Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

Primošten, 4. travnja 2017.

1. Ako su a i b prirodni brojevi, onda je $\overline{\overline{a.b}}$ decimalni broj dobiven tako da iza broja a zapišemo decimalnu točku i nakon toga broj b. Na primjer, ako je $a = 20$ i $b = 17$, onda je $\overline{\overline{a.b}} = 20.17$ i $\overline{\overline{b.a}} = 17.2$.

Odredi sve parove (a, b) prirodnih brojeva za koje vrijedi $\overline{\overline{a.b}} \cdot \overline{\overline{b.a}} = 13$.

2. Neka su a i b cijeli brojevi različite parnosti. Dokaži da postoji cijeli broj c takav da su brojevi $ab + c$, $a + c$ i $b + c$ kvadrati cijelih brojeva.

3. Ako su x, y, z i w pozitivni realni brojevi takvi da vrijedi

$$\frac{x}{y+z+w} + \frac{y}{z+w+x} + \frac{z}{w+x+y} + \frac{w}{x+y+z} = 1,$$

odredi

$$\frac{x^2}{y+z+w} + \frac{y^2}{z+w+x} + \frac{z^2}{w+x+y} + \frac{w^2}{x+y+z}.$$

4. Neka je ABC šiljastokutni trokut. Točka B' je osnosimetrična slika točke B s obzirom na pravac AC, a točka C' je osnosimetrična slika točke C s obzirom na pravac AB. Kružnice opisane trokutima ABB' i ACC' sijeku se u točkama A i P. Dokaži da središte kružnice opisane trokutu ABC leži na pravcu AP.

5. Polja ploče dimenzija $N \times N$ obojana su u crno i bijelo tako da su polja koja imaju zajedničku stranicu različite boje i tako da je barem jedno polje u kutu ploče crne boje. U pojedinom koraku odabire se kvadrat dimenzija 2×2 i sva četiri polja unutar tog kvadrata mijenjaju boju tako da bijela polja postaju crna, crna postaju siva, a siva postaju bijela.

Odredi sve prirodne brojeve $N > 1$ za koje je konačnim nizom opisanih koraka moguće postići da sva polja koja su na početku bila crna budu bijela i da sva polja koja su na početku bila bijela budu crna.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

Primošten, 4. travnja 2017.

1. Ako su x, y, z i w realni brojevi takvi da vrijedi

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + x + 3y + 5z + 7w = 4,$$

odredi najveću moguću vrijednost izraza $x + y + z + w$.

2. Unutar trokuta ABC nalaze se točke S i T. Udaljenosti točke S od pravaca AB, BC i CA su redom 10, 7 i 4. Udaljenosti točke T od tih pravaca su redom 4, 10 i 16.

Odredi polumjer trokutu ABC upisane kružnice.

3. Neka su a i b prirodni brojevi za koje vrijedi $a > b$ i

$$a - b = 5b^2 - 4a^2.$$

Dokaži da je $a - b$ kvadrat prirodnog broja.

4. Dan je trokut ABC. Kružnica k izvana dodiruje stranicu $\overline{BC}$ u točki K te produžetke stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ preko točaka B i C redom u točkama L i M. Kružnica s promjerom $\overline{BC}$ siječe dužinu $\overline{LM}$ u točkama P i Q tako da točka P leži između L i Q.

Dokaži da se pravci BP i CQ sijeku u središtu kružnice k.

5. U jednom gradu je M ulica i N trgova, pri čemu su M i N prirodni brojevi takvi da je $M > N$. Svaka ulica povezuje dva trga i ne prolazi kroz druge trgove.

Građani žele promijeniti izgled grada. Ove godine svaka će ulica biti po prvi put obojena crveno ili plavo. Dogovoreno je da se svake godine odabere jedan trg, te svim ulicama koje vode do tog trga istovremeno promijeni boja iz plave u crvenu i obratno.

Dokaži da građani mogu odabrati boje ulica tako da se nikad u budućnosti ne može dogoditi da sve ulice budu iste boje.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

Primošten, 4. travnja 2017.

1. Odredi najveću moguću vrijednost koju može poprimiti izraz

$$\sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \cos z$$

za neke realne brojeve x, y i z.

2. Neka su a i b prirodni brojevi različite parnosti. Dokaži da broj $(a+3b)(5a+7b)$ nije kvadrat prirodnog broja.

3. Odredi sve polinome P s realnim koeficijentima takve da za sve realne brojeve x vrijedi

$$P(x^2) + 2P(x) = (P(x))^2 + 2.$$

4. Dan je šiljastokutni trokut ABC s visinama $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ te ortocentrom H. Dužine $\overline{EF}$ i $\overline{AD}$ sijeku se u točki G. Dužina $\overline{AK}$ je promjer kružnice opisane trokutu ABC i siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki M. Dokaži da su pravci GM i HK paralelni.

5. Neka je C prirodni broj manji od 2017. Točno C vrhova pravilnog 2017-erokuta je crveno, a svi ostali vrhovi su plavi. Dokaži da broj jednakokračnih trokuta čija su sva tri vrha iste boje ne ovisi o rasporedu crvenih i plavih vrhova.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

Primošten, 4. travnja 2017.

1. Neka su c i d pozitivni djelitelji prirodnog broja n. Ako je $c > d$, dokaži da je $c > d + \frac{d^2}{n}$.

2. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x i y vrijedi

$$f(x + f(y)) = f(f(y)) + 2xf(y) + x^2.$$

3. Za točku P unutar trokuta ABC kažemo da je *sjajna* ako se iz nje može povući točno 27 polupravaca koji sijeku stranice trokuta ABC tako da je njima trokut podijeljen na 27 manjih trokuta jednakih površina. Odredi broj svih sjajnih točaka trokuta ABC.

4. Dan je šiljastokutni trokut ABC u kojem vrijedi $|AB| > |AC|$. Neka je O središte kružnice opisane tom trokutu, a $\overline{OQ}$ promjer kružnice opisane trokutu BOC. Pravac paralelan s pravcem BC kroz A siječe pravac CQ u točki M, a pravac paralelan s pravcem CQ kroz A siječe pravac BC u točki N. Neka je T presjek pravaca AQ i MN.

Dokaži da točka T leži na kružnici opisanoj trokutu BOC.

5. Na nekim poljima ploče dimenzija 2017×2017 nalazi se po jedna bubamara; ostala polja su prazna. Bubamare se pomiču po ploči, nikad ju ne napuštajući, prema sljedećim pravilima. Svaka bubamara se svake sekunde pomakne na susjedno polje. Pomaci su horizontalni (na polje lijevo ili desno od onog na kojem se bubamara nalazi) ili vertikalni (na polje iznad ili ispod onog na kojem se bubamara nalazi). Bubamara koja napravi horizontalni pomak u sljedećoj sekundi mora napraviti vertikalni pomak, a bubamara koja napravi vertikalni pomak u sljedećoj sekundi mora napraviti horizontalni pomak.

Odredi najmanji broj bubamara tako da, neovisno o njihovom početnom rasporedu i neovisno o njihovim pomacima možemo biti sigurni da će se u nekom trenutku dvije bubamare naći na istom polju.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.