Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

Primošten, 4. travnja 2017.

1. Odredite sve uređene parove cijelih brojeva (a, x), za koje vrijedi

$$2|x-1| + a|x-3| = 3a + 5 - x.$$

2. Profesor Mate je pokušavao zapamtiti četveroznamenkasti PIN, ali mu to nikako nije išlo od ruke. Zato je na jednoj strani papira, umjesto stvarnog PIN-a zapisao broj 2017, a na drugoj strani čemu je taj broj jednak: $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a$, gdje su a, b, c, d znamenke Matinog PIN-a. Odredite broj Matinog PIN-a.

3. Brodovi Bonaca i Galeb plove pravocrtno i konstantnom brzinom prema istoj luci. U podne pozicije luke i brodova određuju vrhove jednakostraničnog trokuta. U trenutku kada je brod Galeb prešao 30 km, pozicije luke i brodova određuju vrhove pravokutnog trokuta. Kada je brod Bonaca uplovio u luku, Galebu je do luke još preostalo prijeći 12.5 km. Koliko su brodovi bili međusobno udaljeni u podne?

4. Dužina $\overline{AB}$ podijeljena je redom od vrha A točkama $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_{2016}$ na 2017 jednakih dijelova. Ako su poznate koordinate točaka $T_3(5, -1)$ i $T_4(8, -3)$, odredite koordinate točaka A i B. Može li razlika koordinata za neku od točaka $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_{2016}$ iznositi 2016? Ako takve točke postoje, odredite njihove koordinate.

5. U pravokutnom trokutu ABC, s pravim kutom u C, točke D i E dijele stranicu $\overline{BC}$ na tri jednaka dijela (točka D je bliža točki B). Ako je $|BC| = 3|AC|$, dokažite da je $\sphericalangle AEC + \sphericalangle ADC + \sphericalangle ABC = 90°$.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

Primošten, 4. travnja 2017.

1. Odredite zajedničke tangente parabola $y = x^2 - 6x + 12$ i $y = -x^2 + 8x - 17$.

2. Riješite jednadžbu $(16^{-x} - 2)^3 + (4^{-x} - 4)^3 = (16^{-x} + 4^{-x} - 6)^3$.

3. Neka je $\overline{DE}$ srednjica trokuta ABC paralelna sa stranicom $\overline{AB}$. Nad srednjicom $\overline{DE}$ kao promjerom konstruirana je kružnica koja siječe $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ redom u točkama M i N. Dokažite da je $|\overline{MN}| = \frac{1}{2}|\overline{AB}| \cos \sphericalangle BCA$.

4. Duljine bridova kvadra su prirodni brojevi. Kad zbrojimo obujam, polovinu oplošja i duljine bridova dobijemo 1770. Odredite duljine bridova kvadra.

5. Zadan je trokut ABC s pravim kutom pri vrhu C. Na hipotenuzi odredite točku M tako da je

$$|MA|^2 + |MB|^2 - |MC|^2 = \frac{1}{4}|AB|^2.$$

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

Primošten, 4. travnja 2017.

1. Riješite nejednadžbu

$$2\log_{\frac{1}{5}}\left(49^{\sqrt{x^2-2}}-1\right)+\log_5\left(7^{\sqrt{4x^2-8}}+\frac{1}{5}\right)\leqslant -1.$$

2. Niko kaže Juri: „Imam tri broja kojima je zbroj 2. Zbroj njihovih kvadrata je 6, a zbroj njihovih kubova 8. Što misliš, ako nastavim redom zbrajati n-te potencije tih brojeva, mogu li za neki n dobiti zbroj 2^{2017}?" Što će Jure odgovoriti? Obrazložite.

3. Ako vrijedi $x\sin^2\alpha + y\cos^2\alpha = 1, x\cos^2\varphi + y\sin^2\varphi = 1, x\cdot\operatorname{tg}\alpha = y\cdot\operatorname{tg}\varphi, x\neq y$, izračunajte vrijednost izraza $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

4. Neka je P bilo koja točka na stranici $\overline{AB}$ kvadrata $ABCD$, a točka R presjek stranice $\overline{AD}$ i simetrale kuta $\sphericalangle DCP$. Dokažite da je $|DR|+|PB|=|CP|$.

5. Barba Ivo, matematičar u mirovini, svaku je igru s unukom pretvarao u matematički zadatak. Tako je na pitanje kako izraditi papirnatog zmaja, dao vrlo neobičan odgovor. Zmaj ima oblik deltoida kojemu su dijagonale određene vektorima
$\overrightarrow{AC}=(5a+4)\vec{i}-5a\vec{j}$ i $\overrightarrow{BD}=4a\vec{i}+(2a+4)\vec{j}, a\in\mathbb{R}, a\neq 0$. Ako bi dva vrha deltoida bila u točkama $A(-1,2)$, $D(1,4)$, gdje bi se nalazili vrhovi B i C? Može li se zmaj izrezati iz papira kružnog oblika, tako da svi vrhovi zmaja budu na rubu papira? Obrazložite.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

Primošten, 4. travnja 2017.

1. U skupu prirodnih brojeva riješite jednadžbu $5^x + 5^y + 5^z = 18775$, gdje je $x < y < z$. Koliko ima trokuta kojima su duljine stranica brojevi, ne nužno različiti, iz skupa $\{x, y, z\}$?

2. Na planetu „Sve je moguće” djeca igraju igru u kojoj svatko od njih treba u određenom vremenu izabrati brojeve iz skupa neparnih prirodnih brojeva manjih od 1000. Pri tome zbroj niti jednog para različitih brojeva koje je neko dijete izabralo nije 1002. Pobjednik je onaj tko izabere najviše takvih brojeva. Koliko najviše brojeva može izabrati pobjednik? Na kraju igre ustanovili su da je nekoliko djece izabralo maksimalan broj takvih brojeva, a pri tome nikoje dvoje djece nije izabralo sve iste brojeve. Odredite maksimalan broj djece za koji se to moglo dogoditi.

3. Ako za funkciju f vrijedi $f(x) + 3f(x+1) - f(x)f(x+1) = 5$, $f(1) = 2017$, izračunajte koliko je $f(2017)$.

4. Površina trokuta ABC je $P = 3 + \sqrt{3}$. Izračunajte površinu kruga opisanog trokutu ABC, ako su duljine lukova $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ i $\widehat{CA}$ redom u omjeru $5 : 3 : 4$.

5. Osam jednakih kockica imaju na dvije suprotne strane po jednu točkicu, na druge dvije suprotne strane po dvije, a na preostale dvije strane po tri točkice. Od njih je složena jedna velika kocka. Ako se prebroje točkice na svakoj strani velike kocke, može li se od tih brojeva dobiti šest različitih članova aritmetičkog niza?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.