Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2017.

1. Izračunaj zbroj

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}.$$

2. Gargamel je uhvatio N Štrumpfova i raspodijelio ih u tri vreće. Kad je Papu Štrumpfa iz prve vreće premjestio u drugu, Mrguda iz druge u treću, a Štrumpfetu iz treće u prvu, prosječna visina Štrumpfova u prvoj vreći se smanjila za 8 milimetara, a prosječne visine Štrumpfova u drugoj i trećoj vreći su se povećale redom za 5 milimetara i 8 milimetara.

Ako je u prvoj vreći bilo devet Štrumpfova, odredi N.

3. Odredi sve troznamenkaste prirodne brojeve n za koje brojevi n i n^2 imaju jednake zadnje tri znamenke.

4. Točke M i N se nalaze redom na stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ kvadrata $ABCD$ tako da je $\sphericalangle BMA = \sphericalangle NMC = 60°$. Odredi kut $\sphericalangle MAN$.

5. Karlo i Lovro igraju sljedeću igru. Karlo će razrezati papir dimenzija 9×9 na pravokutnike cjelobrojnih dimenzija kojima je barem jedna dimenzija 1. Nakon toga će Lovro odabrati prirodni broj $k \in \{1,\ldots,9\}$ i Karlo će mu dati onoliko novčića koliko iznosi ukupna površina svih pravokutnika dimenzija $1\times k$ i $k\times 1$. Lovro će odabrati k tako da od Karla dobije što više novčića, a Karlo bi želio uštedjeti i pritom dati Lovri što manje novčića.

Odredi najmanji mogući broj novčića koje će Karlo dati Lovri.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2017.

1. Neka je p prost broj. Odredi sve parove (a, b) cijelih brojeva za koje vrijedi

$$p(a-2) = a(b-1).$$

2. Odredi sve kompleksne brojeve z za koje je omjer imaginarnog dijela pete potencije broja z i pete potencije imaginarnog dijela broja z najmanji mogući.

3. Odredi sve trojke (x, y, z) pozitivnih realnih brojeva koje zadovoljavaju sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} 3\lfloor x\rfloor - \{y\} + \{z\} &= 20.3 \\ 3\lfloor y\rfloor + 5\lfloor z\rfloor - \{x\} &= 15.1 \\ \{y\} + \{z\} &= 0.9. \end{aligned}$$

Za realni broj t, $\lfloor t\rfloor$ označava najveći cijeli broj koji je manji ili jednak t, a $\{t\}$ njegov decimalni dio, tj. $\{t\} = t - \lfloor t\rfloor$. Npr. ako je $t = 15.1$, onda je $\lfloor t\rfloor = 15$ i $\{t\} = 0.1$.

4. Dan je šiljastokutan trokut ABC u kojem vrijedi $|AC| > |AB|$, a točka O je središte opisane kružnice. Simetrala kuta $\sphericalangle CAB$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D. Pravac okomit na pravac AD koji prolazi kroz točku B siječe pravac AO u točki E.

Dokaži da točke A, B, D i E leže na istoj kružnici.

5. Koliko najviše elemenata može imati podskup skupa $\{1, 2, 3, \ldots, 2017\}$ tako da za svaka dva elementa a i b tog podskupa broj $a+b$ nije djeljiv brojem $a-b$?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2017.

1. U trokutu ABC simetrala kuta kod vrha C siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki D. Neka su a i b redom duljine stranica $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$, redom. Ako vrijedi $|CD| = \dfrac{ab}{a+b}$, odredi $\sphericalangle ACB$.

2. Postoji li prirodni broj m takav da 7 dijeli $2^{m^2} - 4$?

3. Izračunaj umnožak $\quad (1 + \operatorname{tg} 1^\circ)(1 + \operatorname{tg} 2^\circ) \ldots (1 + \operatorname{tg} 45^\circ)$.

4. Dan je tetraedar kojem je jedan brid duljine 3, a svi ostali duljine 2.
Odredi obujam tog tetraedra.

5. Koliko najviše cijelih brojeva može sadržavati konačni skup S takav da među svaka tri elementa skupa S postoje dva različita broja čiji zbroj je također u S?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2017.

1. U prostoriji se nalazi sedam osoba. Četiri od njih poznaju točno po jednu osobu, a preostale tri osobe poznaju točno po dvije osobe. Sva poznanstva su uzajamna.

Kolika je vjerojatnost da se dvije slučajno odabrane osobe međusobno ne poznaju?

2. Koliko ima prirodnih brojeva $c \leqslant 1\,000\,000$ koji se mogu prikazati u obliku

$$c = a^2 + 3b^2 - 4ab$$

za neke cijele brojeve a i b različite od 0?

3. Dan je niz pozitivnih realnih brojeva a_0, a_1, a_2, ... takvih da vrijedi

$$a_1 = 1 - a_0, \quad a_{n+1} = 1 - a_n(1 - a_n) \text{ za } n \geqslant 1.$$

Dokaži da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$a_0 a_1 \cdots a_n \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} \right) = 1.$$

4. Dan je šiljastokutni trokut ABC. Tangente u točkama A i B na kružnicu opisanu tom trokutu sijeku se u točki M. Paralela sa stranicom $\overline{BC}$ kroz točku M siječe stranicu $\overline{CA}$ u točki N. Dokaži da je $|BN| = |CN|$.

5. Na kružnici je označeno 3000 točaka. U jednoj od tih točaka nalazi se skakavac. Skakavac svakim skokom preskače jednu ili dvije označene točke u smjeru kazaljke na satu i staje na sljedeću označenu točku. Odredi koliko je najmanje skokova skakavac napravio ako je na svaku označenu točku stao barem jednom i vratio se u točku iz koje je krenuo.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.