Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

28. veljače 2011.

1. (4) U troznamenkastom broju je znamenka stotica jednaka 3. Ako se ona premjesti na mjesto jedinica, dobije se 75% početnog broja. Koji je to broj?

2. (4) Neka su a i b duljine kateta, a c duljina hipotenuze pravokutnog trokuta. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 \geq \frac{3}{4}c^4.$$

3. (4) Za prijevoz riže su na raspolaganju vreće od 40 kg i 60 kg. Koliko treba jednih, a koliko drugih vreća za prijevoz 500 kg riže, ako vreće moraju biti pune? Odredite sve mogućnosti.

4. (4) Zbroj 2011 uzastopnih cijelih brojeva iznosi 2011. Nađite najveći pribrojnik.

5. (4) Neka je E polovište stranice $\overline{AB}$ kvadrata $ABCD$ i neka je P točka presjeka dužine $\overline{DE}$ i dijagonale $\overline{AC}$. Odredite površinu trokuta AEP ako je $|AB| = 2$ cm.

6. (10) Odredite vrijednost realnog parametra a tako da rješenje jednadžbe

$$\frac{2a+x}{2-x} - \frac{2a-x}{2+x} = \frac{4a}{4-x^2}.$$

bude manje ili jednako 1.

7. (10) Majka je podijelila određeni broj jabuka svojoj djeci. Petar je dobio pola od ukupnog broja jabuka i još dvije. Ivan je dobio pola od preostalog broja jabuka i još dvije. Konačno, Ana je dobila pola od onoga što je ostalo i još dvije jabuke. Na kraju je ostala jedna jabuka. Koliko je jabuka bilo na početku i koliko je jabuka dobilo svako dijete?

8. (10) Opseg pravokutnog trokuta je 14 cm. Nad svakom stranicom konstruiran je kvadrat prema van. Zbroj površina svih kvadrata je 72 cm^2. Kolika je površina danog pravokutnog trokuta?

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

28. veljače 2011.

1. (4) U kompleksnoj ravnini prikažite skup svih $z \in \mathbb{C}$ za koje vrijedi

$$\left|z-(1-i)^4\right| < \left|\sqrt{3}-i\right|^2.$$

2. (4) Ako graf kvadratne funkcije $f(x)=x^2-(m-n)x+n$, $m, n \in \mathbb{R}$, ima tjeme u točki $T(2,3)$, odredite vrijednost $f(m-n)$.

3. (4) Dokažite da su rješenja jednadžbe

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{x-1}=1$$

realna i različita za sve vrijednosti realnih brojeva a i b za koje vrijedi da je $a \cdot b \neq 0$.

4. (4) Ako stranice trokuta imaju duljine a, b, c takve da je $a+b-c=2$ i $2ab-c^2=4$, dokažite da je trokut jednakostraničan.

5. (4) Godine oca i njegove dvoje djece (nisu blizanci) su potencije istog prostog broja. Prije godinu dana brojevi godina svakog od njih bili su prosti brojevi. Koliko godina ima otac, a koliko svako od njegove dvoje djece?

6. (10) Visina jednakokračnog trapeza iznosi h, a površina trapeza je h^2. Pod kojim se kutem sijeku dijagonale trapeza?

7. (10) Ivo je odlučio na zemljištu koje ima oblik raznostraničnog trokuta, osnovice 16 m i visine na tu osnovicu 12 m, sagraditi kuću. Jedan zid kuće treba sagraditi na osnovici trokuta. Obzirom da je zemljište malo, želi ga iskoristiti na najbolji mogući način. Tlocrt kuće treba biti pravokutnik maksimalne površine. Odredite dimenzije i površinu tlocrta kuće.

8. (10) Osnovica $\overline{BC}$ jednakokračnog trokuta ABC je duljine a, a kut nasuprot osnovici je α. Kružnica k dodiruje krakove AB i AC i kružnicu opisanu trokutu ABC. Odredite polumjer kružnice k (u ovisnosti o a i α).

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

28. veljače 2011.

1. (4) Riješite jednadžbu

$$\log_{\sqrt{2}\sin x}(1+\cos x) = 2.$$

2. (4) Odredite sve proste brojeve manje od 2011 kojima je zbroj znamenaka jednak 2.

3. (4) U krugu su povučena dva promjera koji se sijeku pod kutom od 30°. Krajnje točke tih promjera određuju dvije tetive (različite od promjera) čije se duljine razlikuju za $2\sqrt{2}$. Kolika je površina kruga?

4. (4) Odredite rješenja nejednadžbe:

$$2011\cos\left(2x^2 - y\right) \geq x^2 + 2011.$$

5. (4) Dvije ravnine diraju kuglu u točkama A i B. Ako je polumjer kugle 20 cm i $|AB| = 10$ cm, odredite sinus kuta između tih ravnina.

6. (10) U ovisnosti o realnom parametru $a \in \mathbb{R}$, odredite broj rješenja jednadžbe

$$(2\sin x - \cos x)^2 + (\sin x - 2\cos x)^2 = a$$

unutar intervala $[0, \pi\rangle$.

7. (10) U paralelogramu tupi kut iznosi 120°, a duljine dijagonala su u omjeru $\sqrt{109} : \sqrt{39}$. U kojem su omjeru duljine stranica?

8. (10) Duljine bridova baze uspravne trostrane prizme su 6 cm, 8 cm i $4\sqrt{6}$ cm. Kroz vrh najvećeg kuta baze postavljena je ravnina tako da presjek prizme i ravnine bude jednakostraničan trokut. Izračunajte površinu tog presjeka.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

28. veljače 2011.

1. (4) Riješite jednadžbu:

$$2^{\binom{n+1}{2}} - 4 \cdot 2^{\binom{n-1}{2}} = 7 \cdot 2^{\binom{n}{2}}.$$

2. (4) Pravokutna ploča dimenzije 10×9 podijeljena je mrežom horizontalnih i vertikalnih pravaca na kvadrate duljine stranice 1. Koliko na ovoj ploči ima ukupno kvadrata?

3. (4) Odredite $a \in \mathbb{C}$ tako da broj $z_0 = -\sqrt{3} + i$ bude nultočka polinoma $P(z) = z^{15} - a$. Od preostalih nultočaka polinoma P odredite onu čiji je argument najmanji.

4. (4) Od pet brojeva prva tri čine aritmetički niz s razlikom 8, a posljednja četiri čine geometrijski niz s kvocijentom 2. O kojim se brojevima radi?

5. (4) Povučemo li tangentu t_1 na elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ pod kutom od 45° prema pozitivnom smjeru osi x, njezin odsječak na y osi je 4. Povučemo li tangentu t_2 pod kutom od 60°, odsječak na y osi povećati će se za 2. Odredite površinu četverokuta $F_1T_1F_2T_2$, gdje su F_1, F_2 žarišta elipse, a T_1, T_2 redom sjecišta tangenti t_1, t_2 s y osi.

6. (10) Odredite umnožak rješenja jednadžbe

$$x^{\log_{2011} x} \cdot \sqrt{2011} = x^{2011}.$$

7. (10) Baza trostrane piramide je trokut sa stranicama a, b i c. Duljina stranice c iznosi 7 cm, $a - b = 5$ cm, a kut nasuprot stranice c, $\gamma = 60^\circ$. Pobočka koja sadrži najdulji osnovni brid okomita je na ravninu baze i sukladna bazi. Izračunajte obujam piramide i površinu najveće pobočke piramide.

8. (10) Odredite zbroj recipročnih vrijednosti svih pozitivnih djelitelja broja n, uključujući 1 i n, ako je $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, a $2^p - 1$ je prost broj.