Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO / GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

24. siječnja 2011.

1. **(4)** Ako pola ekipe radnika za trećinu dana obavi četvrtinu posla, koliko će ekipa uz iste uvjete obaviti 15 poslova za pet dana?

2. **(4)** U trokutu ABC vrijedi $\sphericalangle BAC = 120°$. Točka D nalazi se unutar trokuta tako da vrijedi $\sphericalangle DBC = 2\sphericalangle ABD$ i $\sphericalangle DCB = 2\sphericalangle ACD$. Izračunaj mjeru kuta $\sphericalangle BDC$.

3. **(4)** Marko danas slavi rođendan. Njegov otac Joško i djed Luka razgovaraju:

– Sada su i Markov i tvoj i moj broj godina prosti brojevi!

– Da, a za pet godina sva tri će biti kvadrati prirodnih brojeva.

Koliko je godina imao Luka na dan Markovog rođenja?

4. **(4)** Neka su a, b i c realni brojevi takvi da je

$$a+b+c=3 \qquad \text{i} \qquad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0.$$

Koliko je $a^2+b^2+c^2$?

5. **(4)** Koliko najmanje elemenata treba izbaciti iz skupa $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$ tako da umnožak preostalih elemenata bude kvadrat prirodnog broja?

6. **(10)** Zbroj duljina krakova trapeza iznosi $4\sqrt{10}$, a duljina visine 6. Površina trapeza je 72. Ako je taj trapez upisan u kružnicu, odredi polumjer te kružnice.

7. **(10)** Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 2011 koji su djeljivi barem jednim od brojeva 2 i 7, a nisu djeljivi brojem 5?

8. **(10)** Dokaži da ne postoje neparni cijeli brojevi x, y i z za koje vrijedi

$$(x-z)^2+(y-z)^2=(x+y)^2\,.$$

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO / GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

24. siječnja 2011.

1. **(4)** Odredi sve prirodne brojeve n za koje je $\dfrac{n-1}{n-5}$ cijeli broj.

2. **(4)** Neka je $ABCD$ kvadrat stranice 1. Kružnica k ima polumjer 1 i središte u točki C. Odredi polumjer kružnice k_1 koja dira kružnicu k i dužine $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$.

3. **(4)** Odredi sve realne brojeve a takve da, za svaki realan broj x, vrijedi

$$\frac{x}{x^2+2x+3} > \frac{x+a}{1+x+x^2}.$$

4. **(4)** Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi

$$|z| = |z+1| = \left|\frac{1}{z}\right|.$$

5. **(4)** Mario je napisao 30-znamenkasti prirodni broj čiji je zbroj znamenaka 123. Zatim je iza tog broja dopisao još jednom sve njegove znamenke u nekom drugom poretku. Dokaži da dobiveni 60-znamenkasti broj nije kvadrat prirodnog broja.

6. **(10)** Neka su a, b i c tri različita realna broja od kojih niti jedan nije jednak nula. Promatramo kvadratne jednadžbe:

$$ax^2+bx+c=0, \quad bx^2+cx+a=0, \quad cx^2+ax+b=0.$$

Ako je $\dfrac{c}{a}$ rješenje prve jednadžbe, dokaži da sve tri jednadžbe imaju zajedničko rješenje. Odredi umnožak drugih triju rješenja tih jednadžbi (ne-zajedničkih).

7. **(10)** U četverokutu $ABCD$ vrijedi

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = 90^\circ, \quad |AB| = |BC|, \quad |CD| + |DA| = m.$$

Odredi površinu četverokuta $ABCD$ u ovisnosti o m.

8. **(10)** Ivan, Stipe i Tonći izmjenjuju se u bacanju kockice. Prvi baca Ivan, onda Stipe pa Tonći, i nakon toga opet Ivan i tako dalje istim redom. Svaki od njih, kad je njegov red, baca kockicu jednom, sve dok ne dobije prvu "šesticu". Nakon što dobije svoju prvu šesticu, u svakom idućem bacanju Ivan baca kockicu četiri, Stipe šest, a Tonći osam puta.

Tonći je zadnji dobio prvu šesticu, u svom desetom bacanju, i tada je igra završila. Ako je kockica bačena 47 puta, odredi tko je od njih kockicu bacao najviše puta.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO / GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

24. siječnja 2011.

1. **(4)** Ako je $\log_a x = 3$ i $\log_{ab} x = 2$, koliko je $\log_b x$?

2. **(4)** Koliki najviše može biti omjer troznamenkastog broja i zbroja njegovih znamenaka?

3. **(4)** Točka D je nožište visine iz vrha A, a točka E nožište visine iz vrha B trokuta ABC. Ako je $|AE| = 5$, $|CE| = 3$ i $|CD| = 2$, odredi duljinu $|BD|$.

4. **(4)** Odredi minimalnu vrijednost izraza

$$\sin(x+3) - \sin(x+1) - 2\cos(x+2)$$

za $x \in \mathbb{R}$.

5. **(4)** U svako polje kvadratne ploče 4×4 upiši po jedno od četiri slova: A, B, C, D i po jedan od četiri broja: 1, 2, 3, 4 tako da budu ispunjeni sljedeći uvjeti:

(a) u svakom retku i u svakom stupcu svako od tih slova i svaki od tih brojeva pojavljuje se točno jednom,

(b) na ploči se svaka kombinacija (par) jednog slova i jednog broja nalazi na točno jednom polju.

6. **(10)** U pravokutnom trokutu simetrala jednog šiljastog kuta dijeli nasuprotnu katetu na dijelove duljina 4 i 5. Kolika je površina tog trokuta?

7. **(10)** Neka su a, b, c realni brojevi i neka je $a \neq 0$. Dokaži da barem jedna od jednadžbi

$$a\sin x + b\cos x + c = 0,$$
$$a\operatorname{tg} y + b\operatorname{ctg} y + 2c = 0$$

ima realna rješenja.

8. **(10)** Odredi sve cijele brojeve a za koje je $\log_2\left(1 + a + a^2 + a^3\right)$ također cijeli broj.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO / GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

24. siječnja 2011.

1. **(4)** Razlika recipročnih vrijednosti dvaju uzastopnih prirodnih brojeva je $0.0aaa\ldots = 0.0\dot{a}$. Koje vrijednosti može poprimiti znamenka a?

2. **(4)** Neka je z nultočka polinoma $z^2 - 2z\cos\frac{\pi}{n} + 1$. Odredi sve moguće vrijednosti izraza z^n.

3. **(4)** Dokaži da je, za sve $n \in \mathbb{N}$, broj $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ djeljiv sa 7.

4. **(4)** Matija i Tomislav igraju sljedeću igru:

Svaki od njih baca par igraćih kocaka. Ako barem jedan od njih dobije zbroj brojeva na kockama djeljiv s 3, onda pobjeđuje Matija; inače, pobjeđuje Tomislav.

Kolika je vjerojatnost da će Matija pobijediti?

5. **(4)** Pravilni tetraedar $ABXY$ smješten je u kocku $ABCDA'B'C'D'$ stranice duljine 1 tako da točka X leži u ravnini $ABCD$. Odredi udaljenost točaka Y i A'.

6. **(10)** Neka su a i b prirodni brojevi. Koje sve znamenke mogu biti na mjestu jedinica u dekadskom zapisu broja $(a+b)^5 - (a^5 + b^5)$?

7. **(10)** Među svim točkama z kompleksne ravnine za koje je $|z+3| + |z-3| = 10$ odredi onu koja je najbliža pravcu koji prolazi točkama $(-3+4i)$ i $(-8+i)$.

8. **(10)** Neka je n prirodan broj. Dokaži da je broj neparnih brojeva među brojevima

$$\binom{2n+1}{1}, \binom{2n+1}{2}, \ldots, \binom{2n+1}{k}, \ldots, \binom{2n+1}{n}$$

neparan.