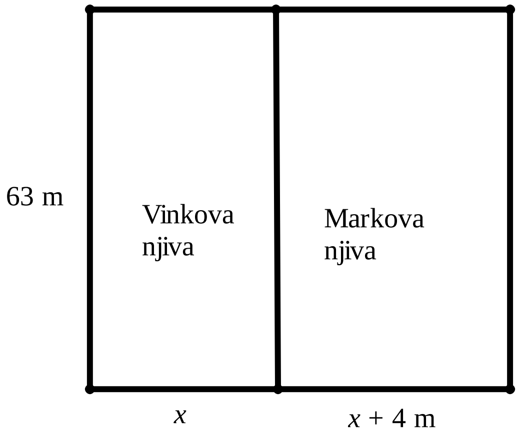
DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Primošten, 3.travnja-5.travnja 2017.

5. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Neka je x širina Vinkove njive. Tada je $x + 4$ m širina kupljene njive.



Stoga vrijedi:
$63 \cdot (x + x + 4) = 2016$
$2 \cdot x + 4 = 2016 : 63$
$2 \cdot x + 4 = 32$
$2 \cdot x = 32 - 4$
$2 \cdot x = 28$
$x = 14$
Markova njiva ima širinu $14 + 4 = 18$ m.
Površina Markove njive je $63 \cdot 18 = 1134$ m^2.
Cijena koju je Vinko platio je $1134 \cdot 150 = 170\ 100$ kn.

2. Prvi način:
$1 + 1{\cdot}2 + 1{\cdot}2{\cdot}3 + 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4 + 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}5 + 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}5{\cdot}6 + \ldots + 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}\ldots{\cdot}14 + 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}\ldots{\cdot}14{\cdot}15 =$
$= 1 + 2 + 6 + 24 + 120 + 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}5{\cdot}6{\cdot}(1 + 7 + 7{\cdot}8 + 7{\cdot}8{\cdot}9 + \ldots + 7{\cdot}8{\cdot}9{\cdot}10{\cdot}11{\cdot}12{\cdot}13{\cdot}14{\cdot}15) =$
$= 153 + 720{\cdot}(1 + 7 + 7{\cdot}8 + 7{\cdot}8{\cdot}9 + \ldots + 7{\cdot}8{\cdot}9{\cdot}10{\cdot}11{\cdot}12{\cdot}13{\cdot}14{\cdot}15) =$
$= 9 + 144 + 72{\cdot}10{\cdot}(1 + 7 + 7{\cdot}8 + 7{\cdot}8{\cdot}9 + \ldots + 7{\cdot}8{\cdot}9{\cdot}10{\cdot}11{\cdot}12{\cdot}13{\cdot}14{\cdot}15) =$
$= 9 + 72{\cdot}2 + 72{\cdot}10{\cdot}(1 + 7 + 7{\cdot}8 + 7{\cdot}8{\cdot}9 + \ldots + 7{\cdot}8{\cdot}9{\cdot}10{\cdot}11{\cdot}12{\cdot}13{\cdot}14{\cdot}15) =$
$= 9 + 72{\cdot}[2 + 10{\cdot}(1 + 7 + 7{\cdot}8 + 7{\cdot}8{\cdot}9 + \ldots + 7{\cdot}8{\cdot}9{\cdot}10{\cdot}11{\cdot}12{\cdot}13{\cdot}14{\cdot}15)]$
Prema tome, traženi ostatak je 9.

Drugi način:
Kako je $1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}5{\cdot}6 = 720$, svi pribrojnici nakon petog su djeljivi sa 720, pa i sa 72, jer je $720 = 72{\cdot}10$.
Općenito vrijedi: ako su svi pribrojnici djeljivi nekim brojem k, onda je i njihov zbroj djeljiv istim tim brojem k.

Zbog toga je zbroj 1·2·3·4·5·6 +…+ 1·2·3·4·…·14 + 1·2·3·4·…·14·15 djeljiv sa 72.
Ostaje provjeriti zbroj prvih pet pribrojnika:
1 + 1·2 + 1·2·3 + 1·2·3·4 + 1·2·3·4·5 = 1 + 2 + 6 + 24 + 120 = 153.
Podijelimo zbroj prvih pet pribrojnika sa 72:

153 : 72 = 2
– 144
9

Prema tome, traženi ostatak je 9.

3. Kut podijelimo na dva dijela: x i $2x$. Tada je:

$x+2x=315°$
$3x=315°$
$x=105°$
$2x=210°$
$315°=105°+210°$

Kut podijelimo na tri dijela: x, $2x$ i $4x$. Tada je:

$x+2x+4x=315°$
$7x=315°$
$x=45°$
$2x=90°$, $4x=180°$
$315°=45°+90°+180°$

Kut podijelimo na četiri dijela: x, $2x$, $4x$ i $8x$. Tada je:

$x+2x+4x+8x=315°$
$15x=315°$
$x=21°$
$2x=42°$, $4x=84°$, $8x=168°$
$315°=21°+42°+84°+168°$

Kut podijelimo na pet dijelova: x, $2x$, $4x$, $8x$ i $16x$. Tada je:

$x+2x+4x+8x+16x=315°$
$31x=315°$

Broj 315 nije djeljiv brojem 31, pa nije moguća podjela na pet dijelova uz zadani uvjet da je svaki sljedeći dio dvostruko veći od prethodnog.

Kut podijelimo na šest dijelova: x, $2x$, $4x$, $8x$, $16x$ i $32x$. Tada je:

$x+2x+4x+8x+16x+32x=315°$
$63x=315°$
$x=5°$
$2x=10°$, $4x=20°$, $8x=40°$, $16x=80°$, $32x=160°$
$315°=5°+10°+20°+40°+80°+160°$

Ako kut dijelimo na 7 ili 8 dijelova uz zadane uvjete, dobijemo jednadžbe $127x=315°$ i $255x=315°$ koje nemaju rješenje u skupu prirodnih brojeva.
Ako kut dijelimo na 9 i više dijelova uz zadane uvjete, dobijemo da je najmanji dio x manji od 1°, pa ne može biti prirodan broj.
Dakle, na opisani način kut veličine 315° možemo podijeliti na 2, 3, 4 i 6 dijelova.

4. Sve brojeve upisane u tablicu rastavimo na proste faktore.

$243 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

$245 = 5 \cdot 7 \cdot 7$

$64 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

$50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$

$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$

$45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$

$840 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

Brojeve iz tablice zamijenimo dobivenim rastavima.

				3·3·3·3·3
				5·7·7
				2·2·2·2·2·2
				2·5·5
2·5·7	3·3·5	2·2·2·3·5·7	2·2·2·3·3	

Promotrimo brojeve rastava u drugom redu. Broj 7 se pojavljuje dva puta, a broj 5 jednom. Kako se 7 pojavljuje po jednom u prvom i trećem stupcu, očito je da u prvom i trećem stupcu drugog retka mora biti broj 7. Tada broj 5 mora biti u drugom stupcu (jer u četvrtom nema broja 5). Sva tri broja u drugom redu su raspoređena, pa u četvrtom stupcu tog retka mora biti broj 1.

				243
7	5	7	1	245
				64
				50
70	45	840	72	

Na sličan način riješimo i četvrti redak. Broj 5 mora biti u prvom i trećem stupcu (faktor 5 iz drugog stupca već je iskorišten). Broj 2 može biti samo u četvrtom stupcu, a u drugom je onda broj 1.

				243
7	5	7	1	245
				64
5	1	5	2	50
70	45	840	72	

Svi brojevi u prvom redu tvore se pomoću broja 3. Usporedbom s „trojkama“ u pojedinim stupcima može se zaključiti da u prvom stupcu mora biti broj 1, u drugom 9, u trećem 3 i u četvrtom 9.

1	9	3	9	243
7	5	7	1	245
				64
5	1	5	2	50
70	45	840	72	

U trećem su redu samo „dvojke“. U prvom stupcu je 2, u drugom 1, u trećem 8, a u četvrtom 4.

1	9	3	9	243
7	5	7	1	245
2	1	8	4	64
5	1	5	2	50
70	45	840	72	

5. Zadatak rješavamo unatrag.

Odredimo broj *a*:

Zbroj podijelimo brojem 20 i dobijemo *x*: $20 \cdot x$

Umnošku dodamo 15: $20 \cdot x - 15$

Razliku pomnožimo brojem 5: $(20 \cdot x - 15) : 5 = 4 \cdot x - 3$

Od broja *a* oduzmemo 3: $4 \cdot x - 3 + 3 = 4 \cdot x$

Prema tome je $a = 4 \cdot x$.

Odredimo broj *b*:

$y = 2 \cdot x$

Od umnoška oduzmemo 22 i dobijemo *y*: $2 \cdot x + 22$

Zbroj pomnožimo brojem 2: $(2 \cdot x + 22) : 2 = x + 11$

Količniku dodamo 6: $x + 11 - 6 = x + 5$

Broj *b* podijelimo brojem 8: $(x + 5) \cdot 8 = 8 \cdot x + 40$

Prema tome je $b = 8 \cdot x + 40$.

Broj *a* tri je puta manji od broja *b*, pa vrijedi:

$3 \cdot a = b$

$3 \cdot (4 \cdot x) = 8 \cdot x + 40$

$12 \cdot x = 8 \cdot x + 40$

$12 \cdot x - 8 \cdot x = 40$

$4 \cdot x = 40$

$x = 40 : 4$

$x = 10$

$a = 4 \cdot x = 4 \cdot 10 = 40$

$b = 8 \cdot x + 40 = 8 \cdot 10 + 40 = 80 + 40 = 120$ ili $b = 3 \cdot a = 3 \cdot 40 = 120$

Broj *a* je 40, a broj *b* je 120.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Primošten, 3.travnja-6.travnja 2017.

6. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Neka je x duljina prvog, y duljina drugog, a z duljina trećeg komada tkanine. Neka je n duljina jednakih dijelova tkanine nakon rezanja, tj.

$$\frac{3}{4}x=\frac{1}{2}y=\frac{5}{6}z=n$$

$$\frac{3}{4}x=n\Rightarrow x=\frac{4}{3}n,\ \frac{1}{2}y=n\Rightarrow y=2n,\ \frac{5}{6}z=n\Rightarrow z=\frac{6}{5}n$$

$$x+y+z=\frac{4}{3}n+2n+\frac{6}{5}n=34$$

$$20n+30n+18n=510$$

$$68n=510$$

$$n=7.5$$

Dalje je $x=\frac{4}{3}\cdot 7.5=10$, tj. prvi komad tkanine je prije rezanja bio duljine 10 m, drugi komad je prije rezanja bio duljine $y=2\cdot 7.5=15$ m, a treći je komad prije rezanja bio duljine $z=\frac{6}{5}\cdot 7.5=9$ m.

Drugi način:

Neka je x duljina prvog, y duljina drugog, a z duljina trećeg komada tkanine.

Prema uvjetu zadatka vrijedi jednakost $\frac{3}{4}x=\frac{1}{2}y=\frac{5}{6}z$.

Iz $\frac{3}{4}x=\frac{1}{2}y$ slijedi $y=\frac{3}{4}x:\frac{1}{2}=\frac{3}{4}x\cdot 2=\frac{3}{2}x$. Iz $\frac{3}{4}x=\frac{5}{6}z$ slijedi $z=\frac{3}{4}x:\frac{5}{6}=\frac{3}{4}x\cdot\frac{6}{5}=\frac{9}{10}x$.

Zbog $x+y+z=34$ redom slijedi $x+\frac{3}{2}x+\frac{9}{10}x=34$, $\frac{17}{5}x=34$, odakle je $x=34:\frac{17}{5}=10$ m,

$y=\frac{3}{2}\cdot 10=15$ m i $z=\frac{9}{10}\cdot 10=9$ m.

Prije rezanja prvi dio bio je dug 10 m, drugi 15 m i treći 9 m.

Treći način:

Neka je x duljina prvog, y duljina drugog, a z duljina trećeg komada tkanine.

Prema uvjetu zadatka vrijedi jednakost $\frac{3}{4}x=\frac{1}{2}y=\frac{5}{6}z$.

Pomnožimo li dobiveni izraz brojem 12 (jer je V(3, 4, 6) = 12), dobit ćemo da je $9x = 6y = 10z$.

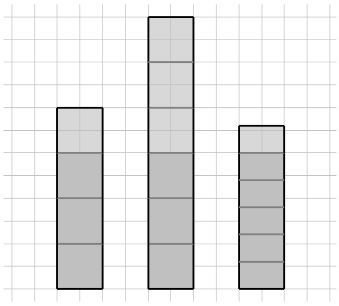
Iz $9x = 10z$ slijedi $x=\frac{10z}{9}$, a iz $6y = 10z$ slijedi $y=\frac{10z}{6}$.

Dalje, zbog $x+y+z=34$ redom slijedi $\frac{10z}{9}+\frac{10z}{6}+z=34$, 20z + 30z + 18z = 612, odakle je

$z=\frac{612}{68}=9$ m. Dalje je $x=\frac{10\cdot 9}{9}=10$ m i $y=\frac{10\cdot 9}{6}=15$ m.

Prije rezanja prvi dio bio je dug 10 m, drugi 15 m i treći 9 m.

Četvrti način:



Ako grafički prikažemo zadane odnose i s x označimo dijelove koji su jednake duljine, uočavamo sljedeće: odrezani dio prvog komada tkanine ima duljinu $\frac{1}{3}x$, odrezani dio drugog komada je duljine x i odrezani dio trećeg komada ima duljinu $\frac{1}{5}x$. Zbrojimo li duljine svih triju komada tkanine prije rezanja, dobivamo jednadžbu $x+\frac{1}{3}x+x+x+x+\frac{1}{5}x=34$, čijim rješavanjem redom dobivamo $\frac{68}{15}x=34$, $x=34:\frac{68}{15}$, tj. x = 7.5.

Dalje kao u 1. načinu rješavanja.

2. Prvi način:

Na jednoj strani ulice kućni su brojevi neparni (1, 3, 5,…), a s druge parni (2, 4, 6, …). Kako se zbrajanjem parnih brojeva uvijek dobiva paran broj, očito je zbroj neparnih kućnih brojeva 1369, a parnih 2162.

Neka je n broj kuća na neparnoj strani. Prvi kućni broj na toj strani je 1, a posljednji je $2n - 1$.

Koristeći Gaussov princip, dobiva se $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = (1 + 2n - 1) \cdot n : 2 = 1369$, odnosno $n \cdot n = 1369$. Traženi broj mora biti između 30 i 40 jer je $30 \cdot 30 = 900$, a $40 \cdot 40 = 1600$. Budući da je zadnja znamenka tog umnoška jednaka 9, znamenka jedinica broja n mora biti ili 3 ili 7.

Provjerom se dobiva da je $n = 37$ (jer je $33 \cdot 33 = 1089$).

Neka je m broj kuća na parnoj strani. Prvi kućni broj na toj strani je 2, a posljednji je $2m$. Koristeći Gaussov princip, dobiva se da je $2 + 4 + 6 + \ldots + 2m = (2 + 2m) \cdot m : 2 = 2162$, odnosno $(m + 1) \cdot m = 2162$. Rastavljanjem broja 2162 na umnožak prostih faktora dobiva se da je $2162 = 2 \cdot 23 \cdot 47 = 47 \cdot 46$. Odatle se zaključuje da je $m = 46$.

Na jednoj je strani ulice 37, a na drugoj 46 kuća. U ulici su 83 kuće.

Drugi način:

Na jednoj strani ulice kućni su brojevi neparni (1, 3, 5,…), a s druge parni (2, 4, 6, …). Kako se zbrajanjem parnih brojeva uvijek dobiva paran broj, očito je zbroj neparnih kućnih brojeva 1369, a parnih 2162.

Neka je x najveći kućni broj na neparnoj strani ulice. Tada je zbroj svih kućnih brojeva na toj strani ulice jednak $1 + 3 + \ldots + x$. Koristeći Gaussov princip nalazimo da je taj zbroj jednak

$\frac{1}{2}\cdot\frac{(x+1)\cdot(x+1)}{2}=1369$, tj. $(x + 1)(x + 1) : 4 = 1369$ ili $(x + 1)(x + 1) = 5476$. Traženi faktor mora biti između 70 i 80 jer je $70 \cdot 70 = 4900$, a $80 \cdot 80 = 6400$. Budući da je zadnja znamenka tog umnoška jednaka 6, znamenka jedinica broja $x + 1$ mora biti ili 4 ili 6. Provjerom se dobiva da je $x + 1 = 74$, odnosno $x = 73$ (jer je $76 \cdot 76 = 5776$). Dakle, na neparnoj strani ulice najveći kućni broj je $x = 73$.

Budući da je $x = 2k - 1$, pri čemu je k prirodan broj koji označava broj kuća na neparnoj strani ulice, zaključujemo da je na neparnoj strani ulice $(73 + 1) : 2 = 37$ kuća.

Neka je y najveći kućni broj na parnoj strani ulice. Tada je zbroj svih kućnih brojeva na toj strani ulice jednak $2 + 4 + \ldots + y$. Koristeći Gaussov princip nalazimo da je taj zbroj jednak

$\frac{1}{2}\cdot\frac{(y+2)\cdot y}{2}=2162$, tj. $y \cdot (y + 2) : 4 = 2162$ ili $y \cdot (y + 2) = 8648$. Rastavljanjem broja 8648 na umnožak prostih faktora dobiva se da je $8648 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 23 \cdot 47 = (2 \cdot 2 \cdot 23) \cdot (2 \cdot 47) = 92 \cdot 94$.

Odatle se zaključuje da je $y = 92$, tj. da je na parnoj strani ulice najveći kućni broj 92.

Budući da je $y = 2l$, pri čemu je l prirodan broj koji označava broj kuća na parnoj strani ulice, zaključujemo da je na neparnoj strani ulice $92 : 2 = 46$ kuća.

U ulici su $37 + 46 = 83$ kuće.

3. Prvi način:

Neka su $\overline{ab}$ i $\overline{cd}$ zadani dvoznamenkasti brojevi. Prema uvjetima zadatka vrijedi:

$\overline{ab}\cdot\overline{cd}+3816=\overline{ab}\cdot\overline{dc}$, odnosno $(10a + b) \cdot (10c + d) + 3816 = (10a + b) \cdot (10d + c)$.

Dalje je redom:

$100ac + 10ad + 10bc + bd + 3816 = 100ad + 10ac + 10bd + bc,$

$90ac + 9bc + 3816 = 90ad + 9bd$

$10ac + bc + 424 = 10ad + bd$

$c(10a + b) + 424 = d(10a + b)$

$c\cdot\overline{ab}+424=\overline{ab}\cdot d$

$\overline{ab}(d-c)=424$

Dalje se može rješavati na dva načina:

a) c i d su znamenke pa je njihova razlika sigurno manja od 9 (ne može biti 9 jer bi c bilo jednako 0, što ne može biti) i različita od nule (zbog umnoška koji ima vrijednost 424).

I. $d - c = 1 \rightarrow \overline{ab} = 424$, ne može biti jer je $\overline{ab}$ dvoznamenkasti broj

II. $d - c = 2 \rightarrow \overline{ab} = 212$, ne može biti jer je $\overline{ab}$ dvoznamenkasti broj

III. $d - c = 3 \rightarrow$ ne može biti jer 424 nije djeljiv brojem 3

IV. $d - c = 4 \rightarrow \overline{ab} = 106$, ne može biti jer je $\overline{ab}$ dvoznamenkasti broj

V. $d - c = 5 \rightarrow$ ne može biti jer 424 nije djeljiv brojem 5

VI. $d - c = 6 \rightarrow$ ne može biti jer 424 nije djeljiv brojem 6

VII. $d - c = 7 \rightarrow$ ne može biti jer 424 nije djeljiv brojem 7

VIII. $d - c = 8 \rightarrow \overline{ab} = 53$

Iz $\overline{ab} = 53$ i $d = 8 + c$ slijedi $c = 1$ i $d = 9$, tj. $\overline{cd} = 19$. Točan umnožak je $53 \cdot 19 = 1007$.

b) Rastavom broja 424 na proste faktore dobit ćemo: $424 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 53$. Odatle je dvoznamenkasti broj $\overline{ab} = 53$, razlika znamenaka iznosi $d - c = 8$, dakle $c = 1$, $d = 9$, tj. $\overline{cd} = 19$.

Točan umnožak je $53 \cdot 19 = 1007$.

Drugi način:

Neka su $\overline{ab}$ i $\overline{cd}$ zadani dvoznamenkasti brojevi. Prema uvjetima zadatka vrijedi:

$\overline{ab} \cdot \overline{cd} + 3816 = \overline{ab} \cdot \overline{dc}$, odnosno $\overline{ab}\,(\overline{dc} - \overline{cd}) = 3816$. Dalje je redom:

$$\overline{ab}\,(10d + c - 10c - d) = 3816$$

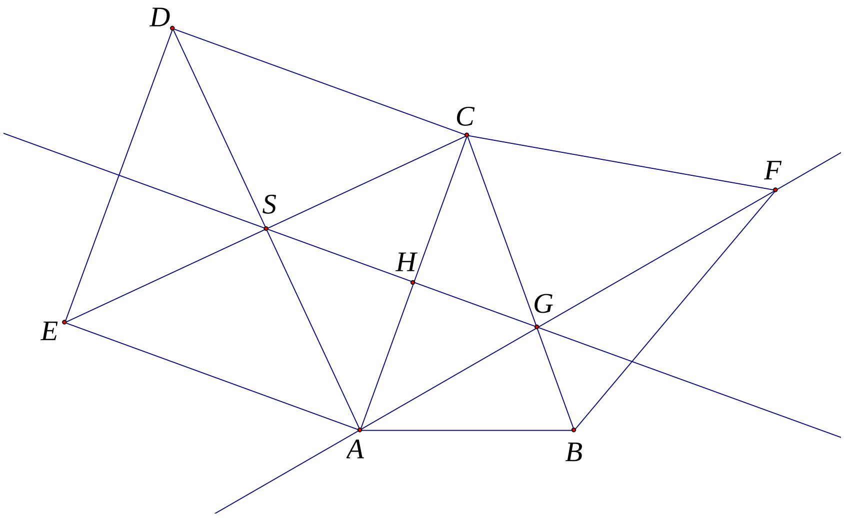
$$\overline{ab}\,(9d - 9c) = 3816$$

$$9 \cdot \overline{ab}\,(d - c) = 3816 \qquad / : 9$$

$$\overline{ab}\,(d - c) = 424$$

Dalje kao u 1. načinu rješavanja.

4.



Prema uvjetu zadatka je $|\angle SAG| = |\angle DAF| = 85°$. Dijagonale kvadrata se raspolavljaju, jednake su duljine i međusobno su okomite pa vrijedi: $|SA| = |SC|$ i $|\angle SAC| = |\angle SCA| = 45°$. Dalje je $|\angle CAG| = |\angle SAG| - |\angle SAC| = 85° - 45° = 40°$. Zbog $|CA| = |CB| = |CF|$ zaključujemo da je trokut ΔAFC jednakokračan s osnovicom $\overline{AF}$ i tada vrijedi $|\angle CAF| = |\angle AFC| = 40°$. Tada je $|\angle ACF| = 180° - 2 \cdot |\angle CAF| = 180° - 2 \cdot 40° = 180° - 80° = 100°$. Trokut ΔBFC je jednakostraničan pa je $|\angle GCF| = |\angle BCF| = 60°$ i $|\angle ACG| = |\angle ACF| - |\angle GCF| = 100° - 60° = 40°$. U trokutu ΔAGC vrijedi da je $|\angle CAG| = |\angle ACG| = 40°$, pa je $|GA| = |GC|$.

Dalje je moguće na tri načina:

Prvi način:

Dijagonale kvadrata se raspolavljaju i jednake su duljine, tj. vrijedi $|SA| = |SC|$. Dokazali smo da je $|GA| = |GC|$. Za točke S i G vrijedi da su jednako udaljene od krajnjih točaka dužine $\overline{AC}$, pa pripadaju simetrali dužine $\overline{AC}$. Kako je simetrala dužine okomita na dužinu, slijedi da je $SG \perp \overline{AC}$, tj. $|\angle AHS| = 90°$.

Drugi način:
Promatramo trokute ΔSGC i ΔSAG. Dijagonale kvadrata se raspolavljaju i jednake su duljine, tj. vrijedi $|SA| = |SC|$. Dokazali smo da je $|GA| = |GC|$. Budući da je stranica $\overline{SG}$ je zajednička za trokute ΔSGC i ΔSAG, prema poučku SSS slijedi da je $\Delta SGC \cong \Delta SAG$ pa vrijedi $|\angle GSA| = |\angle CSG| = 90° : 2 = 45°$. U trokutu ΔAHS vrijedi da je $|\angle HSA| = |\angle GSA| = 45°$ i $|\angle SAH| = |\angle SAC| = 45°$, pa je $|\angle AHS| = 180° - (|\angle HSA| + |\angle SAH|) = 180° - 90° = 90°$.

Treći način:
Promatramo trokute ΔSGC i ΔSAG. Dijagonale kvadrata se raspolavljaju i jednake su duljine, tj. $|SA| = |SC|$. Dokazali smo da je $|GA| = |GC|$. Budući da je $|\angle SCH| = |\angle SCA| = 45°$ i $|\angle HCG| = |\angle ACG| = 40°$ vrijedi $|\angle SCG| = 85°$, odnosno $|\angle SAG| = |\angle DAF| = 85°$.
Prema poučku SKS slijedi da je $\Delta SGC \cong \Delta SAG$ pa vrijedi $|\angle AGS| = |\angle SGC|$. U trokutu ΔAGC vrijedi da je $|\angle CAG| = |\angle ACG| = 40°$, pa je $|\angle AGC| = 100°$, te $|\angle AGS| = |\angle SGC| = 100° : 2 = 50°$.
U trokutu ΔHGC vrijedi $|\angle HGC| = 50°$ i $|\angle HCG| = 40°$, pa je $|\angle CHG| = 90°$ i vrijedi da je $SG \perp \overline{AC}$, tj. $|\angle AHS| = 90°$.

5. Kako najduljoj visini pripada najkraća stranica, očito je *b* = 5 cm. Budući da je $v_a = \frac{2P}{a}$, $v_b = \frac{2P}{b}$ i $v_c = \frac{2P}{c}$, iz $v_b = v_a + v_c$ redom slijedi: $\frac{2P}{b} = \frac{2P}{a} + \frac{2P}{c}$, $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$, $\frac{1}{5} = \frac{a+c}{ac}$, $ac = 5a + 5c$, $ac - 5c = 5a$, $c(a-5) = 5a$, te je $c = \frac{5a}{a-5}$.

Dalje je $c = \frac{5a - 25 + 25}{a-5} = \frac{5a-25}{a-5} + \frac{25}{a-5} = \frac{5(a-5)}{a-5} + \frac{25}{a-5} = 5 + \frac{25}{a-5}$.

Broj *c* će biti cijeli broj ako je *a* – 5 djelitelj broja 25, tj. ako je *a* – 5 jednak 1, 5 ili 25, odnosno –1, –5 ili –25.

$a - 5 = 1 \Rightarrow a$ = 6 cm $\Rightarrow c$ = 30 cm što je nemoguće zbog nejednakosti trokuta
$a - 5 = 5 \Rightarrow a$ = 10 cm $\Rightarrow c$ = 10 cm
$a - 5 = 25 \Rightarrow a$ = 30 cm $\Rightarrow c$ = 6 cm što je nemoguće zbog nejednakosti trokuta
$a - 5 = -1 \Rightarrow a$ = 4 cm što je nemoguće jer je najkraća stranica duljine 5 cm
(ili: $a - 5 = -1 \Rightarrow a$ = 4 cm $\Rightarrow c$ = –20 što je nemoguće)
$a - 5 = -5 \Rightarrow a$ = 0 što je nemoguće
$a - 5 = -25 \Rightarrow a = -20$ što je nemoguće

Dakle, postoji samo jedan takav trokut sa stranicama duljina *a* = 10 cm, *b* = 5 cm i *c* = 10 cm.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Primošten, 3.travnja-5.travnja 2017.

7. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Neka je kralj imao x dukata.

Raspodjela u omjeru 2 : 1 znači da će obitelji pripasti $\frac{2}{3}x$, a državi $\frac{1}{3}x$ dukata.

Obiteljski dio dijeli se između djece i kraljice u omjeru 3 : 1.

Djeca će dobiti $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}x=\frac{1}{2}x$, a kraljici će ostati $\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}x=\frac{1}{6}x$.

Budući da je kralj imao dva sina i dvije kćeri, oni dijele svoj dio u omjeru 4 : 1.

Sinovima će pripasti $\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}x=\frac{2}{5}x$, a kćerima $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}x=\frac{1}{10}x$.

Na kraju stariji i mlađi sin dijele svoj dio u omjeru 5 : 1.

Stariji će sin dobiti $\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{5}x=\frac{1}{3}x$, a mlađi $\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}x=\frac{1}{15}x$.

Dakle, kraljica je dobila $\frac{1}{6}x$ dukata, a mlađi sin $\frac{1}{15}x$ dukata.

Poznato je da razlika $\frac{1}{6}x-\frac{1}{15}x=\frac{1}{10}x$ iznosi 300 dukata,

pa je onda cijelo nasljedstvo $x = 3000$ dukata.

Starijem sinu pripala je trećina, dakle 1000 dukata.

Drugi način:

Najmanje dukata dobit će mlađa kći. Neka je ona dobila x dukata.

Budući da je mlađa kći dijelila dukate sa starijom sestrom u omjeru 1 : 5, onda je starija kći dobila $5x$ dukata.

Sestre su zajedno dobile $6x$ dukata. Taj iznos su dobile nakon podijele dukata između njih i braće, u omjeru 1 : 4. Dakle, braća su dobila 4 puta više, odnosno $24x$ dukata.

Tih $24x$ dukata braća su podijelila između sebe u omjeru 1 : 5, tako da je mlađi sin dobio $4x$ dukata, a stariji sin $20x$ dukata.

Djeca su, svi zajedno, dobili $x + 5x + 4x + 20x = 30x$ dukata. Taj iznos su dobili nakon raspodijele s majkom, u omjeru 3 : 1. Majka je onda dobila $10x$ dukata.

Usporedbom broja dukata majke i mlađeg sina dobije se jednadžba:

$10x - 4x = 300$,

čije je rješenje $x = 50$.

Stariji je sin dobio $20x = 20 \cdot 50 = 1000$ dukata.

2. Prvi način:

Neka je x ukupan broj upisanih učenika (polaznika) 1. razreda na početku školske godine, a d broj djevojčica među njima.

Tada vrijedi $d = 0.43x$.

Tijekom godine, od ukupnog broja upisanih učenika 1. razreda školu je napustilo 14 djevojčica i 36 dječaka (ukupno 50 učenika) pa su na kraju školske godine 46 % polaznika 1. razreda bile djevojčice.
Vrijedi: $0.46\,(x - 50) = d - 14$, odnosno $0.46\,(x - 50) = 0.43x - 14$.
Rješavanjem ove jednadžbe dobivamo: $x = 300$.
Ukupan broj upisanih učenika 1. razreda na početku školske godine bio je 300,
od toga $0.43 \cdot 300 = 129$ djevojčica i $300 - 129 = 171$ dječak.
Na kraju školske godine bilo je $171 - 36 = 135$ dječaka.

Drugi način:
Neka je u ukupan broj upisanih učenika 1. razreda na početku školske godine, a m broj dječaka među njima.
Tada vrijedi $m = 0.57u$.
Tijekom godine, od ukupnog broja upisanih učenika 1. razreda školu je napustilo 14 djevojčica i 36 dječaka (ukupno 50 učenika) pa su na kraju školske godine 54 % upisanih učenika 1. razreda bili dječaci.
Vrijedi: $0.54\,(u - 50) = m - 36$, odnosno $0.54\,(u - 50) = 0.57u - 36$.
Rješavanjem ove jednadžbe dobivamo: $u = 300$.
Ukupan broj upisanih učenika 1. razreda na početku školske godine bio je 300,
od toga $0.57 \cdot 300 = 171$ dječak i $300 - 171 = 129$ djevojčica.
Na kraju školske godine bilo je $171 - 36 = 135$ dječaka.

3. Prvi način:
Traženo vrijeme je 5 sati + x sati, gdje je $x < 1$.
Za to vrijeme mala kazaljka prijeđe $(5 + x) \cdot 30°$, jer za jedan sat prijeđe put koji odgovara kutu veličine 30°.
Velika kazaljka je u 5 sati bila na broju 12, što znači da će za još x sati prijeći put koji odgovara veličini kuta od $x \cdot 360°$.
Kad se kazaljke poklope, veličine kutova obiju kazaljki biti će iste:

$$(5 + x) \cdot 30° = x \cdot 360° \quad / : 30°$$
$$5 + x = 12x$$
$$11x = 5$$
$$x = \frac{5}{11} \text{ sata}$$

Dobiveni x treba zapisati u minutama, sekundama:

$$\frac{5}{11} \cdot 60' = \frac{300'}{11} = 27' + \frac{3'}{11} = 27' + \frac{3}{11} \cdot 60'' = 27' + 16'' + \frac{4''}{11} \approx 27'16''$$

Kazaljke će se poklopiti u približno 5 sati 27 minuta i 16 sekunda.

Drugi način:
U 5 sati mala kazaljka se nalazi na broju 5 (5 sati), a velika na 12 (0 minuta).
Neka je x vrijeme (u minutama) koje još treba proteći do prvog poklapanja kazaljki.
Velika kazaljka za 60 minuta prijeđe put koji odgovara punom kutu (360°), a za jednu minutu 6°.
Mala kazaljka za 60 minuta prijeđe put koji odgovara kutu od $360° : 12 = 30°$,
a za jednu minutu $30° : 60 = 0.5°$.
Za traženih x minuta mala kazaljka prijeđe put koji odgovara kutu od $0.5°x$.
Za isto to vrijeme velika kazaljka će prijeći put koji odgovara kutu od $6°x$, a koji je jednak kutu od 150° (od oznake 12 do oznake 5 na satu) uvećanom za $0.5°x$.

Vrijedi: $6°x - 0.5°x = 150°$

Rješenje jednadžbe je $x = \frac{300}{11} = 27\frac{3}{11}$ (minuta).

Vidi se da je $\frac{3}{11}$ minute $\frac{180}{11}$ sekunda, odnosno $16\frac{4}{11}$ sekunda.

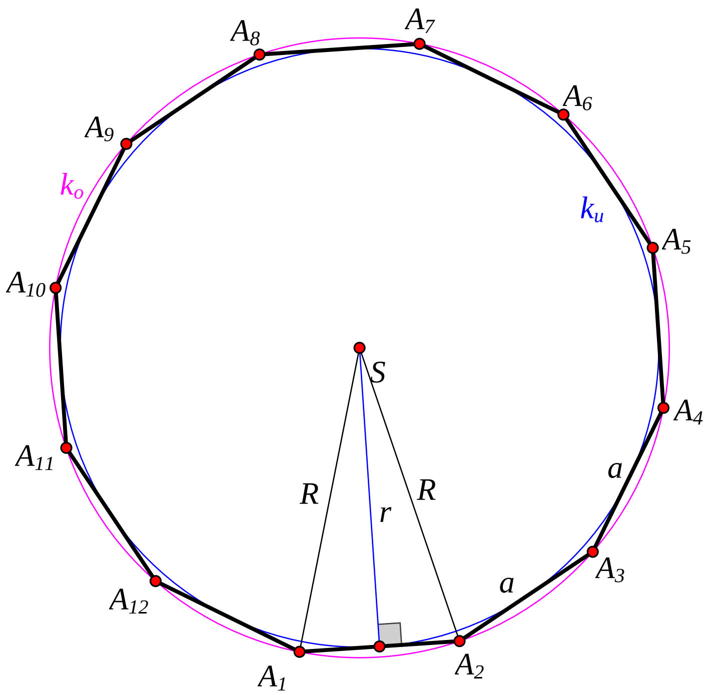
Kazaljke će se poklopiti u približno 5 sati 27 minuta i 16 sekunda.

Treći način:

I velika i mala kazaljka sata kreću se stalnom (jednolikom) brzinom, što znači da između svaka dva njihova poklapanja protekne jednako vremena.
Budući da se u jednom 12-satnom ciklusu kazaljke poklope 11 puta (svakih sat i „nešto“) taj vremenski razmak moguće je dobiti dijeljenjem vremenskog razdoblja od 12 sati na 11 jednakih dijelova.
Kada 12 sati podijelimo s 11, dobijemo 1 sat i ostatak 1.
Taj ostatak od jednog sata pretvorimo u 60 minuta i ponovo dijelimo sa 11.
Rezultat je 5 minuta, a ostatak je također 5.
Tih 5 minuta ostatka pretvorimo u 300 sekundi i dijelimo s 11.
Rezultat je 27 sekunda i ostatak 3.
Time smo dobili da se preklapanja velike i male kazaljke događaju svakih 1 sat, 5 minuta, 27 sekundi i 3 jedanaestine sekunde.
Iza 5 sati dogodit će se peto preklapanje kazaljki.
Ono će se dogoditi nakon 5 sati, 25 minuta, 135 sekunda (tj. 2 minute i 15 sekunda) i 15 jedanaestina sekunde (što je još jedna puna sekunda).
Prvo preklapanje kazaljki sata iz 5 sati događa se približno u 5 sati, 27 minuta i 16 sekunda.

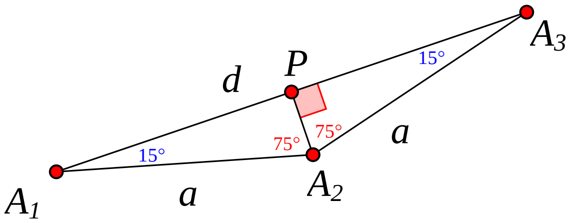
4. Prvi način:

Označimo vrhove pravilnog dvanaesterokuta $A_1, A_2, A_3 \ldots, A_{12}$, središte opisane (i upisane) kružnice sa S, duljinu stranice dvanaesterokuta s a, duljinu najkraće dijagonale s d, duljinu polumjera opisane kružnice s R i duljinu polumjera upisane kružnice s r.



Veličina unutarnjeg kuta pravilnog dvanaesterokuta je $\frac{(12-2)\cdot 180°}{12}=150°$.

Odaberimo jedan jednakokračan trokut s osnovicom duljine *d* i krakom duljine *a*, primjerice $\Delta A_1A_2A_3$ i s *P* označimo polovište stranice $\overline{A_1A_3}$.

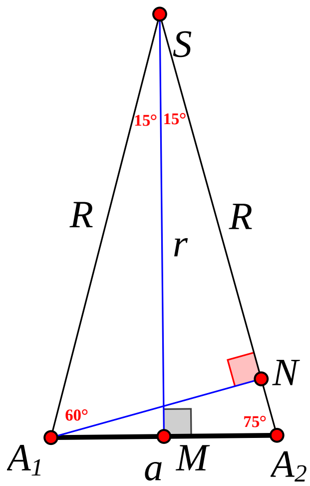


Tada možemo izračunati veličine kutova pravokutnog trokuta ΔA_2A_3P:

$|\angle PA_2A_3|=\frac{150°}{2}=75°$

$|\angle A_2A_3P|=90°-75°=15°$.

ΔA_1A_2S je karakteristični trokut pravilnog dvanaesterokuta pa je $|\angle A_2SA_1|=360°:12=30°$.



Neka je *M* nožište visine iz vrha *S* na osnovicu *a*, odnosno *N* nožište visine iz vrha A_1 na krak.

Vrijedi: $|\angle A_2SM|=\frac{30°}{2}=15°$

$|\angle MA_2S|=90°-15°=75°$

Uočimo da su ΔPA_2A_3 i ΔMA_2S slični po KK poučku,

Stoga vrijedi razmjer

$r:\frac{d}{2}=R:a$, pa je $ar=R\cdot\frac{d}{2}$ (1)

ΔA_1NS je polovica jednakostraničnog trokuta pa je $|A_1N|=\frac{R}{2}$.

$P_{12}=12\cdot P_{\Delta A_1A_2S}=12\cdot\frac{1}{2}\cdot R\cdot|A_1N|=6\cdot R\cdot\frac{R}{2}=3R^2$. (2)

S druge strane $P_{12}=12\cdot\frac{ar}{2}=6ar$.

Iz ovoga i (1) slijedi

$P_{12} = 6ar = 6 \cdot R \cdot \dfrac{d}{2} = 3Rd$.   (3)

Iz (2) i (3) je $3R^2 = 3Rd$, odnosno $R = d = 10$ cm.

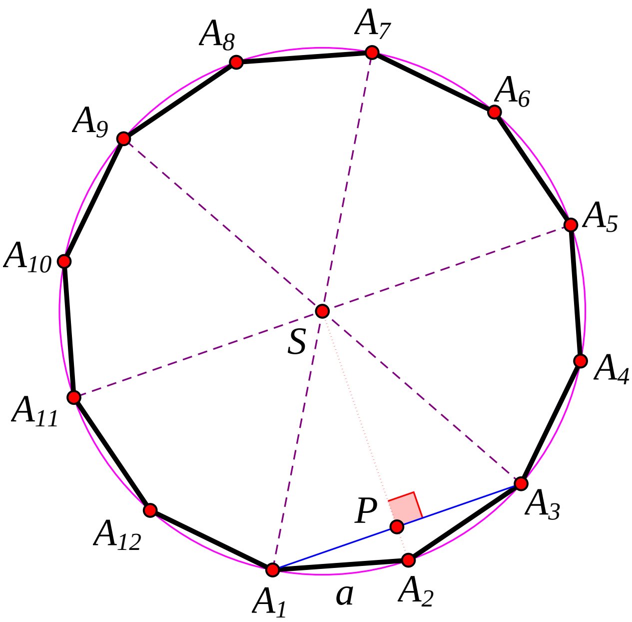
$P_{12} = 3R^2 = 3 \cdot 10^2 = 300$ cm^2

Površina pravilnog dvanaesterokuta je 300 cm^2.

Drugi način:

Neka su A_1, A_2, A_3… A_{11} i A_{12} vrhovi pravilnog dvanaesterokuta, S središte opisane (i upisane) kružnice, a R duljina polumjera opisane kružnice.

Veličina unutarnjeg kuta pravilnog dvanaesterokuta je $\dfrac{(12-2)\cdot 180°}{12} = 150°$.



Neka je P sjecište dužine $\overline{A_1A_3}$ i dužine $\overline{A_2S}$.

ΔA_1A_2S je karakteristični trokut pravilnog dvanaesterokuta, pa je $|\angle A_2SA_1| = 360° : 12 = 30°$.

Kutovi uz osnovicu karakterističnog trokuta ΔA_1A_2S su sukladni, pa je

$$|\angle SA_1A_2| = |\angle A_1A_2S| = (180° - 30°) : 2 = 75° .$$

$\Delta A_1A_2A_3$ je jednakokračan trokut s osnovicom $\overline{A_1A_3}$.

Kutovi uz osnovicu trokuta $\Delta A_1A_2A_3$ su sukladni i veličine

$$|\angle A_3A_1A_2| = |\angle A_2A_3A_1| = (180° - 150°) : 2 = 15° .$$

U trokutu ΔA_1A_2P veličine dvaju kutova su 75° i 15°, pa je treći kut veličine 90°, odnosno $|\angle A_2PA_1| = 90°$. Iz toga slijedi da su dužine $\overline{A_1A_3}$ i $\overline{A_2S}$ međusobno okomite.

U jednakokračnom trokutu ΔA_1A_3S ($|A_1S| = |A_3S|$) kutovi $\angle SA_1A_3$ i $\angle A_1A_3S$ su jednake veličine jer su to kutovi uz osnovicu i iznose svaki (180° – 60°) : 2 = 60°.

Dakle, ΔA_1A_3S je jednakostraničan sa stranicom duljine 10 cm.

Iz toga slijedi i da je radijus R pravilnom dvanaesterokutu opisane kružnice također 10 cm.

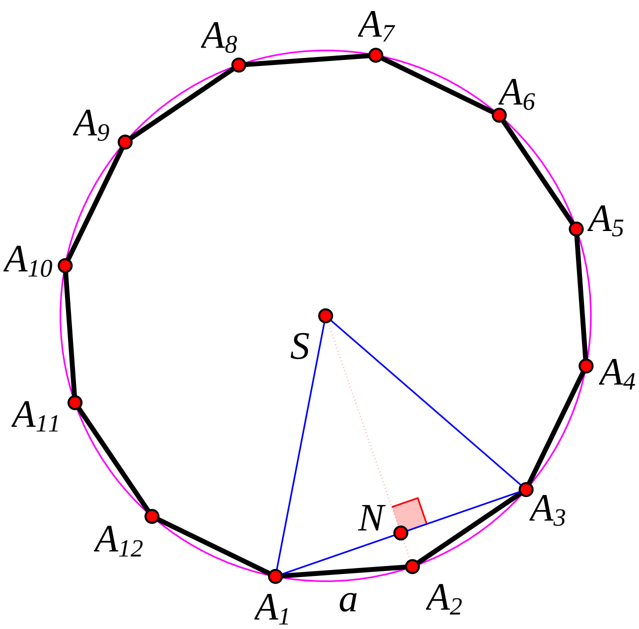
Četverokut $A_1A_2A_3S$ je četverokut s okomitim dijagonalama, pa je njegova površina jednaka polovini umnoška duljina njegovih dijagonala, tj. $P\left(A_1A_2A_3S\right) = \dfrac{|A_1A_3|\cdot|A_2S|}{2}$ odnosno

$$P\left(A_1A_2A_3S\right) = \frac{10\cdot 10}{2} = 50 \text{ cm}^2.$$

U pravilnom dvanaesterokutu ima 6 sukladnih četverokuta površine 50 cm^2, pa je njegova površina 300 cm^2.

Treći način:

Neka su A_1, A_2, A_3… A_{11} i A_{12} vrhovi pravilnog dvanaesterokuta, S središte opisane kružnice, a točka N sjecište dužina $\overline{A_1A_3}$ i $\overline{SA_2}$.



Dužina $\overline{A_1A_3}$ je jedna od najkraćih dijagonala i vrijedi $|A_1A_3| = 10$ cm.

ΔA_1A_2S je karakteristični trokut pravilnog dvanaesterokuta pa je $|\angle A_2SA_1| = 360° : 12 = 30°$.

Tada je $|\angle A_3SA_1| = 60°$.

U jednakokračnom trokutu ΔA_1A_3S ($|A_1S| = |A_3S|$) kutovi $\angle SA_1A_3$ i $\angle A_1A_3S$ su jednake veličine jer su to kutovi uz osnovicu i iznose svaki (180° – 60°) : 2 = 60°.

Dakle, ΔA_1A_3S je jednakostraničan sa stranicom duljine 10 cm.

Iz toga slijedi da je polumjer opisane kružnice $|A_1S| =$ 10 cm.

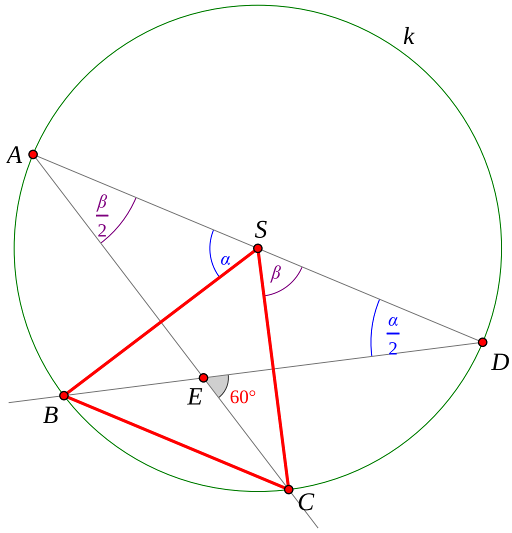
Četverokut $A_1A_2A_3S$ je deltoid ($|A_1A_2| = |A_2A_3|$, $|A_1S| = |A_3S|$), pa su mu dijagonale okomite i uzdužna dijagonala $\overline{SA_2}$ raspolavlja poprečnu dijagonalu $\overline{A_1A_3}$.

Dakle, točka N je polovište dužine $\overline{A_1A_3}$, pa je $|A_1N| = \dfrac{1}{2}|A_1A_3| = 5$ cm.

Tada je $P(\Delta A_1A_2S) = \dfrac{1}{2}\cdot|SA_2|\cdot|A_1N| = \dfrac{1}{2}\cdot 10\cdot 5 = 25$ cm^2,

a površina dvanaesterokuta je 12 · 25 = 300 cm^2.

5.



Označimo veličinu središnjeg kuta $\angle ASB$ s α. Onda je veličina njemu pripadnog obodnog kuta $\angle ADB$ jednaka $\frac{\alpha}{2}$. Također, ako veličinu središnjeg kuta $\angle CSD$ označimo s β, onda je veličina njemu pripadnog obodnog kuta $\angle CAD$ jednaka $\frac{\beta}{2}$. Sjecište dužina $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ označimo s E i promatramo ΔAED. Veličina vanjskog kuta kod vrha E je 60° i jednaka je zbroju veličina unutarnjih kutova kod vrhova A i D. Iz $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=60°$, slijedi $\alpha + \beta = 120°$.

Promatramo ΔBCS. Tada je $|\angle CSB| = 180° - (\alpha+\beta) = 180° - 120° = 60°$. Kako je $|BS| = |CS|$, vrijedi $|\angle BCS| = |\angle SBC|$. Tada je veličina svakog od tih dvaju kutova jednaka:

$$\frac{180° - |\angle CSB|}{2} = \frac{180° - 60°}{2} = 60°.$$

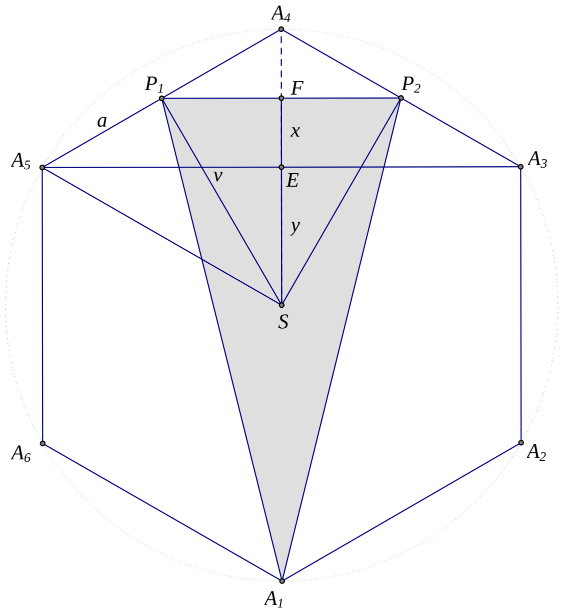
ΔBCS je jednakostraničan budući da su veličine svih triju kutova jednake 60°.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Primošten, 3.travnja-5.travnja 2017.

8. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:



Označimo: $|P_1P_2| = m$, $|FE| = x$, $|ES| = y$, $|A_5A_4| = a$.

Tada je površina šesterokuta $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ jednaka $P_6 = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, a površina trokuta $\Delta A_1P_2P_1$ je

$$P_3 = \frac{m \cdot (a + x + y)}{2}.$$

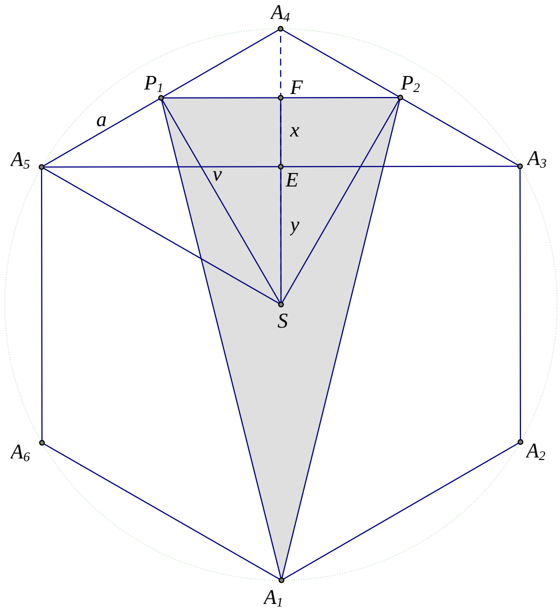
$|P_1P_2| = m = |A_5E| = v$ i $|FE| = x = \frac{1}{4}a$, jer je $\overline{P_1P_2}$ srednjica trokuta $\Delta A_5A_3A_4$.

$|ES| = y = \frac{1}{2}a$, jer je y duljina katete nasuprot kutu od 30° u pravokutnom trokutu ΔA_5ES s hipotenuzom duljine a. Slijedi

$$P_3 = \frac{m \cdot (a + x + y)}{2} = \frac{v \cdot \left(a + \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}a\right)}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\frac{7}{4}a}{2} = \frac{7a^2\sqrt{3}}{16}$$, pa je traženi omjer jednak:

$$P_3 : P_6 = \left(\frac{7a^2\sqrt{3}}{16}\right) : \left(6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{7}{16} : \frac{6}{4} = \frac{7}{24}.$$

Drugi način:



Neka je duljina stranica šesterokuta $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ jednaka *a*, tj. $|A_1A_2| = a$.

P_1 i P_2 su polovišta stranica trokuta $\Delta A_5A_3A_4$, pa je $\overline{P_1P_2}$ srednjica trokuta $\Delta A_5A_3A_4$.

Neka je točka *E* sjecište dužina $\overline{A_5A_3}$ i $\overline{A_4S}$, a točka *F* sjecište dužina $\overline{P_1P_2}$ i $\overline{A_4S}$.

Tada vrijedi da je:

$$|P_1P_2| = \frac{1}{2}|A_5A_3| = |A_5E| = v = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Uočimo da je trokut ΔP_1SP_2 jednakostraničan trokut sa stranicama duljine $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Dužina $\overline{FS}$ je visina tog jednakostraničnog trokuta, pa vrijedi:

$$|FS| = \frac{1}{2}v\sqrt{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3} = \frac{3a}{4}.$$

Tada je površina šesterokuta $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ jednaka $P_6 = 6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$,

a površina trokuta $\Delta A_1P_2P_1$ je $P_3 = \frac{1}{2}\cdot|P_1P_2|\cdot|FA_1| = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{3a}{4}+a\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{7a}{4} = \frac{7a^2\sqrt{3}}{16}$.

Iz dobivenih površina slijedi da je traženi omjer jednak:

$$P_3 : P_6 = \left(\frac{7a^2\sqrt{3}}{16}\right) : \left(6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{7}{16} : \frac{6}{4} = \frac{7}{24}.$$

2. Iz $(x+y)^2 - z^2 = 1,\ (y+z)^2 - x^2 = 5,\ (z+x)^2 - y^2 = 10$

rastavljanjem na faktore slijedi da je

$(x+y+z)\cdot(x+y-z) = 1,$

$(x+y+z)\cdot(y+z-x) = 5,$

$(x+y+z)\cdot(z+x-y) = 10$

Zbrojimo li sve tri jednadžbe vrijedi da je $(x+y+z)\cdot\left[(x+y-z)+(y+z-x)+(z+x-y)\right] = 16$, odnosno $(x+y+z)^2 = 16$, iz čega slijedi da $x+y+z=4$ ili $x+y+z=-4$.

1. slučaj:

Ako je $x+y+z=4$ onda je $x+y-z=\frac{1}{4}$, $y+z-x=\frac{5}{4}$, $z+x-y=\frac{10}{4}$.

Dalje redom zbrajajući dvije po dvije jednadžbe dobije se:

$2y=\frac{6}{4} \longrightarrow y=\frac{3}{4}$

$2x=\frac{11}{4} \longrightarrow x=\frac{11}{8}=1\frac{3}{8}$

$2z=\frac{15}{4} \longrightarrow y=\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}$

2. slučaj:

Ako je $x+y+z=-4$ onda je $x+y-z=-\frac{1}{4}$, $y+z-x=-\frac{5}{4}$, $z+x-y=-\frac{10}{4}$.

Dalje redom zbrajajući dvije po dvije jednadžbe dobije se:

$2y=-\frac{6}{4} \longrightarrow y=-\frac{3}{4}$

$2x=-\frac{11}{4} \longrightarrow x=-\frac{11}{8}=-1\frac{3}{8}$

$2z=-\frac{15}{4} \longrightarrow y=-\frac{15}{8}=-1\frac{7}{8}$

3. Prvi način:

Transformirajmo polaznu jednadžbu:

$m \cdot n - p \cdot m - q \cdot n + p \cdot q = p \cdot q$,

$(m-q) \cdot (n-p) = p \cdot q$.

Iz toga slijedi da $m-q$ i $n-p$ moraju biti istog predznaka. Također, očito je $m \neq q$ i $n \neq p$, jer je $p \cdot q > 0$. Iz polazne jednadžbe slijedi da ne može biti $m < q$ i $n < p$. Naime, kada bi to bio slučaj, onda bi iz polazne jednadžbe slijedilo $m \cdot n = p \cdot m + q \cdot n > m \cdot n + m \cdot n = 2 \cdot m \cdot n$, odnosno $m \cdot n < 0$, što je u suprotnosti s pretpostavkom da su m i n prirodni brojevi.

Dakle, $m-q$ i $n-p$ moraju biti pozitivni*, te imamo četiri mogućnosti:

$m-q=pq, \quad n-p=1,$ (1)

$m-q=p, \quad n-p=q,$ (2)

$m-q=q, \quad n-p=p,$ (3)

$m-q=1, \quad n-p=pq.$ (4)

Iz (1) dobivamo rješenje $(m, n) = (pq+q,\ p+1)$,

iz (2) dobivamo rješenje $(m, n) = (p+q,\ p+q)$,

iz (3) dobivamo rješenje $(m, n) = (2q,\ 2p)$,

a iz (4) dobivamo rješenje $(m, n) = (q+1,\ pq+p)$.

***Napomena:** Učenica/učenik ne mora odmah uočiti da može eliminirati slučajeve kada su $m-q$ i $n-p$ negativni. U tom će slučaju imati osam umjesto četiri slučaja, ali svi slučajevi kad su $m-q$ i $n-p$ negativni neće rezultirati rješenjem.

Drugi način:

Riješimo jednadžbu po varijabli m:

$$m = \frac{qn}{n-p}.$$

Dalje imamo:

$$m = \frac{qn - pq + pq}{n-p} = \frac{q(n-p)}{n-p} + \frac{pq}{n-p} = q + \frac{pq}{n-p}.$$

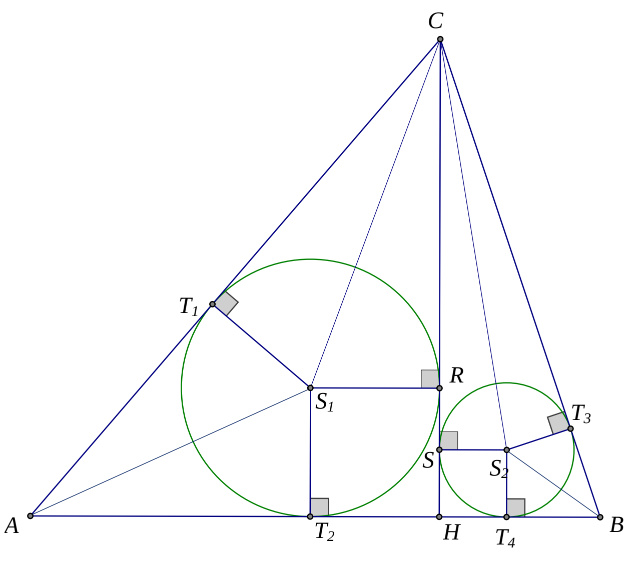
Kao u prethodnom načinu rješavanja, zaključujemo da su $m - q$ i $n - p$ pozitivni**. Zato imamo četiri mogućnosti:

$n - p = 1$, (1)
$n - p = q$, (2)
$n - p = p$, (3)
$n - p = pq$. (4)

Iz (1) dobivamo rješenje $(m, n) = (pq + q,\ p + 1)$,
iz (2) dobivamo rješenje $(m, n) = (p + q,\ p + q)$,
iz (3) dobivamo rješenje $(m, n) = (2q,\ 2p)$,
a iz (4) dobivamo rješenje $(m, n) = (q + 1,\ pq + p)$.

****Napomena:** Kao i u prvom načinu rješavanja, učenica/učenik ne mora odmah uočiti da može eliminirati slučajeve kada su $m - q$ i $n - p$ negativni. U tom će slučaju imati osam umjesto četiri slučaja, ali svi slučajevi kad su $m - q$ i $n - p$ negativni neće rezultirati rješenjem.

4.



Neka je T_1 točka dirališta kružnice upisane trokutu ΔAHC i stranice $\overline{AC}$, a T_2 točka dirališta kružnice upisane trokutu ΔAHC i stranice $\overline{AH}$.

Promotrimo pravokutne trokute ΔAS_1T_1 i ΔAT_2S_1. Oni imaju zajedničku hipotenuzu $\overline{AS_1}$, sukladne prave kutove $\angle S_1T_1A \cong \angle AT_2S_1$ i jednake duljine stranica $|S_1T_1| = |S_1T_2|$.

Dakle trokuti ΔAS_1T_1 i ΔAT_2S_1 su sukladni po teoremu SSK$^{>}$, stoga je $|AT_1| = |AT_2|$.

Promotrimo pravokutne trokute ΔCT_1S_1 i ΔCS_1R. Oni imaju zajedničku hipotenuzu $\overline{CS_1}$, sukladne prave kutove $\angle CT_1S_1 \cong \angle S_1RC$ i jednake duljine stranica $|S_1T_1| = |S_1R|$.

Dakle trokuti ΔCT_1S_1 i ΔCS_1R su sukladni po teoremu SSK$^{>}$, stoga je $|T_1C| = |RC|$.

Zatim, $|T_2H| = |RH|$ jer su obje duljine duljine polumjera iste kružnice.
Sada imamo
$|AC| = |AT_1| + |T_1C| = |AT_2| + |RC| = |AH| - |T_2H| + |CH| - |RH| = |AH| + |CH| - 2|RH|$.
Odatle slijedi

$$|RH| = \frac{1}{2}\cdot(|AH| + |CH| - |AC|) = \frac{1}{2}\cdot(|AH| + |CH| - 2017). \tag{1}$$

Analogno, pomoću T_3 i T_4, dobivamo

$$|SH| = \frac{1}{2}\cdot(|BH| + |CH| - |BC|) = \frac{1}{2}\cdot(|BH| + |CH| - 2016). \tag{2}$$

Prema Pitagorinom poučku imamo
$2017^2 - |AH|^2 = |CH|^2 = 2016^2 - |BH|^2$,
odakle slijedi
$|AH|^2 - |BH|^2 = 2017^2 - 2016^2$,
odnosno

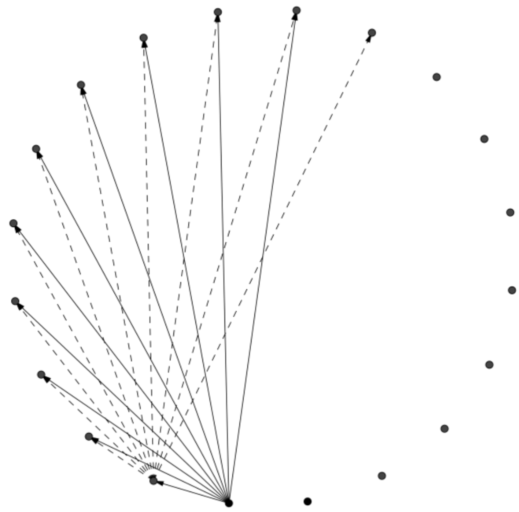
$$|AH| - |BH| = \frac{2017^2 - 2016^2}{|AH|+|BH|} = \frac{(2017-2016)(2017+2016)}{|AB|} = \frac{4033}{2018}. \tag{3}$$

Konačno, iz (1), (2) i (3) slijedi

$$|RS| = |RH| - |SH| = \frac{1}{2}\cdot(|AH| - |BH| - 1) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4033}{2018}-1\right) = \frac{2015}{4036}.$$

5. Ukupno je upućeno $20 \cdot 10 = 200$ poruka, a parova učenika ima $\frac{20\cdot 19}{2} = 190$.

Zato barem $200 - 190 = 10$ poruka mora biti poslano između istih parova učenika pa je najmanji mogući broj obostranih poruka barem 10.
Konstruirajmo sada raspored poslanih poruka tako da je broj obostranih poruka točno 10.
Neka su učenici poredani ukrug i neka je svatko poslao poruku deset učenika koji se nalaze u krugu nakon njega u smjeru kazaljke na satu. Uočimo da će u tom rasporedu slanja poruka samo učenici koji su jedan nasuprot drugoga (dijametralno suprotni) poslati obostrane poruke.



(Svaka točka predstavlja jednog učenika, a orijentirana dužina jednostranu poruku.)

Time je konstruiran traženi raspored poruka za koje je broj obostranih poruka točno 10.
Iz navedenog možemo zaključiti da je najmanji mogući broj obostranih poruka jednak 10.