Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

28. veljače 2017.

1. Odredite sve cijele brojeve x za koje izraz $x^4 - 101x^2 + 100$ ima negativnu vrijednost.

2. Neka je n prirodan broj i neka je

$$A = 0.1^n \cdot 0.01^n \cdot 0.001^n \cdot 0.0001^n \cdot \ldots \cdot 0.\underbrace{00\ldots0}_{199 \text{ nula}}1^n.$$

Broj A^{-1} ima 140701 znamenku. Odredite broj n.

3. Tangente povučene iz točke B na kružnicu polumjera r dodiruju kružnicu u točkama A i C. Odredite površinu lika omeđenog tangentama BC, BA i manjim kružnim lukom $\widehat{AC}$, ako mjera kuta $\sphericalangle ABC$ iznosi $60°$.

4. U svako polje tablice 4×4 upisan je jedan broj. Za svako je polje zbroj brojeva u njemu susjednim poljima jednak istom prirodnom broju x (dva polja su susjedna ako imaju zajedničku stranicu). Odredite broj x tako da zbroj svih brojeva u tablici iznosi 282.

5. Odredite dvije posljednje znamenke broja $7^{2016^{2017}}$.

6. Tri su brata rođena jedan za drugim s istom razlikom u godinama. Kad se najmlađi brat rodio, najstariji je imao šest godina manje nego što srednji ima danas. Razlika kvadrata broja godina najstarijega i najmlađega brata je 432. Koliko godina ima svaki od tri brata danas?

7. U trokutu ABC duljina stranice $\overline{AC}$ iznosi $5\,\text{cm}$, a duljina stranice $\overline{BC}$ je $6.5\,\text{cm}$. Na stranici $\overline{AB}$ odabrana je točka D tako da su kutovi $\sphericalangle ACD$ i $\sphericalangle ADC$ sukladni, a njihova mjera iznosi $75°$. Odredite duljinu dužine $\overline{CD}$ i duljinu dužine $\overline{AB}$.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

28. veljače 2017.

1. Koliko ima cijelih brojeva a za koje su oba rješenja jednadžbe $(x-20)(x+17)=\frac{1}{4}a$ pozitivni realni brojevi?

2. Izračunajte aritmetičku sredinu svih četveroznamenkastih brojeva zapisanih znamenkama 1, 3, 5, 7, ako su sve znamenke upotrjebljene i to samo jednom.

3. Dora, Magdalena i Luka igraju "igru riječi". Dora je započela igru tako da je rekla jednu riječ. Magdalena je ponovila ono što je rekla Dora i dodala novu riječ. Luka je ponovio riječi koje su Dora i Magdalena izgovorile, te dodao novu riječ. I tako su dalje, redom Dora, Magdalena i Luka nastavili igru sve dok jedna osoba nije pogriješila. Ta je osoba, došavši na red za igru, uspješno ponovila 10 riječi, a onda zaboravila koja je sljedeća, tako da nije nastavila rečenicu. Odredite tko je pogriješio i koliko je ukupno riječi trebao točno ponoviti da bi se igra mogla nastaviti, ako je ukupan broj točno izrečenih riječi za vrijeme ove igre bio 4960.

4. Među kompleksnim brojevima koji zadovoljavaju uvjet $|z-4-4i|=\sqrt{2}$ odredite onaj koji ima najmanju apsolutnu vrijednost i onaj koji ima najveću apsolutnu vrijednost.

5. Na stranici $\overline{AB}$ trokuta ABC dana je točka D. Neka su T_1 i T_2 redom težišta trokuta CAD i CDB. Odredite duljinu dužine $\overline{T_1T_2}$ ako je $|AB|=6\,\mathrm{cm}$.

6. Za koje vrijednosti koeficijenta c nultočke x_1, x_2 funkcije $f(x)=x^2+x+c$ zadovoljavaju uvjet $\dfrac{2x_1^3}{2+x_2}+\dfrac{2x_2^3}{2+x_1}=-1$?

7. Neka je $ABCD$ paralelogram sa stranicama duljina $|AB|=a$ cm i $|BC|=b$ cm $(a>b)$ i šiljastim kutom α. Površina četverokuta koji nastaje kao presjek simetrala unutarnjih kutova paralelograma iznosi $48\mathrm{cm}^2$, a $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{5}$. Izračunajte razliku $a-b$.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

28. veljače 2017.

1. Riješite nejednadžbu
$$8\sin x\cos x\cos 2x > 1.$$

2. Neka je $A = \dfrac{\cos 3+\cos 5}{\cos 3-\cos 5}$ i $B = \dfrac{\sin 5+\sin 7}{\cos 5-\cos 7}$.
Odredite realni broj x tako da je $A + Bx = 0$.

3. Odredite sve prirodne brojeve n za koje je $n^3 - 10n^2 + 28n - 19$ prost broj.

4. Dokažite da je razlika kvadrata duljina stranica paralelograma uvijek manja od umnoška duljina dijagonala tog paralelograma.

5. Izračunajte umnožak rješenja jednadžbe $2016 \cdot x^{\log_{2017} x} = x^{2016}$.

6. Tijekom novogodišnjeg slavlja neodgovorna je osoba ispalila dva hica. Jednim je hicem lakše ozlijeđen slučajni prolaznik. Forenzičari moraju otkriti s kojeg su mjesta ispaljena ta dva hica. Otkrili su u zidu obližnje zgrade trag metka (crna točka) koji se odbio i pogodio prolaznika $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ metra udaljenog od zida. Prema tragu, zaključili su da je putanja metka zatvarala 60° sa zidom i da se metak pod istim kutom odbio. Drugi je metak ostao u zidu 1 metar udaljen od traga prvog metka, a njegova je putanja zatvarala 45° sa zidom. Metak je u odnosu na počinitelja s iste strane kao i prolaznik. Koliko je prolaznik bio udaljen od počinitelja? (Putanje oba metka su u istoj ravnini, paralelnoj s pločnikom, a zid je okomit na pločnik.)

7. Neka su α, β i γ kutovi trokuta. Ako je
$$\frac{\sin^2\gamma + \sin^2\beta - \sin^2\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} = \sqrt{3},$$
odredite kut α.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

28. veljače 2017.

1. Realni brojevi x, y su rješenja sustava jednadžbi

$$2\sqrt{2}x\cos t + 3y\sin t = 6\sqrt{2}$$
$$2\sqrt{2}x\sin t - 3y\cos t = 0.$$

Za koje je vrijednosti parametra $t \in \langle 0, \pi\rangle$ umnožak xy jednak 3?

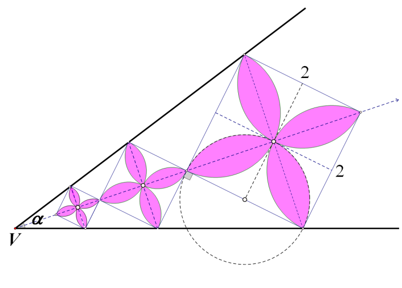
2. Odredite koeficijent uz a^4 u izrazu $2 + a + (a+1)^2 + (a+1)^3 + \cdots + (a+1)^{2017}$.

3. Niz brojeva definiran je s $a_n = n^4 - 360n^2 + 400$. Izračunajte zbroj svih članova toga niza koji su prosti brojevi.

4. Duljina stranice kvadrata $ABCD$ iznosi 2, a točka P je polovište stranice $\overline{CD}$. Točka S je sjecište kružnice sa središtem P polumjera 1 i kružnice sa središtem B polumjera 2. Odredite udaljenost točke S od pravca AD.

5. U trokutu ABC je $a = |BC| = \sqrt{21}$cm, $b = |AC| = 4$cm i $\alpha = \sphericalangle BAC = 120°$. Na stranici $\overline{BC}$ odredite točku D tako da obujam rotacijskog tijela nastalog rotacijom trokuta ABD oko stranice AB bude jednak obujmu rotacijskog tijela nastalog rotacijom trokuta ACD oko stranice AC. U kojem omjeru točka D dijeli stranicu a?

6. U kut α upisan je beskonačan niz kvadrata. Svakom je kvadratu upisan cvjetić s četiri jednake latice kao na slici. Dva nasuprotna vrha kvadrata su na krakovima kuta, a preostala dva na simetrali kuta α. Duljina stranice početnog, najvećeg kvadrata iznosi 2. Odredite mjeru kuta α ako je zbroj površina svih upisanih cvjetića $3(\pi - 2)$.



7. Neka je S skup svih kompleksnih brojeva za koje vrijedi $|z| = \mathrm{Im}(z + 2i)$. Prikažite skup S u kompleksnoj ravnini i odredite površinu trokuta kojemu je jedan vrh točka $P\left(0, \frac{3}{2}\right)$, a druga dva vrha su točke skupa S koje su najbliže točki P.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.