ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

26. siječnja 2017.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1.

Brojevi 10101 i 13226 imaju isti ostatak pri dijeljenju s istim troznamenkastim brojem. Odredite taj ostatak.

Rješenje.

Neka je x troznamenkasti broj, a r traženi ostatak. Tada vrijede sljedeće jednakosti.

$$\begin{aligned} 10101 &= x \cdot m + r \\ 13226 &= x \cdot n + r. \end{aligned}$$

1 bod

Tada je

$$\begin{aligned} 13226 - 10101 &= x(n - m) \\ \Rightarrow \quad 3125 &= x(n - m). \end{aligned}$$

1 bod

Zaključujemo da je x troznamenkasti djelitelj broja $3125 = 5^5$. Jedini troznamenkasti djelitelji od 3125 su potencije broja 5, brojevi 625 i 125. Računamo 2 boda

$$\begin{aligned} 13226 &= 625 \cdot 21 + 101 = 125 \cdot 105 + 101, \\ 10101 &= 625 \cdot 16 + 101 = 125 \cdot 80 + 101. \end{aligned}$$

1 bod

Uočimo da je u oba slučaja ostatak isti i iznosi 101. 1 bod

Zadatak B-1.2.

Ako su $a \neq 0$ i $b \neq 0$ dva međusobno različita realna broja za koje vrijedi

$$\frac{a}{2017} + \frac{2017}{a} = \frac{b}{2017} + \frac{2017}{b},$$

izračunajte $\sqrt{a \cdot b}$.

Rješenje.

Zapišimo danu jednakost u sljedećem obliku:

$$\frac{a}{2017}+\frac{2017}{a}=\frac{b}{2017}+\frac{2017}{b}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{2017}(a-b)=2017\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right) \qquad \text{1 bod}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{2017}(a-b)=2017\left(\frac{a-b}{ab}\right) \qquad \text{1 bod}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{2017}(a-b)-\frac{2017(a-b)}{ab}=0$$

$$\Leftrightarrow\ (a-b)\left(\frac{1}{2017}-\frac{2017}{ab}\right)=0. \qquad \text{2 boda}$$

Kako je $a\neq 0$, $b\neq 0$ i $a\neq b$ slijedi $\frac{1}{2017}-\frac{2017}{ab}=0$. 1 bod

Tada je $\frac{1}{2017}=\frac{2017}{ab}$, odnosno $\sqrt{ab}=2017$. 1 bod

Zadatak B-1.3.

Pokažite da se vrhovi kocke mogu označiti potencijama 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7 i 2^8, tako da je umnožak svih potencija koje se nalaze na jednoj strani kocke uvijek jednak, bez obzira o kojoj se strani kocke radi. Koliko iznosi taj umnožak?

Rješenje.

Neka je umnožak potencija na svakoj strani kocke jednak 2^x.

Pomnožimo li umnoške potencija na svim stranama dobijemo $P=(2^x)^6=2^{6x}$. 1 bod

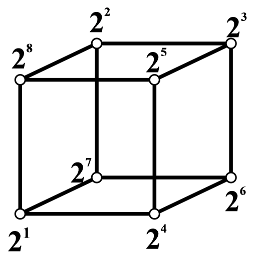
Svaka potencija se u umnošku P pojavljuje 3 puta jer se u svakom vrhu kocke sastaju po tri strane kocke. Stoga je

$$P=(2^1)^3\cdot(2^2)^3\cdot\ldots\cdot(2^8)^3=2^{3\cdot(1+2+\ldots+8)}=2^{108} \qquad \text{2 boda}$$

$$\Rightarrow\ 2^{6x}=2^{108}\ \Rightarrow\ x=18. \qquad \text{1 bod}$$

Umnožak na svakoj strani kocke je 2^{18}. 1 bod

Primjer označavanja:

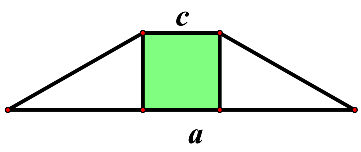


1 bod

Zadatak B-1.4.

U jednakokračan trapez upisan je kvadrat tako da je kraća osnovica trapeza ujedno i stranica kvadrata, a dva preostala vrha kvadrata leže na većoj osnovici trapeza. Kvadrat prekriva 25 % površine trapeza. U kojem su omjeru duljine dulje i kraće osnovice trapeza?

Rješenje.



Označimo dulju osnovicu trapeza s a, a kraću s c.

Prema uvjetima zadatka, c je duljina stranice kvadrata, te ujedno i visina trapeza. 1 bod

Površina trapeza je $P = \frac{a+c}{2} \cdot c$, a površina kvadrata c^2.

$$\frac{1}{4}\frac{a+c}{2} \cdot c = c^2 \qquad \text{2 boda}$$

$$ac + c^2 = 8c^2$$

$$ac = 7c^2 \qquad \text{1 bod}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{7}{1}. \qquad \text{2 boda}$$

Osnovice trapeza su u omjeru 7 : 1.

Zadatak B-1.5.

Na putu prema sportskoj dvorani Marin je upitao Ivana za broj njegovog sjedala. Želeći smanjiti napetost zbog važnog sportskog događaja i zabaviti prijatelja, Ivan je zagonetno odgovorio: "Sve znamenke tog broja su različite. Ako zbrojiš svih šest dvoznamenkastih brojeva koji se mogu formirati od znamenki tog broja, tako da su svakom od tih dvoznamenkastih brojeva znamenke također različite, a zatim dobiveni zbroj podijeliš s dva, dobit ćeš upravo broj moga sjedala". Koji broj sjedala ima Ivan?

Rješenje.

Šest dvoznamenkastih brojeva s različitim znamenkama moguće je formirati samo od tri različite znamenke.

Dakle, traženi broj mora biti troznamenkasti broj N s različitim znamenkama kojemu niti jedna znamenka nije 0. 1 bod

Neka su znamenke tog broja x, y i z. Tada je

$$N = 100x + 10y + z, \qquad \text{1 bod}$$

a odgovarajući dvoznamenkasti brojevi su

$$10x + y,\ 10x + z,\ 10y + z,\ 10y + x,\ 10z + x \text{ i } 10z + y.$$

Iz uvjeta zadatka slijedi

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(10x + y + \ldots + 10z + y) = 100x + 10y + z && \text{1 bod} \\
&11(x + y + z) = 100x + 10y + z \\
&y + 10z = 89x. && \text{1 bod}
\end{aligned}$$

Na lijevoj je strani dvoznamenkasti broj, što znači da znamenka x može biti samo 1, tj. $x = 1$. 1 bod

Iz jednakosti $y + 10z = 89$ slijedi $z = 8$ i $y = 9$. 1 bod

Traženi broj sjedala je 198.

Zadatak B-1.6.

Riješite jednadžbu

$$\frac{x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16}{x^4 - 16} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{25 \cdot 26}.$$

Rješenje.

Pojednostavnimo lijevu stranu jednadžbe:

$$\begin{aligned}
&\frac{x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16}{x^4 - 16} = \frac{(x^2+4)^2 - 4x^3 - 16x}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} = && \text{2 boda} \\
&= \frac{(x^2+4)^2 - 4x(x^2+4)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} = \frac{(x^2+4)(x^2+4-4x)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} = && \text{2 boda} \\
&= \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-2}{x+2}. && \text{1 bod}
\end{aligned}$$

Pojednostavnimo desnu stranu jednadžbe:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{25 \cdot 26} = \\
&= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{25} - \frac{1}{26} = \\
&= 1 - \frac{1}{26} = \frac{25}{26}. && \text{3 boda}
\end{aligned}$$

Zadatak svodimo na rješavanje jednadžbe:

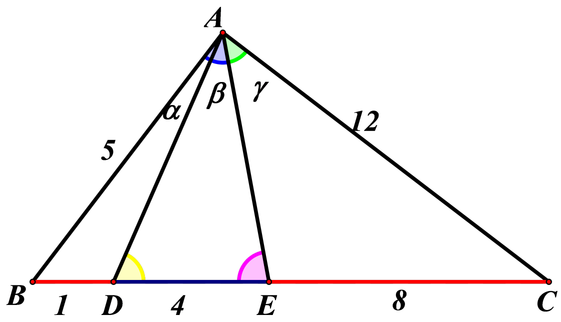
$$\begin{aligned}
&\frac{x-2}{x+2} = \frac{25}{26} \\
&\Rightarrow\ 26x - 52 = 25x + 50 \\
&\Rightarrow\ x = 102. && \text{2 boda}
\end{aligned}$$

Zadatak B-1.7.

Duljine stranica trokuta ABC su $|AB| = 5\,\text{cm}$, $|AC| = 12\,\text{cm}$, $|BC| = 13\,\text{cm}$. Na stranici $\overline{BC}$ odabrane su točke D i E tako da je $|BD| = 1\,\text{cm}$ i $|CE| = 8\,\text{cm}$. Odredite mjeru kuta $\sphericalangle DAE$.

Rješenje.

Označimo $\sphericalangle BAD = \alpha$, $\sphericalangle DAE = \beta$, $\sphericalangle CAE = \gamma$.



1 bod

Iz $5^2 + 12^2 = 13^2$ zaključujemo da je trokut ABC pravokutan. 1 bod

Uočimo sljedeće elemente trokuta ABC:

$$
\begin{aligned}
&|BE| = |BC| - |CE| = 13 - 8 = 5 = |AB| \\
&\Rightarrow\ \sphericalangle BAE = \sphericalangle AEB = \alpha + \beta, && \text{2 boda} \\
&|CD| = |CB| - |BD| = 13 - 1 = 12 \\
&\Rightarrow\ \sphericalangle CAD = \sphericalangle CDA = \beta + \gamma. && \text{2 boda}
\end{aligned}
$$

Tada u trokutu ADE vrijedi sljedeća jednakost

$$180^\circ = (\alpha + \beta) + (\beta + \gamma) + \beta = (\alpha + \beta + \gamma) + 2\beta.$$ 2 boda

Kako je trokut ABC pravokutan, vrijedi $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$. Dakle,

$$180^\circ = 90^\circ + 2\beta \ \Rightarrow\ \beta = 45^\circ.$$ 2 boda

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

26. siječnja 2017.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1.

Riješite jednadžbu $(x^2-6x)^2-2(x^2-6x+9)=81$.

Rješenje.

Uvedimo supstituciju $x^2-6x=t$. 1 bod

Tada početna jednadžba prelazi u:

$$
\begin{aligned}
&t^2-2(t+9)=81\\
\Rightarrow\ & t^2-2t-99=0.
\end{aligned}
$$

1 bod

Njezina su rješenja $t=-9$ i $t=11$. 1 bod

Slijedi $x^2-6x+9=0$ i $x^2-6x-11=0$. 1 bod

Rješenje prve jednadžbe je 3, a rješenja druge jednadžbe su $\frac{6\pm\sqrt{80}}{2}=3\pm2\sqrt{5}$. 2 boda

Zadatak B-2.2.

Dokažite da je vrijednost izraza $\dfrac{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}}$ prirodan broj.

Rješenje.

U brojniku danog razlomka stavit ćemo izraz u zagradi pod treći korijen, a u nazivniku uočimo kvadrat binoma ispod prvog korijena:

$$\frac{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt[3]{(7+5\sqrt{2})\left(\sqrt{2}-1\right)^3}}{\sqrt{1+2\sqrt{3}+3}-\sqrt{3}}$$

2 boda

$$=\frac{\sqrt[3]{(7+5\sqrt{2})\left(2\sqrt{2}-6+3\sqrt{2}-1\right)}}{\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}-\sqrt{3}}$$

1 bod

$$=\frac{\sqrt[3]{(5\sqrt{2}+7)(5\sqrt{2}-7)}}{1+\sqrt{3}-\sqrt{3}}$$

1 bod

$$=\frac{\sqrt[3]{(5\sqrt{2})^2-7^2}}{1}$$

1 bod

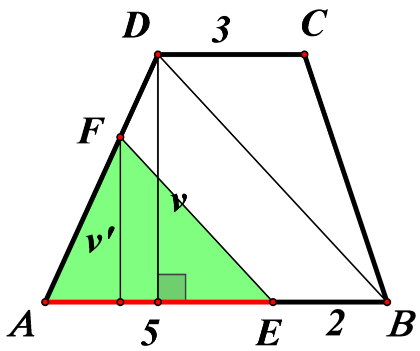
$$=\frac{\sqrt[3]{50-49}}{1}=1.$$

1 bod

Zadatak B-2.3.

U trapezu $ABCD$ kraća osnovica $\overline{CD}$ ima duljinu 3. Paralela s dijagonalom $\overline{BD}$ siječe veću osnovicu $\overline{AB}$ u točki E i krak $\overline{AD}$ u točki F. Ako je $|AE| = 5$ i $|BE| = 2$, u kojem su omjeru površina trokuta AEF i površina peterokuta $EBCDF$?

Rješenje.



Neka je a duljina veće osnovice trapeza i v duljina visine trapeza $ABCD$ i v' duljina visine trokuta ΔAEF. Tada je $a = 2 + 5 = 7$.

P površina trapeza $ABCD$ jednaka je

$$P(ABCD) = \frac{a+3}{2} \cdot v = \frac{7+3}{2} \cdot v = 5v,$$ 1 bod

a površina trokuta ΔAEF

$$P(\Delta AEF) = \frac{|AE| \cdot v'}{2} = \frac{5v'}{2}.$$ 1 bod

Iz sličnosti trokuta ΔABD i ΔAEF slijedi

$$|AB| : v = |AE| : v' \ \Rightarrow\ v' = \frac{5}{7}v.$$ 2 boda

Dakle,

$$\frac{P(\Delta AEF)}{P(EBCDF)} = \frac{\frac{5v'}{2}}{5v - \frac{5v'}{2}} = \frac{v'}{2v - v'} = \frac{\frac{5}{7}v}{2v - \frac{5}{7}v} = \frac{\frac{5}{7}v}{\frac{9}{7}v} = \frac{5}{9}.$$ 2 boda

Omjer površine trokuta ΔAEF i površine peterokuta $EBCDF$ je $5 : 9$.

Zadatak B-2.4.

Neka su z_1 i z_2 kompleksni brojevi takvi da je $|z_1 + 2z_2| = |2z_1 + z_2|$. Izračunajte $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$ uz uvjet da je $z_2 \neq 0$.

Prvo rješenje.

Kvadriramo li zadanu jednakost dobivamo sljedeći niz transformacija

$$\begin{aligned}
&|z_1 + 2z_2|^2 = |2z_1 + z_2|^2 && \\
&\Rightarrow\ (z_1 + 2z_2)(\overline{z_1 + 2z_2}) = (2z_1 + z_2)(\overline{2z_1 + z_2}) && \text{2 boda} \\
&\Rightarrow\ (z_1 + 2z_2)(\overline{z_1} + 2\overline{z_2}) = (2z_1 + z_2)(2\overline{z_1} + \overline{z_2}) && \text{1 bod} \\
&\Rightarrow\ |z_1|^2 + 2z_1\overline{z_2} + 2\overline{z_1}z_2 + 4|z_2|^2 = 4|z_1|^2 + 2z_1\overline{z_2} + 2\overline{z_1}z_2 + |z_2|^2 && \text{1 bod} \\
&\Rightarrow\ |z_1|^2 = |z_2|^2 \ \Rightarrow\ |z_1| = |z_2|. && \text{1 bod}
\end{aligned}$$

Kako je $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ slijedi $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = 1.$ 1 bod

Drugo rješenje.

Uvrstimo li u zadanu jednakost $z_1 = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ i $z_2 = c + di$, $c, d \in \mathbb{R}$ dobivamo sljedeći niz transformacija

$$\begin{aligned}
&|a + bi + 2(c + di)| = |2(a + bi) + c + di| && \text{1 bod} \\
&\Rightarrow\ \sqrt{(a + 2c)^2 + (b + 2d)^2} = \sqrt{(2a + c)^2 + (2b + d)^2}. && \text{2 boda}
\end{aligned}$$

Kvadriramo li prethodnu jednakost i pojednostavimo dobiveni izraz, dobijemo

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2, \qquad \text{1 bod}$$

odnosno

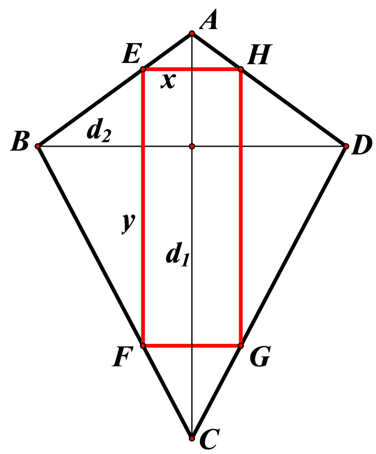
$$\Rightarrow\ |z_1|^2 = |z_2|^2 \ \Rightarrow\ |z_1| = |z_2|. \qquad \text{1 bod}$$

Kako je $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ slijedi $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = 1.$ 1 bod

Zadatak B-2.5.

U deltoid kojemu su duljine dijagonala $d_1 = 24\,\text{cm}$ i $d_2 = 8\,\text{cm}$ upisan je pravokutnik tako da su njegove stranice paralelne s dijagonalama deltoida. Odredite dimenzije tako upisanog pravokutnika koji ima najveću površinu.

Rješenje.



Neka su x i y stranice pravokutnika i neka je $y || d_1$, $x || d_2$. Uočimo trokute BCA i BFE. Prema poučku K-K,

$$\Delta BCA \sim \Delta BFE. \qquad \text{1 bod}$$

Stoga vrijedi:

$$\begin{aligned} d_1 : y &= \frac{d_2}{2} : \left(\frac{d_2}{2} - \frac{x}{2}\right) \\ &\Rightarrow\ 24 : y = 4 : \left(4 - \frac{x}{2}\right) && \text{1 bod} \\ &\Rightarrow y = 24 - 3x. && \text{1 bod} \end{aligned}$$

Površina pravokutnika je kvadratna funkcija stranice x:

$$\begin{aligned} P &= P(x) = x \cdot (24 - 3x) \\ P(x) &= 24x - 3x^2. && \text{1 bod} \end{aligned}$$

Ova kvadratna funkcija postiže maksimalnu vrijednost za

$$x_M = -\frac{24}{2 \cdot (-3)} = 4 \text{ cm}. \qquad \text{1 bod}$$

Slijedi da je $y_M = 24 - 3 \cdot 4 = 12$ cm. 1 bod

Dakle, najveću moguću površinu ima pravokutnik sa stranicom duljine $x = 4$ cm i $y = 12$ cm.

Zadatak B-2.6.

Koliko cjelobrojnih rješenja ima sustav nejednadžbi

$$\begin{aligned} |x^2 - 5x + 4| &\geqslant 2 \\ |x| &< 2017 \qquad ? \end{aligned}$$

Rješenje.

Riješimo nejednadžbu $|x^2 - 5x + 4| \geqslant 2$. (1) 1 bod

$$\begin{aligned} &|x^2 - 5x + 4| \geqslant 2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 \leqslant -2 \text{ ili } x^2 - 5x + 4 \geqslant 2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 \leqslant 0 \text{ ili } x^2 - 5x + 2 \geqslant 0. && \text{2 boda} \end{aligned}$$

Rješenje $x^2 - 5x + 6 \leqslant 0$ nejednažbe u skupu $\mathbb{R}$ je interval $[2, 3]$. 1 bod

Rješenje nejednažbe $x^2 - 5x + 2 \geqslant 0$ u skupu $\mathbb{R}$ je unija intervala $\left\langle -\infty, \frac{5-\sqrt{17}}{2}\right] \cup \left[\frac{5+\sqrt{17}}{2}, \infty\right\rangle$. 1 bod

Cjelobrojna rješenja nejednadžbe (1) su svi cijeli brojevi koji su unutar skupa $[2, 3] \cup \left\langle -\infty, \frac{5-\sqrt{17}}{2}\right] \cup \left[\frac{5+\sqrt{17}}{2}, \infty\right\rangle$, odnosno unutar skupa $A = \{..., -3, -2, -1, 0, 2, 3, 5, 6, 7, ...\}$. 1 bod

Rješenje nejednadžbe $|x| < 2017$ u skupu $\mathbb{R}$ je interval $\langle -2017, 2017\rangle$. 1 bod

Sva cjelobrojna rješenja iz tog intervala su u skupu

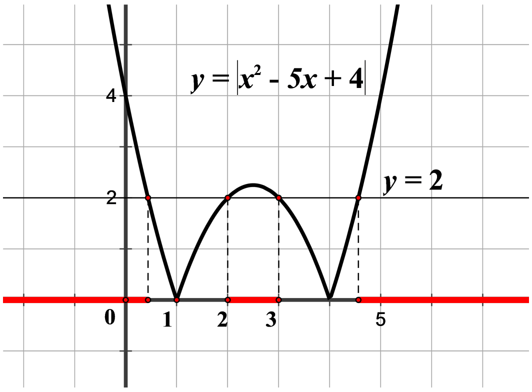
$$B = \{-2016, -2015, ..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., 2016\}. \qquad \text{1 bod}$$

Konačno rješenje danog sustava je

$$A \cap B = \{-2016, ..., -3, -2, -1, 0, 2, 3, 5, 6, 7, ..., 2016\}. \qquad \text{1 bod}$$

Broj elemenata tog skupa je $2016 + 1 + 2016 - 2 = 4031$. 1 bod

Napomena: Za rješenje nejednadžbe (1) možemo koristiti grafički prikaz funkcija $y = |x^2 - 5x + 4|$ i $y = 2$.



Rješenje u skupu $\mathbb{R}$ mora biti jasno označeno na x osi. 5 bodova

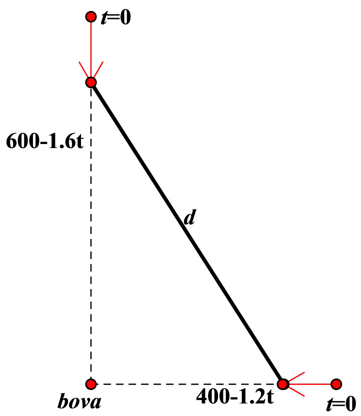
Cjelobrojna rješenja mogu biti ispisana ili samo prebrojana nakon ovog koraka ili nakon rješavanja i druge nejednadžbe.

Rješenje druge nejednadžbe, te konačno rješenje dobivamo kao i u prvom načinu rješavanja. 5 bodova

Zadatak B-2.7.

Mirko pliva sa sjeverne na južnu, a Slavko s istočne na zapadnu obalu jezera. U početnom trenutku promatranja, Mirko se nalazi 600 metara sjeverno, a Slavko 400 metara istočno od bove koja se nalazi negdje na sredini jezera. Oba plivača gibaju se jednoliko pravocrtno, Mirko brzinom $1.6\,\mathrm{m/s}$, a Slavko brzinom $1.2\,\mathrm{m/s}$. Nakon koliko vremena od početka promatranja će udaljenost između Mirka i Slavka biti najmanja moguća? Hoće li u trenutku kad je ta udaljenost najmanja, oba plivača preplivati razinu bove? Obrazložite svoj odgovor.

Rješenje.



Za t sekundi Mirko prepliva $1.6t$ metara, a Slavko $1.2t$ metara.

Tada je Mirko udaljen od bove $|600 - 1.6t|$ metara, a Slavko $|400 - 1.2t|$ metara. 2 boda

Udaljenost među njima je $d(t) = \sqrt{(600 - 1.6t)^2 + (400 - 1.2t)^2}$. 1 bod

Da bismo odredili u kojem će trenutku udaljenost između Mirka i Slavka biti najmanja, trebamo odrediti t za koji funkcija $f(t) = (600-1.6t)^2+(400-1.2t)^2$ postiže minimum. Uočimo da se radi o kvadratnoj funkciji $f(t) = 4t^2 - 2880t + 520000$, 2 boda

te da trebamo odrediti apsicu tjemena,

$$t_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{2880}{8} = 360\ s.$$ 1 bod

Za 360 sekundi, odnosno 6 minuta, udaljenost između Mirka i Slavka će biti najmanja moguća. 1 bod

Mirko za 6 minuta prepliva $1.6 \cdot 360 = 576$ metara, a Slavko $1.2 \cdot 360 = 432$ metra. 1 bod

Kako je Mirko na početku promatranja bio udaljen od bove 600 metara, a Slavko 400 metara, to znači da nakon 6 minuta kad je udaljenost između njih najmanja moguća Mirko još uvijek nije doplivao do razine bove, a Slavko je preplivao razinu bove. 2 boda

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

26. siječnja 2017.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1.

Odredite sve troznamenkaste brojeve koji pri dijeljenju s dva daju ostatak 1, pri dijeljenju s tri daju ostatak 2, a pri dijeljenju sa četiri daju ostatak 3. Koliko ima takvih brojeva?

Rješenje.

Neka je n traženi broj.

Prema uvjetima zadatka možemo pisati $n = 2a + 1$, $n = 3b + 2$, $n = 4c + 3$. 1 bod

Ako se traženom broju n doda jedinica, $n + 1$ će očito biti djeljiv s 2, 3 i 4, odnosno biti će djeljiv s 12. 1 bod

Zato je $n + 1$ oblika $12k$, odnosno n je oblika $12k - 1$. 1 bod

Kako je n troznamenkasti broj, vrijedi $100 \leqslant 12k - 1 < 1000$ gdje je $9 \leqslant k \leqslant 83$. 1 bod

Traženi su brojevi $107, 119, ..., 995$. 1 bod

Ima ih 75. 1 bod

Zadatak B-3.2.

Odredite sve vrijednosti realnog parametra a tako da jednadžba $4^x - (a+3)\,2^x + 4(a-1) = 0$ ima točno jedno realno rješenje.

Rješenje.

Uvedemo li supstituciju $2^x = t$ dobit ćemo kvadratnu jednadžbu

$$t^2 - (a+3)t + 4a - 4 = 0. \quad (*)$$

Ova jednadžba mora imati samo jedno pozitivno rješenje.

To se može dogoditi u dva slučaja:

1. Jednadžba $(*)$ ima samo jedno rješenje, koje mora biti pozitivno, odnosno vrijedi $D = 0$ i $t > 0$. Slijedi

   $$(a+3)^2 - 4(4a-4) = 0 \text{ i } \frac{a+3}{2} > 0$$ 1 bod

   $$\Leftrightarrow a^2 - 10a + 25 = 0 \text{ i } a > -3$$

   $$\Leftrightarrow a = 5 \text{ i } t = 4.$$ 1 bod

   Tada je $2^x = 4 \;\Rightarrow\; x = 2$. 1 bod

2. Jednadžba $(*)$ ima dva rješenja, ali samo je jedno pozitivno. 1 bod

   Treba vrijediti: $D > 0$ i $t_1 \cdot t_2 \leqslant 0$.

   Iz prvog slučaja vidimo da je $D > 0$ za sve $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 5$.

   Prema Vieteovim formulama je $t_1 \cdot t_2 = 4a - 4$ pa slijedi $4a - 4 \leqslant 0 \ \Rightarrow \ a \leqslant 1$. 1 bod

Konačno rješenje zadatka je $a \in \langle -\infty, 1] \cup \{5\}$. 1 bod

Zadatak B-3.3.

Ako je $\sin x + \cos x = a$, $|a| \leqslant \sqrt{2}$, koliko je $\dfrac{1+\cos 2x}{\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{2}}$?

Rješenje.

Zapišimo izraz $\dfrac{1+\cos 2x}{\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{2}}$ u jednostavnijem obliku:

$$\frac{1+\cos 2x}{\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \frac{1+\cos 2x}{\frac{1+\cos x}{\sin x} - \frac{1-\cos x}{\sin x}} = \qquad \text{1 bod}$$

$$= \frac{(1 + 2\cos^2 x - 1)\sin x}{1 + \cos x - 1 + \cos x} = \qquad \text{1 bod}$$

$$= \frac{2\cos^2 x \sin x}{2\cos x} = \cos x \sin x. \qquad \text{1 bod}$$

Slijedi

$$\sin x + cosx = a \ \Rightarrow \ (\sin x + \cos x)^2 = a^2 \qquad \text{1 bod}$$

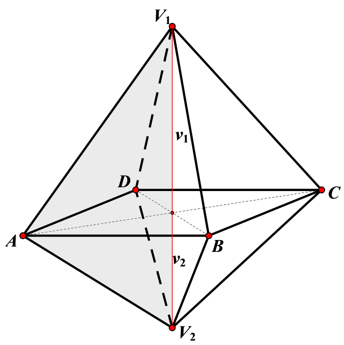
$$\Rightarrow \ 1 + 2\sin x \cos x = a^2 \qquad \text{1 bod}$$

$$\Rightarrow \ \sin x \cos x = \frac{a^2 - 1}{2}. \qquad \text{1 bod}$$

Zadatak B-3.4.

Kvadrat stranice $a = 6\sqrt{2}$ je zajednička baza dvjema pravilnim piramidama. Oko ovako nastalog tijela može se opisati sfera koja prolazi kroz sve njegove vrhove. Ako je visina jedne piramide 9, odredite ukupni obujam tog tijela.

Rješenje.



Promotrimo presjek sfere i ravnine AV_2V_1. Dobit ćemo kružnicu koja prolazi vrhovima A, V_2, C, V_1 promjera $\overline{V_2V_1}$. Stoga je trokut AV_2V_1 pravokutan. 1 bod

Dijagonala danog kvadrata je $d = a\sqrt{2} = 12$. 1 bod

Primjenit ćemo Euklidov poučak na pravokutni trokut AV_2V_1 i izračunati duljinu visine druge piramide:

$$\frac{d}{2} = \sqrt{v_1 \cdot v_2} \Rightarrow 6 = \sqrt{9v_2} \Rightarrow v_2 = 4.$$ 2 boda

Obujam nastalog tijela jednak je

$$V = \frac{1}{3}a^2v_1 + \frac{1}{3}a^2v_2 = \frac{1}{3}a^2(v_1 + v_2)$$ 1 bod

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 72 \cdot 13 = 312.$$ 1 bod

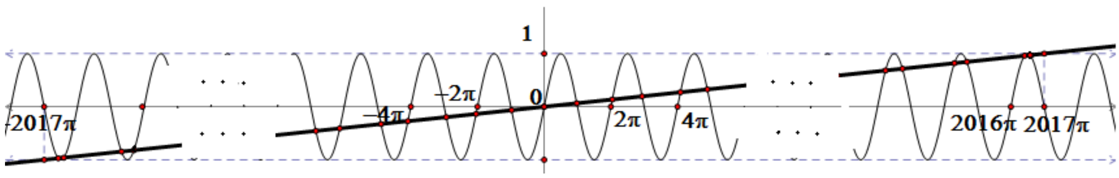
Zadatak B-3.5.

Odredite broj realnih rješenja jednadžbe $\sin x = \dfrac{x}{2017\pi}$.

Rješenje.

Broj rješenja dane jednadžbe ćemo odrediti iz grafičkog prikaza funkcija $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \frac{x}{2017\pi}$.

Broj rješenja jednak je broju točaka u kojima se sijeku grafovi funkcija f i g.



2 boda

Kako je $|\sin x| \leqslant 1$, grafovi se mogu sjeći samo na intervalu $[-2017\pi, 2017\pi]$ jer je $g(-2017\pi) = -1$ i $g(2017\pi) = 1$. 1 bod

Pravac $y = \frac{x}{2017\pi}$ siječe graf funkcije f u 2 točke na osnovnom periodu od 2π. 1 bod

Kako je $2017\pi = 1008 \cdot 2\pi + \pi$, na intervalu $[0, 2017\pi]$ ima $1008 \cdot 2 + 2 = 2018$ sjecišta. Analogno, na intervalu $[-2017\pi, 0]$ ima također 2018 sjecišta. 1 bod

Pri tome smo ishodište brojali dva puta, pa je konačan broj realnih rješenja dane jednadžbe $2 \cdot 2018 - 1 = 4035$. 1 bod

Zadatak B-3.6.

Neka je $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{\sin x} + \dfrac{\cos 3x}{\cos x}$.

(a) Riješite jednadžbu $f(x) = 2$.

(b) Odredite intervale realnih brojeva x za koje funkcija f poprima pozitivnu vrijednost.

Rješenje.

Prvo funkciju zapišemo u obliku:

$$f(x)=\frac{\sin 3x}{\sin x}+\frac{\cos 3x}{\cos x}=\frac{\sin 3x\cdot\cos x+\cos 3x\cdot\sin x}{\sin x\cdot\cos x}=\frac{\sin 4x}{\sin x\cdot\cos x}.$$ 2 boda

Ova funkcija nije definirana za realne brojeve za koje je $\sin x\cdot\cos x=0$.

Zato mora biti $x\neq\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$. $(*)$ 1 bod

Sada je

$$f(x)=\frac{\sin 4x}{\sin x\cdot\cos x}=\frac{2\sin 2x\cdot\cos 2x}{\sin x\cdot\cos x}=\frac{2\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x}{\sin x\cdot\cos x}=4\cos 2x.$$ 2 boda

(a) Treba riješiti jednadžbu $4\cos 2x=2$. Slijedi $\cos 2x=\frac{1}{2}$.
Rješenja su: $2x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, odnosno $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. 2 boda

(b) Funkcija će biti pozitivna ako je $4\cos 2x>0$, odnosno ako je

$$2x\in\left\langle-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\rangle,\ k\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow\ x\in\left\langle-\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi\right\rangle,\ k\in\mathbb{Z}.$$ 1 bod

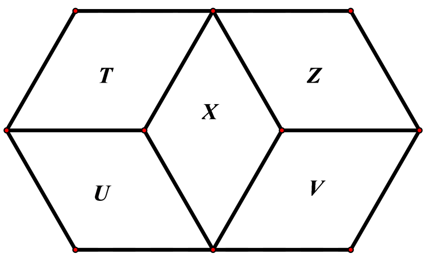
Zbog $(*)$ funkcija poprima pozitivne vrijednosti za sve realne brojeve iz intervala

$$x\in\left\langle-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\pi\right\rangle\cup\left\langle k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi\right\rangle,\ k\in\mathbb{Z}.$$ 2 boda

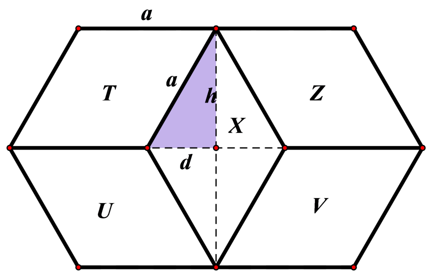
Napomena: Ukoliko je učenik rješavao jednadžbu i nejednadžbu bez da je prethodno napisao funkciju u obliku $f(x)=4\cos 2x$, već je svaki od zadataka (a) i (b) rješavao posebno, tada svaki dio zadatka nosi 5 bodova. U zadatku (a) skinuti 1 bod ukoliko se nije vodilo računa o domeni funkcije, jer se i u tom slučaju može dobiti točno rješenje.

Zadatak B-3.7.

U jednoj slagalici treba složiti šesterokut od 5 dijelova u obliku romba, kao što je prikazano na slici. Dijelovi T, U, V i Z su sukladni i svaki ima površinu $\sqrt{2017}$. Dio označen s X se zagubio i Ana želi napraviti novi. Radi preciznosti i lakše izrade neka je površina tog dijela cijeli broj P. Koliko različitih vrijednosti može poprimiti broj P? Od svih takvih dijelova X odredite onaj s najvećom površinom, a kojemu su duljine dijagonala racionalni brojevi.



Prvo rješenje.



Površina romba X je

$$P = 4 \cdot \frac{d \cdot h}{2} = 2dh = 2h\sqrt{a^2 - h^2} = \sqrt{4h^2a^2 - 4h^4}.$$ 2 boda

Iz površine sukladnih rombova $a \cdot h = \sqrt{2017} \Rightarrow a^2h^2 = 2017$, te vrijedi 1 bod

$$P = \sqrt{4 \cdot 2017 - 4h^4} = \sqrt{8068 - 4h^4}.$$ 1 bod

Broj P je cijeli broj samo ako je ispod korijena kvadrat cijelog broja. 1 bod

Kako je $8100 = 90^2$ i $7921 = 89^2$, ima najviše 89 traženih brojeva. 2 boda

Najveća vrijednost koju P može poprimiti je 89, a zatim redom 88, 87,...

Za $P = 89$ duljina dijagonale $2h$ nije racionalan broj. 1 bod

Ako je $P = 88$ tada je

$$4h^4 = 8068 - 88^2 = 324 \Rightarrow h = 3 \Rightarrow d = \frac{P}{2h} = \frac{44}{3}.$$ 2 boda

Drugo rješenje.

Označimo šiljasti kut romba T s α, a stranicu s a.

Tada je $a^2 \sin\alpha = \sqrt{2017}$. 1 bod

Površinu romba X računamo na sljedeći način:

$$P = a^2 \sin(180^\circ - 2\alpha) = a^2 \sin 2\alpha =$$ 1 bod

$$= a^2 \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \sqrt{2017}\cos\alpha =$$ 1 bod

$$= 2 \cdot \sqrt{2017}\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = 2 \cdot \sqrt{2017} \cdot \sqrt{1 - \frac{2017}{a^4}} =$$

$$= 2\sqrt{2017 - \frac{2017^2}{a^4}}.$$ 1 bod

Kako P mora biti pozitivan cijeli broj vrijedi

$$4\left(2017 - \frac{2017^2}{a^4}\right) = P^2, \ P \in \mathbb{N}$$ 1 bod

$$\Rightarrow 4 \cdot 2017 - P^2 = 4 \cdot \frac{2017^2}{a^4}$$

$$4 \cdot 2017 - P^2 > 0 \Rightarrow 1 \leqslant P \leqslant 89.$$ 1 bod

Takvih brojeva ima 89. 1 bod

Dijagonale romba X računamo kao i u prvom rješenju. 3 boda

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

26. siječnja 2017.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1.

U kojem brojevnom sustavu vrijedi jednakost $\sqrt{2521} - \sqrt{2400} = 1$?

Rješenje.

Bazu traženog brojevnog sustava označimo s b. Očito je $b > 5$. 1 bod

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2521} - \sqrt{2400} = 1\\
&\Rightarrow\ \sqrt{2521} = 1 + \sqrt{2400}\ /^2\\
&\Rightarrow\ 2521 - 1 - 2400 = 2\sqrt{2400}\\
&\Rightarrow\ 120 = 2\sqrt{2400}
\end{aligned}$$

Ova jednakost zapisana u sustavu s bazom b je

$$b^2 + 2b = 2\sqrt{2b^3 + 4b^2}\ /^2 \qquad \text{2 boda}$$

$$\Rightarrow\ b^4 - 4b^3 - 12b^2 = 0$$

$$\Rightarrow\ b^2 \cdot (b^2 - 4b - 12) = 0. \qquad \text{2 boda}$$

Rješenja ove jednadžbe su $b_1 = 0$, $b_2 = -2$, $b_3 = 6$.

Baza traženog brojevnog sustava je $b = 6$. 1 bod

Zadatak B-4.2.

Koliko ima racionalnih članova u razvoju binoma $\left(\sqrt[6]{20} - \sqrt[4]{17}\right)^{2016}$?

Rješenje.

Binomni razvoj ima 2017 članova i svi su oblika:

$$\binom{2016}{k}\left(\sqrt[6]{20}\right)^{2016-k}\left(-\sqrt[4]{17}\right)^k, \quad k \in \{0, 1, 2, ..., 2016\}. \qquad \text{2 boda}$$

Da bi neki član bio racionalan, brojevi $\left(\sqrt[6]{20}\right)^{2016-k}$ i $\left(-\sqrt[4]{17}\right)^k$ moraju biti racionalni, što je moguće samo ako su $\frac{2016-k}{6}$ i $\frac{k}{4}$ cijeli brojevi.

Zaključujemo da broj k mora biti djeljiv i sa 4 i sa 6, odnosno s 12. 2 boda

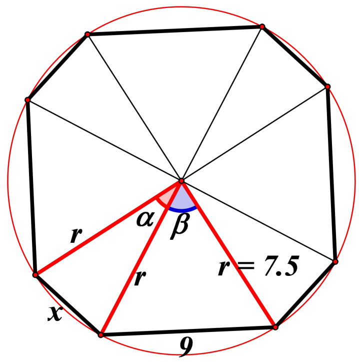
Od 0 do 2016 ima $1 + \frac{2016}{12}$ brojeva djeljivih s 12.

Dakle, ima ukupno 169 racionalnih članova. 2 boda

Zadatak B-4.3.

U vodenom parku je veliki bazen u obliku osmerokuta kojemu se može opisati kružnica promjera 15 metara. Poznato je da svaka druga stranica bazena ima duljinu 9 metara, a za preostale se četiri stranice zna da su jednake, ali nepoznate duljine. Vlasnici parka trebaju naručiti platno kojim će prekriti bazen. Koliku minimalnu površinu mora imati to platno i koliku duljinu ima nepoznata stranica bazena?

Prvo rješenje.



$$4\alpha + 4\beta = 360^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta = 90^\circ$$ 1 bod

Po poučku o kosinusu vrijedi

$$\cos\beta = \frac{7.5^2 + 7.5^2 - 9^2}{2 \cdot 7.5 \cdot 7.5} = \frac{7}{25}$$ 1 bod

$$\Rightarrow \quad \sin\beta = \cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2} = \frac{24}{25}.$$ 1 bod

Površina danog osmerokuta je četiri površine jednakokračnog trokuta s osnovicom duljine 9 i četiri površine jednakokračnog trokuta s osnovicom duljine x:

$$P = 4 \cdot \frac{1}{2}(r^2 \sin\alpha + r^2 \sin\beta) = 2r^2(\cos\beta + \sin\beta) = 2 \cdot 7.5^2 \cdot \left(\frac{7}{25} + \frac{24}{25}\right) = \frac{225}{2} \cdot \frac{31}{25} = \frac{279}{2}.$$ 2 boda

Duljinu nepoznate stranice možemo također izračunati po poučku o kosinusu.

$$x^2 = 7.5^2 + 7.5^2 - 2 \cdot 7.5 \cdot 7.5 \cdot \cos\alpha = \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3\sqrt{2}}{2}\text{m}.$$ 1 bod

Drugo rješenje.

Uočimo da vrijede sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned}
&\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{x}{15}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \;\Rightarrow\; \cos\alpha=\frac{225-2x^2}{225}\\
&\sin\frac{\beta}{2}=\frac{3}{5}=\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}} \;\Rightarrow\; \cos\beta=\frac{7}{25}\\
&4\alpha+4\beta=360^\circ \;\Rightarrow\; \alpha+\beta=90^\circ \;\Rightarrow\; \cos\beta=\sin(90^\circ-\beta)=\sin\alpha
\end{aligned}$$

2 boda

Kako je $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ slijedi da je

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{7}{25}\right)^2+\left(\frac{225-2x^2}{225}\right)^2=1\\
&\Rightarrow\;\left(\frac{225-2x^2}{225}\right)^2=\left(\frac{24}{25}\right)^2 \;\Rightarrow\; \frac{225-2x^2}{225}=\frac{24}{25}\\
&\Rightarrow\; 225-2x^2=216 \;\Rightarrow\; x^2=\frac{9}{2} \;\Rightarrow\; x=\frac{3\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

2 boda

Površinu bazena računamo kao i u prvom rješenju ili koristeći visine danih trokuta. U tom su slučaju visine danih trokuta $v_1=6$, $v_2=\frac{21\sqrt{2}}{4}$, a odgovarajuće površine

$$P_1=27,\; P_2=\frac{63}{8} \;\Rightarrow\; P=4\left(27+\frac{63}{8}\right)=\frac{279}{2}.$$

2 boda

Zadatak B-4.4.

Odredite skup svih točaka iz kojih se hiperbola $16x^2-25y^2=400$ vidi pod pravim kutom.

Rješenje.

Tražimo skup točaka u kojima su tangente na hiperbolu okomite.

Neka je tangenta pravac s jednadžbom $y=kx+l$.

Koristeći uvjet dodira pravca i hiperbole te $l=y-kx$ dobivamo

$$25k^2-16=(y-kx)^2.$$

2 boda

Nakon kvadriranja dobivenu jednakost $25k^2-16=y^2-2kxy+k^2x^2$ zapišemo kao kvadratnu jednadžbu po k:

$$(25-x^2)k^2+2xyk-16-y^2=0.$$

Kako tangente moraju biti okomite, vrijedi $k_1\cdot k_2=-1$. 2 boda

Iz Vieteovih formula slijedi

$$\frac{-16-y^2}{25-x^2}=-1 \;\Rightarrow\; x^2+y^2=9.$$

Sve tražene točke leže na kružnici sa središtem u ishodištu i polumjerom 3. 2 boda

Zadatak B-4.5.

Odredite sve proste brojeve p i q za koje vrijedi jednakost

$$5p^3 - 8q + 5p - 10 = 0.$$

Rješenje.

Zapišimo danu jednakost u obliku

$$5(p^3 + p - 2) = 8q.$$

Zaključujemo da q mora biti djeljiv s 5, a kako je 5 jedini prost broj djeljiv s 5, nužno je $q = 5$. 2 boda

Sada je $5(p^3 + p - 2) = 40$, odnosno $p^3 + p - 10 = 0$. 1 bod

Ako polinom s lijeve strane jednakosti ima cjelobrojne nultočke, one moraju biti među djeliteljima slobodnog člana, odnosno neki od brojeva ±1, ±2, ±5, ±10. 1 bod

Kako je p prost broj jedine su mogućnosti: $p = 2$ ili $p = 5$. 1 bod

Jednostavnom provjerom slijedi $p = 2$. 1 bod

Dakle, brojevi $p = 2$ i $q = 5$ jedini su prosti brojevi za koje vrijedi dana jednakost.

Napomena: Zadnja tri boda učenik može dobiti i koristeći rastav polinoma na faktore:

$$(p-2)(p^2 + 2p + 5) = 0.$$ 1 bod

Kako jednadžba p^2+2p+5 nema rješenja u skupu prostih brojeva, jedina je mogućnost da je $p = 2$. 2 boda

Zadatak B-4.6.

Izračunajte površinu lika kojemu su vrhovi rješenja sljedeće jednadžbe u skupu $\mathbb{C}$:

$$\left(\frac{z}{z+1}\right)^2 + \left(\frac{z}{z-1}\right)^2 = -1.$$

Prvo rješenje.

Množimo li jednadžbu s $(z^2-1)^2$ dobivamo

$$z^2(z-1)^2 + z^2(z+1)^2 = -(z^2-1)^2.$$ 1 bod

odnosno, nakon sređivanja

$$z^4 = -\frac{1}{3}.$$ 2 boda

. Rješenja su svi kompleksni brojevi z za koje vrijedi

$$z^4 = \frac{1}{3}(\cos\pi + i\sin\pi)$$ 2 boda

$$\Rightarrow \quad z_k = \frac{\sqrt[4]{27}}{3}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right), \; k = 0, 1, 2, 3.$$ 2 boda

Brojevi z_0, z_1, z_2, z_3 su vrhovi kvadrata u kompleksnoj ravnini koji leže na kružnici polumjera $r = \frac{\sqrt[4]{27}}{3}$. 1 bod

Površina dobivenog kvadrata je

$$P = \frac{d^2}{2} = \frac{(2r)^2}{2} = 2r^2 = 2\left(\frac{\sqrt[4]{27}}{3}\right)^2 = \frac{2\sqrt{3}}{2}.$$ 2 boda

Drugo rješenje.

Vrijedi

$$\left(\frac{z}{z+1}\right)^2 + \left(\frac{z}{z-1}\right)^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z}{z+1} + \frac{z}{z-1}\right)^2 - 2\frac{z^2}{z^2-1} + 1 = 0$$ 1 bod

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2z^2}{z^2-1}\right)^2 - 2\frac{z^2}{z^2-1} + 1 = 0.$$ 1 bod

Neka je $t = \frac{2z^2}{z^2-1}$. Tada je $t^2 - t + 1 = 0$. Rješenja te jednadžbe su

$$t_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \; t_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$ 1 bod

pa je

$$\frac{2z^2}{z^2-1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow\; z^2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}i$$

$$\frac{2z^2}{z^2-1} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow\; z^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}i.$$ 1 bod

Sada koristeći trigonometrijski prikaz dobivamo

$$z^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$z^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$ 1 bod

Rješenja jednadžbe su stoga

$$z_{1,2} = \frac{\sqrt[4]{27}}{3}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{2}\right)$$ 1 bod

$$z_{3,4} = \frac{\sqrt[4]{27}}{3}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right),$$ 1 bod

odnosno

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \frac{\sqrt[4]{27}}{3}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt[4]{27}}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\\
z_2 &= \frac{\sqrt[4]{27}}{3}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt[4]{27}}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\\
z_3 &= \frac{\sqrt[4]{27}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt[4]{27}}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\\
z_4 &= \frac{\sqrt[4]{27}}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt[4]{27}}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right).
\end{aligned}
$$

Uočimo da su točke pridružene brojevima z_1, z_2, z_3, z_4 vrhovi kvadrata koji leže na kružnici polumjera $r = \frac{\sqrt[4]{27}}{3}$. Površina dobivenog kvadrata je 1 bod

$$P = \frac{d^2}{2} = \frac{(2r)^2}{2} = 2r^2 = 2\left(\frac{\sqrt[4]{27}}{3}\right)^2 = \frac{2\sqrt{3}}{2}.$$ 2 boda

Napomena: Ako učenik nije ispisao pojedinačno sva rješenja dane jednadžbe ne treba oduzimati bodove.

Napomena: Do iste smo površine mogli doći i pomoću formule $P = a^2$. U tom je slučaju

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2}d = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2r = r\sqrt{2} = \frac{\sqrt[4]{27}}{3}\cdot\sqrt{2}.$$

Zadatak B-4.7.

Odredite sve prirodne brojeve x koji su rješenje nejednadžbe

$$\log_x^4 2017 + 6\cdot\log_x^2 2017 > 4\cdot\log_x^3 2017 + 4\cdot\log_x 2017.$$

Prvo rješenje.

Uvjet za rješenje zadatka je $x \neq 1$. 1 bod

Prebacimo sve članove dane nejednadžbe na lijevu stranu

$$\log_x^4 2017 - 4\cdot\log_x^3 2017 + 6\cdot\log_x^2 2017 - 4\cdot\log_x 2017 > 0.$$

Ako dodamo 1 na obe strane nejednadžbe dobit ćemo na lijevoj strani razvoj četvrte potencije binoma:

$$\log_x^4 2017 - 4\cdot\log_x^3 2017 + 6\cdot\log_x^2 2017 - 4\cdot\log_x 2017 + 1 > 1.$$ 1 bod

Tada početna nejednadžba prelazi u

$$(\log_x 2017 - 1)^4 > 1.$$ 1 bod

Ova je nejednadžba ekvivalentna nejednadžbi

$$(\log_x 2017 - 1)^2 > 1. \qquad \text{1 bod}$$

Slijedi

$$\begin{aligned} &|\log_x 2017 - 1| > 1 && \text{1 bod} \\ &\Leftrightarrow\ \log_x 2017 - 1 < -1 \text{ ili } \log_x 2017 - 1 > 1 \\ &\Leftrightarrow\ \log_x 2017 < 0 \text{ ili } \log_x 2017 > 2. && \text{1 bod} \end{aligned}$$

Kako je baza $x > 1$, $\log_x 2017$ je pozitivan broj te je jedina mogućnost $\log_x 2017 > 2$. 1 bod

Slijedi

$$2017 > x^2 \ \Rightarrow\ |x| < \sqrt{2017}. \qquad \text{1 bod}$$

Kako je $x > 1$, slijedi $x < \sqrt{2017}$. 1 bod

Prirodni brojevi koji su rješenje dane nejednadžbe su svi prirodni brojevi veći od 1, a manji od $\sqrt{2017}$, odnosno $x \in \{2, 3, 4, 5, 6, \ldots, 44\}$. 1 bod

Drugo rješenje.

Uvjet za rješenje zadatka je $x \neq 1$. 1 bod

Uvedimo supstituciju $t = \log_x 2017$.

Uočimo da je broj t uvijek pozitivan jer je x prirodan broj veći od 1. (Logaritam broja većeg od 1, po bazi većoj od 1, uvijek je pozitivan.) 1 bod

Početna nejednadžba prelazi u

$$\begin{aligned} &t^4 + 6t^2 > 4t^3 + 4t \\ &\Leftrightarrow\ t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t > 0 \\ &\Leftrightarrow\ t(t^3 - 4t^2 + 6t - 4) > 0 \\ &\Leftrightarrow\ t(t^3 - 2t^2 - 2t^2 + 4t + 2t - 4) > 0 && \text{1 bod} \\ &\Leftrightarrow\ t(t^2(t-2) - 2t(t-2) + 2(t-2)) > 0 \\ &\Leftrightarrow\ t(t-2)(t^2 - 2t + 2) > 0 && \text{2 boda} \end{aligned}$$

Trinom $t^2 - 2t + 2$ ima pozitivnu vrijednost za sve realne brojeve t. Ranije smo uočili da i broj t ima uvijek pozitivnu vrijednost. Stoga je posljednja nejednakost ekvivalentna s

$$t - 2 > 0 \ \Leftrightarrow\ t > 2. \qquad \text{1 bod}$$

Tada je $\log_x 2017 > 2$, što uz uvjet $x > 1$ daje $2017 > x^2$. 1 bod

Slijedi $|x| < \sqrt{20117}$, što opet zbog $x > 1$ daje 1 bod

$$x < \sqrt{2017}. \qquad \text{1 bod}$$

Rješenja su brojevi $x \in \{2, 3, 4, 5, 6, \ldots, 44\}$. 1 bod

Napomena: Ako je učenik na početku zaboravio napisati uvjet $x \neq 1$, ali je u rješenju izostavio broj 1 ne treba oduzimati bod za nenapisani uvjet. Učenik može i u prvom ponuđenom rješenju koristiti supstituciju te koristeći razliku kvadrata doći do rastava na faktore kao u drugom rješenju. U svakom slučaju svođenje početne nejednadžbe na $\log_x 2017 > 2$ vrijedi 6 bodova, a njezino rješavanje i konačno rješenje zadatka 4 boda.