**Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske**
**Agencija za odgoj i obrazovanje**
**Hrvatsko matematičko društvo**

# ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

**1. razred – srednja škola – B varijanta**

**26. siječnja 2017.**

**1.** Brojevi 10101 i 13226 imaju isti ostatak pri dijeljenju s istim troznamenkastim brojem. Odredite taj ostatak.

**2.** Ako su $a \neq 0$ i $b \neq 0$ dva međusobno različita realna broja za koje vrijedi

$$\frac{a}{2017} + \frac{2017}{a} = \frac{b}{2017} + \frac{2017}{b},$$

izračunajte $\sqrt{a \cdot b}$.

**3.** Pokažite da se vrhovi kocke mogu označiti potencijama $2^1$, $2^2$, $2^3$, $2^4$, $2^5$, $2^6$, $2^7$ i $2^8$, tako da je umnožak svih potencija koje se nalaze na jednoj strani kocke uvijek jednak, bez obzira o kojoj se strani kocke radi. Koliko iznosi taj umnožak?

**4.** U jednakokračan trapez upisan je kvadrat tako da je kraća osnovica trapeza ujedno i stranica kvadrata, a dva preostala vrha kvadrata leže na većoj osnovici trapeza. Kvadrat prekriva 25 % površine trapeza. U kojem su omjeru duljine dulje i kraće osnovice trapeza?

**5.** Na putu prema sportskoj dvorani Marin je upitao Ivana za broj njegovog sjedala. Želeći smanjiti napetost zbog važnog sportskog događaja i zabaviti prijatelja, Ivan je zagonetno odgovorio: "Sve znamenke tog broja su različite. Ako zbrojiš svih šest dvoznamenkastih brojeva koji se mogu formirati od znamenki tog broja, tako da su svakom od tih dvoznamenkastih brojeva znamenke također različite, a zatim dobiveni zbroj podijeliš s dva, dobit ćeš upravo broj moga sjedala". Koji broj sjedala ima Ivan?

* * *

**6.** Riješite jednadžbu

$$\frac{x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16}{x^4 - 16} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{25 \cdot 26}.$$

**7.** Duljine stranica trokuta $ABC$ su $|AB| = 5\,\text{cm}$, $|AC| = 12\,\text{cm}$, $|BC| = 13\,\text{cm}$. Na stranici $\overline{BC}$ odabrane su točke $D$ i $E$ tako da je $|BD| = 1\,\text{cm}$ i $|CE| = 8\,\text{cm}$. Odredite mjeru kuta $\sphericalangle DAE$.

**Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.**

**Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske**
**Agencija za odgoj i obrazovanje**
**Hrvatsko matematičko društvo**

## ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

**2. razred – srednja škola – B varijanta**

**26. siječnja 2017.**

**1.** Riješite jednadžbu $(x^2 - 6x)^2 - 2(x^2 - 6x + 9) = 81$.

**2.** Dokažite da je vrijednost izraza $\dfrac{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}}$ prirodan broj.

**3.** U trapezu $ABCD$ kraća osnovica $\overline{CD}$ ima duljinu 3. Paralela s dijagonalom $\overline{BD}$ siječe veću osnovicu $\overline{AB}$ u točki $E$ i krak $\overline{AD}$ u točki $F$. Ako je $|AE| = 5$ i $|BE| = 2$, u kojem su omjeru površina trokuta $AEF$ i površina peterokuta $EBCDF$?

**4.** Neka su $z_1$ i $z_2$ kompleksni brojevi takvi da je $|z_1 + 2z_2| = |2z_1 + z_2|$. Izračunajte $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$ uz uvjet da je $z_2 \neq 0$.

**5.** U deltoid kojemu su duljine dijagonala $d_1 = 24\,\text{cm}$ i $d_2 = 8\,\text{cm}$ upisan je pravokutnik tako da su njegove stranice paralelne s dijagonalama deltoida. Odredite dimenzije tako upisanog pravokutnika koji ima najveću površinu.

* * *

**6.** Koliko cjelobrojnih rješenja ima sustav nejednadžbi

$$\begin{aligned} |x^2 - 5x + 4| &\geqslant 2 \\ |x| &< 2017 \qquad ? \end{aligned}$$

**7.** Mirko pliva sa sjeverne na južnu, a Slavko s istočne na zapadnu obalu jezera. U početnom trenutku promatranja, Mirko se nalazi 600 metara sjeverno, a Slavko 400 metara istočno od bove koja se nalazi negdje na sredini jezera. Oba plivača gibaju se jednoliko pravocrtno, Mirko brzinom $1.6\,\text{m/s}$, a Slavko brzinom $1.2\,\text{m/s}$. Nakon koliko vremena od početka promatranja će udaljenost između Mirka i Slavka biti najmanja moguća? Hoće li u trenutku kad je ta udaljenost najmanja, oba plivača preplivati razinu bove? Obrazložite svoj odgovor.

**Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.**

**Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske**
**Agencija za odgoj i obrazovanje**
**Hrvatsko matematičko društvo**

## ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

**3. razred – srednja škola – B varijanta**

**26. siječnja 2017.**

**1.** Odredite sve troznamenkaste brojeve koji pri dijeljenju s dva daju ostatak 1, pri dijeljenju s tri daju ostatak 2, a pri dijeljenju sa četiri daju ostatak 3. Koliko ima takvih brojeva?

**2.** Odredite sve vrijednosti realnog parametra $a$ tako da jednadžba $4^x-(a+3)\,2^x+4(a-1)=0$ ima točno jedno realno rješenje.

**3.** Ako je $\sin x+\cos x=a$, $|a|\leqslant\sqrt{2}$, koliko je $\dfrac{1+\cos 2x}{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$ ?

**4.** Kvadrat stranice $a=6\sqrt{2}$ je zajednička baza dvjema pravilnim piramidama. Oko ovako nastalog tijela može se opisati sfera koja prolazi kroz sve njegove vrhove. Ako je visina jedne piramide 9, odredite ukupni obujam tog tijela.

**5.** Odredite broj realnih rješenja jednadžbe $\sin x=\dfrac{x}{2017\pi}$.

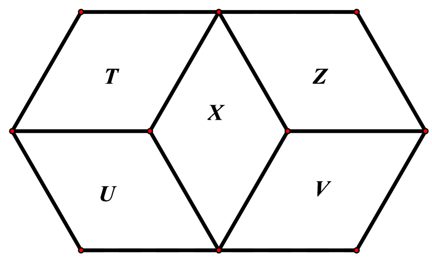
$* \quad * \quad *$

**6.** Neka je $f(x)=\dfrac{\sin 3x}{\sin x}+\dfrac{\cos 3x}{\cos x}$.

(a) Riješite jednadžbu $f(x)=2$.

(b) Odredite intervale realnih brojeva $x$ za koje funkcija $f$ poprima pozitivnu vrijednost.

**7.** U jednoj slagalici treba složiti šesterokut od 5 dijelova u obliku romba, kao što je prikazano na slici. Dijelovi $T$, $U$, $V$ i $Z$ su sukladni i svaki ima površinu $\sqrt{2017}$. Dio označen s $X$ se zagubio i Ana želi napraviti novi. Radi preciznosti i lakše izrade neka je površina tog dijela cijeli broj $P$. Koliko različitih vrijednosti može poprimiti broj $P$? Od svih takvih dijelova $X$ odredite onaj s najvećom površinom, a kojemu su duljine dijagonala racionalni brojevi.




**Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.**

**Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske**
**Agencija za odgoj i obrazovanje**
**Hrvatsko matematičko društvo**

## ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

**4. razred – srednja škola – B varijanta**

**26. siječnja 2017.**

**1.** U kojem brojevnom sustavu vrijedi jednakost $\sqrt{2521} - \sqrt{2400} = 1$ ?

**2.** Koliko ima racionalnih članova u razvoju binoma $\left(\sqrt[6]{20} - \sqrt[4]{17}\right)^{2016}$ ?

**3.** U vodenom parku je veliki bazen u obliku osmerokuta kojemu se može opisati kružnica promjera 15 metara. Poznato je da svaka druga stranica bazena ima duljinu 9 metara, a za preostale se četiri stranice zna da su jednake, ali nepoznate duljine. Vlasnici parka trebaju naručiti platno kojim će prekriti bazen. Koliku minimalnu površinu mora imati to platno i koliku duljinu ima nepoznata stranica bazena?

**4.** Odredite skup svih točaka iz kojih se hiperbola $16x^2 - 25y^2 = 400$ vidi pod pravim kutom.

**5.** Odredite sve proste brojeve $p$ i $q$ za koje vrijedi jednakost

$$5p^3 - 8q + 5p - 10 = 0.$$

* * *

**6.** Izračunajte površinu lika kojemu su vrhovi rješenja sljedeće jednadžbe u skupu $\mathbb{C}$:

$$\left(\frac{z}{z+1}\right)^2 + \left(\frac{z}{z-1}\right)^2 = -1.$$

**7.** Odredite sve prirodne brojeve $x$ koji su rješenje nejednadžbe

$$\log_x^4 2017 + 6 \cdot \log_x^2 2017 > 4 \cdot \log_x^3 2017 + 4 \cdot \log_x 2017.$$

**Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.**