove za pogrešno nacrtanu skicu krivulje jer skica uopće nije potrebna.