Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

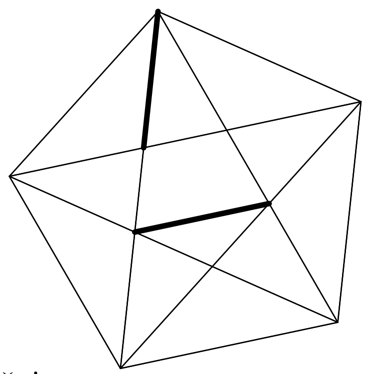
28. veljače 2011.

1. Odredi sve četveroznamenkaste brojeve, čije su prve dvije znamenke međusobno jednake i zadnje dvije znamenke međusobno jednake, a koji su potpuni kvadrati (tj. kvadrati nekog prirodnog broja).

2. Dokaži da je umnožak bilo koja dva elementa skupa

$$\{m \mid m = a^2 - 5b^2, a, b \in \mathbb{N}\}$$

također element tog skupa.



3. Na slici je pravilni peterokut s dijagonalama. Dokaži da su istaknute dužine sukladne.

4. U nekom trokutu jedna je srednjica dulja od jedne težišnice. Dokaži da je taj trokut tupokutan.

5. Prijateljice Anica i Neda igraju igru tako da u svakom potezu, nakon što jedna od njih kaže broj n, druga mora reći neki broj oblika $a \cdot b$ pri čemu su a i b prirodni brojevi za koje vrijedi $a + b = n$. Igra se zatim nastavlja na isti način, od upravo izrečenog broja. S kojim je sve brojevima mogla započeti igra ako je nakon određenog vremena jedna od njih rekla broj 2011 ?

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2011.

1. Odredi sva rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} 2a^2 - 2ab + b^2 &= a \\ 4a^2 - 5ab + 2b^2 &= b \end{aligned}$$

u skupu realnih brojeva.

2. Tetiva $\overline{AB}$ paralelna je s promjerom $\overline{MN}$ kružnice. Neka je t tangenta te kružnice u točki M te neka su točke C i D redom sjecišta pravaca NA i NB s pravcem t. Dokaži da vrijedi

$$|MC| \cdot |MD| = |MN|^2 .$$

3. Duljine svih stranica i dijagonala pravokutnika su prirodni brojevi. Dokaži da je njegova površina prirodan broj djeljiv s 12.

4. Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $x^3 + y^3 + z^3 = 1$. Dokaži da je tada

$$x^2 + y^2 + z^2 > x^5 + y^5 + z^5 + 2x^2y^2z^2(x + y + z).$$

5. Dokaži da u skupu od devet prirodnih brojeva, od kojih ni jedan nema prostog djeljitelja većeg od 6, postoje dva broja čiji je umnožak potpun kvadrat (kvadrat nekog prirodnog broja).

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2011.

1. Ako za kutove α, β, γ nekog trokuta vrijedi $\cos\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta - 1$, dokaži da je taj trokut jednakokračan.

2. Vladimir je na ploču napisao brojeve 1 i 2, a zatim nastavio pisati brojeve tako da je svaki novi broj suma kvadrata zadnjih dvaju napisanih brojeva. Dokaži da, ponavljajući taj postupak, Vladimir nikad neće napisati broj djeljiv s 3 niti broj djeljiv sa 7.

3. Dan je trokut ABC. Simetrala kuta $\sphericalangle CAB$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D, a simetrala kuta $\sphericalangle ABC$ siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki E. Ako je $\sphericalangle ACB \geqslant 60°$, dokaži da je $|AE| + |BD| \leqslant |AB|$.

4. Odredi najveću moguću vrijednost omjera obujma kugle i obujma njoj opisanog uspravnog stošca.

5. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $a + b + c = abc$.
   Dokaži da vrijedi

$$a^5(bc-1) + b^5(ca-1) + c^5(ab-1) \geqslant 54\sqrt{3}.$$

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2011.

1. Neka su a i b realni brojevi veći od 1 takvi da su brojevi $\log_b a$, $\log_{2b}(2a)$ i $\log_{4b}(4a)$, u tom poretku, uzastopni članovi aritmetičkog niza.

   Dokaži da su brojevi a i b jednaki.

2. Neka su a, b, c kompleksni brojevi za koje vrijedi

$$a + b + c = 0, \qquad ab + bc + ca = 0.$$

   Dokaži da je $|a| = |b| = |c|$.

3. Na rubu kvadrata označeno je ukupno $4n$ točaka: sva četiri vrha kvadrata i još po $n - 1$ točaka na svakoj stranici kvadrata. Odredi broj svih (nedegeneriranih) trokuta kojima su označene točke vrhovi.

4. Kružnice k_1 i k_2, polumjera r i R redom $(r < R)$ dodiruju se iznutra u točki A. Neka je p pravac paralelan njihovoj zajedničkoj tangenti, neka je B jedno sjecište pravca p s kružnicom k_1, a C jedno sjecište pravca p s kružnicom k_2, tako da se točke B i C nalaze s iste strane pravca koji spaja središta danih kružnica.
   Dokaži da polumjer kružnice opisane trokutu ABC ne ovisi o izboru pravca p i izrazi taj polumjer pomoću r i R.

5. Zadan je niz brojeva (a_n) takav da je

$$a_0 = 9 \qquad \text{i} \qquad a_{k+1} = 3a_k^4 + 4a_k^3 \quad \text{za sve } k \geqslant 0.$$

   Dokaži da dekadski zapis broja a_{11} završava s barem 2011 devetki.