## MATEMATIČKI KLOKAN C 2017.

### RJEŠENJA ZADATAKA

**Pitanja za 3 boda:**

1. Koliko će biti sati 17 sati nakon 17:00?

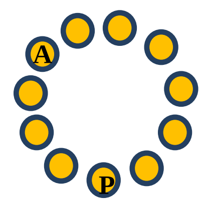
A) 8:00 B) 10:00 C) 11:00 D) 12:00 E) 13:00

Rješenje: B) 10:00
Od 17:00 do 24:00 će proći 7 sati, a 10 sati nakon ponoći će biti 10:00.

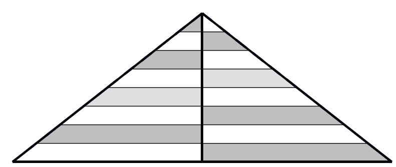
2. Skupina djevojaka stoji u krugu. Ana je četvrta djevojka lijevo od Paule, a sedma desno od nje. Koliko djevojaka ima u toj skupini?

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

Rješenje: C) 11
Između Paule i Ane, lijevo od Paule, su tri djevojke, a desno od nje je šest djevojaka.
Ukupno ima 3 + 6 + 2 = 11 djevojaka.




3. Jednakokračnom trokutu na slici istaknuta je visina na osnovicu i nacrtane su pruge. Sve pruge imaju istu širinu. Koliki dio površine tog trokuta je bijele boje?

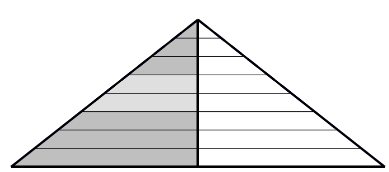


A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{2}{5}$

Rješenje: A) $\frac{1}{2}$

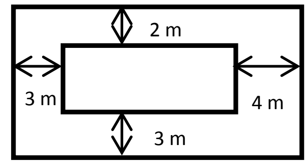
1. način:Visina na osnovicu jednakokračnog trokuta dijeli svaku od nacrtanih pruga na dva sukladna dijela (trapeza) od kojih je jedan osjenčan, a drugi bijele boje. Dakle u svakoj pruzi površina bijelog dijela jednaka je površini osjenčanog dijela, odnosno površina bijelog dijela čini polovicu površine svake pruge. Stoga je ukupna površina svih bijelih dijelova $\frac{1}{2}$ ukupne površine trokuta.

2. način:Visina na osnovicu jednakokračnog trokuta dijeli svaku od nacrtanih pruga na dva sukladna dijela (trapeza) od kojih je jedan osjenčan, a drugi bijele boje.
Ako u svakoj drugoj pruzi zamijenimo mjesto bijelom i osjenčanom dijelu dobit ćemo ovakvu sliku:



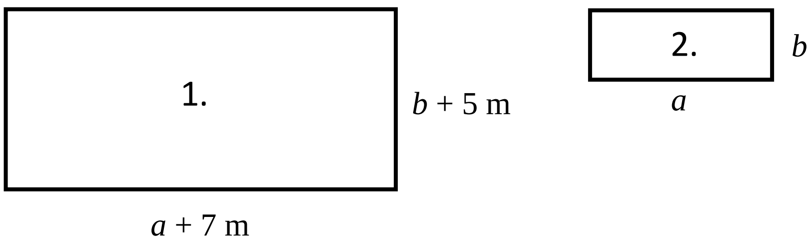
Stoga je ukupna površina bijelog dijela $\frac{1}{2}$ površine trokuta.

4. Na slici su dva pravokutnika kojima su odgovarajuće stranice paralelne. Kolika je razlika njihovih opsega?




A) 12 m B) 16 m C) 20 m D) 21 m E) 24 m

Rješenje: E) 24 m
Duljine ovih pravokutnika razlikuju se za 7 m, a širine za 5 m. Kako je opseg pravokutnika dvostruki zbroj duljine i širine, opsezi se razlikuju za $2 \cdot (7 + 5) = 24$ m.




$o_1 = 2(a + 7 + b + 5)$
$o_1 = 2a + 2b + 24$

$o_2 = 2a + 2b$

$o_1 - o_2 = 24$ m

5. Zbroj tri različita pozitivna cijela broja je 7. Koliki je njihov umnožak?

A) 12 B) 10 C) 9 D) 8 E) 5

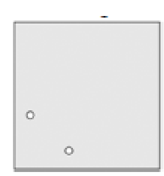
Rješenje: D) 8
1. način:
Neka su $a$, $b$ i $c$ ta tri različita pozitivna cijela broja i neka je $a < b < c$. Tada broj $a$ mora biti 1 jer ako je $a$ veći od 1, npr. $a = 2$, tada je $b$ najmanje 3, a $c$ najmanje 4 što daje zbroj 9.
Stoga je $a = 1$, što znači da je $b + c = 6$. Kako su $b$ i $c$ različiti brojevi veći od 1 i $b < c$ tada je $b = 2$, a $c = 4$.
Nadalje, $b$ ne može biti veći od 2 jer ako je $b = 3$ onda je $b + c > 6$ jer je $b < c$.
Dakle, ti brojevi su 1, 2 i 4 pa je umnožak tih brojeva 8.

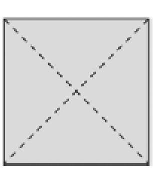
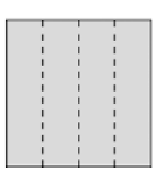
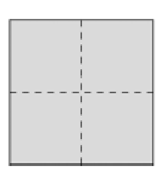
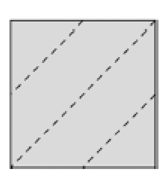
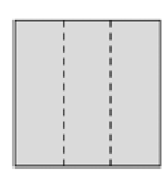
2. način:

| $a$ | $b$ | $c$ | $a + b + c$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 6 |
| 1 | 3 | 4 | 8 |
| **1** | **2** | **4** | **7** |
| 1 | 2 | 5 | 8 |
| 2 | 3 | 4 | 8 |

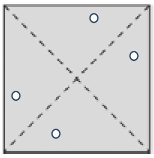
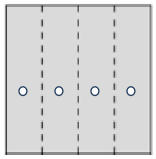
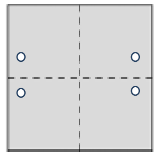
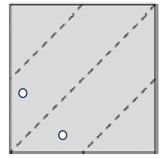
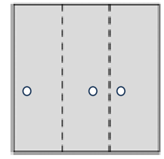
Broj 7 možemo napisati kao zbroj različitih, nenegativnih cijelih brojeva samo na jedan način:
**1 + 2 + 4**
Umnožak tih brojeva je 8.

6. Ivan je dvaput presavinuo komad papira i izrezao jednu rupu na tako presavinutom papiru. Potom je izravnao taj papir i dobio izgled prikazan na slici. Kako je Ivan presavinuo taj komad papira?



A)  B)  C)  D)  E) 

Rješenje: D) 

A)  B)  C)  D)  E) 

7. Četiri srca položena su jedno preko drugog, kao što je pokazano na slici. Njihove su površine redom 1 $cm^2$, 4 $cm^2$, 9 $cm^2$ i 16 $cm^2$. Kolika je površina osjenčanog dijela?

A) 9 $cm^2$ B) 10 $cm^2$ C) 11 $cm^2$ D) 12 $cm^2$ E) 13 $cm^2$

Rješenje: B) 10 $cm^2$

P = P – P

Površina unutarnjeg osjenčanog dijela je razlika površina dva manja srca, tj. 4 – 1 = 3 $cm^2$.
Površina vanjskog osjenčanog dijela je razlika površina dva veća srca, tj. 16 – 9 = 7 $cm^2$.
Površina osjenčanog dijela je zbroj tih površina, tj. 3 + 7 = 10 $cm^2$.

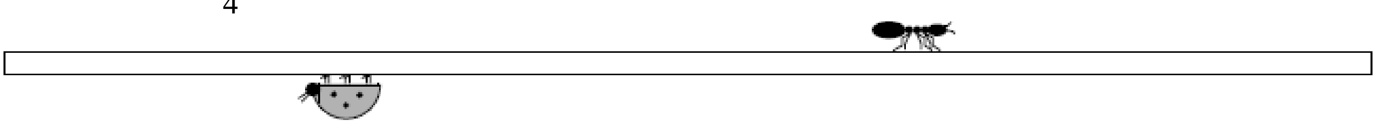
8. Ivona ima 20 kn. Svaka od njenih četiri sestara ima po 10 kn. Koliko kuna treba Ivona dati svakoj sestri da bi svih pet sestara imale istu količinu novca?

A) 2 B) 4 C) 5 D) 8 E) 10

Rješenje: A) 2
Ivona treba sebi ostaviti 10 kn kako bi imala istu količinu novca kao i svaka od njenih sestara, a razliku od 10 kn treba podijeliti na 5 jednakih dijelova. Kako je 10 : 5 = 2, svaka od njih treba dobiti još 2 kn. Sad svaka od sestara ima 12 kn, odnosno Ivona treba svakoj sestri dati 2 kn da bi svih pet sestara imale istu količinu novca.

**Pitanja za 4 boda:**

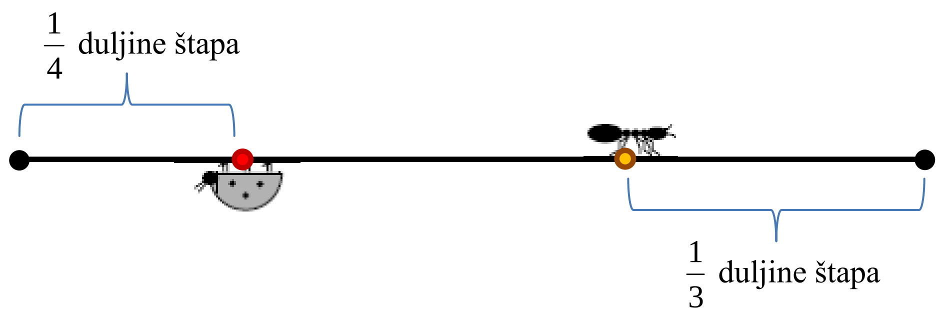
9. Mrav Marko krenuo je s lijeve strane štapa i prešao $\frac{2}{3}$ duljine štapa. Buba Mara je krenula s desne strane istog štapa i prešla $\frac{3}{4}$ njegove duljine. Koliko su udaljeni Marko i Mara?



A) $\frac{3}{8}$ štapa B) $\frac{1}{12}$ štapa C) $\frac{5}{7}$ štapa D) $\frac{1}{2}$ štapa E) $\frac{5}{12}$ štapa

Rješenje: E) $\frac{5}{12}$ štapa

Marko je prešao $\frac{2}{3}$ duljine štapa pa mu je preostalo još $\frac{1}{3}$ duljine štapa da bi došao do kraja štapa.
Mara je prešla $\frac{3}{4}$ duljine štapa pa joj je preostalo još $\frac{1}{4}$ duljine štapa da bi došla do kraja štapa.




$1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$ . Njihova udaljenost iznosi $\frac{5}{12}$ duljine štapa.

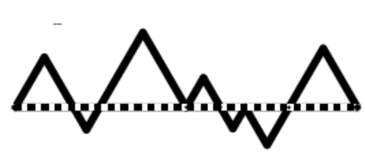
10. U dječjem kazalištu šestina je odraslih gledatelja. Dvije petine djece u gledalištu je muško. Koliki dio gledatelja su djevojčice?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{2}{5}$

Rješenje: A) $\frac{1}{2}$

Kako je šestina gledatelja odrasli, $\frac{5}{6}$ gledatelja su djeca. $\frac{2}{5}$ djece u gledalištu su dječaci pa su $\frac{3}{5}$ djece u gledalištu djevojčice. Dakle, $\frac{3}{5}$ od $\frac{5}{6}$ gledatelja su djevojčice. $\frac{3}{5}$ od $\frac{5}{6}=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{2}$. $\frac{1}{2}$ gledatelja su djevojčice.

11. Isprekidana crta i puna, izlomljena crta određuju sedam jednakostraničnih trokuta kako je prikazano na slici. Duljina isprekidane crte je 20. Kolika je duljina pune, izlomljene crte?



A) 25 B) 30 C) 35 D) 40 E) 45

Rješenje: D) 40
Jedna stranica svakog jednakostraničnog trokuta je dio isprekidane crte, a preostale dvije su dijelovi pune, izlomljene crte. To znači da je u svakom jednakostraničnom trokutu duljina dijela pune, izlomljene crte koji ga obrubljuje dvostruko veća od duljine dijela isprekidane crte koji ga obrubljuje. Stoga je ukupna duljina pune, izlomljene crte dvostruko veća od duljine isprekidane crte i iznosi 40.

12. Četiri sestrične Ema, Iva, Tara i Vita imaju 3, 8, 12 i 14 godina, ali ne nužno tim redom. Ema je mlađa od Tare. Zbroj godina Vite i Eme djeljiv je s 5. Zbroj godina Vite i Tare također je djeljiv s 5. Koliko godina ima Iva?

A) 14 B) 12 C) 8 D) 5 E) 3

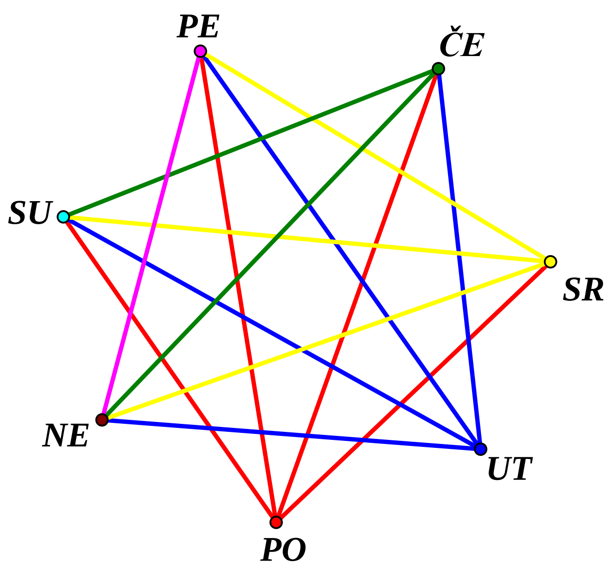
Rješenje: A) 14
Samo su dvije mogućnosti kad je zbroj godina dviju djevojčica djeljiv s 5:
3 + 12 = 15 i
8 + 12 = 20.
Kako je jedna mogućnost zbroj godina Vite i Eme, a druga Vite i Tare očito je da Vita ima 12 godina. Ema je mlađa od Tare pa Ema ima 3, a Tara 8 godina. To znači da Iva ima 14 godina.

13. Tomislav radi raspored trčanja. Planira trčati točno dva dana tjedno i u svakom tjednu uvijek istim danima. Također, ne želi trčati dva dana za redom. Na koliko načina Tom može napraviti svoj raspored trčanja?

A) 16 B) 14 C) 12 D) 10 E) 8

Rješenje: B) 14
1. način:
Ako za jedan dan trčanja odabere ponedjeljak, za drugi dan trčanja može odabrati srijedu, četvrtak, petak ili subotu kako ne bi trčao dva dana za redom.
Ako za jedan dan trčanja odabere utorak, za drugi dan trčanja može odabrati četvrtak, petak, subotu ili nedjelju kako ne bi trčao dva dana za redom.
Ako za jedan dan trčanja odabere srijedu, za drugi dan trčanja može odabrati petak, subotu, nedjelju ili ponedjeljak kako ne bi trčao dva dana za redom.
Ako za jedan dan trčanja odabere četvrtak, za drugi dan trčanja može odabrati subotu, nedjelju, ponedjeljak ili utorak kako ne bi trčao dva dana za redom.
Ako za jedan dan trčanja odabere petak, za drugi dan trčanja može odabrati nedjelju, ponedjeljak, utorak ili srijedu kako ne bi trčao dva dana za redom.
Ako za jedan dan trčanja odabere subotu, za drugi dan trčanja može odabrati ponedjeljak, utorak, srijedu ili četvrtak kako ne bi trčao dva dana za redom.
Ako za jedan dan trčanja odabere nedjelju, za drugi dan trčanja može odabrati utorak, srijedu, četvrtak ili petak kako ne bi trčao dva dana za redom.
Zapišimo navedene mogućnosti i precrtajmo one koje se ponavljaju:
1. PO i SR, 2. PO i ČE, 3. PO i PE, 4. PO i SU
1. UT i ČE, 2. UT i PE, 3. UT i SU, 4. UT i NE
1. SR i PE, 2. SR i SU, 3. SR i NE, ~~4. SR i PO~~
1. ČE i SU, 2. ČE i NE, ~~3. ČE i PO~~, ~~4. ČE i UT~~
1. PE i NE, ~~2. PE i PO~~, ~~3. PE i UT~~, ~~4. PE i SR~~
~~1. SU i PO~~, ~~2. SU i UT~~, ~~3. SU i SR~~, ~~4. SU i ČE~~
~~1. NE i UT~~, ~~2. NE i SR~~, ~~3. NE i ČE~~, ~~4. NE i PE~~
Ukupno ima 4 + 4 + 3 + 2 + 1 = 14 različitih rasporeda trčanja po zadanim uvjetima.

2. način:




Prvi dan trčanja Tomislav može izabrati na 7 različitih načina.
Drugi dan trčanja može izabrati na 4 različita načina poštujući uvjet da ne trči dva dana za redom.
Time dobiva ukupno $7 \cdot 4 = 28$ mogućnosti no svaka od njih je na taj način brojana dva puta (npr. PO-SR i SR-PO).
Stoga je ukupan broj različitih rasporeda trčanja:
$\frac{7 \cdot 4}{2} = 14$.

14. Maša želi popuniti tablicu tako da u svaku ćeliju upiše jedan broj. Za sada je upisala dva broja kako je prikazano na slici. Tablicu želi popuniti tako da je zbroj svih upisanih brojeva 35, zbroj brojeva u prve tri ćelije je 22, a zbroj brojeva u posljednje tri ćelije 25. Koliki je umnožak brojeva koje će upisati u sive ćelije?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | | | | 4 |

A) 63 B) 108 C) 0 D) 48 E) 39

Rješenje: A) 63
1. način:
Sive ćelije su druga i četvrta pa tražimo brojeve koje će Maša u njih upisati.
Kako zbroj brojeva u tablici mora biti 35 to je zbroj brojeva u drugoj, trećoj i četvrtoj ćeliji $35 - 3 - 4 = 28$.
Kako zbroj brojeva u prve tri ćelije mora biti 22 to je zbroj brojeva u drugoj i trećoj ćeliji $22 - 3 = 19$.
Kako zbroj brojeva u posljednje tri ćelije mora biti 25 to je zbroj brojeva u trećoj i četvrtoj ćeliji $25 - 4 = 21$.
To znači da je broj u trećoj ćeliji $19 + 21 - 28 = 12$. Onda je broj u drugoj ćeliji $19 - 12 = 7$, a broj u četvrtoj ćeliji $21 - 12 = 9$. Umnožak tih brojeva je 63.

2. način:
Označimo s $a$, $b$ i $c$ brojeve koji nedostaju u tablici.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | $a$ | $b$ | $c$ | 4 |

Tražimo umnožak brojeva $a$ i $c$.
Kako zbroj brojeva u tablici mora biti 35 to je $3 + a + b + c + 4 = 35$ odnosno:
(1) $a + b + c = 28$.
Kako zbroj brojeva u prve tri ćelije mora biti 22 to je $3 + a + b = 22$ odnosno:
(2) $a + b = 19$.
Kako zbroj brojeva u posljednje tri ćelije mora biti 25 to je $b + c + 4 = 25$ odnosno:
(3) $b + c = 21$.

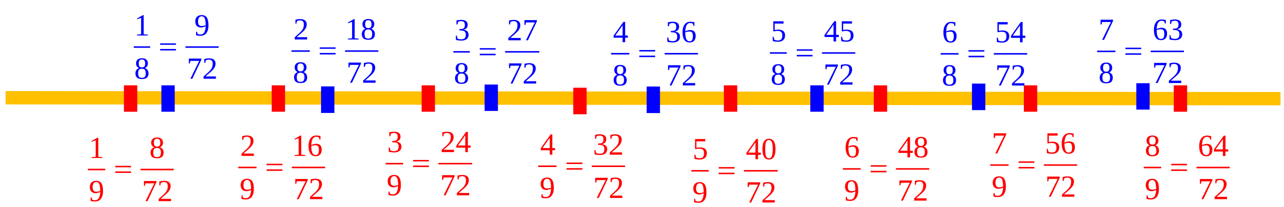
Zbrojimo li sve tri jednakosti dobivamo: $2a + 3b + 2c = 68$, tj. $b + 2(a + b + c) = 68$, $b + 2\cdot 28 = 68$, $b = 12$.
Kako je: $a + 12 = 19$ i $12 + c = 21$ onda je $a = 7$ i $c = 9$. Umnožak tih brojeva je 63.

15. Stjepan želi izrezati komad užeta na devet jednakih dijelova i označio je mjesta na kojima ga treba prerezati. Barbara želi taj isti komad užeta izrezati na osam jednakih dijelova te je i ona označila mjesta na kojima treba prerezati to uže. Potom je Karlo prerezao taj komad užeta na svim označenim mjestima. Koliko dijelova užeta je dobio Karlo nakon rezanja?

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

Rješenje: B) 16
1. način:
Stjepan je na tom komadu užeta označio devetine, a Barbara osmine jer su i jedan i drugi željeli uže prerezati na jednake dijelove. Stjepan je označio 8 mjesta, a Barbara njih 7 na kojima treba prerezati uže i nikoja dva mjesta rezanja se neće podudarati. Dakle, Karlo je uže prerezao na 15 mjesta te je dobio 16 dijelova tog užeta.

2. način:




Rezanjem je dobio 16 dijelova užeta.

16. Kristina želi napisati po jedan broj u svaku ćeliju 3 x 3 tablice tako da je zbroj brojeva u svake dvije ćelije koje imaju zajednički rub uvijek isti. U tablicu je upisala dva broja kako je prikazano na slici. Koliki je zbroj svih brojeva popunjene tablice?

| | | |
|---|---|---|
| 2 | | |
| | | 3 |
| | | |

A) 18 B) 20 C) 21 D) 22 E) 23

Rješenje: D) 22

| | | |
|---|---|---|
| 2 | ***a*** | ***b*** |
| ***c*** | ***d*** | 3 |
| ***e*** | ***f*** | ***g*** |

Označimo s *a, b, c, d, e, f* i *g* brojeve koji nedostaju u tablici.
Zbog uvjeta: zbroj brojeva u svake dvije ćelije koje imaju zajednički rub je uvijek isti vrijedi:
$2 + a = a + b$ i
$a + b = b + 3$
Stoga je $b = 2$, $a = 3$ i zbroj brojeva u susjednim ćelijama je 5.
Iz navedenog zaključujemo da su brojevi u tablici ili 2 ili 3 pa je:
$d = 2$, $c = 3$, $e = 2$, $f = 3$ i $g = 2$.
Popunjena tablica je:

| | | |
|---|---|---|
| 2 | **3** | **2** |
| **3** | **2** | 3 |
| **2** | **3** | **2** |

Zbroj svih brojeva u tablici je:
$5 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 10 + 12 = 22$.

**Pitanja za 5 bodova:**

17. Veličine unutarnjih kutova trokuta izražene u stupnjevima su tri različita cijela broja. Kolika je najmanja moguća vrijednost zbroja veličina najmanjeg i najvećeg kuta tog trokuta?

A) 61° B) 90° C) 91° D) 120° E) 121°

Rješenje: C) 91°
Označimo s $\alpha$, $\beta$ i $\gamma$ veličine unutarnjih kutova tog trokuta i neka je $\alpha < \beta < \gamma$.
Kako je $\alpha + \gamma = 180° - \beta$, najmanji mogući zbroj od $\alpha$ i $\gamma$dobije se za najveću moguću vrijednost od $\beta$.
S obzirom na to da je $\beta < \gamma$, jasno je da kut veličine $\beta$ mora biti šiljasti kut. Najveća cjelobrojna vrijednost šiljastog kuta je 89° stoga je $\alpha + \gamma$ najmanje $180° - 89° = 91°$.

18. Deset klokana stoje u redu kako je pokazano na slici. Klokani koji su jedan pored drugog i okrenuti su jedan prema drugom, skokom zamijene mjesta. Postupak se ponavlja sve dok je moguće izvesti zamjenu mjesta. Koliko je zamjena moguće napraviti?

A) 15 B) 16 C) 18 D) 20 E) 21

Rješenje: C) 18
Označimo mjesta na kojima stoje klokani od 1 do 10 počevši slijeva.

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| → | → | → | ← | ← | → | → | → | ← | ← |

Klokani na 3. i 4. mjestu zamijene mjesta, kao i klokani na 8. i 9. mjestu. To su dvije zamjene i nakon njih poredak je ovakav:

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| → | → | ← | → | ← | → | → | ← | → | ← |

Sada mjesta mijenjaju klokani na mjestima: 2. i 3., 4. i 5., 7. i 8. te 9. i 10.

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| → | ← | → | ← | → | → | ← | → | ← | → |

Nakon toga mjesta mijenjaju klokani na mjestima: 1. i 2., 3. i 4., 6. i 7. te 8. i 9.

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ← | → | ← | → | → | ← | → | ← | → | → |

Sad se zamijene klokani na mjestima: 2. i 3., 5. i 6. te 7. i 8.

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ← | ← | → | → | ← | → | ← | → | → | → |

Mijenjaju se klokani na mjestima: 4. i 5. te 6. i 7.

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ← | ← | → | ← | → | ← | → | → | → | → |

Sad se mijenjaju klokani na mjestima: 3. i 4. te 5. i 6.

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ← | ← | ← | → | ← | → | → | → | → | → |

Konačno, zamijene se klokani na mjestima 4. i 5. i nakon toga više nije moguće napraviti nijednu zamjenu i raspored je ovakav:

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ← | ← | ← | ← | → | → | → | → | → | → |

Učinjeno je $2 + 4 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1 = 18$ zamjena.

19. Dijana ima devet brojeva: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9. Nekima od njih dodaje broj 2, a preostalima broj 5. Koji je najmanji mogući broj različitih rezultata koje može dobiti na takav način?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

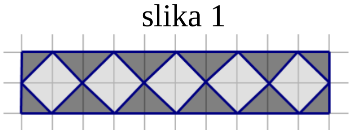
Rješenje: B) 6
Kako je razlika brojeva koje će Dijana dodavati 3 ($5 – 2 = 3$), odredimo među brojevima od 1 do 9 sve parove brojeva koji se razlikuju za 3, a da se niti jedan od brojeva ne ponavlja.
Jedan od načina kako u nizu brojeva od 1 do 9 možemo odrediti 3 takva para je: 1 i 4, 2 i 5, 3 i 6.
Kad većem od brojeva svakog takvog para dodamo 2, a manjem 5 dobit ćemo jednake zbrojeve.
$1 + 5 = 6$ i $4 + 2 = 6$
$2 + 5 = 7$ i $5 + 2 = 7$
$3 + 5 = 8$ i $6 + 2 = 8$
Na taj način dobijemo tri različita rezultata, 6, 7 i 8. Ostalo je još preostalim brojevima dodati ili 2 ili 5.
Preostali brojevi su 7, 8 i 9 pa dodavanjem broja 2 ili broja 5 bilo kojem od njih ne možemo dobiti rezultate 6, 7 ili 8 tako da u svakom slučaju dobijemo još 3 različita rezultata. Dakle, najmanji mogući broj različitih rezultata je 6.
Na isti način bi zaključivali da smo odabrali parove: 9 i 6, 8 i 5, 7 i 4.

20. Bakin stolnjak ima uzorak kao na slici. Koliki postotak stolnjaka je crne boje?

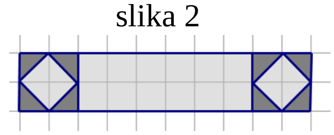
A) 16 B) 24 C) 25 D) 32 E) 36

Rješenje: D) 32
Stolnjak je kvadratnog oblika i može se podijeliti u dva reda kao na slici 1 i tri reda kao na slici 2.

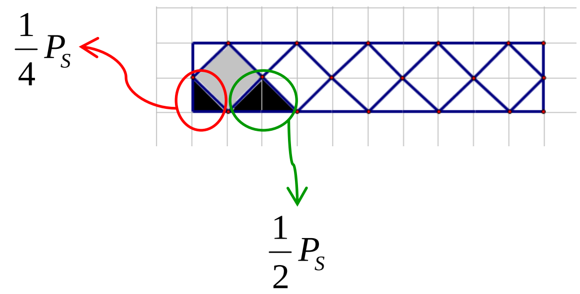
slika 1



slika 2



Označimo s $P_S$ površinu sivog kvadratića onda su površine istaknutih trokuta na slici $\frac{1}{4}P_S$ i $\frac{1}{2}P_S$.




Stoga je površina jednog reda kao na slici 1 jednaka:

$$4\cdot\frac{1}{4}P_S+8\cdot\frac{1}{2}P_S+5P_S=P_S+4P_S+5P_S=10P_S.$$

Površina cijelog kvadrata je $50P_S$.

Površina crnog dijela u velikom kvadratu je:

$$2\cdot\left(4\cdot\frac{1}{4}P_S+8\cdot\frac{1}{2}P_S\right)+3\cdot8\cdot\frac{1}{4}P_S=2\cdot\left(P_S+4P_S\right)+3\cdot2P_S=2\cdot5P_S+6P_S=16P_S.$$

Udio crnog dijela je: $\frac{16P_S}{50P_S}=\frac{16}{50}=\frac{32}{100}=32\%.$

.

21. Autobusi kreću s aerodroma prema centru grada svake 3 minute i voze uvijek istim putem. Istovremeno kad kreće jedan autobus, s aerodroma je krenuo i automobil te je do centra vozio istim putem kao i autobus. Autobusu treba 60 min do centra grada, a automobilu 35 min. Automobil će na tom putovanju prestići nekoliko autobusa. Koliko njih ako ne računamo autobus s kojim je istovremeno krenuo s aerodroma?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 13

Rješenje: A) 8
1. način:
Promatramo one autobuse koji su krenuli s aerodroma, a do centra im treba više od 35 minuta. Kako je razmak u polascima autobusa 3 minute, prvi autobus kojeg će prestići automobil treba još 60 – 1·3 = 57 minuta do centra, drugi autobus treba još 60 – 2·3 = 54 minute, treći 60 – 3·3 = 51 minutu itd. Kako je 60 – 35 = 25, a prvi višekratnik broja 3 manji od 25 je 24, do centra će automobil prestići 8 autobusa jer osmom autobusu treba još 60 – 8·3 = 36 minuta do centra grada. Također, jasno je da deveti autobus treba manje od 35 minuta do centra.

2. način:
Promatramo one autobuse koji su krenuli s aerodroma, a do centra im treba više od 35 minuta. Kako vožnja autobusa traje 60 minuta, a kreću u razmacima od 3 minute onda trajanje njihove vožnje do centra možemo zapisati izrazom $60 - 3n$ gdje je $n$ redni broj autobusa kojeg će automobil prestići na putu od aerodroma do centra grada.
Odredimo najveći prirodan broj $n$ takav da je $60 - 3n > 35$.

$60 - 3n > 35$, $3n < 60 - 35$, $3n < 25$, $n<\frac{25}{3}$.

Najveći prirodan broj manji od $\frac{25}{3}=8\frac{1}{3}$ je 8. Na putu do centra automobil će prestići ukupno 8 autobusa.

22. Članovi niza 2, 3, 6, 8, 8, ... dobiju se na sljedeći način: Prva dva člana su 2 i 3, a svaki sljedeći član niza je posljednja znamenka umnoška dva prethodna člana u nizu. Koji je 2017. član tog niza?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

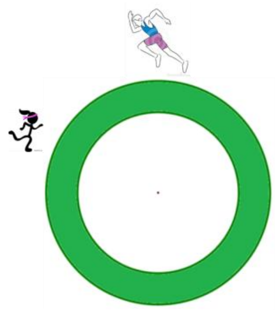
Rješenje: A) 2
Zapišimo još neke članove tog niza: 2, 3, 6, 8, 8, 4, 2, 8, 6, 8, 8, 4, 2, 8, 6 . . .
Uočimo da se u nizu brojeva dio 6, 8, 8, 4, 2, 8 periodički ponavlja i to od trećeg mjesta u nizu. Promotrimo 2015 članova nakon drugog člana. Dio od 6 članova u tih 2015 članova ponovit će se 2015 : 6 = 335 puta i još će se ponoviti 5 brojeva tog perioda. To znači da je 2017. član niza zapravo peti član perioda, a to je broj 2.

23. Dva trkača treniraju na kružnoj stazi duljine 720 metara. Startaju s istog mjesta no trče u suprotnim smjerovima, oba stalnim brzinama. Prvom trkaču treba 4 minute da optrči cijelu stazu, a drugom 5 minuta. Koliko će metara pretrčati drugi trkač od starta do njihovog prvog sljedećeg susreta na stazi?

A) 355 B) 350 C) 340 D) 330 E) 320

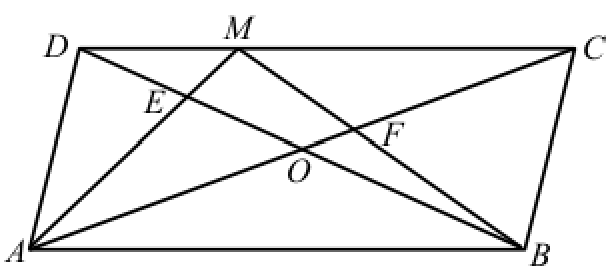
Rješenje: E) 320
Obzirom da je duljina staze 720 m, brzina prvog trkača je 720 : 4 = 180 m/min, a brzina drugog trkača je 720 : 5 = 144 m/min. Ako drugi trkač pretrči *x* metara, za isto vrijeme prvi pretrči 720 – *x* metara, pa je:

$$\frac{720-x}{180}=\frac{x}{144}$$
$$144\cdot(720-x)=180x$$
$$144\cdot720-144x=180x$$
$$144\cdot720=180x+144x$$
$$324x=144\cdot720$$
$$x=\frac{144\cdot720}{324}$$
$$x=320$$



Drugi trkač će pretrčati 320 m do prvog susreta na stazi nakon starta.

24. Na slici je paralelogram *ABCD* površine *S*. Sjecište njegovih dijagonala označeno je *O*. Na stranici $\overline{CD}$ označena je točka *M*. Sjecište dužine $\overline{AM}$ i dijagonale $\overline{BD}$ je točka *E*, a sjecište dužine $\overline{BM}$ i dijagonale $\overline{AC}$ je točka *F*. Zbroj površina trokuta $\Delta AED$ i $\Delta BCF$ je $\frac{1}{3}S$. Kolika je površina četverokuta *EOFM*?




A) $\frac{1}{6}S$ B) $\frac{1}{8}S$ C) $\frac{1}{10}S$ D) $\frac{1}{12}S$ E) $\frac{1}{14}S$

Rješenje: D) $\frac{1}{12}S$

$P_{\Delta ABM}=\frac{1}{2}S$ jer paralelogram *ABCD* i trokut $\Delta ABM$ imaju iste osnovice i iste visine.

$P_{\Delta COD} = \frac{1}{4}S$ jer paralelogram $ABCD$ i trokut $\Delta COD$ imaju iste osnovice, a visina trokuta je polovina visine paralelograma.

$P_{ABCOD} = P_{ABCD} - P_{COD} = S - \frac{1}{4}S = \frac{3}{4}S$ .

S druge strane,

$P_{ABCOD} = \left(P_{AED} + P_{BCF}\right) + P_{EOFBA} = \frac{1}{3}S + \left(P_{ABM} - P_{EOFM}\right) = \frac{1}{3}S + \frac{1}{2}S - P_{EOFM} = \frac{5}{6}S - P_{EOFM}$

$P_{EOFM} = \frac{5}{6}S - \frac{3}{4}S = \frac{1}{12}S.$

Eventualne primjedbe na rješenja zadataka primaju se isključivo elektronskim putem na e-mail klokan@math.hr do 27. travnja 2017. u 23:59.
Rezultati natjecanja najbolje plasiranih učenika bit će objavljeni 2. svibnja 2017. godine na oglasnoj ploči škole i na internet stranici HMD-a.
Primjedbe i žalbe učenika primaju se isključivo elektronskim putem na e-mail klokan@math.hr do 9. svibnja 2017. u 23:59.
Nagrade najboljim učenicima dodjeljivat će se od 18. svibnja 2017. godine.
Obavijesti se mogu dobiti na Internetu - **http://www.matematika.hr/klokan/2017/.**