ŠKOLSKO / GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

24. siječnja 2011.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-1.1. (4 boda)

Ako pola ekipe radnika za trećinu dana obavi četvrtinu posla, koliko će ekipa uz iste uvjete obaviti 15 poslova za pet dana?

Rješenje.

Jedna cijela ekipa će za isto vrijeme (trećinu dana) obaviti pola posla (1 bod)

pa će dvije ekipe za trećinu dana obaviti cijeli posao. (1 bod)

Kroz cijeli dan dvije ekipe obavit će trostruki posao. (1 bod)

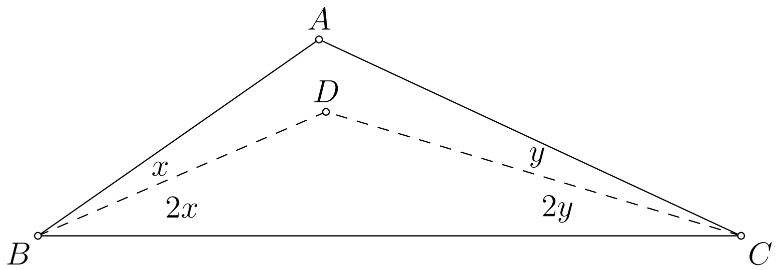
Konačno, ako rade pet dana, dvije ekipe obavit će 15 takvih poslova. (1 bod)

Za obavljanje 15 poslova za pet dana potrebne su dvije ekipe radnika.

Zadatak A-1.2. (4 boda)

U trokutu ABC vrijedi $\sphericalangle BAC = 120°$. Točka D nalazi se unutar trokuta tako da vrijedi $\sphericalangle DBC = 2\sphericalangle ABD$ i $\sphericalangle DCB = 2\sphericalangle ACD$. Izračunaj mjeru kuta $\sphericalangle BDC$.

Rješenje.



Neka je $\sphericalangle DBC = 2\sphericalangle ABD = 2x$ i $\sphericalangle DCB = 2\sphericalangle ACD = 2y$.

Promatrajući kutove trokuta ABC dolazimo do:

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle CBA + \sphericalangle ACB = 180°, \qquad \text{(1 bod)}$$
$$120° + 3x + 3y = 180°,$$
$$x + y = 20°, \qquad \text{(1 bod)}$$

stoga iz trokuta DBC slijedi

$$\begin{aligned}\sphericalangle BDC &= 180° - \sphericalangle CBD - \sphericalangle DCB \\ &= 180° - 2x - 2y \qquad \text{(1 bod)} \\ &= 180° - 40° = 140°. \qquad \text{(1 bod)}\end{aligned}$$

Zadatak A-1.3. (4 boda)

Marko danas slavi rođendan. Njegov otac Joško i djed Luka razgovaraju:

– Sada su i Markov i tvoj i moj broj godina prosti brojevi!

– Da, a za pet godina sva tri će biti kvadrati prirodnih brojeva.

Koliko je godina imao Luka na dan Markovog rođenja?

Rješenje.

Markov, Joškov i Lukin broj godina će za pet godina biti među brojevima

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81,\ 100,\ 121,\ \ldots, \qquad \text{(1 bod)}$$

što znači da su im današnji brojevi godina među brojevima

$$\cancel{-4},\ \cancel{-1},\ 4,\ 11,\ 20,\ 31,\ 44,\ 59,\ 76,\ 95,\ 116,\ \ldots. \qquad \text{(1 bod)}$$

Među njima su jedino brojevi 11, 31 i 59 prosti pa je jasno da
Marko ima 11, Joško 31, a Luka 59 godina. (1 bod)

Prema tome, Luka je na dan Markovog rođenja imao 48 godina. (1 bod)

Zadatak A-1.4. (4 boda)

Neka su a, b i c realni brojevi takvi da je

$$a+b+c=3 \qquad \text{i} \qquad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0.$$

Koliko je $a^2+b^2+c^2$?

Rješenje.

Kako je $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ (1 bod)

iz prve zadane jednakosti dobije se

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca&=9\\ a^2+b^2+c^2&=9-2\,(ab+bc+ca)\,. \end{aligned} \qquad \text{(1 bod)}$$

Kako iz druge zadane jednakosti slijedi

$$\frac{bc+ca+ab}{abc}=0,$$

odnosno $ab+bc+ca=0$, (1 bod)

konačno se dobije:

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2&=9-2\,(ab+bc+ca)\\ &=9-2\cdot 0=9. \end{aligned} \qquad \text{(1 bod)}$$

Zadatak A-1.5. (4 boda)

Koliko najmanje elemenata treba izbaciti iz skupa $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$ tako da umnožak preostalih elemenata bude kvadrat prirodnog broja?

Rješenje.

Umnožak svih elemenata danog skupa je

$$\begin{aligned} P &= 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16 \\ &= 2 \cdot 2^2 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 2^3 \cdot (2 \cdot 5) \cdot \left(2^2 \cdot 3\right) \cdot (2 \cdot 7) \cdot 2^4 \\ &= 2^{15} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7. \end{aligned}$$

Umnožak je djeljiv s 5, ali ne i s 5^2, pa je jasno da broj 10 treba izbaciti. (1 bod)

Umnožak je djeljiv sa 7, ali nije djeljiv sa 7^2, pa je jasno da treba izbaciti i broj 14. (1 bod)

Umnožak preostalih brojeva, $2^{13} \cdot 3^2$, nije potpun kvadrat pa treba izbaciti barem još jedan broj. Vidimo da je dovoljno izbaciti neku neparnu potenciju broja 2, tj. broj 2 ili broj 8. (1 bod)

Potrebno je izbaciti najmanje tri broja. (1 bod)

Napomena.
Nije nužno da učenik navede sve mogućnosti izbacivanja tri elementa, ali nužno je da pokaže da nije moguće izbaciti samo jedan ili dva broja, a da umnožak preostalih bude potpuni kvadrat. Mogućnosti izbacivanja tri broja su: $\{\cancel{2}, 4, 6, 8, \cancel{10}, 12, \cancel{14}, 16\}$ i $\{2, 4, 6, \cancel{8}, \cancel{10}, 12, \cancel{14}, 16\}$.

Zadatak A-1.6. (10 bodova)

Zbroj duljina krakova trapeza iznosi $4\sqrt{10}$, a duljina visine 6. Površina trapeza je 72. Ako je taj trapez upisan u kružnicu, odredi polumjer te kružnice.

Rješenje.

Znajući duljinu visine $v = 6$ i površinu $P = 72$, iz $P = \frac{1}{2}(a+c)v$ slijedi $a + c = 24$, gdje je a dulja i c kraća osnovica. (1 bod)

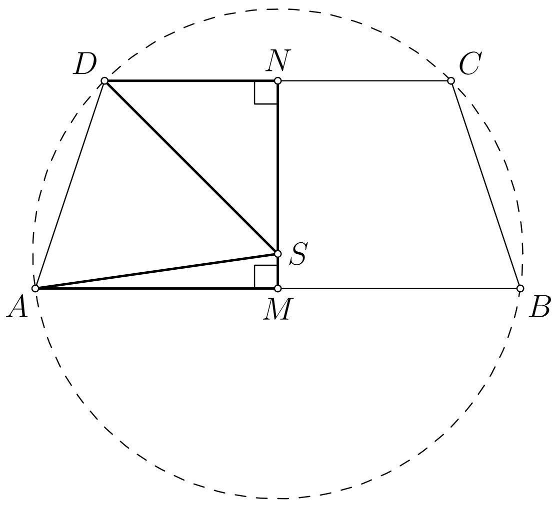
Trapez je upisan u kružnicu pa mora biti jednakokračan.
Stoga je duljina kraka $b = 2\sqrt{10}$. (1 bod)

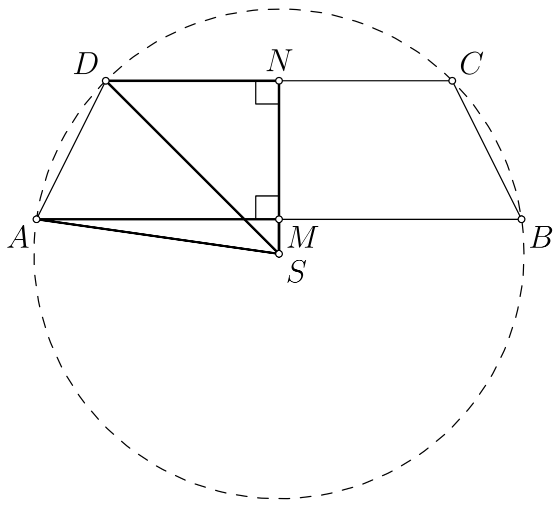
Iz $v^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 = b^2$ dobivamo $\frac{a-c}{2} = \sqrt{\left(2\sqrt{10}\right)^2 - 6^2} = 2.$ (1 bod)

Sada je $a + c = 24$, $a - c = 4$, pa je $a = 14$ i $c = 10$. (1 bod)

Neka su M i N polovišta osnovica trapeza $ABCD$ kao na slici. Da bismo odredili polumjer opisane kružnice uočimo pravokutne trokute AMS i DNS.

Vrijedi $|AM|^2 + |MS|^2 = |AS|^2$ i $|DN|^2 + |NS|^2 = |DS|^2$.





Neka je polumjer kružnice R i neka je $|MS| = x$.

Nismo sigurni leži li središte kružnice unutar ili izvan trapeza. Zato imamo dvije mogućnosti:

$$|NS| = 6 - x \qquad \text{ili} \qquad |NS| = 6 + x.$$

U prvom slučaju dobivamo sustav $\begin{cases} 7^2 + x^2 = R^2, \\ 5^2 + (6-x)^2 = R^2. \end{cases}$ (2 boda)

Oduzimanjem dobivamo: $(49 + x^2) - (25 + 36 - 12x + x^2) = 0$,

odnosno $12x = 12$ pa je $x = 1$ i konačno $R^2 = 50$. (2 boda)

Polumjer kružnice je $5\sqrt{2}$.

Drugi slučaj vodi na sustav $\begin{cases} 7^2 + x^2 = R^2, \\ 5^2 + (6+x)^2 = R^2, \end{cases}$ iz kojeg dobivamo $x = -1 < 0$, pa ovaj slučaj otpada. (2 boda)

Zadatak A-1.7. (10 bodova)

Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 2011 koji su djeljivi barem jednim od brojeva 2 i 7, a nisu djeljivi brojem 5?

Prvo rješenje.

Broj brojeva manjih od 2011 koji su djeljivi s 2 ima $\left\lfloor \frac{2010}{2} \right\rfloor = 1005$ (1 bod)

Među njima je $\left\lfloor \frac{1005}{5} \right\rfloor = 201$ brojeva djeljivih s 5 (1 bod)

pa ima $1005 - 201 = 804$ brojeva manjih od 2011 djeljivih s 2 koji nisu djeljivi s 5. (1 bod)

Slično, sa 7 je djeljivo $\left\lfloor \frac{2010}{7} \right\rfloor = 287$ brojeva manjih od 2011, (1 bod)

a među njima je $\left\lfloor \frac{287}{5} \right\rfloor = 57$ brojeva djeljivih s 5 (1 bod)

pa ima $287 - 57 = 230$ brojeva djeljivih sa 7 koji nisu djeljivi s 5. (1 bod)

S 14 je djeljivo $\left\lfloor \frac{2010}{14} \right\rfloor = 143$ brojeva, (1 bod)

od njih je $\left\lfloor \frac{143}{5} \right\rfloor = 28$ djeljivo s 5 (1 bod)

pa ima $143 - 28 = 115$ brojeva djeljivih s 14 ali ne i s 5. (1 bod)

Konačno, traženi broj je $804 + 230 - 115 = 919$. (1 bod)

Drugo rješenje.

Prirodnih brojeva manjih od 2011 djeljivih s 2 ima $\left\lfloor \frac{2010}{2} \right\rfloor = 1005$, (1 bod)

djeljivih sa 7 ima $\left\lfloor \frac{2010}{7} \right\rfloor = 287$, a djeljivih sa 14 ima $\left\lfloor \frac{2010}{14} \right\rfloor = 143$. (2 boda)

Odatle slijedi da ima

$$1005 + 287 - 143 = 1149 \qquad \text{(1 bod)}$$

prirodnih brojeva manjih od 2011 koji su djeljivi s 2 ili sa 7.

Od tih brojeva preostaje izuzeti one djeljive s 5, odnosno višekratnike brojeva 10 i 35. (1 bod)

Kako je među njima $\left\lfloor \frac{2010}{10} \right\rfloor = 201$ višekratnik broja 10, (1 bod)

$\left\lfloor \frac{2010}{35} \right\rfloor = 57$ višekratnika broja 35 te $\left\lfloor \frac{2010}{70} \right\rfloor = 28$ višekratnika broja 70, (2 boda)

slijedi da je među gornjih 1149 brojeva $201 + 57 - 28 = 230$ višekratnika broja 5. (1 bod)

Konačno, ima $1149 - 230 = 919$ prirodnih brojeva manjih od 2011
koji su djeljivi s 2 ili sa 7, a nisu djeljivi s 5. (1 bod)

Treće rješenje.

Odredimo među brojevima od 1 do 70 one koji su djeljivi barem jednim od brojeva 2 i 7, a nisu djeljivi brojem 5:

$\cancel{1}$	2	$\cancel{3}$	4	$\cancel{5}$	6	**7**	8	$\cancel{9}$	$\cancel{10}$
$\cancel{11}$	12	$\cancel{13}$	14	$\cancel{15}$	16	$\cancel{17}$	18	$\cancel{19}$	$\cancel{20}$
21	22	$\cancel{23}$	24	$\cancel{25}$	26	$\cancel{27}$	28	$\cancel{29}$	$\cancel{30}$
$\cancel{31}$	32	$\cancel{33}$	34	$\cancel{35}$	36	$\cancel{37}$	38	$\cancel{39}$	$\cancel{40}$
$\cancel{41}$	42	$\cancel{43}$	44	$\cancel{45}$	46	$\cancel{47}$	48	**49**	$\cancel{50}$
$\cancel{51}$	52	$\cancel{53}$	54	$\cancel{55}$	56	$\cancel{57}$	58	$\cancel{59}$	$\cancel{60}$
$\cancel{61}$	62	**63**	64	$\cancel{65}$	66	$\cancel{67}$	68	$\cancel{69}$	$\cancel{70}$

To su brojevi koji završavanju znamenkama 2, 4, 6 ili 8 te još brojevi 7, 21, 49 i 63.

Takvih brojeva od 1 do 70 ima 32. (3 boda)

Isto se ponavlja i za naredne grupe po 70 brojeva. (2 boda)

Kako je $70 \cdot 28 = 1960$, među brojevima od 1 do 1960 ima $32 \cdot 28$ brojeva koji zadovoljavaju uvjet zadatka. (1 bod)

Među brojevima od 1961 do 2010 nalaze se još 23 takva broja. (3 boda)
(Brojeve od 1961 do 2010 možemo zamijeniti brojevima od 1 do 50 i pogledati gornju listu.)

Stoga je konačni rezultat $32 \cdot 28 + 23 = 896 + 23 = 919$. (1 bod)

Zadatak A-1.8. (10 bodova)

Dokaži da ne postoje neparni cijeli brojevi x, y i z za koje vrijedi

$$(x-z)^2 + (y-z)^2 = (x+y)^2 .$$

Prvo rješenje.

Sređivanjem zadane jednakosti dobivamo:

$$z^2 - xz - yz - xy = 0. \qquad \text{(1 bod)}$$

To možemo zapisati npr. ovako:

$$z^2 - xz - y(z+x) = 0,$$
$$z(z+x) - 2xz - y(z+x) = 0,$$
$$(z+x)(z-y) = 2xz. \qquad \text{(A)}$$

... ili na neki od sličnih načina:

$$(z-x)(z+y) = 2yz, \qquad \text{(B)}$$
$$(z-x)(z-y) = 2xy. \qquad \text{(C)}$$

Bilo koja od jednakosti (A), (B), (C) vrijedi (3 boda)

Pretpostavimo da postoje neparni cijeli brojevi x, y i z za koje vrijedi dana jednakost.

Tada su obje zagrade na lijevoj strani od (A) (ili (B) ili (C)) parne,
pa je lijeva strana te jednakosti djeljiva sa 4. (2 boda)

No, desna strana nije djeljiva s 4, (1 bod)

pa dobivamo kontradikciju. (3 boda)

Prema tome, ne postoje neparni cijeli brojevi x, y i z za koje vrijedi zadana jednakost.

Drugo rješenje.

Raspisivanjem zadane jednakosti dobije se

$$z^2 - xz - yz = xy, \qquad \text{(1 bod)}$$

što možemo zapisati u obliku $\quad y\,(z+x) = z^2 - zx. \qquad (*)$

Ako je $z + x = 0$, odnosno $z = -x$, iz zadane jednakosti slijedi

$$(x+x)^2 + (y+x)^2 = (x+y)^2$$

odnosno $4x^2 = 0$, pa je $x = z = 0$ (i $y \in \mathbb{R}$), pa x i z nisu neparni. (1 bod)

Ako je $z + x \neq 0$ iz $(*)$ slijedi

$$y = \frac{z^2 - zx}{z+x} = \frac{z^2 + zx - 2zx}{z+x} = z - \frac{2zx}{z+x}. \qquad \text{(3 boda)}$$

Pod pretpostavkom da su x i z neparni cijeli brojevi,

ako je i broj $\dfrac{2zx}{z+x}$ cijeli on je sigurno neparan, (2 boda)

pa je y paran. Stoga, ne postoje neparni cijeli brojevi x, y i z za koje vrijedi zadana jednakost. (3 boda)

Treće rješenje.

Pretpostavimo postoje neparni x, y, z za koje vrijedi dana jednakost.
Tada postoje $a, b, c \in \mathbb{Z}$ takvi da je $x = 2a - 1$, $y = 2b - 1$, $z = 2c - 1$. (1 bod)

Uvrštavanjem u zadanu jednakost dobivamo

$$(2a - 2c)^2 + (2b - 2c)^2 = (2a + 2b - 2)^2$$

odnosno nakon dijeljenja s 4

$$(a-c)^2 + (b-c)^2 = (a+b-1)^2. \qquad (\diamond) \qquad \text{(1 bod)}$$

Prvi slučaj: Brojevi a i b su iste parnosti (tj. oba parna ili oba neparna).

Tada su i brojevi $a - c$ i $b - c$ iste parnosti. (1 bod)

Tada je lijeva strana jednakosti $(\diamond)$ paran broj. (1 bod)

Budući da su a i b iste parnosti, broj $a + b - 1$ je neparan pa je desna strana neparan broj, što je kontradikcija. (2 boda)

Drugi slučaj: Brojevi a i b su različite parnosti (tj. jedan paran, a drugi neparan).

Tada su i brojevi $a - c$ i $b - c$ različite parnosti. (1 bod)

Tada je lijeva strana jednakosti $(\diamond)$ neparan broj. (1 bod)

Budući da su a i b različite parnosti, broj $a + b - 1$ je paran pa je desna strana paran broj, što je kontradikcija. (2 boda)

Kako svi slučajevi vode na kontradikciju zaključujemo da je pretpostavka pogrešna, tj. da ne postoje neparni brojevi x, y, z koji bi zadovoljavali jednakost iz zadatka.

ŠKOLSKO / GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

24. siječnja 2011.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-2.1. (4 boda)

Odredi sve prirodne brojeve n za koje je $\dfrac{n-1}{n-5}$ cijeli broj.

Prvo rješenje.

Kako je
$$\frac{n-1}{n-5}=\frac{n-5+4}{n-5}=1+\frac{4}{n-5},$$
broj $\dfrac{n-1}{n-5}$ je cijeli ako i samo ako je i $\dfrac{4}{n-5}$ cijeli broj, (2 boda)

a to vrijedi ako i samo ako je 4 djeljiv s $(n-5)$,

tj. ako i samo ako je
$$n-5\in\{-4,-2,-1,1,2,4\}\,. \qquad \text{(1 bod)}$$
Konačno, traženi brojevi su:
$$n\in\{1,3,4,6,7,9\}\,. \qquad \text{(1 bod)}$$

Ako učenik ne vodi računa o ekvivalentnosti mora provjeriti rezultate.
Za bodovanje u tom slučaju vidi drugo rješenje.

Drugo rješenje.

Odredimo sve n za koje je promatrani izraz cijeli broj.
Vrijedi
$$\frac{n-1}{n-5}=\frac{n-5+4}{n-5}=1+\frac{4}{n-5},$$
pa broj $\dfrac{4}{n-5}$ mora biti cijeli, (1 bod)

tj. broj 4 mora biti djeljiv s $(n-5)$. To je ispunjeno ako je
$$n-5\in\{-4,-2,-1,1,2,4\}$$
pa očekujemo da su traženi brojevi:
$$n\in\{1,3,4,6,7,9\}\,. \qquad \text{(1 bod)}$$

Provjerom:
$$\frac{1-1}{1-5}=0 \qquad \frac{3-1}{3-5}=-1 \qquad \frac{4-1}{4-5}=-3 \qquad \frac{6-1}{6-5}=5 \qquad \frac{7-1}{7-5}=3 \qquad \frac{9-1}{9-5}=2$$
utvrđujemo da su svi ti brojevi zaista rješenja. (2 boda)

Treće rješenje.

Uvrštavanjem brojeva $n = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9$ (za $n = 5$ nazivnik nije definiran) u dani izraz

$$\frac{1-1}{1-5} = 0 \qquad \frac{2-1}{2-5} = -\frac{1}{3} \qquad \frac{3-1}{3-5} = -1 \qquad \frac{4-1}{4-5} = -3$$

$$\frac{6-1}{6-5} = 5 \qquad \frac{7-1}{7-5} = 3 \qquad \frac{8-1}{8-5} = \frac{7}{3} \qquad \frac{9-1}{9-5} = 2$$

utvrđujemo da je to cijeli broj za $n \in \{1, 3, 4, 6, 7, 9\}$. (2 boda)

Za $n \geqslant 10$, izraz $\dfrac{n-1}{n-5}$ je veći od 1, a vrijedi i $n - 5 > 4$ pa je $\dfrac{4}{n-5} < 1$ i stoga

$$1 < \frac{n-1}{n-5} = \frac{n-5+4}{n-5} = 1 + \frac{4}{n-5} < 2.$$

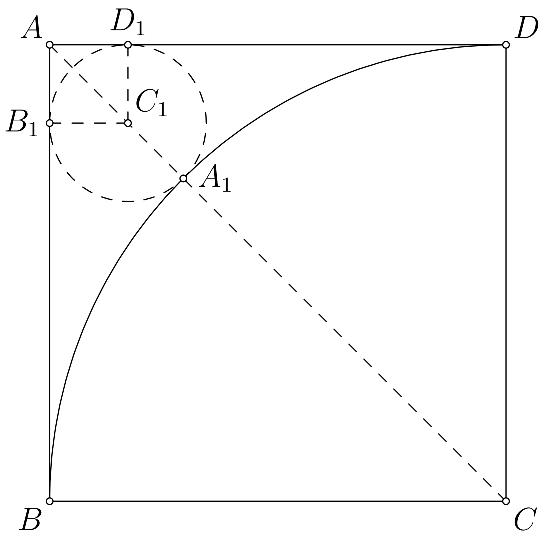
Zaključujemo da za $n \geqslant 10$ dani izraz ne može biti cijeli broj. (2 boda)

Zadatak A-2.2. (4 boda)

Neka je $ABCD$ kvadrat stranice 1. Kružnica k ima polumjer 1 i središte u točki C. Odredi polumjer kružnice k_1 koja dira kružnicu k i dužine $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$.

Rješenje.

Označimo sa C_1 središte kružnice k_1, s A_1, B_1, D_1 redom označimo njena dirališta s kružnicom k, dužinom $\overline{AB}$ i dužinom $\overline{AD}$. Neka je r traženi polumjer kružnice k_1.



Tada je

$$|A_1C_1| = |B_1C_1| = |D_1C_1| = r$$

i $AB_1C_1D_1$ je kvadrat stranice r. (1 bod)

Kako vrijedi $|AC| = |AC_1| + |C_1A_1| + |A_1C|$ (1 bod)

dobivamo $\sqrt{2} = r\sqrt{2} + r + 1$ (1 bod)

i konačno

$$r = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3 - 2\sqrt{2}.$$ (1 bod)

Zadatak A-2.3. (4 boda)

Odredi sve realne brojeve a takve da, za svaki realan broj x, vrijedi

$$\frac{x}{x^2+2x+3} > \frac{x+a}{1+x+x^2}.$$

Rješenje.

Oba kvadratna polinoma u nazivnicima imaju negativne determinante te su uvijek pozitivni.

(1 bod)

Nakon množenja s nazivnicima, nejednadžba poprima oblik

$$(x+a)(x^2+2x+3) < x(x^2+x+1),$$

a nakon sređivanja dobivamo

$$(a+1)x^2 + 2(a+1)x + 3a < 0. \tag{$*$}$$

Neka je $a \neq -1$.
Da bi nejednakost $(*)$ vrijedila za sve realne brojeve x, mora vrijediti $a+1<0$ i diskriminanta ove kvadratne funkcije mora biti negativna.

$$\begin{aligned} D &= 4(a+1)^2 - 4(a+1)\cdot 3a \\ &= 4(a+1)(1-2a) = 4(-2a^2-a+1). \end{aligned}$$

(1 bod)

Dakle, rješavamo sustav

$$a < -1 \qquad \text{i} \qquad (a+1)(1-2a) < 0.$$

Rješenje posljednje kvadratne nejednadžbe je $a \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \left\langle \frac{1}{2}, +\infty \right\rangle$,

pa je rješenje sustava $a \in \langle -\infty, -1\rangle$. (1 bod)

Za $a=-1$ nejednadžba $(*)$ postaje $-3<0$ i očito je ispunjena za sve $x \in \mathbb{R}$.
Zato je i $a=-1$ rješenje zadatka. (1 bod)

Konačno rješenje je $a \in \langle -\infty, -1]$.

Zadatak A-2.4. (4 boda)

Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi

$$|z| = |z+1| = \left|\frac{1}{z}\right|.$$

Prvo rješenje.

Iz $|z| = \left|\frac{1}{z}\right|$ dobivamo $|z|^2 = 1$, a iz toga $|z| = 1$. (1 bod)

Stavimo li $z = a + bi$, dobivamo $a^2 + b^2 = 1$.

S druge strane, kako je $|z+1| = |z| = 1$, to je $|a + bi + 1| = 1$,

odnosno, $(a+1)^2 + b^2 = 1$, tj., nakon sređivanja: $a^2 + 2a + b^2 = 0$. (1 bod)

Kako je $a^2 + b^2 = 1$, dobivamo $2a = -1$, tj. $a = -\frac{1}{2}$, (1 bod)

a onda slijedi $b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Traženi brojevi su $z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. (1 bod)

Drugo rješenje.

Iz $|z| = \left|\frac{1}{z}\right|$ dobivamo $|z|^2 = 1$, a iz toga $|z| = 1$. (1 bod)

S druge strane, iz $|z+1| = |z|$ slijedi $(z+1)\cdot\overline{(z+1)} = z\overline{z}$,

odnosno $z\overline{z} + z + \overline{z} + 1 = z\overline{z}$

i konačno $z + \overline{z} = -1$. $(*)$ (1 bod)

Neka je $z = a + ib$. Tada je $\overline{z} = a - ib$ pa iz $(*)$ slijedi $a = -\frac{1}{2}$, (1 bod)

a onda iz $|z| = 1$ dobivamo $b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Traženi brojevi su $z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. (1 bod)

Zadatak A-2.5. (4 boda)

Mario je napisao 30-znamenkasti prirodni broj čiji je zbroj znamenaka 123. Zatim je iza tog broja dopisao još jednom sve njegove znamenke u nekom drugom poretku. Dokaži da dobiveni 60-znamenkasti broj nije kvadrat prirodnog broja.

Rješenje.

Dobiven je 60-znamenkasti broj kojem je zbroj znamenaka jednak $2 \cdot 123 = 246$. (1 bod)

Kako je 246 djeljiv s 3, i taj 60-znamenkasti broj je djeljiv s 3. (1 bod)

No, on nije djeljiv s 9 jer zbroj njegovih znamenaka, 246, nije djeljiv s 9. (1 bod)

Dakle, promatrani broj je djeljiv s 3 ali nije djeljiv s 9, pa ne može biti potpun kvadrat. (1 bod)

Zadatak A-2.6. (10 bodova)

Neka su a, b i c tri različita realna broja od kojih niti jedan nije jednak nula. Promatramo kvadratne jednadžbe:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad bx^2 + cx + a = 0, \quad cx^2 + ax + b = 0.$$

Ako je $\frac{c}{a}$ rješenje prve jednadžbe, dokaži da sve tri jednadžbe imaju zajedničko rješenje. Odredi umnožak drugih triju rješenja tih jednadžbi (ne-zajedničkih).

Prvo rješenje.

Kako je $\frac{c}{a}$ rješenje jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$, nakon uvrštavanja dobivamo

$$a \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^2 + b \cdot \frac{c}{a} + c = 0 \qquad \text{(1 bod)}$$

odnosno

$$c^2 + bc + ac = 0,$$

tj.

$$c(a + b + c) = 0.$$

Kako je $c \neq 0$, mora vrijediti $a + b + c = 0$, (2 boda)

pa je $x_0 = 1$ zajedničko rješenje danih triju jednadžbi. (2 boda)

Označimo s x_1, x_2, x_3 druga rješenja tih jednadžbi. Prema Vieteovim formulama vrijedi

$$x_0 \cdot x_1 = \frac{c}{a}, \quad x_0 \cdot x_2 = \frac{a}{b}, \quad x_0 \cdot x_3 = \frac{b}{c}, \qquad \text{(3 boda)}$$

pa kako je $x_0 = 1$, traženi umnožak iznosi $x_1 x_2 x_3 = \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = 1$. (2 boda)

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju zaključujemo da mora vrijediti $a + b + c = 0$. (3 boda)

Uvrštavanjem $c = -a - b$ u dane jednadžbe dobivamo

$$ax^2 + bx - a - b = 0, \quad bx^2 - ax - bx + a = 0, \quad -ax^2 - bx^2 + ax + b = 0,$$

Rješenja prve jednadžbe $(x - 1)(ax + a + b) = 0$

su $x_0 = 1$ i $x_1 = -\frac{a + b}{a}$. (2 boda)

Rješenja druge jednadžbe $(x - 1)(bx - a) = 0$

su $x_0 = 1$ i $x_2 = \frac{a}{b}$. (2 boda)

Rješenja treće jednadžbe $(1 - x)(ax + bx + b) = 0$

su $x_0 = 1$ i $x_3 = -\frac{b}{a + b}$. (2 boda)

$(a + b \neq 0$ jer je $c = -(a + b) \neq 0)$

Umnožak ne-zajedničkih rješenja je $x_1 x_2 x_3 = -\frac{a + b}{a} \cdot \frac{a}{b} \cdot \left(-\frac{b}{a + b}\right) = 1$. (1 bod)

Zadatak A-2.7. (10 bodova)

U četverokutu $ABCD$ vrijedi

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = 90^\circ, \quad |AB| = |BC|, \quad |CD| + |DA| = m.$$

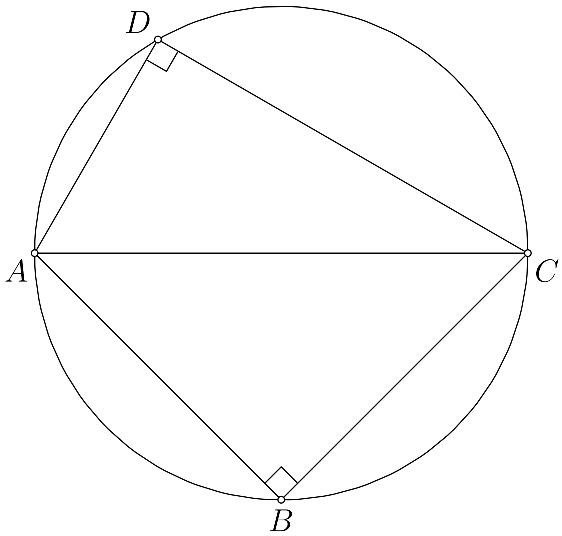
Odredi površinu četverokuta $ABCD$ u ovisnosti o m.

Rješenje.

Uvedimo oznake

$$|AB| = |BC| = a, \quad |CD| = c, \quad |DA| = d.$$

Zbog uvjeta zadatka vrijedi $c + d = m$.



Površina četverokuta $ABCD$ jednaka je

$$P = \frac{|AB| \cdot |BC|}{2} + \frac{|CD| \cdot |DA|}{2} = \frac{a^2 + cd}{2}. \qquad (*)$$ (2 boda)

Iz Pitagorinog poučka dobivamo

$$|AC|^2 = 2a^2 = c^2 + d^2.$$ (2 boda)

Površinu trokuta trebamo izraziti pomoću $m = c + d$,

pa zamijenimo $a^2 = \frac{1}{2}\left(c^2 + d^2\right)$ u formuli $(*)$. (2 boda)

Sada je tražena površina

$$P = \frac{a^2 + cd}{2} = \frac{\frac{c^2 + d^2}{2} + cd}{2}$$ (1 boda)

$$= \frac{c^2 + d^2 + 2cd}{4} = \frac{(c+d)^2}{4}$$ (2 boda)

$$= \frac{m^2}{4}.$$ (1 bod)

Zadatak A-2.8. (10 bodova)

Ivan, Stipe i Tonći izmjenjuju se u bacanju kockice. Prvi baca Ivan, onda Stipe pa Tonći, i nakon toga opet Ivan i tako dalje istim redom. Svaki od njih, kad je njegov red, baca kockicu jednom, sve dok ne dobije prvu "šesticu". Nakon što dobije svoju prvu šesticu, u svakom idućem bacanju Ivan baca kockicu četiri, Stipe šest, a Tonći osam puta.

Tonći je zadnji dobio prvu šesticu, u svom desetom bacanju, i tada je igra završila. Ako je kockica bačena 47 puta, odredi tko je od njih kockicu bacao najviše puta.

Prvo rješenje.

Svaki od njih trojice došao je na red 10 puta, tj. odigrano je deset krugova. Da su svi stalno bacali kockicu samo jednom, bilo bi ukupno 30 bacanja.

Preostalih $47 - 30 = 17$ bacanja kockice napravili su Ivan i Stipe dodatnim bacanjima.
(2 boda)

Ako je Ivan u x krugova bacao tri dodatna bacanja, a Stipe u y krugova dodatnih pet bacanja, onda vrijedi $3x + 5y = 17$. (3 boda)

Brojevi x i y moraju biti prirodni brojevi ili 0, pa jednadžbu možemo riješiti uvrštavanjem $y = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Za $y \geqslant 4$ broj x je manji od nule. Jedino rješenje je $x = 4$, $y = 1$. (3 boda)

Ivan je četiri puta bacao dodatne kockice, pa je ukupno bacao $10 + 4 \cdot 3 = 22$ puta.

Stipe je bacao dodatne kockice samo jednom, pa je bacao kockicu ukupno $10 + 5 = 15$ puta.

Najviše puta je kockicu bacao Ivan. (2 boda)

Drugo rješenje.

Neka je Ivan dobio prvu šesticu u m-tom krugu, a Stipe u n-tom.
Tonći je bacio kockicu 10 puta, pa su i Ivan i Stipe po 10 puta došli na red.

To znači da je Ivan u zadnjih $(10 - m)$ krugova bacao kockicu četiri puta pa je ukupno bacio kockicu $m \cdot 1 + (10 - m) \cdot 4 = 40 - 3m$ puta. (2 boda)

Stipe je u zadnjih $(10 - n)$ krugova bacao kockicu šest puta pa je ukupno bacio $n \cdot 1 + (10 - n) \cdot 6 = 60 - 5n$ puta. (2 boda)

Zato vrijedi $(40 - 3m) + (60 - 5n) + 10 = 47$. (1 bod)

Nakon sređivanja dobivamo jednadžbu

$$3m + 5n = 63.$$

Brojevi m i n moraju biti iz $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Uočimo li da n mora biti djeljiv s 3, dovoljno je uvrstiti redom $n = 3$, $n = 6$ i $n = 9$.

Jedino za $n = 9$ dobivamo rješenje koje zadovoljava uvjete, pa je $m = 6$ i $n = 9$. (3 boda)

Ivan je dobio prvu šesticu u šestom krugu, a Stipe u devetom.
Ivan je ukupno bacao $6 + 4 \cdot 4 = 22$ puta, a Stipe $9 + 6 = 15$ puta.
Ivan je bacio kockicu najviše puta. (2 boda)

ŠKOLSKO / GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

24. siječnja 2011.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-3.1. (4 boda)

Ako je $\log_a x = 3$ i $\log_{ab} x = 2$, koliko je $\log_b x$?

Prvo rješenje.

Iz $\log_a x = 3$ slijedi $x = a^3$, a iz $\log_{ab} x = 2$ slijedi $x = (ab)^2$. (1 bod)

Sada imamo $a^3 = a^2b^2$ pa kako $a \neq 0$, vrijedi $a = b^2$. (1 bod)

Stoga je $x = (b^2)^3 = b^6$, (1 bod)

pa je $\log_b x = \log_b b^6 = 6$. (1 bod)

Drugo rješenje.

Očito $x \neq 1$, pa iz $\log_a x = 3$ slijedi $\log_x a = \dfrac{1}{3}$, (1 bod)

a iz $\log_{ab} x = 2$ slijedi $\log_x ab = \dfrac{1}{2}$. (1 bod)

Kako je $\log_x ab = \log_x a + \log_x b$, slijedi $\dfrac{1}{3} + \log_x b = \dfrac{1}{2}$, (1 bod)

pa je $\log_x b = \dfrac{1}{6}$ i konačno $\log_b x = 6$. (1 bod)

Treće rješenje.

Kako je $x \neq 1$ i $b \neq 1$, vrijedi

$$\log_b x = \frac{1}{\log_x b} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$= \frac{1}{\log_x \dfrac{ab}{a}} = \frac{1}{\log_x ab - \log_x a} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{1}{\log_{ab} x} - \dfrac{1}{\log_a x}} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = 6. \qquad \text{(1 bod)}$$

Napomena.

Ako učenik ne obraća pažnju na posebne slučajeve ($a = 0$, $x = 1$ i sl.) gdje je to potrebno, treba mu oduzeti 1 bod.

Zadatak A-3.2. (4 boda)

Koliki najviše može biti omjer troznamenkastog broja i zbroja njegovih znamenaka?

Prvo rješenje.

Tvrdimo da je taj omjer 100. Npr. za broj 300 vrijedi $\dfrac{300}{3+0+0} = 100.$ (1 bod)

(Naravno, isto vrijedi za sve brojeve oblika $\overline{a00}$.)

Za troznamenkasti broj $\overline{abc}$ promatrani omjer iznosi $\dfrac{100a+10b+c}{a+b+c}$.

Sada treba dokazati da taj omjer ne može biti veći od 100. (1 bod)

Očito je

$$\frac{100a+10b+c}{a+b+c} \leqslant \frac{100a+100b+100c}{a+b+c} = 100, \qquad \text{(2 boda)}$$

tj. promatrani omjer ne može biti veći od 100.

Drugo rješenje.

Promatrani omjer $\dfrac{100a+10b+c}{a+b+c}$ možemo zapisati u obliku $1+\dfrac{99a+9b}{a+b+c}$. (1 bod)

Da bi taj izraz bio maksimalan, jasno je da mora biti $c=0$. (1 bod)

Tada je nadalje

$$1+\frac{99a+9b}{a+b+c} = 1+\frac{99a+9b}{a+b} = 1+9+\frac{90a}{a+b}.$$

Da bi taj izraz bio maksimalan, očito mora biti $b=0$. (1 bod)

Zato se maksimalna vrijednost izraza postiže za brojeve $\overline{a00}$ i iznosi 100. (1 bod)

Zadatak A-3.3. (4 boda)

Točka D je nožište visine iz vrha A, a točka E nožište visine iz vrha B trokuta ABC. Ako je $|AE| = 5$, $|CE| = 3$ i $|CD| = 2$, odredi duljinu $|BD|$.

Prvo rješenje.

Uočimo da su trokuti ACD i BCE slični (dva kuta). (1 bod)

Zato je $|AC| : |CD| = |BC| : |CE|$. $\quad (*)$ (1 bod)

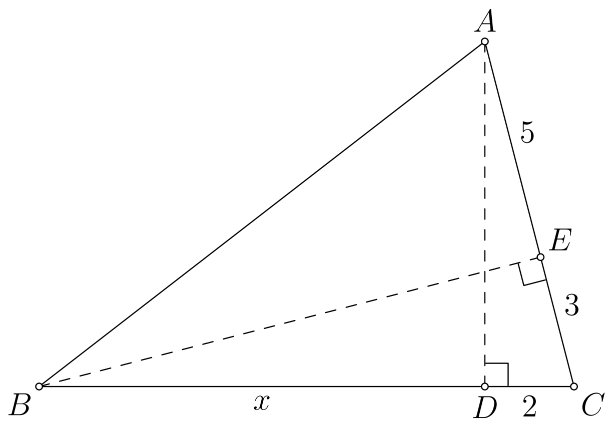
Označimo $|BD| = x$.

Sada $(*)$ možemo zapisati u obliku $\dfrac{5+3}{2} = \dfrac{x+2}{3}$, (1 bod)

odakle slijedi $x + 2 = 3 \cdot \frac{8}{2} = 12$ pa je tražena duljina $|BD| = x = 10$. (1 bod)

Drugo rješenje.

Označimo $|BD| = x$.



Primijenimo Pitagorin poučak:

na trokut ADC : $\quad |AD|^2 = |AC|^2 - |CD|^2 = 8^2 - 2^2 = 60$

na trokut BEC : $\quad |BE|^2 = |BC|^2 - |CE|^2 = (x+2)^2 - 9$ (1 bod)

na trokut ABD : $\quad |AB|^2 = |BD|^2 + |AD|^2 = x^2 + 60$

na trokut ABE : $\quad |AB|^2 = |BE|^2 + |AE|^2 = ((x+2)^2 - 9) + 25$ (1 bod)

Izjednačavanjem dobivenih vrijednosti za $|AB|^2$ dobivamo

$$\big((x+2)^2 - 9\big) + 25 = x^2 + 60, \quad \text{(1 bod)}$$
$$x^2 + 4x + 4 - 9 + 25 = x^2 + 60,$$
$$4x = 40,$$

te konačno $|BD| = x = 10$. (1 bod)

Treće rješenje.

Označimo $|BD| = x$. Vrijedi $|AC| = 8$ i $|BC| = x + 2$.

Kao u prvom rješenju, primijenimo Pitagorin poučak:

na trokut ADC : $\quad |AD|^2 = |AC|^2 - |CD|^2 = 8^2 - 2^2 = 60$

na trokut BEC : $\quad |BE|^2 = |BC|^2 - |CE|^2 = (x+2)^2 - 9$ (1 bod)

Sada uočimo da površinu danog trokuta možemo izraziti na dva načina:

$$P(ABC) = \frac{|BC| \cdot |AD|}{2} \qquad\qquad P(ABC) = \frac{|CA| \cdot |BE|}{2}.$$

Stoga vrijedi $|BC| \cdot |AD| = |CA| \cdot |BE|$ (1 bod)

odnosno

$$|BC|^2 \cdot |AD|^2 = |CA|^2 \cdot |BE|^2 .$$

Uvrštavanjem dobivamo $\quad (x+2)^2 \cdot 60 = (5+3)^2 \cdot \left((x+2)^2 - 9\right),$ (1 bod)

odakle slijedi

$$\begin{aligned} 60\left(x^2 + 4x + 4\right) &= 64\left(x^2 + 4x - 5\right), \\ 560 &= 4\left(x^2 + 4x\right), \\ x^2 + 4x &= 140, \end{aligned}$$

pa je jedino pozitivno rješenje $x = 10$. (1 bod)

Zadatak A-3.4. (4 boda)

Odredi minimalnu vrijednost izraza

$$\sin(x+3) - \sin(x+1) - 2\cos(x+2)$$

za $x \in \mathbb{R}$.

Rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned} \sin((x+2)+1) &= \sin(x+2)\cos 1 + \cos(x+2)\sin 1 \\ \sin((x+2)-1) &= \sin(x+2)\cos 1 - \cos(x+2)\sin 1 \end{aligned}$$

pa oduzimanjem dobijemo

$$\sin(x+3) - \sin(x+1) = 2\cos(x+2)\sin 1.$$ (1 bod)

Zato je promatrani izraz jednak

$$2\cos(x+2)\sin 1 - 2\cos(x+2) = 2\cos(x+2)\left(\sin 1 - 1\right).$$ (1 bod)

Kako je $2(\sin 1 - 1)$ negativna realna konstanta, promatrani izraz će biti minimalan točno onda kada je $\cos(x+2)$ maksimalan. (1 bod)

Maksimalna vrijednost od $\cos(x+2)$ je 1
pa je minimalna vrijednost promatranog izraza jednaka $2(\sin 1 - 1)$. (1 bod)

Zadatak A-3.5. (4 boda)

U svako polje kvadratne ploče 4×4 upiši po jedno od četiri slova: A, B, C, D i po jedan od četiri broja: 1, 2, 3, 4 tako da budu ispunjeni sljedeći uvjeti:

(a) u svakom retku i u svakom stupcu svako od tih slova i svaki od tih brojeva pojavljuje se točno jednom,

(b) na ploči se svaka kombinacija (par) jednog slova i jednog broja nalazi na točno jednom polju.

Rješenje.

Jedno moguće rješenje je:

$A\,1$	$B\,2$	$C\,3$	$D\,4$
$B\,3$	$A\,4$	$D\,1$	$C\,2$
$C\,4$	$D\,3$	$A\,2$	$B\,1$
$D\,2$	$C\,1$	$B\,4$	$A\,3$

Naravno, i zamjenom poretka redaka/stupaca, kao i permutiranjem slova ili brojeva dobivaju se dobri rasporedi.

Npr.

$A\,1$	$B\,2$	$C\,3$	$D\,4$
$B\,4$	$A\,3$	$D\,2$	$C\,1$
$C\,2$	$D\,1$	$A\,4$	$B\,3$
$D\,3$	$C\,4$	$B\,1$	$A\,2$

$A\,1$	$B\,2$	$C\,3$	$D\,4$
$B\,4$	$A\,3$	$D\,2$	$C\,1$
$D\,3$	$C\,4$	$B\,1$	$A\,2$
$C\,2$	$D\,1$	$A\,4$	$B\,3$

Za potpuno rješenje (4 boda) dovoljno je da učenik napiše jedno ispravno rješenje.
Niže je navedeno i kako bodovati ostala rješenja. Pritom se bodovi ne zbrajaju!

1 bod latinski kvadrat u kojem su raspoređena slova ili brojevi

2 boda tablica 4×4 u koju su raspoređeni svi parovi, pri čemu ili slova ili brojevi tvore latinski kvadrat

2 boda tablica 4×4 u kojoj su i slova i brojevi raspoređeni tako da tvore latinski kvadrat, ali se neki parovi ponavljaju, a nekih nema (ali ne tako da su ista slova uvijek sparena s istim brojevima!)

2 boda provjera da za neki ispravan raspored slova (latinski kvadrat) ne postoji odgovarajući raspored brojeva

3 boda pronađeni su *svi* latinski kvadrati reda 4 (uz razumne pretpostavke koje ne smanjuju mogućnost pronalaska konačnog rješenja) i barem za jedan od njih utvrđeno da se ne može dopuniti do traženog rasporeda

4 boda točno rješenje, bez obzira na postupak

Latinski kvadrat (reda 4) je raspored na ploči 4×4 pri kojem se u svakom retku i u svakom stupcu svaki od četiri simbola pojavljuje točno jednom.

Zadatak A-3.6. (10 bodova)

U pravokutnom trokutu simetrala jednog šiljastog kuta dijeli nasuprotnu katetu na dijelove duljina 4 i 5. Kolika je površina tog trokuta?

Prvo rješenje.

Neka je ABC pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu C, te neka promatrana simetrala kuta $\sphericalangle BAC$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D. Označimo $\sphericalangle BAC = \alpha$, $|AC| = b$. Vrijedi $|BC| = 9$.

Vrijedi jedna od mogućnosti

$$|DC| = 4,\ |BD| = 5 \qquad \text{ili} \qquad |DC| = 5,\ |BD| = 4 \tag{1 bod}$$

pa označimo $|DC| = w$ (vrijedi $w = 4$ ili $w = 5$).

Iz pravokutnog trokuta ABC dobivamo

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{9}{b}, \tag{1 bod}$$

a iz pravokutnog trokuta ACD

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{|DC|}{|AC|} = \frac{w}{b}, \tag{1 bod}$$

Kako je

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2}, \tag{1 bod}$$

Slijedi redom

$$\frac{9}{b} = \frac{2\cdot\frac{w}{b}}{1-\left(\frac{w}{b}\right)^2} \tag{1 bod}$$

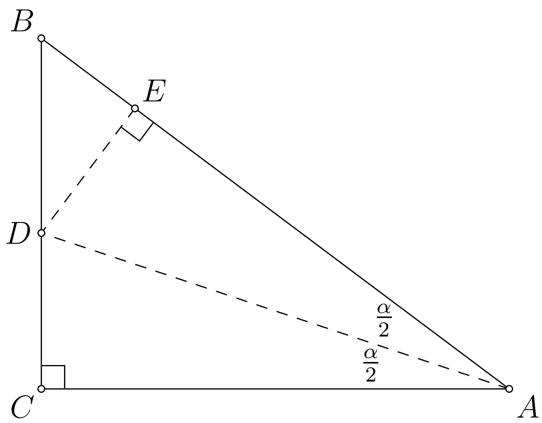
$$\frac{9}{b}\left(1-\frac{w^4}{b^2}\right) = \frac{2w}{b}, \qquad 1-\frac{w^2}{b^2} = \frac{2w}{9}, \qquad b^2 = \frac{w^2}{1-\frac{2w}{9}}.$$

Za $w = 5$ jednadžba nema rješenja, (2 boda)

a za $w = 4$ dobivamo $b = 12$. (2 boda)

Sada je $P(ABC) = \frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BC| = \frac{1}{2}\cdot 9\cdot 12 = 54$. (1 bod)

Napomena. Učenik koji zadatak rješava na ovaj način i ne pokaže (i ne obrazloži) da je $|BD| > |CD|$ gubi 2 boda.



Drugo rješenje.

Koristimo iste oznake kao u prvom rješenju.

Prema teoremu o simetrali kuta vrijedi

$$|AB| : |AC| = |BD| : |CD|. \qquad \text{(2 boda)}$$

Kako je $|AB| > |AC|$, mora biti $|DC| = 4$, $|BD| = 5$. (1 bod)

Sada iz $|AB| : |AC| = |BD| : |CD| = 5 : 4$ zaključujemo da postoji x t.d. je $|AB| = 5x$ i $|AC| = 4x$. (1 bod)

Iz Pitagorinog poučka slijedi $|AB|^2 - |AC|^2 = |BC|^2$. (1 bod)

Vrijedi i $|BC| = 9$ pa dobivamo $(5x)^2 - (4x)^2 = 9^2$. (2 boda)

Rješenje te jednadžbe je $x = 3$. (1 bod)

Sada je $|AC| = 12$ (i $|AB| = 15$), (1 bod)

pa je $P(ABC) = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 = 54$. (1 bod)

Treće rješenje.

Neka je ABC pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu C, te neka promatrana simetrala kuta $\sphericalangle BAC$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D.

Neka je E nožište okomice iz točke D na stranicu $\overline{AB}$. (1 bod)

Trokuti ACD i AED su sukladni (1 bod)

jer imaju zajedničku stranicu $\overline{AD}$ i dva sukladna odgovarajuća kuta, $\sphericalangle ACD = \sphericalangle AED = 90°$ i $\sphericalangle CAD = \sphericalangle EAD$ (jer je AD simetrala kuta). (2 boda)

Zato je $|AE| = |AC|$ i $|DE| = |CD|$.

Iz pravokutnog trokuta BDE vidimo da je $|BD| > |DE|$ pa je $|BD| = 5$ i $|CD| = |DE| = 4$, (1 bod)

i prema Pitagorinom poučku $|BE| = 3$. (1 bod)

Označimo $|AC| = b$.

Primijenimo Pitagorin poučak i na trokut ABC: $|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$

$$b^2 + 9^2 = (b+3)^2. \qquad \text{(2 boda)}$$

Slijedi $b = 12$. (1 bod)

Sada možemo izračunati: $P(ABC) = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 = 54$. (1 bod)

Zadatak A-3.7. (10 bodova)

Neka su a, b, c realni brojevi i neka je $a \neq 0$. Dokaži da barem jedna od jednadžbi

$$a \sin x + b \cos x + c = 0, \tag{$*$}$$

$$a \operatorname{tg} y + b \operatorname{ctg} y + 2c = 0 \tag{$**$}$$

ima realna rješenja.

Prvo rješenje.

Kako je $a \neq 0$ jednadžbu $(*)$ možemo podijeliti s $\sqrt{a^2+b^2}$ pa dobivamo jednadžbu

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x = -\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \text{(1 bod)}$$

čija se lijeva strana može napisati kao sinus zbroja.

Stoga jednadžba $(*)$ ima rješenje ako i samo ako je $\left|\dfrac{-c}{a^2+b^2}\right| \leqslant 1,$ (1 bod)

odnosno $a^2+b^2 \geqslant c^2$. (1 bod)

Jednadžba $(**)$ uz supstituciju $w = \operatorname{tg} y$ može se napisati u obliku

$$aw^2 + 2cw + b = 0. \qquad (\diamond\diamond) \qquad \text{(1 bod)}$$

Da bi jednadžba $(**)$ imala (realnih) rješenja dovoljno je da jednadžba $(\diamond\diamond)$ ima rješenje $w \in \mathbb{R}$. Jednadžba $(\diamond\diamond)$ je kvadratna, jer je $a \neq 0$ (1 bod)

pa promotrimo njenu diskriminantu

$$D = (2c)^2 - 4ab = 4\left(c^2 - ab\right). \qquad \text{(1 bod)}$$

Pretpostavimo da nijedna od jednadžbi $(*)$, $(**)$ nema realnih rješenja. (1 bod)

Tada bi vrijedilo $a^2+b^2 < c^2$ i $D < 0$ tj.

$$a^2 + b^2 - c^2 < 0 \qquad \text{i} \qquad c^2 - ab < 0.$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti dobivamo $a^2 + b^2 - ab < 0$ (2 boda)

što nije moguće za $a, b \in \mathbb{R}$. (1 bod)
$\big($To vidimo npr. iz $a^2+b^2-ab = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geqslant 0.\big)$

Drugo rješenje, početak.

Uvođenjem supstitucije $v = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$ u jednadžbu $(*)$ dobivamo

$$a \cdot \frac{2v}{1+v^2} + b \cdot \frac{1-v^2}{1+v^2} + c = 0,$$

$$(c-b)v^2 + 2av + (b+c) = 0. \qquad (\diamond) \qquad \text{(1 bod)}$$

Za $b = c$ jednadžba $(\diamond)$ postaje $2av + (b+c) = 0$, tj. $2av + 2b = 0$
pa ima realno rješenje $v = -\dfrac{b}{a}$. (znamo da je $a \neq 0$) (1 bod)

Za $b \neq c$ jednadžba $(\diamond)$ je kvadratna, s diskriminantom
$D_1 = (2a)^2 - 4(c-b)(b+c) = 4\left(a^2+b^2-c^2\right)$, pa dobivamo uvjet $a^2+b^2 \geqslant c^2$. (1 bod)

Dalje nastavljamo kao u prvom rješenju.

Zadatak A-3.8. (10 bodova)

Odredi sve cijele brojeve a za koje je $\log_2\left(1+a+a^2+a^3\right)$ također cijeli broj.

Prvo rješenje.

Treba riješiti jednadžbu $(a+1)(a^2+1)=2^b \quad (*)$ u skupu cijelih brojeva. (1 bod)

Lijeva strana jednadžbe $(*)$ je očito cijeli broj pa je $b \geqslant 0$. (1 bod)

Desna strana od $(*)$ je očito pozitivan broj, kao i a^2+1, pa mora biti i $a+1>0$.
Dakle, $a>-1$, tj. $a \geqslant 0$. (1 bod)

Uvrstimo li $a=0$, dobivamo $1=2^b$ pa je $(a,b)=(0,1)$ jedno rješenje jednadžbe $(*)$. (1 bod)

Uvrstimo li $a=1$ dobivamo $4=2^b$ pa je $(a,b)=(1,2)$ također rješenje. (1 bod)

Za $a>1$ vrijedi $a \geqslant 2$ i $a^2+1 \geqslant 5$, a kako a^2+1 mora biti potencija broja 2,
očito $4 \mid a^2+1$.

No, to bi značilo da a^2 daje ostatak 3 pri dijeljenju s 4, a to je nemoguće. (5 bodova)
(Kvadrati cijelih brojeva pri dijeljenju s 4 daju ostatak 0 ili 1.)

Dakle, jedina rješenja zadatka su $a=0$ i $a=1$.

Drugo rješenje.

Treba riješiti jednadžbu $(a+1)(a^2+1)=2^b$ u skupu cijelih brojeva. (1 bod)

Iz $(a+1)(a^2+1)=2^b$ zaključujemo da su $a+1$ i a^2+1 potencije broja 2. (2 boda)

Kako je $a \leqslant a^2$ za sve cijele brojeve a, odnosno $a+1 \leqslant a^2+1$, (1 bod)

mora vrijediti $a+1 \mid a^2+1$. (1 bod)

No, $\qquad a^2+1=(a+1)(a-1)+2,$ (1 bod)

pa zaključujemo da $(a+1)$ dijeli broj 2. (2 boda)

Kako je $a+1$ pozitivno, jedine mogućnosti su $a+1=1$ i $a+1=2$
pa su konačna rješenja $a=0$ i $a=1$. (2 boda)

Treće rješenje.

Treba riješiti jednadžbu $(a+1)(a^2+1)=2^b$ u skupu cijelih brojeva. (1 bod)

Vidimo da $(a+1)$ i (a^2+1) moraju biti potencije broja 2. (2 boda)

Neka je $a+1=2^m$ i $a^2+1=2^n$, tj. $a=2^m-1$, $a^2=2^n-1$. (1 bod)

Mora vrijediti $(2^m-1)^2=2^n-1$, tj.

$$2^{2m}-2^{m+1}-2^n+2=0. \qquad (**)$$ (2 boda)

Za $m=0$ dobivamo $n=0$, pa je $a=0$ rješenje. (1 bod)

Za $m>0$ jednakost $(**)$ možemo podijeliti s 2: $2^{2m-1}-2^m-2^{n-1}+1=0$. (1 bod)

Prva dva pribrojnika su parna pa mora biti $2^{n-1}=1$, tj. $n=1$.
Slijedi $m=1$, $a=1$. (2 boda)

ŠKOLSKO / GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

24. siječnja 2011.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-4.1. (4 boda)

Razlika recipročnih vrijednosti dvaju uzastopnih prirodnih brojeva je $0.0aaa\ldots = 0.0\dot{a}$. Koje vrijednosti može poprimiti znamenka a?

Rješenje. Ako su ta dva uzastopna prirodna broja n i $n+1$, dobivamo jednadžbu

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 0.0aaa\ldots$$

Kako je $0.0aaa\ldots = 0.0\dot{a} = \dfrac{a}{90}$, (1 bod)

rješavamo jednadžbu $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{a}{90}$ odnosno $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{a}{90}$

tj.

$$n(n+1) = \frac{90}{a} \qquad \text{ili} \qquad a = \frac{90}{n(n+1)}.$$ (1 bod)

Dalje možemo nastaviti na više načina:

Prvi način.

Izraz na desnoj strani jednakosti $n(n+1) = \dfrac{90}{a}$ mora biti cijeli broj, pa je $a \in \{1, 2, 3, 5, 9\}$.

Zato je $\dfrac{90}{a} \in \{90, 45, 30, 18, 10\}$. (1 bod)

Od tih brojeva, samo se $90 = 9 \cdot 10$ i $30 = 5 \cdot 6$ mogu prikazati u obliku umnoška dvaju uzastopnih prirodnih brojeva. Dakle, a može biti 1 ili 3, (1 bod)

jer je $\dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{90} = 0.0111\ldots$ i $\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{30} = 0.0333\ldots$

Drugi način.

U desnu stranu jednakosti $a = \dfrac{90}{n(n+1)}$ uvrštavamo redom $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots$.

Za $n = 1$ i $n = 2$ dobivamo $a \in \mathbb{N}$, ali a nije znamenka.

Za $n = 5$ dobivamo $a = \dfrac{90}{5 \cdot 6} = 3$,

a za $n = 9$ dobivamo $a = \dfrac{90}{9 \cdot 10} = 1$.

Za $n > 9$ razlomak $\dfrac{90}{n(n+1)}$ je manji od 1,

pa su $a = 1$ i $a = 3$ jedina rješenja zadatka. (2 boda)

Zadatak A-4.2. (4 boda)

Neka je z nultočka polinoma $z^2 - 2z\cos\frac{\pi}{n} + 1$. Odredi sve moguće vrijednosti izraza z^n.

Rješenje.

Rješenja kvadratne jednadžbe $z^2 - 2z\cos\dfrac{\pi}{n} + 1 = 0$ su

$$z = \frac{2\cos\dfrac{\pi}{n} \pm \sqrt{4\cos^2\dfrac{\pi}{n} - 4}}{2} = \cos\frac{\pi}{n} \pm i\sin\frac{\pi}{n}, \qquad \text{(1 bod)}$$

pa je

$$\begin{aligned} z^n &= \left(\cos\frac{\pi}{n} \pm i\sin\frac{\pi}{n}\right)^n && \text{(1 bod)} \\ &= \cos\left(n\cdot\frac{\pi}{n}\right) \pm i\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{n}\right) && \text{(1 bod)} \\ &= \cos\pi \pm i\sin\pi \\ &= -1 \pm i\cdot 0 = -1. && \text{(1 bod)} \end{aligned}$$

Jedino rješenje je $z^n = -1$.

Zadatak A-4.3. (4 boda)

Dokaži da je, za sve $n \in \mathbb{N}$, broj $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ djeljiv sa 7.

Prvo rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned} 2^{n+2} + 3^{2n+1} &= 4\cdot 2^n + 3\cdot 9^n \\ &= 7\cdot 2^n - 3\cdot 2^n + 3\cdot 9^n \\ &= 7\cdot 2^n + 3\cdot(9^n - 2^n) \\ &= 7\cdot 2^n + 3\cdot(9-2)\cdot\left(9^{n-1} + 9^{n-2}\cdot 2 + \cdots + 9\cdot 2^{n-2} + 2^{n-1}\right) \\ &= 7\cdot\left[2^n + 3\cdot\left(9^{n-1} + 9^{n-2}\cdot 2 + \cdots + 9\cdot 2^{n-2} + 2^{n-1}\right)\right] && \text{(4 boda)} \end{aligned}$$

Drugo rješenje. Zadatak rješavamo matematičkom indukcijom.

Označimo $a(n) = 2^{n+2} + 3^{2n+1}$.

Broj $a(1) = 2^3 + 3^3 = 8 + 27 = 35$ je djeljiv sa 7.

Neka je, za neki prirodni broj k, broj $a(k) = 2^{k+2} + 3^{2k+1}$ djeljiv sa 7.

Vrijedi

$$a(k+1) = 2^{k+3} + 3^{2k+3} = 2\cdot 2^{k+2} + 9\cdot 3^{2k+1} = 2\cdot\left(2^{k+2} + 3^{2k+1}\right) + 7\cdot 3^{2k+1}.$$

Prema pretpostavci indukcije, izraz u zagradi je djeljiv sa 7. Stoga je i $a(k+1)$ djeljiv sa 7.

Sad po principu matematičke indukcije možemo zaključiti da je broj $a(n)$ djeljiv sa 7 za sve $n \in \mathbb{N}$. (4 boda)

Zadatak A-4.4. (4 boda)

Matija i Tomislav igraju sljedeću igru:

Svaki od njih baca par igraćih kocaka. Ako barem jedan od njih dobije zbroj brojeva na kockama djeljiv s 3, onda pobjeđuje Matija; inače, pobjeđuje Tomislav.

Kolika je vjerojatnost da će Matija pobijediti?

Prvi dio rješenja. **(2 boda)**

Prvi način.
Vjerojatnost da zbroj brojeva na dvije bačene kocke bude djeljiv s 3 iznosi $\frac{1}{3}$. (1 bod)

Naime, koji god broj n pao na prvoj kocki, postoje dva broja koja se mogu pojaviti na drugoj kocki koja zbrojena s n daju zbroj djeljiv s 3 te četiri broja koja zbrojena s n daju zbroj koji nije djeljiv s 3. (1 bod)

Drugi način.
Na slici su označeni svi mogući ishodi bacanja dvije kocke te su istaknuti zbrojevi djeljivi s 3.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Vidimo da od 36 mogućih ishoda bacanja dvije kocke, njih 12 zadovoljava uvjet da je zbroj brojeva na kockama djeljiv s 3. Prema tome, zaključujemo da je vjerojatnost da zbroj brojeva na dvije bačene kocke bude djeljiv s 3 iznosi $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$. (2 boda)

Drugi dio rješenja. **(2 boda)**

Prvi način. Tomislav pobjeđuje ako zbroj nije djeljiv s 3 ni u jednom paru kocaka. Prema tome, vjerojatnost da Tomislav pobijedi je $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$,

dok vjerojatnost da Matija pobijedi iznosi $1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$. (2 boda)

Drugi način. Matija pobjeđuje u slučaju da je točno jedan od njih (bilo Matija, bilo Tomislav) dobio zbroj djeljiv s 3 te u slučaju da su obojica dobila zbroj djeljiv s 3.

Dakle, vjerojatnost da Matija pobijedi jednaka je

$$2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{9}. \quad \text{(2 boda)}$$

Napomena. Ako učenik bez valjanog objašnjenja koristi činjenicu da vjerojatnost da zbroj brojeva na dvije bačene kocke bude djeljiv s 3 iznosi $\frac{1}{3}$ dobiva 1 bod od predviđena dva boda za prvi dio rješenja.

Zadatak A-4.5. (4 boda)

Pravilni tetraedar $ABXY$ smješten je u kocku $ABCDA'B'C'D'$ stranice duljine 1 tako da točka X leži u ravnini $ABCD$. Odredi udaljenost točaka Y i A'.

Prvo rješenje.

Neka je Z nožište okomice iz točke Y na ravninu $A'B'C'D'$, a W nožište okomice iz točke Y na ravninu $ABCD$. Vrijedi da je $|ZA'| = |WA|$.

Točka W je težište jednakostraničnog trokuta ABX pa je $|WA| = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Trokut AWY je pravokutan s pravim kutom u vrhu W pa po Pitagorinom poučku vrijedi:

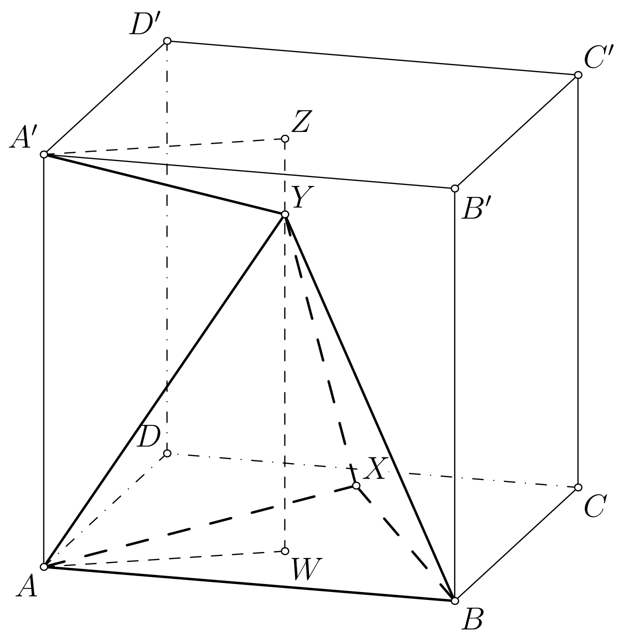
$$|WY| = \sqrt{|AY|^2 - |AW|^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Iz toga dobivamo:

$$|ZY| = |ZW| - |YW| = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{3 - \sqrt{6}}{3}.$$

Konačno, iz činjenice da je trokut $A'YZ$ pravokutan s pravim kutem u vrhu Z, imamo:

$$\begin{aligned} |A'Y| &= \sqrt{|A'Z|^2 + |YZ|^2} \\ &= \sqrt{|AW|^2 + |YZ|^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{3-\sqrt{6}}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{2 - \frac{2\sqrt{6}}{3}}. \end{aligned} \qquad \text{(2 boda)}$$



Drugo rješenje.

Postavimo kocku u koordinatni sustav u prostoru tako da je

$$A(0,0,0), \quad B(1,0,0), \quad D(0,1,0), \quad A'(0,0,1).$$

Koordinate točke X su $X\left(\frac{1}{2}, x, 0\right)$ i vrijedi $|AX| = |AB| = 1$,

pa je $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $X\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.

Koordinate središta (težišta) trokuta ABX (točka W na slici) su

$$\left(\frac{0+1+\frac{1}{2}}{3}, \frac{0+0+\frac{\sqrt{3}}{2}}{3}, \frac{0+0+0}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, 0\right).$$

Ta točka je ortogonalna projekcija vrha Y na ravninu $ABCD$, pa je $Y\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, y\right)$.

Vrijedi $|AY| = |AB| = 1$ pa iz:

$$|AY| = \left|\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, y\right)\right| = \frac{1}{4} + \frac{3}{36} + y^2 = 1$$

dobivamo $y = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ (2 boda)

i konačno $Y\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

Sada možemo odrediti traženu udaljenost $|A'Y|$.

$$\begin{aligned} |A'Y| &= \left|\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \left(\frac{\sqrt{6}}{3} - 1\right)\right)\right| \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{36} + \left(\frac{\sqrt{6}}{3} - 1\right)^2} \\ &= \sqrt{2 - 2\sqrt{\frac{2}{3}}}. \end{aligned}$$

(2 boda)

Zadatak A-4.6. (10 bodova)

Neka su a i b prirodni brojevi. Koje sve znamenke mogu biti na mjestu jedinica u dekadskom zapisu broja $(a+b)^5 - (a^5 + b^5)$?

Rješenje.

Zadani izraz može se raspisati na sljedeći način:

$$
\begin{aligned}
& (a+b)^5 - \left(a^5 + b^5\right) \\
& = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 - a^5 - b^5 && \text{(1 bod)} \\
& = 5\left(a^4b + 2a^3b^2 + 2a^2b^3 + ab^4\right) && (*) \\
& = 5ab\left(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3\right) \\
& = 5ab\,(a+b)\left(a^2 + ab + b^2\right).
\end{aligned}
$$

Iz $(*)$ vidimo da je dani izraz uvijek djeljiv s 5. (4 boda)

Dokažimo da je djeljiv i s 2.
To očito vrijedi ukoliko je barem jedan od brojeva a i b paran.

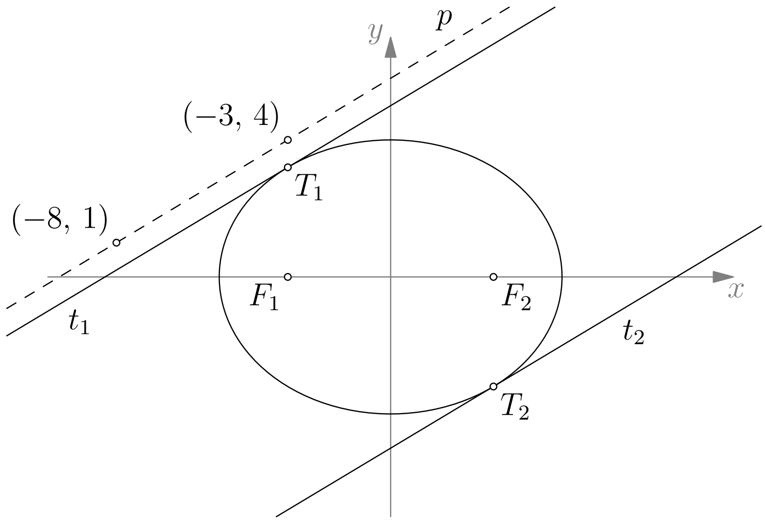
U suprotnom, a i b su neparni pa je $a+b$ paran broj.
Dakle i u tom slučaju je dani izraz djeljiv s 2. (4 boda)

Zaključujemo da zadani broj završava znamenkom 0 za sve prirodne brojeve a i b. (1 bod)

Zadatak A-4.7. (10 bodova)

Među svim točkama z kompleksne ravnine za koje je $|z+3|+|z-3|=10$ odredi onu koja je najbliža pravcu koji prolazi točkama $(-3+4i)$ i $(-8+i)$.

Prvo rješenje.



Zadani skup je skup svih točaka za koje je zbroj udaljenosti od točaka -3 i 3 iznosi 10 pa je to elipsa. Za nju vrijedi da je $2a=10$ (zbroj udaljenosti od žarišta), tj. $a=5$.

Žarišta su joj točke $(3,0)$ i $(-3,0)$ pa $e=3$.

Sada možemo izračunati

$$b=\sqrt{a^2-e^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4.$$

Dakle, jednadžba zadane elipse je

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1, \qquad \text{(2 boda)}$$

odnosno $16x^2+25y^2=400$.

Dani pravac prolazi točkama $(-3,4)$ i $(-8,1)$ pa je njegov koeficijent smjera:

$$k_p=\frac{1-4}{-8-(-3)}=\frac{3}{5}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Traženu točku ćemo odrediti kao diralište jedne od tangenata zadane elipse paralelne danom pravcu. (1 bod)

Tangenta na elipsu u točki (x_0,y_0) ima jednadžbu $b^2x_0x+a^2y_0y=a^2b^2$ pa joj je koeficijent smjera

$$k_t=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}=-\frac{16x_0}{25y_0}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Iz uvjeta paralelnosti pravca i tangente dobijemo:

$$-\frac{16x_0}{25y_0}=\frac{3}{5}, \qquad \text{(2 boda)}$$

odnosno $y_0=-\dfrac{16}{15}x_0$. Uvrštavanjem u jednadžbu tangente dobijemo:

$$16x_0^2+25\left(\frac{16}{15}x_0\right)^2=400,$$

odakle je $x_0 = \pm 3$.

Dakle, točke dodira tangente i elipse su: $T_1\left(-3, \dfrac{16}{5}\right)$ i $T_2\left(3, -\dfrac{16}{5}\right)$. (2 boda)

Sa slike vidimo da je traženo rješenje $T_1\left(-3, \dfrac{16}{5}\right)$. (1 bod)

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju odredimo jednadžbu elipse $16x^2 + 25y^2 = 400$, (2 boda)

i koeficijent smjera danog pravca $k = \dfrac{3}{5}$. (1 bod)

Traženu točku ćemo odrediti kao dirališe jedne od tangenata zadane elipse paralelne danom pravcu. (1 bod)

Da bismo odredili jednadžbe tangenti s koeficijentom smjera $k = \dfrac{3}{5}$ koristimo uvjet dodira $a^2k^2 + b^2 = l^2$. (2 boda)

$$l^2 = 25 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 + 16 = 9 + 16 = 25$$

Stoga su pravci $y = \dfrac{3}{5}x + 5$ i $y = \dfrac{3}{5}x - 5$ tangente. (1 bod)

Sa slike vidimo da nam treba "gornja" tangenta, $y = \dfrac{3}{5}x + 5$. (1 bod)

Odredimo njeno diralište s elipsom. Rješavanjem sustava:

$$\begin{cases} 16x^2 + 25y^2 = 400 \\ y = \dfrac{3}{5}x + 5 \end{cases}$$ (1 bod)

Dobivamo jednadžbu: $16x^2 + (3x + 25)^2 = 400$

koja se svodi na $x^2 + 6x + 9 = 0$,

pa je rješenje sustava $x = -3$, $y = \dfrac{16}{5}$.

Tražena točka je $\left(-3, \dfrac{16}{5}\right)$. (1 bod)

Napomena. Do jednadžbe elipse možemo doći i ovako:

$$|(x + iy) + 3| + |(x + iy) - 3| = 10$$
$$\sqrt{(x+3)^2 + y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 10$$
$$\sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$$
$$(x+3)^2 + y^2 = 100 - 20\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + (x-3)^2 + y^2$$
$$10\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 50 - 6x$$
$$100(x^2 - 6x + 9) = 2500 - 600x + 36x^2$$
$$16x^2 + 25y^2 = 400$$

Zadatak A-4.8. (10 bodova)

Neka je n prirodan broj. Dokaži da je broj neparnih brojeva među brojevima

$$\binom{2n+1}{1},\ \binom{2n+1}{2},\ \ldots,\ \binom{2n+1}{k},\ \ldots,\ \binom{2n+1}{n}$$

neparan.

Rješenje.

Promotrimo zbroj svih danih brojeva:

$$S = \binom{2n+1}{1} + \binom{2n+1}{2} + \cdots + \binom{2n+1}{n}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Kako je $\binom{2n+1}{k} = \binom{2n+1}{2n+1-k}$, za $k \in \{1, 2, \ldots n\}$, vrijedi

$$\begin{aligned} S &= \binom{2n+1}{1} + \binom{2n+1}{2} + \cdots + \binom{2n+1}{n} \\ &= \binom{2n+1}{2n} + \binom{2n+1}{2n-1} + \cdots + \binom{2n+1}{n+1} \qquad \text{(2 boda)} \end{aligned}$$

Prema binomnom poučku,

$$\begin{aligned} (1+1)^{2n+1} &= \binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \cdots + \binom{2n+1}{2n} + \binom{2n+1}{2n+1} \qquad \text{(1 bod)} \\ &= 1 + \binom{2n+1}{1} + \cdots + \binom{2n+1}{n} + \binom{2n+1}{n+1} + \cdots + \binom{2n+1}{2n} + 1 \\ &= 1 + S + S + 1 \qquad \text{(2 boda)} \end{aligned}$$

pa je $2S + 2 = 2^{2n+1}$, odnosno $S = 2^{2n} - 1$. (1 bod)

Dakle, zbroj svih danih brojeva je neparan broj. Iz toga zaključujemo da među danim brojevima ima neparno mnogo neparnih brojeva. (3 boda)

Napomena. Ako učenik uoči da je dovoljno dokazati da je zbroj danih brojeva neparan, ali ne dođe do kraja, treba mu za tu primjedbu dodatno dati 1 bod.