ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

28. veljače 2017.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1.

Odredite sve cijele brojeve x za koje izraz x^4-101x^2+100 ima negativnu vrijednost.

Rješenje.

Rješavamo nejednadžbu $x^4-101x^2+100<0$ u skupu cijelih brojeva.

Lijevu stranu nejednadžbe rastavimo na faktore:

$$
\begin{gathered}
x^4-101x^2+100<0 \\
x^4-100x^2-x^2+100<0 \\
x^2\left(x^2-100\right)-\left(x^2-100\right)<0 \\
\left(x^2-1\right)\left(x^2-100\right)<0 \\
(x-1)(x+1)(x-10)(x+10)<0.
\end{gathered}
$$

2 boda (za četvrti redak)

1 bod (za peti redak)

Koristeći tablicu predznaka možemo dobiti rješenje u skupu $\mathbb{R}$: $\langle -10,-1\rangle \cup \langle 1,10\rangle$. 2 boda

Cijeli brojevi iz dobivenih intervala su $\{-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

1 bod

Zadatak B-1.2.

Neka je n prirodan broj i neka je

$$A=0.1^n\cdot 0.01^n\cdot 0.001^n\cdot 0.0001^n\cdot\ldots\cdot 0.\underbrace{00\ldots0}_{199\text{ nula}}1^n.$$

Broj A^{-1} ima 140701 znamenku. Odredite broj n.

Rješenje.

$A=10^{-n}\cdot 10^{-2n}\cdot 10^{-3n}\cdot 10^{-4n}\cdot\ldots\cdot 10^{-200n}=10^{-n(1+2+3+\ldots+200)}$ 1 bod

Tada je $A^{-1}=10^{n\cdot\frac{200\cdot 201}{2}}=10^{20100n}$. 2 boda

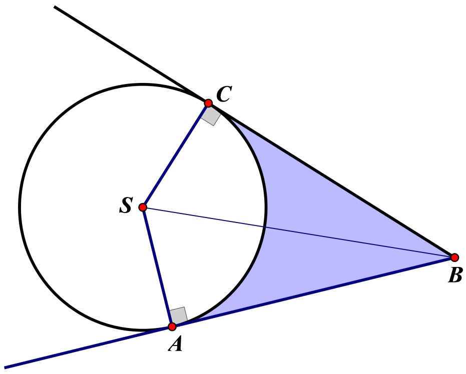
Ovaj broj ima u svom dekadskom zapisu vodeću znamenku jedan i $20100n$ nula.
Slijedi $20100n+1=140701$. 2 boda

Tada je $n=7$. 1 bod

Zadatak B-1.3.

Tangente povučene iz točke B na kružnicu polumjera r dodiruju kružnicu u točkama A i C. Odredite površinu lika omeđenog tangentama BC, BA i manjim kružnim lukom $\widehat{AC}$, ako mjera kuta $\sphericalangle ABC$ iznosi $60°$.

Rješenje.



Tražena površina je jednaka površini četverokuta $ABCS$ umanjenoj za površinu kružnog isječka. Površina tog četverokuta jednaka je dvostrukoj površini pravokutnog trokuta ABS, koji je polovica jednakostraničnog trokuta (kutovi su mu $30°$, $60°$ i $90°$).

1 bod

Odatle duljine stranice trokuta ABS su $|AS| = r$, $|AB| = \frac{2r\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$. 1 bod

$2 \cdot P_{\triangle ABS} = 2 \cdot \dfrac{r \cdot r\sqrt{3}}{2} = r^2\sqrt{3}$. 1 bod

Kut $\sphericalangle ABC = 60°$ pa je središnji kut kružnog isječka $\sphericalangle ASC = 120°$. 1 bod

Površina kružnog isječka čiji je središnji kut $120°$ je trećina površine danog kruga, odnosno $P_i = \dfrac{1}{3} r^2\pi$. 1 bod

Tražena je površina $P = r^2\sqrt{3} - \frac{1}{3} r^2\pi$. 1 bod

Zadatak B-1.4.

U svako polje tablice 4×4 upisan je jedan broj. Za svako je polje zbroj brojeva u njemu susjednim poljima jednak istom prirodnom broju x (dva polja su susjedna ako imaju zajedničku stranicu). Odredite broj x tako da zbroj svih brojeva u tablici iznosi 282.

Prvo rješenje.

Označimo polja ovako:

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
M	N	O	P

Traženi ćemo zbroj izračunati grupiranjem brojeva iz polja u disjunktne skupine. 1 bod

Grupirat ćemo redom za neko polje iz tablice njemu susjedne članove i paziti da ne brojimo dvaput isti broj:

$$\begin{aligned} & A+B+C+D+E+F+G+H+I+J+K+L+M+N+O+P \\ = & (A+F+C)+(B+D+G)+(E+J+M)+(H+K+P)+(I+N)+(L+O) && \text{3 boda} \\ = & x+x+x+x+x+x=6x && \text{1 bod} \end{aligned}$$

Iz uvjeta zadatka slijedi $6x=282$, odnosno $x=47$. 1 bod

Drugo rješenje.

Uz isti početak kao u prvom rješenju, grupiranje članova može se i drugačije napraviti, primjerice:

$$\begin{aligned} & A+B+C+D+E+F+G+H+I+J+K+L+M+N+O+P \\ = & (B+E)+(C+H)+(D+G+L)+(A+F+I)+(M+J+O)+(N+K+P) && \text{3 boda} \\ = & x+x+x+x+x+x=6x && \text{1 bod} \end{aligned}$$

Iz uvjeta zadatka slijedi $6x=282$, odnosno $x=47$. 1 bod

Napomena: Zadatak se boduje sa 6 bodova ako je učenik ispisao točnih 16 jednadžbi sa 16 nepoznanica i dobio točan rezultat. Ako je u tom sustavu napravio neku pogrešku, sustav točnih jednadžbi bodovati s 2 boda, a zamjenu zbroja brojeva u susjednim poljima s x s 1 bod. Ako je samo jedna računska greška, bez koje bi učenik svojim postupkom došao do točnog rješenja, oduzeti 1 bod.

Zadatak B-1.5.

Odredite dvije posljednje znamenke broja $7^{2016^{2017}}$.

Rješenje.

Broj $7^{2016^{2017}}$ možemo zapisati na sljedeći način:

$$7^{2016^{2017}}=7^{2016\cdot 2016\cdot 2016\cdot\cdots\cdot 2016} \qquad \text{1 bod}$$

Eksponent danog broja je djeljiv s 8 jer je 2016 djeljiv s 8 pa vrijedi:

$$7^{2016^{2017}}=7^{8x}=\left(7^{4}\right)^{2x} \qquad \text{2 boda}$$

gdje je x neki cijeli broj. Dalje slijedi

$$7^{2016^{2017}}=\left(7^{4}\right)^{2x}=(2400+1)^{2x}=\left(2400^{2}+4800+1\right)^{x}=(100y+1)^{x} \qquad \text{1 bod}$$

pri čemu i y označava neki cijeli broj.

Zadnje dvije znamenke danog broja su 01. 2 boda

Napomena: Učenici mogu promatrati potencije broja 7 i zaključiti da uvijek završavaju redom na $7, 9, 3$ i 1, a kako je eksponent danog broja djeljiv s 4, mora imati zadnju znamenku 1. (3 boda)

Kako je $7^{2016^{2017}} = 7^{4k} = 2401 \cdots 2401 \cdot 2401$, dani će umnožak zasigurno završiti s 0 na predzadnjem mjestu (što vrijedi preostala 3 boda), što je potrebno obrazložiti kao u prvom rješenju. Priznati i ako je učenik obrazložio koristeći dio pismenog množenja sa zadnjim brojem 2401.

Zadatak B-1.6.

Tri su brata rođena jedan za drugim s istom razlikom u godinama. Kad se najmlađi brat rodio, najstariji je imao šest godina manje nego što srednji ima danas. Razlika kvadrata broja godina najstarijega i najmlađega brata je 432. Koliko godina ima svaki od tri brata danas?

Rješenje.

Označimo broj godina srednjeg brata s x, a razliku u godinama s a. Tada najmlađi brat ima $x - a$ godina, a najstariji $x + a$. 1 bod

Kada se najmlađi rodio, najstariji je imao $x + a - (x - a) = 2a$ godina, što je za 6 manje od x. 1 bod

$2a = x - 6 \Rightarrow x = 2a + 6$ 1 bod

$(x + a)^2 - (x - a)^2 = 432$ 1 bod

$ax = 108$ 1 bod

$a(2a + 6) = 108$

$a^2 + 3a - 54 = 0$ 1 bod

$a^2 + 9a - 6a - 54 = 0$

$a(a + 9) - 6(a + 9) = 0$

$(a + 9)(a - 6) = 0$ 1 bod

$a = 6$ 1 bod

Razlika u godinama je 6.

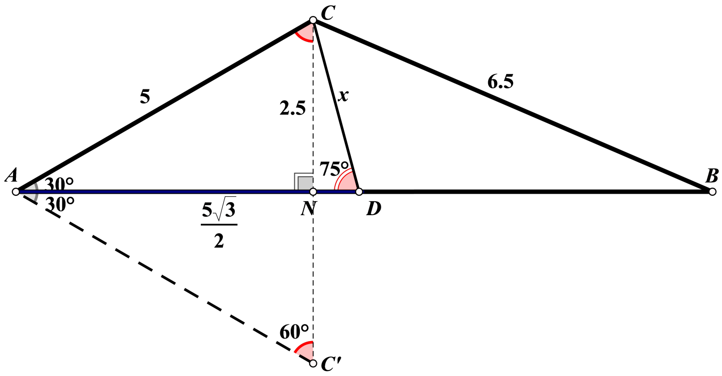
$x = 2a + 6 = 18$

Najmlađi brat ima 12 godina, srednji brat 18 godina, a najstariji 24 godine. 2 boda

Zadatak B-1.7.

U trokutu ABC duljina stranice $\overline{AC}$ iznosi $5\,\text{cm}$, a duljina stranice $\overline{BC}$ je $6.5\,\text{cm}$. Na stranici $\overline{AB}$ odabrana je točka D tako da su kutovi $\sphericalangle ACD$ i $\sphericalangle ADC$ sukladni, a njihova mjera iznosi 75°. Odredite duljinu dužine $\overline{CD}$ i duljinu dužine $\overline{AB}$.

Rješenje.



Uočimo da je trokut ACD jednakokračan, odnosno $|AD| = 5\,\text{cm}$. 1 bod

Povucimo visinu $\overline{CN}$ iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$. Trokut ANC ima kutove $30°$, $90°$, $60°$ i pola je jednakostraničnog trokuta ACC' kojemu je duljina stranice $5\,\text{cm}$. 1 bod

Slijedi $|CN| = 2.5\,\text{cm}$, $|AN| = \frac{5\sqrt{3}}{2}\,\text{cm}$. 2 boda

Po Pitagorinom poučku je

$|NB|^2 = |BC|^2 - |CN|^2 = 6.5^2 - 2.5^2 = 36$ pa je $|NB| = 6\,\text{cm}$. 2 boda

Tada je $|AB| = |AN| + |NB| = \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} + 6\right)\,\text{cm}$ 1 bod

$|ND| = |AD| - |AN| = \left(5 - \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)\,\text{cm}$. 1 bod

Duljinu $x = |CD|$ ćemo izračunati iz pravokutnog trokuta CND, također koristeći Pitagorin poučak.

$$|CD|^2 = |CN|^2 + |ND|^2 = 2.5^2 + \left(5 - \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} + 25 - 25\sqrt{3} + \frac{75}{4} = 50 - 25\sqrt{3}$$

$|CD| = \sqrt{50 - 25\sqrt{3}}\,\text{cm}$ (što se može zapisati i kao $5\sqrt{2-\sqrt{3}}$ ili $\frac{5\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$). 2 boda

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

28. veljače 2017.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1.

Koliko ima cijelih brojeva a za koje su oba rješenja jednadžbe $(x-20)(x+17)=\frac{1}{4}a$ pozitivni realni brojevi?

Prvo rješenje.

$(x-20)(x+17)=\frac{1}{4}a \Leftrightarrow x^2-3x-340-\frac{1}{4}a=0.$

Oba rješenja jednadžbe će biti pozitivni realni brojevi ako su ispunjeni sljedeći uvjeti:

1. $D \geqslant 0 \Leftrightarrow 9+4\left(340+\frac{1}{4}a\right) \geqslant 0 \Rightarrow a \geqslant -1369.$ 2 boda
2. $x_1+x_2>0$, a kako je $x_1+x_2=3$ to vrijedi za svaki realan broj a. 1 bod
3. $x_1x_2>0 \Rightarrow -340-\frac{1}{4}a>0 \Rightarrow a<-1360.$ 2 boda

Dakle, za $a \in [-1369,-1360\rangle$ oba rješenja dane jednadžbe su pozitivni realni brojevi, a u tom intervalu ima 9 cijelih brojeva. 1 bod

Drugo rješenje.

Dana je jednadžba ekvivalentna s $x^2-3x-340-\frac{1}{4}a=0$. Diskriminanta ove kvadratne jednadžbe je $D=1369+a$, a rješenja $x_1=\dfrac{3+\sqrt{1369+a}}{2}$ i $x_2=\dfrac{3-\sqrt{1369+a}}{2}$.

Kako dana jednadžba mora imati pozitivna realna rješenja, rješavamo sljedeći sustav nejednadžbi:

(1) $D=1369+a \geqslant 0.$ 1 bod

(2) $\dfrac{3+\sqrt{1369+a}}{2}>0$ i $\dfrac{3-\sqrt{1369+a}}{2}>0.$ 1 bod

Iz (1) slijedi $a \geqslant -1369.$ 1 bod

Prva nejednadžba u (2) je ispunjena za sve realne brojeve a. 1 bod

Iz druge slijedi:

$$3-\sqrt{1369+a}>0 \Leftrightarrow \sqrt{1369+a}<3 \Leftrightarrow 1369+a<9 \Leftrightarrow a<-1360.$$ 1 bod

Dakle, za $a \in [-1369,-1360\rangle$ oba rješenja dane jednadžbe su pozitivni realni brojevi, a u tom intervalu ima 9 cijelih brojeva. 1 bod

Zadatak B-2.2.

Izračunajte aritmetičku sredinu svih četveroznamenkastih brojeva zapisanih znamenkama 1, 3, 5, 7, ako su sve znamenke upotrjebljene i to samo jednom.

Rješenje.

Postoji $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ takva četveroznamenkasta broja. 1 bod

Primjerice, ako je znamenka 1 na prvom mjestu imamo 6 različitih brojeva s danim svojstvom: $1357, 1375, 1537, 1573, 1735, 1753$.

Analogno se mogu ispisati preostali brojevi.

Važno je uočiti da će se na mjestu tisućica, stotica, desetica i jedinica svaka od četiri znamenke pojaviti točno 6 puta. 2 boda

Zbroj svih takvih brojeva je:

$$6(1000+3000+5000+7000)+6(100+300+500+700)+6(10+30+50+70)+6(1+3+5+7)$$
$$=(6000+600+60+6)(1+3+5+7)=6666\cdot(1+3+5+7)=6666\cdot 16.$$ 2 boda

Aritmetička sredina traženog niza brojeva je $\frac{6666\cdot 16}{24}=4444$. 1 bod

Napomena: Traženi zbroj možemo izračunati na sljedeći način:

Ako zbrojimo sve znamenke na mjestu jedinica dobit ćemo $6(1+3+5+7)=96$.

Isti zbroj dobijemo zbrajanjem desetica, stotica i tisućica.

Zato je ukupan zbroj svih 24 brojeva jednak $96+960+9600+96000=106656$.

Zadatak B-2.3.

Dora, Magdalena i Luka igraju "igru riječi". Dora je započela igru tako da je rekla jednu riječ. Magdalena je ponovila ono što je rekla Dora i dodala novu riječ. Luka je ponovio riječi koje su Dora i Magdalena izgovorile, te dodao novu riječ. I tako su dalje, redom Dora, Magdalena i Luka nastavili igru sve dok jedna osoba nije pogriješila. Ta je osoba, došavši na red za igru, uspješno ponovila 10 riječi, a onda zaboravila koja je sljedeća, tako da nije nastavila rečenicu. Odredite tko je pogriješio i koliko je ukupno riječi trebao točno ponoviti da bi se igra mogla nastaviti, ako je ukupan broj točno izrečenih riječi za vrijeme ove igre bio 4960.

Rješenje.

Neka je n broj riječi koje je trebala izgovoriti osoba koja je pogriješila (ponoviti $n-1$ riječ i dodati jednu novu).

Dora, Magdalena i Luka su redom točno izgovorili $1, 2, \ldots, n-1$ riječi prije nego je netko pogriješio i rekao 10 od ukupno n riječi koje je trebao reći da se igra nastavi.

Tada je ukupan broj riječi $1+2+3+\cdots+n-1+10=4960$. 2 boda

Odatle je

$$\frac{(1+n-1)(n-1)}{2}-4950=0 \qquad \text{1 bod}$$
$$n^2-n-9900=0$$
$$n^2-100n+99n-9900=0$$
$$(n-100)(n+99)=0. \qquad \text{1 bod}$$

Pozitivno rješenje ove jednadžbe je $n=100$.

Dakle, osoba koja je pogriješila trebala je točno ponoviti 99 riječi, odnosno izgovoriti ukupno 100 riječi. 1 bod

Kako je $100=33\cdot 3+1$ zaključujemo da je Dora osoba koja je pogriješila. 1 bod

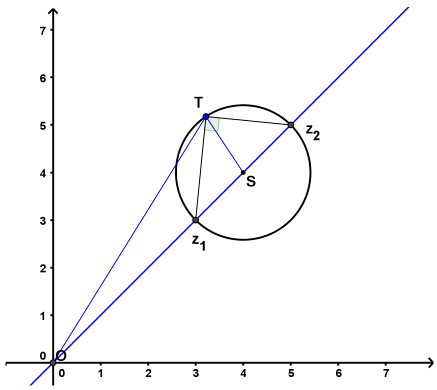
Zadatak B-2.4.

Među kompleksnim brojevima koji zadovoljavaju uvjet $|z-4-4i|=\sqrt{2}$ odredite onaj koji ima najmanju apsolutnu vrijednost i onaj koji ima najveću apsolutnu vrijednost.

Rješenje.

$z=x+yi$, $x, y\in\mathbb{R}$. Iz $|z-4-4i|=\sqrt{2}$ dobivamo $(x-4)^2+(y-4)^2=2$.

Skicirajmo skup rješenja u kompleksnoj ravnini.



1 bod

Apsolutna vrijednost kompleksnog broja $z=x+yi$, $x, y\in\mathbb{R}$ predstavlja udaljenost točke $Z(x, y)$ od ishodišta. Stoga na danoj kružnici tražimo najbližu i najudaljeniju točku od ishodišta. One se nalaze na pravcu OS koji prolazi kroz ishodište i središte kružnice, odnosno na pravcu $y=x$. Označimo ih sa Z_1 i Z_2. Ukoliko je $T(a, b), a\neq b$ proizvoljna točka na kružnici, zbog nejednakosti trokuta vrijedi:

$$|OS|\leqslant|OT|+|TS|\Leftrightarrow|OZ_1|+r\leqslant|OT|+r\Leftrightarrow|OZ_1|\leqslant|OT|.$$

To znači da je točka Z_1 najbliža ishodištu.

Točka Z_2 ima najveću udaljenost od ishodišta jer je $\overline{OZ_2}$ stranica nasuprot najvećeg kuta u trokutu OZ_2T ($\sphericalangle OTZ_2 = \sphericalangle OTZ_1 + 90°$). 1 bod

Tražene kompleksne brojeve dobivamo rješavanjem sustava jednadžbi

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-4)^2 = 2 \\ y = x \end{cases}$$ 1 bod

Rješenja tog sustava su $(3,3)$ i $(5,5)$. 2 boda

Kompleksan broj koji zadovoljava uvjet $|z-4-4i| = \sqrt{2}$ i ima najmanju apsolutnu vrijednost je $z_1 = 3+3i$, a onaj koji ima najveću apsolutnu vrijednost je broj $z_2 = 5+5i$.

1 bod

Napomena: Jedan bod učenik može dobiti:

- ako je samo točno nacrtao kružnicu direktno iz uvjeta $|z-4-4i| = \sqrt{2}$, bez njezine jednadžbe.
- ako nema skice, a napisana je jednadžba kružnice.
- ako ima i jedno i drugo.

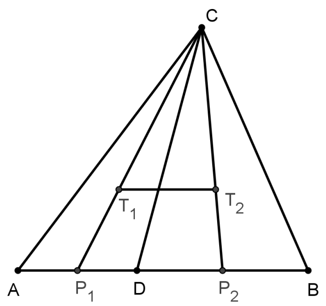
Učenici će intuitivno sa slike zaključiti da se rješenja nalaze na pravcu $y = x$. Ako se učenik pozove na nacrtanu sliku na kojoj se vidi da je uspoređivao udaljenost s još nekom točkom, da su najmanja i najveća udaljenost upravo u točkama Z_1 i Z_2, ne treba inzistirati na detaljno navedenom argumentiranju. Ukoliko ima samo nacrtani pravac $y = x$, bez ikakvog komentara, a sve ostalo je točno izračunato, oduzeti 1 bod.

Zadatak B-2.5.

Na stranici $\overline{AB}$ trokuta ABC dana je točka D. Neka su T_1 i T_2 redom težišta trokuta CAD i CDB. Odredite duljinu dužine $\overline{T_1T_2}$ ako je $|AB| = 6\,\text{cm}$.

Rješenje.

Neka su P_1 i P_2 redom polovišta dužina $\overline{AD}$ i $\overline{DB}$.



1 bod

Težište trokuta dijeli težišnicu trokuta u omjeru $2:1$ računajući od vrha trokuta pa vrijedi

$\frac{|CT_1|}{|CP_1|} = \frac{|CT_2|}{|CP_2|} = \frac{2}{3}$. 1 bod

Prema poučku SKS o sličnim trokutima, trokuti CT_1T_2 i CP_1P_2 su slični s koeficijentom sličnosti $\frac{2}{3}$ (imaju zajednički kut, a stranice koje zatvaraju taj kut su proporcionalne).

1 bod

Tada je $\frac{|T_1T_2|}{|P_1P_2|} = \frac{2}{3} \Rightarrow |T_1T_2| = \frac{2}{3}|P_1P_2|$. 1 bod

$|P_1P_2| = |P_1D| + |DP_2| = \frac{|AD|}{2} + \frac{|DB|}{2} = \frac{|AB|}{2}$. 1 bod

$|T_1T_2| = \frac{2}{3}|P_1P_2| = \frac{1}{3}|AB| = 2\text{cm}$. 1 bod

Zadatak B-2.6.

Za koje vrijednosti koeficijenta c nultočke x_1, x_2 funkcije $f(x) = x^2+x+c$ zadovoljavaju uvjet $\dfrac{2x_1^3}{2+x_2} + \dfrac{2x_2^3}{2+x_1} = -1$?

Rješenje.

Primjenom Vieteovih formula dobivamo $x_1 + x_2 = -1$, $x_1x_2 = c$. 1 bod

Pomnožimo li jednakost $\dfrac{2x_1^3}{2+x_2} + \dfrac{2x_2^3}{2+x_1} = -1$ s $(2+x_1)(2+x_2)$ dobivamo

$$4(x_1^3 + x_2^3) + 2(x_1^4 + x_2^4) + 2(x_1 + x_2) + x_1x_2 + 4 = 0. \qquad (*)$$ 2 boda

Svaku zagradu u ovom izrazu prikazat ćemo pomoću zbroja i umnoška nultočaka kako bismo mogli primijeniti Vieteove formule.

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = -1 + 3c. \qquad (**)$$ 2 boda

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1x_2)^2$$ 1 bod

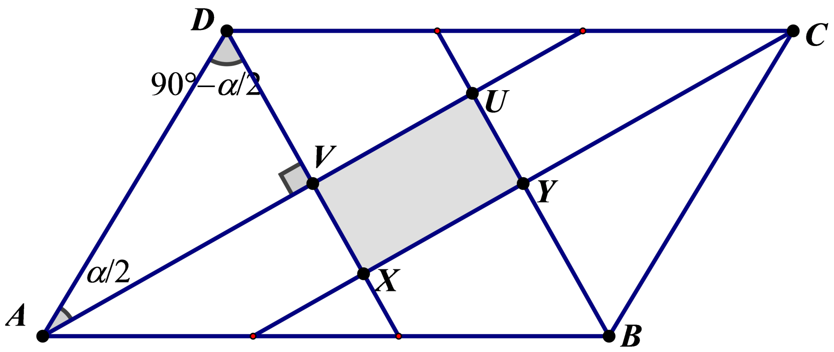
$$x_1^4 + x_2^4 = \left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right]^2 - 2(x_1x_2)^2 = 2c^2 - 4c + 1. \qquad (***)$$ 2 boda

Uvrstimo li (**) i (***) u (*) dobivamo $4c^2 + 5c = 0 \Rightarrow c_1 = 0$ i $c_2 = -\frac{5}{4}$. 2 boda

Zadatak B-2.7.

Neka je $ABCD$ paralelogram sa stranicama duljina $|AB| = a$ cm i $|BC| = b$ cm $(a > b)$ i šiljastim kutom α. Površina četverokuta koji nastaje kao presjek simetrala unutarnjih kutova paralelograma iznosi 48cm^2, a $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5}$. Izračunajte razliku $a - b$.

Rješenje.



1 bod

U trokutu AVD je $\sphericalangle VAD = \frac{\alpha}{2}$ i $\sphericalangle ADV = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Stoga je trokut AVD pravokutan, a kut $\sphericalangle UVX = 90^\circ$. Iz istog razloga su i ostali kutovi četverokuta $XYUV$ pravi kutovi, pa je taj četverokut pravokutnik. 1 bod

Iz trokuta AVD je $|DV| = b\sin\frac{\alpha}{2}$, $|AV| = b\cos\frac{\alpha}{2}$. 2 boda

Iz trokuta DXC je $|DX| = a\sin\frac{\alpha}{2}$. 1 bod

Iz trokuta ABU je $|AU| = a\cos\frac{\alpha}{2}$. 1 bod

Tada su duljine stranica pravokutnika:

$|VX| = a\sin\frac{\alpha}{2} - b\sin\frac{\alpha}{2} = (a-b)\sin\frac{\alpha}{2}$ i $|VU| = a\cos\frac{\alpha}{2} - b\cos\frac{\alpha}{2} = (a-b)\cos\frac{\alpha}{2}$. 1 bod

Površina pravokutnika je $P = |VX| \cdot |VU| = (a-b)^2 \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$. 1 bod

Kako je $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5}$, slijedi $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$. 1 bod

Traženu razliku računamo iz:

$48 = (a-b)^2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} \Rightarrow (a-b)^2 = 100 \Rightarrow a - b = 10\text{cm}.$ 1 bod

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

28. veljače 2017.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1.

Riješite nejednadžbu

$$8 \sin x \cos x \cos 2x > 1.$$

Rješenje.

$$4 \cdot 2 \cdot \sin x \cos x \cdot \cos 2x > 1 \Leftrightarrow$$

$$4 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x > 1 \Leftrightarrow \qquad \text{1 bod}$$

$$2 \sin 4x > 1 \Leftrightarrow \sin 4x > \frac{1}{2} \qquad \text{2 boda}$$

Posljednja nejednakost vrijedi ako je $4x \in \left\langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle, k \in \mathbb{Z}$, 2 boda

odnosno, $x \in \left\langle \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \right\rangle, k \in \mathbb{Z}$. 1 bod

Zadatak B-3.2.

Neka je $A = \dfrac{\cos 3 + \cos 5}{\cos 3 - \cos 5}$ i $B = \dfrac{\sin 5 + \sin 7}{\cos 5 - \cos 7}$.

Odredite realni broj x tako da je $A + Bx = 0$.

Rješenje.

$$A = \frac{\cos 3 + \cos 5}{\cos 3 - \cos 5} = \frac{2 \cos \frac{3+5}{2} \cos \frac{3-5}{2}}{-2 \sin \frac{3+5}{2} \sin \frac{3-5}{2}} = \frac{2 \cos 4 \cos(-1)}{-2 \sin 4 \sin(-1)} = \frac{2 \cos 4 \cos 1}{2 \sin 4 \sin 1} = \operatorname{ctg} 4 \operatorname{ctg} 1 \qquad \text{2 boda}$$

$$B = \frac{\sin 5 + \sin 7}{\cos 5 - \cos 7} = \frac{2 \sin \frac{5+7}{2} \cos \frac{5-7}{2}}{-2 \sin \frac{5+7}{2} \sin \frac{5-7}{2}} = \frac{2 \sin 6 \cos(-1)}{-2 \sin 6 \sin(-1)} = \frac{\cos 1}{\sin 1} = \operatorname{ctg} 1 \qquad \text{2 boda}$$

Iz $A + Bx = 0$ slijedi $\operatorname{ctg} 4 \operatorname{ctg} 1 + x \operatorname{ctg} 4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{\operatorname{ctg} 4 \cdot \operatorname{ctg} 1}{\operatorname{ctg} 4} = -\operatorname{ctg} 1$. 2 boda

Zadatak B-3.3.

Odredite sve prirodne brojeve n za koje je $n^3 - 10n^2 + 28n - 19$ prost broj.

Rješenje.

Dani ćemo izraz rastaviti na faktore:

$$\begin{aligned} & n^3 - 10n^2 + 28n - 19 = \\ = & n^3 - n^2 - 9n^2 + 19n + 9n - 19 = \\ = & n^2(n-1) - 9n(n-1) + 19(n-1) = \\ = & (n-1)(n^2 - 9n + 19) \end{aligned}$$ 2 boda

Ovaj umnožak može biti prost broj samo ako je jedan od faktora 1, a drugi faktor prost broj. 1 bod

Ako je $n - 1 = 1 \Rightarrow n = 2$. Tada je $n^2 - 9n + 19 = 4 - 18 + 19 = 5$ što je prost broj. 1 bod

Ako je $n^2 - 9n + 19 = 1$, tada je $n^2 - 9n + 18 = 0 \Rightarrow (n-3)(n-6) = 0$
$\Rightarrow n = 3$ ili $n = 6$. 1 bod

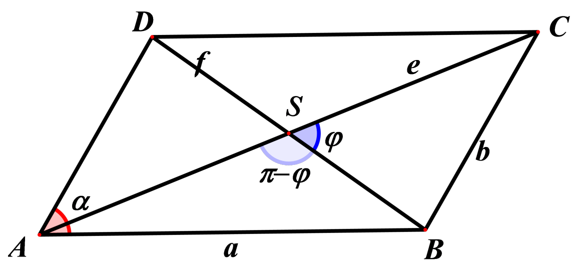
Za ove brojeve je prvi faktor $3 - 1 = 2$, odnosno $6 - 1 = 5$, što su prosti brojevi. 1 bod

Prema tome, rješenje su brojevi $2, 3$ i 6.

Zadatak B-3.4.

Dokažite da je razlika kvadrata duljina stranica paralelograma uvijek manja od umnoška duljina dijagonala tog paralelograma.

Prvo rješenje.



Neka su a i b $(a \geqslant b)$ duljine stranica, e i f $(e \geqslant f)$ duljine dijagonala paralelograma $ABCD$. Šiljasti kut između stranica a i b označimo s α.

Po poučku o kosinusu je $e^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$, $f^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$. 2 boda

$$e \cdot f = \sqrt{(a^2+b^2)^2 - (2ab\cos\alpha)^2} = \sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2\cos^2\alpha}$$ 1 bod

Kako je $\cos^2\alpha < 1$, izraz $-4a^2b^2\cos^2\alpha > -4a^2b^2$, pa je 1 bod

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2\cos^2\alpha > a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2,$$

te vrijedi $e \cdot f > \sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2}$ odnosno 1 bod

$$e \cdot f > \sqrt{(a^2-b^2)^2} = a^2 - b^2.$$ 1 bod

Drugo rješenje.

Neka su a, b duljine stranica paralelograma i neka je $a \geqslant b$, duljina veće dijagonale neka je e, a manje f, te neka je φ šiljasti kut između dijagonala.

U trokutu ABS vrijedi: $a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2} \cdot \cos(\pi - \varphi)$. 1 bod

U trokutu BCS vrijedi: $b^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2} \cdot \cos\varphi$. 1 bod

Kako je $\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$, oduzimanjem gornjih jednakosti imamo: 1 bod
$a^2 - b^2 = ef\cos\varphi$. 1 bod

Kut φ je šiljasti, pa je $0 < \cos\varphi < 1$ što nam daje 1 bod
$a^2 - b^2 < ef$, što smo i trebali dobiti. 1 bod

Zadatak B-3.5.

Izračunajte umnožak rješenja jednadžbe $2016 \cdot x^{\log_{2017} x} = x^{2016}$.

Rješenje.

Izračunajmo logaritam po bazi 2017 od obje strane jednadžbe.
$\log_{2017}(2016 \cdot x^{\log_{2017} x}) = \log_{2017}(x^{2016}) \Rightarrow$
$\log_{2017} 2016 + \log_{2017} x \cdot \log_{2017} x = 2016 \log_{2017} x$ 1 bod

Uvedimo supstituciju $t = \log_{2017} x$. $\Rightarrow t^2 - 2016t + \log_{2017} 2016 = 0 \quad (*)$. 1 bod

Iz $t = \log_{2017} x$ slijedi $x = 2017^t$, 1 bod
pa je umnožak rješenja početne jednadžbe

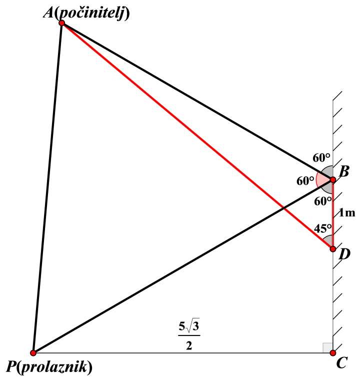
$$x_1 \cdot x_2 = 2017^{t_1} \cdot 2017^{t_2} = 2017^{t_1+t_2}.$$ 1 bod

Iz jednadžbe $(*)$ prema Vièteovim formulama računamo $t_1 + t_2 = 2016$, 1 bod
pa je traženi umnožak jednak 2017^{2016}. 1 bod

Zadatak B-3.6.

Tijekom novogodišnjeg slavlja neodgovorna je osoba ispalila dva hica. Jednim je hicem lakše ozlijeđen slučajni prolaznik. Forenzičari moraju otkriti s kojeg su mjesta ispaljena ta dva hica. Otkrili su u zidu obližnje zgrade trag metka (crna točka) koji se odbio i pogodio prolaznika $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ metra udaljenog od zida. Prema tragu, zaključili su da je putanja metka zatvarala 60° sa zidom i da se metak pod istim kutom odbio. Drugi je metak ostao u zidu 1 metar udaljen od traga prvog metka, a njegova je putanja zatvarala 45° sa zidom. Metak je u odnosu na počinitelja s iste strane kao i prolaznik. Koliko je prolaznik bio udaljen od počinitelja? (Putanje oba metka su u istoj ravnini, paralelnoj s pločnikom, a zid je okomit na pločnik.)

Rješenje.



1 bod

Iz pravokutnog trokuta PCB računamo: $\sin 60° = \dfrac{|PC|}{|PB|} \Rightarrow |PB| = 5$. 1 bod

$\sphericalangle DAB = 180° - (120° + 45°) = 15°$. 1 bod

Sada iz trokuta ADB koristeći poučak o sinusima možemo izračunati $|AB|$.

$$\frac{|AB|}{\sin 45°} = \frac{|BD|}{\sin 15°}$$ 1 bod

$$\begin{aligned}\sin 15° &= \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)\end{aligned}$$ 2 boda

$$|AB| = \frac{1 \cdot \sin 45°}{\sin 15°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)} = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} \quad \text{ili } \sqrt{3} + 1$$ 1 bod

Nadalje, iz trokuta BAP pomoću poučka o kosinusu slijedi:

$$\begin{aligned}|AP|^2 =& |AB|^2 + |PB|^2 - 2|AB| \cdot |PB| \cdot \cos 60° \\ =& (\sqrt{3} + 1)^2 + 25 - 2 \cdot (\sqrt{3} + 1) \cdot 5 \cdot 0.5 \\ =& 4 + 2\sqrt{3} + 25 - 5\sqrt{3} - 5\end{aligned}$$ 2 boda

$|AP| = \sqrt{24 - 3\sqrt{3}}$ 1 bod

Zadatak B-3.7.

Neka su α, β i γ kutovi trokuta. Ako je

$$\frac{\sin^2 \gamma + \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} = \sqrt{3},$$

odredite kut α.

Prvo rješenje.

Neka su a, b i c stranice trokuta, redom nasuprot kutova α, β i γ. Primijenimo poučak o sinusima.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow \sin\alpha = \frac{a}{2R},$$
$$\frac{b}{\sin\beta} = 2R \Rightarrow \sin\beta = \frac{b}{2R},$$
$$\frac{c}{\sin\gamma} = 2R \Rightarrow \sin\gamma = \frac{c}{2R}.$$
2 boda

Tada početna jednakost prelazi u

$$\frac{\frac{c^2}{4R^2} + \frac{b^2}{4R^2} - \frac{a^2}{4R^2}}{\frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R}} = \sqrt{3} \Rightarrow$$
2 boda

$$\frac{c^2 + b^2 - a^2}{bc} = \sqrt{3}$$
1 bod

Slijedi $c^2 + b^2 - a^2 = \sqrt{3}bc$. 1 bod

Prema poučku o kosinusu $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow$ 1 bod

$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}bc}{2bc} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 2 boda

$\Rightarrow \alpha = 30^\circ$. 1 bod

Drugo rješenje.

Zapišimo $\alpha = \pi - (\beta + \gamma)$. 1 bod

$$\frac{\sin^2\gamma + \sin^2\beta - \sin^2\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} = \frac{\sin^2\gamma + \sin^2\beta - \sin^2(\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma} =$$
1 bod

$$\frac{\sin^2\gamma + \sin^2\beta - \sin^2\beta\cos^2\gamma - \sin^2\gamma\cos^2\beta - 2\sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma} =$$
2 boda

Ako u brojniku grupiramo prvi i četvrti pribrojnik, te drugi i treći pribrojnik, dobivamo

$$\frac{\sin^2\gamma\sin^2\beta + \sin^2\gamma\sin^2\beta - 2\sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma} =$$
2 boda

$$\frac{2\sin\beta\sin\gamma(\sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma} = -2\cos(\beta+\gamma)$$
1 bod

Iz uvjeta zadatka slijedi $-2\cos(\beta+\gamma) = \sqrt{3}, \Rightarrow \beta + \gamma = \dfrac{5\pi}{6}$. 2 boda

Mjera traženog kuta α je $\dfrac{\pi}{6} = 30^\circ$. 1 bod

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

28. veljače 2017.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1.

Realni brojevi x, y su rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2}x\cos t + 3y\sin t &= 6\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2}x\sin t - 3y\cos t &= 0. \end{aligned}$$

Za koje je vrijednosti parametra $t \in \langle 0, \pi\rangle$ umnožak xy jednak 3?

Rješenje.

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2}x\cos t + 3y\sin t &= 6\sqrt{2} \,/\cdot\cos t \\ 2\sqrt{2}x\sin t - 3y\cos t &= 0 \,/\cdot\sin t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2}x\cos^2 t + 3y\sin t\cos t &= 6\sqrt{2}\cos t \\ 2\sqrt{2}x\sin^2 t - 3y\cos t\sin t &= 0. \end{aligned}$$

Zbrajanjem ovih dviju jednadžbi dobijemo $x = 3\cos t$. 1 bod

Primijetimo da vrijedi $\cos t \neq 0$, jer u protivnom je $x = 0$ i $x \cdot y \neq 3$. 1 bod

Nakon toga iz druge jednadžbe slijedi:

$$6\sqrt{2}\cos t\sin t - 3y\cos t = 0 \,/ : 3\cos t$$

$$y = 2\sqrt{2}\sin t \qquad \text{1 bod}$$

$$x \cdot y = 3 \Rightarrow 3\cos t \cdot 2\sqrt{2}\sin t = 3$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{2}\sin 2t = 3 \Rightarrow \sin 2t = \frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad \text{1 bod}$$

Dakle, $2t = \frac{\pi}{4}$ ili $2t = \frac{3\pi}{4}$, odnosno $t \in \left\{\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right\}$. 2 boda

Zadatak B-4.2.

Odredite koeficijent uz a^4 u izrazu $2 + a + (a+1)^2 + (a+1)^3 + \cdots + (a+1)^{2017}$.

Prvo rješenje.

Izraz predstavlja zbroj geometrijskog niza kod kojeg je $a_1 = 1$, $q = a + 1$. 2 boda

$$1 + (a+1) + (a+1)^2 + (a+1)^3 + \cdots + (a+1)^{2017} = \frac{(a+1)^{2018} - 1}{a}.$$ 2 boda

Koeficijent uz a^4 bit će onaj koji u izrazu $(a+1)^{2018}$ stoji uz a^5, a to je 1 bod

$$\binom{2018}{2017-4} = \binom{2018}{2013} = \binom{2018}{5}.$$ 1 bod

Drugo rješenje.

Koeficijenti uz a^4 se pojavljuju u izrazima $(a+1)^4, (a+1)^5, \ldots, (a+1)^{2017}$ i to su redom brojevi:

$$\binom{4}{0}, \binom{5}{1}, \binom{6}{2}, \ldots, \binom{2017}{2013}.$$ 1 bod

Koristeći svojstvo $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ računamo traženi zbroj. 1 bod

Pritom na početku primijenimo $\binom{4}{0} = \binom{5}{0}$. 1 bod

$$\underbrace{\binom{5}{0} + \binom{5}{1}}_{\binom{6}{1}} + \binom{6}{2} + \binom{7}{3} + \binom{8}{4} + \cdots + \binom{2016}{2012} + \binom{2017}{2013} =$$ 1 bod

$$\underbrace{\binom{6}{1} + \binom{6}{2}}_{\binom{7}{2}} + \binom{7}{3} + \binom{8}{4} + \cdots + \binom{2016}{2012} + \binom{2017}{2013} =$$

$$\underbrace{\binom{7}{2} + \binom{7}{3}}_{\binom{8}{3}} + \binom{8}{4} + \cdots + \binom{2016}{2012} + \binom{2017}{2013} = \cdots =$$

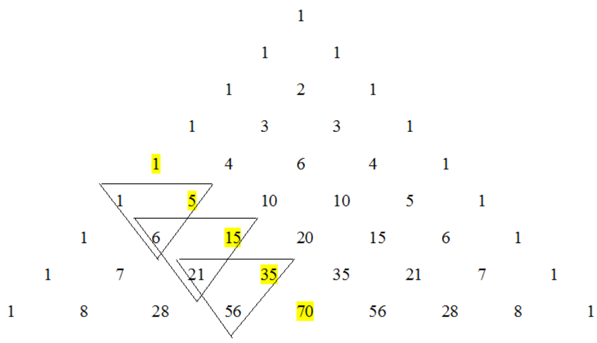
$$\underbrace{\binom{2016}{2011} + \binom{2016}{2012}}_{\binom{2017}{2012}} + \binom{2017}{2013} = \binom{2017}{2012} + \binom{2017}{2013} = \binom{2018}{2013}$$ 2 boda

Traženi je zbroj jednak $\binom{2018}{2013}$ ili $\binom{2018}{5}$.

Treće rješenje.

Učenici su mogli promatrati Pascalov trokut i uočiti da je traženi zbroj jednak zbroju binomnih koeficijenata koji su na dijagonali u Pascalovom trokutu:

$$\binom{4}{0}+\binom{5}{1}+\binom{6}{2}+\cdots+\binom{2017}{2013}=1+5+15+35+70+126+\cdots+\binom{2017}{2013}.$$ 1 bod



2 boda

Uočavamo da je zbroj prvih k danih koeficijenata na označenoj dijagonali jednak k-tom koeficijentu u sljedećem redu Pascalovog trokuta, što je posljedica svojstva zbrajanja binomnih koeficijenata. Iz toga se lako zaključuje da je traženi zbroj jednak $\binom{2018}{2013}$ ili $\binom{2018}{5}$. 3 boda

Zadatak B-4.3.

Niz brojeva definiran je s $a_n = n^4 - 360n^2 + 400$. Izračunajte zbroj svih članova toga niza koji su prosti brojevi.

Rješenje.

Opći član možemo prikazati u sljedećem obliku:

$$\begin{aligned} a_n &= n^4 - 360n^2 + 400 = (n^4 + 40n^2 + 400) - 400n^2 \\ &= (n^2+20)^2 - (20n)^2 = (n^2 - 20n + 20)(n^2 + 20n + 20). \end{aligned}$$ 2 boda

Ovaj izraz će biti prost broj jedino ako je jedna od zagrada za neki prirodan broj n jednaka jedan, a druga je za taj isti n jednaka nekom prostom broju.

Ako je $n^2 - 20n + 20 = 1$, onda je $n^2 - 20n + 19 = 0$. Ta jednadžba ima dva pozitivna rješenja, $n = 1$ i $n = 19$. 1 bod

Za $n = 1$ izraz $n^2 + 20n + 20 = 1 + 20 + 20 = 41$, a to je prost broj. 1 bod

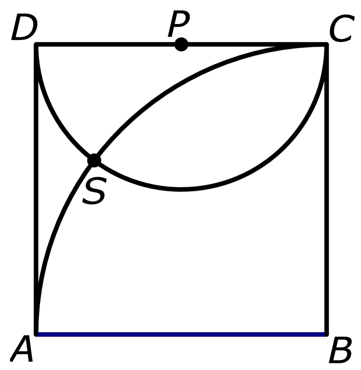
Za $n = 19$ izraz $n^2 + 20n + 20 = 19^2 + 20 \cdot 19 + 20 = 761$, a to je prost broj. 1 bod

Ako je $n^2 + 20n + 20 = 1$, onda je $n^2 + 20n + 19 = 0$. Ta jednadžba ima negativna rješenja, pa su jedini prosti članovi niza 41 i 761. Njihov je zbroj 802. 1 bod

Zadatak B-4.4.

Duljina stranice kvadrata $ABCD$ iznosi 2, a točka P je polovište stranice $\overline{CD}$. Točka S je sjecište kružnice sa središtem P polumjera 1 i kružnice sa središtem B polumjera 2. Odredite udaljenost točke S od pravca AD.

Prvo rješenje.



Smjestimo li kvadrat u koordinatni susav tako da je ishodište u točki A, a apscisa pravac AB, tražena je udaljenost apscisa točke S.

Vrhovi kvadrata s $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,2)$ i $D(0,2)$, a točka P ima koordinate $(1,2)$. 1 bod

Koordinate točke S dobit ćemo kao presjek kružnica, odnosno rješenje sustava jednadžbi:

$$\begin{aligned} (x-2)^2+y^2&=4 \\ (x-1)^2+(y-2)^2&=1 \\ \hline x^2+y^2-4x&=0 \\ x^2+y^2-2x-4y+4&=0. \end{aligned}$$

2 boda

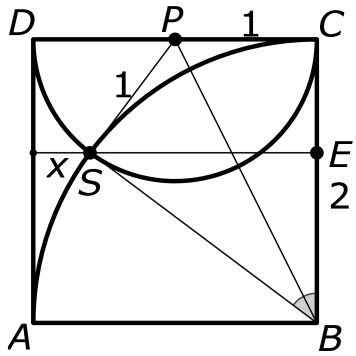
Oduzimanjem jednadžbi sustava slijedi $y=\frac{1}{2}x+1$. 1 bod

Iz prve jednadžbe sustava tada dobivamo:

$\frac{5}{4}x^2-3x+1=0 \Rightarrow x=2$ ili $x=\frac{2}{5}$. 1 bod

$x=2$ je apscisa točke C, a tražena apscisa točke S, odnosno njena udaljenost od pravca AD je $\frac{2}{5}$. 1 bod

Drugo rješenje.



Neka je kut $\alpha = \sphericalangle PBC$. Kako je $|PS| = |PC| = 1$ i $|BS| = |BC| = 2$, trokuti PSB i PCB su sukladni te je kut $\sphericalangle SBC = 2\alpha$. 2 boda

Iz trokuta PBC je $|BP| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. 1 bod

Iz trokuta SBE je $\sin 2\alpha = \frac{2-x}{2}$. 1 bod

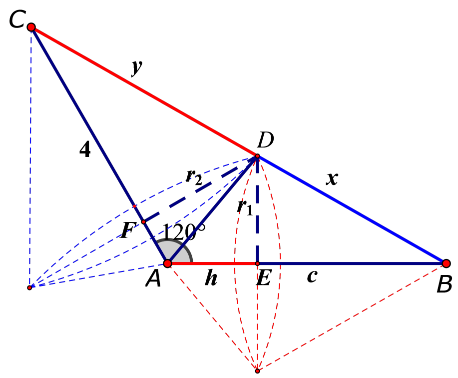
Odnosno, $2\sin\alpha\cos\alpha = 1 - \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 - 4\sin\alpha\cos\alpha = 2 - 4\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}$. 1 bod

Napomena: Ista se jednadžba kao i u prvom rješenju može dobiti koristeći Pitagorin poučak u pravokutnim trokutima STP i SRB, gdje je točka T nožište okomice iz S na CD, a točka R nožište te okomice na AB.

Zadatak B-4.5.

U trokutu ABC je $a = |BC| = \sqrt{21}\text{cm}$, $b = |AC| = 4\text{cm}$ i $\alpha = \sphericalangle BAC = 120°$. Na stranici $\overline{BC}$ odredite točku D tako da obujam rotacijskog tijela nastalog rotacijom trokuta ABD oko stranice AB bude jednak obujmu rotacijskog tijela nastalog rotacijom trokuta ACD oko stranice AC. U kojem omjeru točka D dijeli stranicu a?

Rješenje.



Obujam koji nastaje pri rotaciji trokuta ABD oko pravca AB je

$$V_1 = \frac{r_1^2\pi h}{3} + \frac{r_1^2\pi(c-h)}{3} = \frac{r_1^2 c\pi}{3}.$$

Analogno, $V_2 = \dfrac{r_2^2 b\pi}{3}$ je obujam koji nastaje pri rotaciji trokuta ACD oko pravca AC.

1 bod

$$V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{r_2^2 c\pi}{3} = \frac{r_2^2 b\pi}{3} \Rightarrow \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{c}{b} \text{ ili } \frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{b}{c}}. \qquad (*)$$

1 bod

Po poučku o kosinusu izračunamo duljinu stranice c.

$21 = 16 + c^2 + 4c \Rightarrow c^2 + 4c - 5 = 0 \Rightarrow c = 1\text{cm}.$ 1 bod

Sada je $\dfrac{r_1}{r_2} = \sqrt{\dfrac{b}{c}} = \dfrac{2}{1}$ ili $\dfrac{r_2}{r_1} = \sqrt{\dfrac{c}{b}} = \dfrac{1}{2}$. 1 bod

Iz pravokutnih trokuta DEB i CFD računamo traženi omjer:

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{r_1}{\sin\beta}}{\frac{r_2}{\sin\gamma}} = \frac{r_1 \sin\gamma}{r_2 \sin\beta}.$$

1 bod

Zatim primijenimo poučak o sinusu i omjer (*):

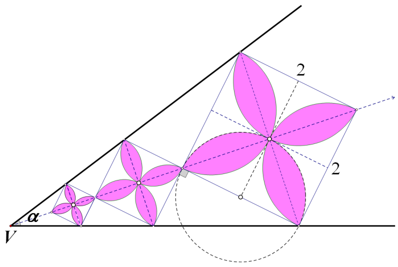
$$\frac{x}{y} = \frac{r_1 \sin\gamma}{r_2 \sin\beta} = \frac{r_1 \cdot c}{r_2 \cdot b} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

1 bod

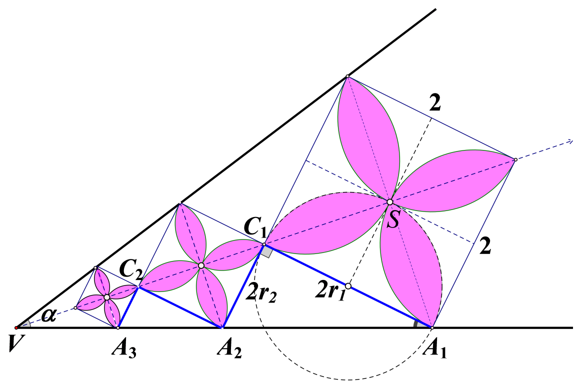
Dakle, točka D dijeli stranicu a u omjeru $1 : 2$.

Zadatak B-4.6.

U kut α upisan je beskonačan niz kvadrata.
Svakom je kvadratu upisan cvjetić s četiri jednake latice kao na slici. Dva nasuprotna vrha kvadrata su na krakovima kuta, a preostala dva na simetrali kuta α. Duljina stranice početnog, najvećeg kvadrata iznosi 2. Odredite mjeru kuta α ako je zbroj površina svih upisanih cvjetića $3(\pi - 2)$.



Rješenje.



Površina jedne latice početnog cvjetića je dvostruka površina kružnog odsječka od četvrtine kruga:

$$P_{lat} = 2\left(\frac{r_1^2\pi}{4} - \frac{r_1^2}{2}\right) = \frac{r_1^2}{2}(\pi - 2).$$

1 bod

Površina početnog cvjetića je $P_1 = 4P_{lat} = 2r_1^2(\pi - 2) = 2(\pi - 2)$. 1 bod

Trokut VSA_1 je pravokutan, pa je $\sphericalangle VA_1S = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, 1 bod

a kut $\sphericalangle A_2A_1C_1 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - 45^\circ = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$. 1 bod

Analogno zaključujemo i za niz kutova u pravokutnim trokutima koji slijede:

$\sphericalangle A_3A_2C_2 = \sphericalangle A_4A_3C_3 = \cdots = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

Stoga su trokuti $\triangle A_2A_1C_1$, $\triangle A_3A_2C_2$, $\triangle A_4A_3C_3, \ldots$ slični s koeficijentom sličnosti $\frac{2r_2}{2r_1} = \frac{r_2}{r_1} < 1$. 1 bod

Ako su svi polumjeri latica u omjeru $\frac{r_2}{r_1} < 1$, njihove su površine u omjeru $q = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$. 1 bod

To znači da površine cvjetića čine geometrijski red s kvocijentom $q < 1$ čiji je zbroj $P = \frac{P_1}{1-q}$. 1 bod

Tada je

$3(\pi - 2) = \dfrac{2(\pi - 2)}{1 - q} \Rightarrow 1 - q = \dfrac{2}{3} \Rightarrow q = \dfrac{1}{3}$. 1 bod

Iz pravokutnog trokuta $A_2A_1C_1$ imamo:

$\operatorname{tg}\left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{2r_2}{2r_1} = \dfrac{r_2}{r_1} = \sqrt{q} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. 1 bod

$45^\circ - \dfrac{\alpha}{2} = 30^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$. 1 bod

Zadatak B-4.7.

Neka je S skup svih kompleksnih brojeva za koje vrijedi $|z| = \operatorname{Im}(z + 2i)$. Prikažite skup S u kompleksnoj ravnini i odredite površinu trokuta kojemu je jedan vrh točka $P\left(0, \frac{3}{2}\right)$, a druga dva vrha su točke skupa S koje su najbliže točki P.

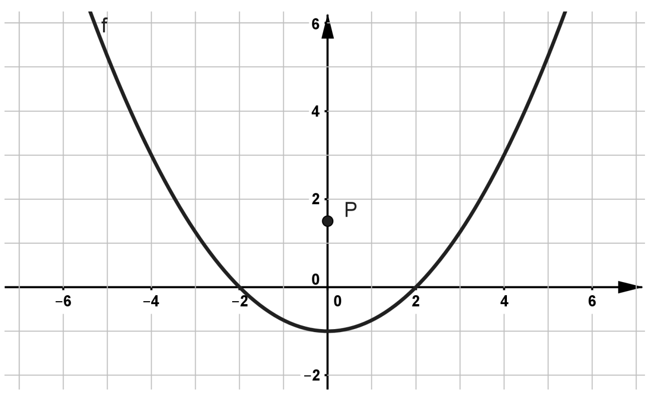
Rješenje.

Uvrstimo $z = x + yi$ u $|z| = \operatorname{Im}(z + 2i)$. Tada je

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + y^2} &= \operatorname{Im}(x + yi + 2i)\\ x^2 + y^2 &= (y + 2)^2\\ x^2 &= 4y + 4.\end{aligned}$$

1 bod

Dakle, skup točaka koje zadovoljavaju dani uvjet leže na paraboli $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$.



2 boda

Odredimo koje su točke $T(x, y) = \left(x, \frac{1}{4}x^2 - 1\right)$ na paraboli najbliže točki $P\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

Udaljenost točke T od točke P je

$$d = \sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{25}{4}}.$$ 1 bod

Tražimo x za koji funkcija $f(x) = \dfrac{1}{16}x^4 - \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{25}{4}$ poprima najmanju vrijednost.

$x^2 = -\frac{b}{2a} = 2$, $x = \pm\sqrt{2}$. 1 bod

$y = \frac{1}{4}x^2 - 1 = -\frac{1}{2}$. 1 bod

Točke parabole najbliže točki P su: $A\left(\sqrt{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ i $B\left(-\sqrt{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$. 1 bod

$|AB| = 2\sqrt{2}$, $v = |y_P - y_A| = 2$. 2 boda

$P = \dfrac{|AB| \cdot v}{2} = 2\sqrt{2}$. 1 bod