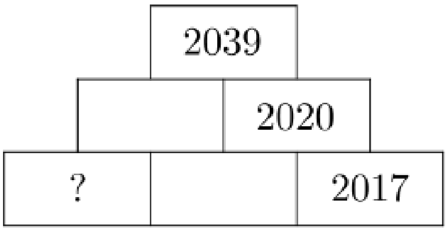
**MATEMATIČKI KLOKAN J**
**6 100 000 sudionika u 60 zemalja Europe, Amerike, Afrike i Azije**
**Četvrtak, 23. ožujka 2017. – Trajanje 75 minuta**
**Natjecanje za Junior (II. i III. razred SŠ)**

* Natjecanje je pojedinačno. **Računala su zabranjena**.
* **Svaki zadatak ima pet ponuđenih odgovora od kojih je samo jedan točan**.
* Prvih osam pitanja donosi po 3 boda, drugih osam po 4 boda, a trećih osam po 5 bodova.
* Ako nijedan odgovor nije zaokružen ili su zaokružena dva ili više odgovora zadatak donosi 0 bodova.
* Ako je zaokruženi odgovor pogrešan, oduzima se četvrtina bodova predviđenih za taj zadatak.
* Svaki sudionik u natjecanju dobiva simboličan dar, a deset posto najboljih nagradu.

## Pitanja za 3 boda:

1. Svaki broj u tablici zbroj je dva broja ispod njega. Koji broj treba biti u ćeliji označenoj s „?”?




A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

**Rješenje: B**
$2039 = 19 + 2020$, $2020 = 3 + 2017$, $19 = 16 + 3$.

2. Anđela je izradila ukras od sivih i bijelih asteroida. Površine asteroida su 1 $cm^2$, 4 $cm^2$, 9 $cm^2$ i 16 $cm^2$. Kolika je ukupna površina vidljivog sivog dijela?

A) 9 $cm^2$ B) 10 $cm^2$ C) 11 $cm^2$ D) 12 $cm^2$ E) 13 $cm^2$

**Rješenje: B**
$16 - 9 + 4 - 1 = 10$ $cm^2$.

3. Marija ima 24 eura. Svaki od njenih troje braće ima 12 eura. Koliko eura Marija treba dati svakom bratu tako da svi četvero imaju isti iznos?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

**Rješenje: C**
Neka Marija ostavi sebi 12 eura tako da ima isto kao njena braća. Zatim preostalih 12 eura podijeli na 4 jednaka dijela, tj. svakom bratu da 3 eura.

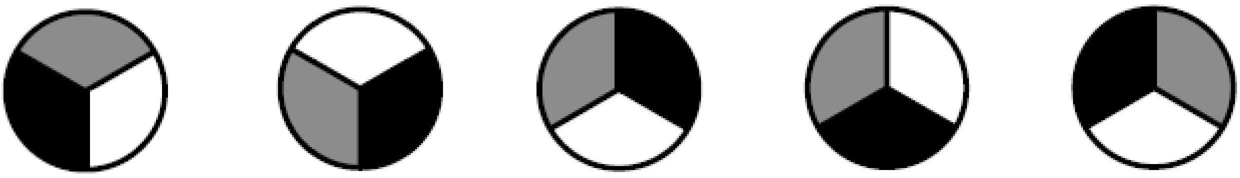
4. Djevojke su plesale u krugu. Antonija je bila peta slijeva Bjanki i osma zdesna Bjanki. Koliko djevojaka je plesalo u krugu?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

**Rješenje: C**

5. Krug radijusa 1 kotrlja se po ravnoj liniji od točke $K$ do točke $L$, gdje je $|KL| = 11\pi$ (vidi sliku). Kako krug izgleda u krajnjoj poziciji, u točki $L$?


A) B) C) D) E)



**Rješenje: E**
Krug, opsega $2\pi$, napravi 5 okreta i 1 poluokret ($5 \cdot 2\pi + \pi$).

6. Martin igra šah. Ove sezone odigrao je 15 mečeva i pobijedio u 9 od njih. Treba odigrati još 5 mečeva. Kolika će mu biti stopa uspjeha ako pobijedi u svih 5 preostalih mečeva?

A) 60% B) 65% C) 70% D) 75% E) 80%

**Rješenje: C**
Martin će odigrati 20 mečeva, a pobijediti u njih 14 pa će njegova stopa uspjeha biti $\frac{14}{20} = 70\%$.

7. Osmina uzvanika na vjenčanju bila su djeca. Tri sedmine odraslih uzvanika bili su muškarci. Koliki dio uzvanika su bile žene?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{7}$ E) $\frac{3}{7}$

**Rješenje: A**
Žene čine $\frac{4}{7}$ odraslih uzvanika. Odraslih uzvanika je $\frac{7}{8}$ svih uzvanika. Stoga žene čine $\frac{4}{7} \cdot \frac{7}{8} = \frac{1}{2}$ svih uzvanika.

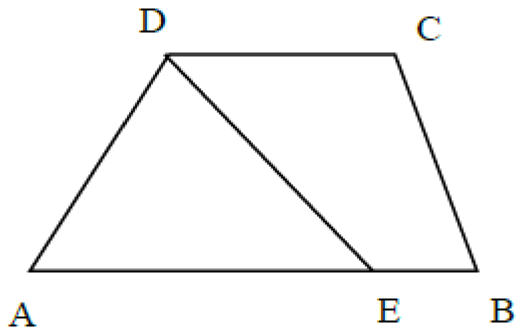
8. Moj nastavnik matematike ima kutiju s žetonima u boji. U njoj su 203 crvena, 117 bijelih i 28 plavih žetona. Učenici trebaju, jedan po jedan, uzeti žeton iz kutije bez gledanja. Koliko učenika treba uzeti žeton kako bi bili sigurni da su izvučena barem 3 žetona iste boje?

A) 3 B) 6 C) 7 D) 28 E) 203

**Rješenje: C**
Najgore što se može dogoditi je da su u 6 izvlačenja izvučena 2 crvena, 2 bijela i 2 plava žetona. Koji god žeton bude izvučen u sedmom izvlačenju imat ćemo 3 žetona iste boje.

**Pitanja za 4 boda:**

9. Četverokut $ABCD$ trapez je kojemu su stranice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ paralelne, gdje je $|AB| = 50$, $|CD| = 20$. Na stranici $\overline{AB}$ nalazi se točka $E$ sa svojstvom da dužina $\overline{DE}$ dijeli dani trapez na dva dijela jednakih površina (vidi sliku). Odredi duljinu dužine $\overline{AE}$.




A) 25 B) 30 C) 35 D) 40 E) 45

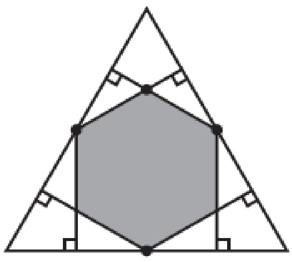
**Rješenje: C**
Označimo s $v$ duljinu visine trapeza te s $x$ duljinu dužine $\overline{AE}$. Tada je $P_{AED} = \frac{x \cdot v}{2}$ i $P_{EBCD} = \frac{(50-x)+20}{2} \cdot v$. Iz jednakosti $P_{AED} = P_{EBCD}$ slijedi $x = 35$.

10. Koliko prirodnih brojeva $A$ ima svojstvo da je točno jedan od brojeva $A$ i $A + 20$ četveroznamenkast?

A) 19 B) 20 C) 38 D) 39 E) 40

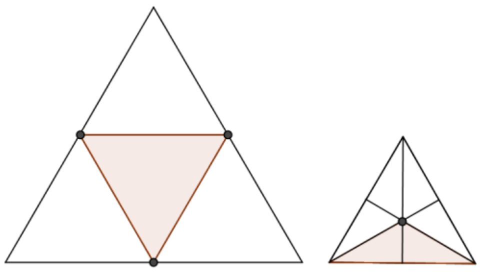
**Rješenje: E**
Radi se o brojevima od 980 do 999 i od 9980 do 9999.

11. Iz polovišta svake stranice jednakostraničnog trokuta povučene su okomice na preostale dvije stranice (vidi sliku). Koliki dio površine tog trokuta prekriva dobiveni šesterokut?



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{4}{9}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{2}{3}$

**Rješenje: D**
Označimo s $P$ površinu početnog trokuta.
Spojimo li polovišta stranica jednakostraničnog trokuta dobijemo 4 sukladna trokuta (svaki površine $\frac{1}{4}P$).
Spojimo li svaki vrh jednakostraničnog trokuta s njegovim ortocentrom dobijemo 3 sukladna trokuta (svaki površine $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}P\right)$).



Konstruirani šesterokut sastoji se od jednog trokuta kao na lijevoj slici i tri trokuta kao na desnoj slici pa je njegova površina $\left(1 + 3 \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{4}P = \frac{1}{2}P$.

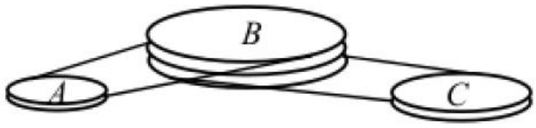
12. Suma kvadrata tri uzastopna prirodna broja iznosi 770. Odredi najveći od ta tri broja.

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

**Rješenje: C**

Iz jednadžbe $(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = 770$ slijedi $n = 16$. Radi se o brojevima 15, 16 i 17.

13. Sustav pogonskog remenja sastoji se od kotača $A$, $B$ i $C$ koji rotiraju bez klizanja. Kotač $B$ učini 4 okreta dok kotač $A$ učini 5 okreta. Kotač $B$ učini 6 okreta dok kotač $C$ učini 7 okreta. Odredi opseg kotača $A$ ako opseg kotača $C$ iznosi 30 cm.




A) 27 cm B) 28 cm C) 29 cm D) 30 cm E) 31 cm

**Rješenje: B**

Opseg kotača $A$ je $\frac{4}{5}$ opsega kotača $B$. Opseg kotača $B$ je $\frac{7}{6}$ opsega kotača $C$. Tada je $O_A = \frac{4}{5} O_B = \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{6} O_C = \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{6} \cdot 30 = 28$ cm.

14. Četiri brata različitih su visina. Tonko je niži od Viktora isto toliko koliko je viši od Petra. Oskar je za istu tu vrijednost niži od Petra. Tonko je visok 184 cm, a prosječna visina sve braće je 178 cm. Koliko je visok Oskar?

A) 160 cm B) 166 cm C) 172 cm D) 184 cm E) 190 cm

**Rješenje: A**

Označimo s $x$ razliku u visini između Oskara i Petra tj. Petra i Tonka tj. Tonka i Viktora. Kako je Tonko visok 184 cm slijedi da je Oskar visok $184 - 2x$, Petar $184 - x$, a Viktor $184 + x$. Kako je prosječna visina braće 178 cm imamo jednadžbu $\frac{4 \cdot 184 - 2x}{4} = 178$ iz koje slijedi da je $x = 12$. Oskar je, dakle, visok $184 - 2 \cdot 12 = 160$ cm.

15. Kišilo je 7 puta tijekom našeg odmora. Ako bi kišilo prijepodne, popodne bi bilo sunčano. Ako bi kišilo popodne, prijepodne bi bilo sunčano. Imali smo 5 sunčanih prijepodneva i 6 sunčanih popodneva. Koliko je dana trajao naš odmor?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

**Rješenje: C**

Kišilo je 4 prijepodneva i 3 popodneva i bila su još 2 sunčana dana.

16. Marijana je odlučila unijeti brojeve u $3 \times 3$ tablicu tako da suma u svakom $2 \times 2$ kvadratu bude jednaka. Tri broja već su upisana kao na slici. Koji broj Marijana treba upisati u ćeliju označenu s „?”?

| | | |
|---|---|---|
| 3 | | 1 |
| | | |
| 2 | | ? |

A) 5 B) 4 C) 1 D) 0 E) Nije moguće odrediti.

**Rješenje: D**

| | | |
|---|---|---|
| 3 | $a$ | 1 |
| $b$ | $c$ | $d$ |
| 2 | $e$ | $x$ |

Treba vrijediti: $a + b + c + 3 = b + c + e + 2$, tj. $a + 1 = e$.
Nadalje, $a + c + d + 1 = c + d + e + x$, tj. $a + 1 = e + x$.
Dakle, $x$ mora biti jednako 0.

## Pitanja za 5 bodova:

17. Četvero djece mlađih od 18 godina različite su dobi. Umnožak njihovih godina je 882. Kolika je suma njihovih godina?

A) 23 B) 25 C) 27 D) 31 E) 33

**Rješenje: D**
$882 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$. Četiri različita faktora broja 882 manja od 18 su 1,7,9,14. Suma tih brojeva je 31.

18. Na igraćoj kocki napisani su brojevi: $-3, -2, -1, 0, 1, 2$. Ako kocku bacimo dva puta i pomnožimo dobivene brojeve, koja je vjerojatnost da je rezultat negativan broj?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{11}{36}$ D) $\frac{13}{36}$ E) $\frac{1}{3}$

**Rješenje: E**
Od 36 mogućih ishoda u 12 će ih umnožak biti negativan: ako na prvoj kocki dobijemo $-3, -2$ ili $-1$ na drugoj kocki treba dobiti 1 ili 2 ($3 \cdot 2$ opcije); ako na prvoj kocki dobijemo 1 ili 2 na drugoj kocki treba dobiti $-3, -2$ ili $-1$ ($2 \cdot 3$ opcije). Tražena vjerojatnost je $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

19. Moj prijatelj želi koristiti posebnu sedmeroznamenkastu lozinku. Znamenka lozinke ponavlja se točno onoliko puta kolika je vrijednost te znamenke. Iste znamenke uvijek su zapisane jedna do druge (primjerice 4444333 ili 1666666). Koliko takvih lozinki postoji?

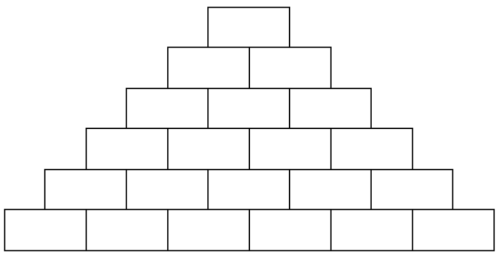
A) 6 B) 7 C) 10 D) 12 E) 13

**Rješenje: E**
Kako se znamenka pojavljuje onoliko puta kolika je njena vrijednost znamo da zbroj korištenih znamenki treba biti 7. Mogućnosti su:

- ✓ 1 i 6, 2 i 5, 3 i 4 u dva moguća redoslijeda,
- ✓ 7
- ✓ 1, 2 i 4 u šest mogućih redoslijeda.

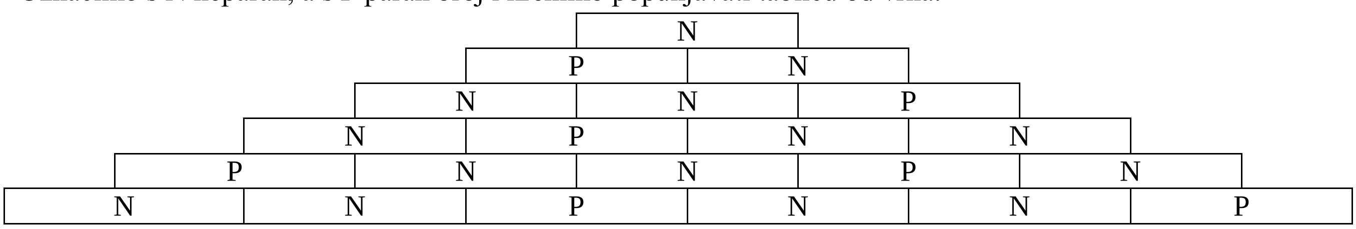
To je ukupno 13 lozinki.

20. Pavle želi u svaku ćeliju tablice upisati prirodan broj tako da je svaki broj zbroj dva broja ispod njega. Koliko najviše neparnih brojeva Pavle može upisati u tablicu?



A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

**Rješenje: B**
Označimo s N neparan, a s P paran broj i krenimo popunjavati tablicu od vrha.



(Znamo da je P+P=P, N+N=P, N+P=N.) U tablici će biti 14 neparnih brojeva. Zamijenimo li bilo koji paran broj neparnim dobit ćemo manji ukupan broj neparnih brojeva.

21. Lisa je zbrojila kutove konveksnog poligona. Jedan je kut preskočila i dobila zbroj 2017°. Kolika je mjera kuta kojeg je preskočila?

A) 37° B) 53° C) 97° D) 127° E) 143°

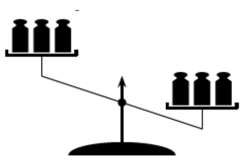
**Rješenje: E**
Zbroj kutova u konveksnom $n$-terokutu iznosi $(n-2)\cdot 180°$. Podijelimo li 2017° brojem 180 dobit ćemo rezultat 11 i ostatak 37. Rezultat je trebao biti 12, tj. ukupan zbroj kutova trebao je biti 2160°. Sada je jasno da je Lisa preskočila kut mjere $2160° - 2017° = 143°$.

22. U krugu stoji 30 plesača okrenutih licem prema centru. Nakon upute "Lijevo" neki plesači su se okrenuli na lijevo, a svi ostali na desno. Plesači koji su nakon tog bili okrenuti licem u lice rekli su jedan drugom "Zdravo". Bilo je 10 takvih plesača. Zatim su nakon upute "Okret" svi plesači napravili poluokret. Opet su svi plesači koji su nakon tog bili okrenuti licem u lice rekli jedan drugom "Zdravo". Koliko je bilo takvih plesača?

A) 10 B) 20 C) 8 D) 15 E) Nije moguće odrediti.

**Rješenje: A**
Plesači koji su nakon upute "Lijevo" bili okrenuti licem u lice bit će nakon upute "Okret"okrenuti leđima u leđa (➤❮ postaje ❮➤). Plesači koji su nakon prve upute bili okrenuti leđima u leđa sada su okrenuti licem u lice (❮➤ postaje ➤❮). Niz plesača koji je nakon upute "Lijevo" gledao lijevo, sada gleda desno - taj cijeli niz možemo poistovijetiti s jednim plesačem. Niz plesača koji je nakon upute "Lijevo" gledao desno sada gleda lijevo - taj cijeli niz možemo poistovijetiti s jednim plesačem.
Primjerice: ➤➤❮❮❮❮➤➤➤➤➤➤❮ možemo promatrati kao ➤❮➤❮. Nakon upute "Okret" onda imamo ❮➤❮➤ (s tim da su prvi i zadnji plesač jedan do drugog, u krugu). Sada lako vidimo da je broj plesača koji se pozdrave nakon prve upute jednak broju plesača koji se pozdrave nakon druge upute.

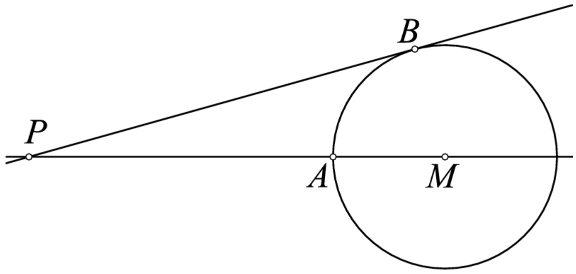
23. Na svaku stranu vage stavljena su nasumično 3 utega različitih masa, a rezultat se vidi na slici. Mase utega su 101, 102, 103, 104, 105 i 106 grama. Koja je vjerojatnost da uteg mase 106 grama stoji na težoj (desnoj) strani?



A) 75% B) 80% C) 90% D) 95% E) 100%

**Rješenje: B**
Da bi desna strana bila teža ukupna masa utega na toj strani treba biti $\geq 311$ grama. Za to postoji 10 kombinacija od 3 utega (106, 101, 104; 106, 101, 105; 106, 102, 103; 106, 102, 104; 106, 102, 105; 106, 103, 104; 106, 103, 105; 106, 104, 105; 105, 102, 104; 105, 103, 104). U 8 od tih 10 kombinacija nalazi se uteg mase 106 grama pa je tražena vjerojatnost $\frac{8}{10} = 80\%$.

24. Točke $A$ i $B$ nalaze se na kružnici sa središtem u $M$. Pravac $PB$ tangenta je na kružnicu u točki $B$. Udaljenosti $|PA|$ i $|MB|$ prirodni su brojevi i $|PB| = |PA| + 6$. Koliko mogućih vrijednosti može poprimiti $|MB|$?




A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

**Rješenje: D**

Kako je pravac $PB$ tangenta je na kružnicu u točki $B$ trokut $PMB$ je pravokutan (s pravim kutom kod vrha $B$). Označimo $|PA| = x$ i $|MB| = |MA| = r$. Onda je $|PB| = x + 6$. Pitagorin poučak primjenjen na trokut $PMB$ daje: $(x + r)^2 = (x + 6)^2 + r^2$ iz čega slijedi $r = 6 + \frac{18}{x}$. Da bi $r$ bio prirodan broj $x$ može biti 1,2,3,6,9,18, tj. $r$ može poprimiti 6 različitih vrijednosti.

Eventualne primjedbe na rješenja zadataka primaju se isključivo elektronskim putem na e-mail klokan@math.hr do 27. travnja 2017. u 23:59.

Rezultati natjecanja najbolje plasiranih učenika bit će objavljeni 2. svibnja 2017. godine na oglasnoj ploči škole i na internet stranici HMD-a.

Primjedbe i žalbe učenika primaju se isključivo elektronskim putem na e-mail klokan@math.hr do 9. svibnja 2017. u 23:59.

Nagrade najboljim učenicima dodjeljivat će se od 18. svibnja 2017. godine.

Obavijesti se mogu dobiti na Internetu - **http://www.matematika.hr/klokan/2017/**.