ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2011.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-1.1.

Odredi sve četveroznamenkaste brojeve, čije su prve dvije znamenke međusobno jednake i zadnje dvije znamenke međusobno jednake, a koji su potpuni kvadrati (tj. kvadrati nekog prirodnog broja).

Prvo rješenje.

Neka je traženi broj kvadrat broja n, dakle $n^2 = \overline{aabb}$.

Vrijedi

$$\overline{aabb} = 1100a + 11b = 11 \cdot (100a + b) = 11 \cdot \overline{a0b}$$ (1 bod)

pri čemu su a i b znamenke, $a \neq 0$,

tj. broj $\overline{aabb} = n^2$ je djeljiv s 11.

Odavde zaključujemo da je n djeljiv s 11, (1 bod)

tj. $n = 11k$ za neki $k \in \mathbb{N}$.

No, to znači da je traženi broj oblika $121k^2$.

Da bi taj broj bio četveroznamenkast mora biti $k \geqslant 3$ i $k \leqslant 9$. (1 bod)

Računamo redom

k	3	4	5	6	7	8	9
$121k^2$	1089	1936	3025	4356	5929	7744	9801

(6 bodova*)

Vidimo da je jedino rješenje broj 7744 (kvadrat broja 88). (1 bod)

Napomena.

Gornjih 6 bodova dodjeljuje se po jedan bod za rješenje (eliminaciju) svakog pojedinog slučaja, za k iz skupa $\{3, 4, 5, 6, 7, 9\}$. Ako je vrijednost $121k^2$ pogrešno izračunata, taj bod se ne dodjeljuje.

Neki slučajevi mogu se eliminirati i promatrajući zadnje znamenke broja $(11k)^2$.

Npr. za $k = 5$, kvadrat broja 55 završava znamenkama 25, pa nije traženog oblika.

Ili, kako kvadrat prirodnog broja ne može završiti znamenkama 66 (jer je takav broj paran, a nije djeljiv s 4), traženi broj nije kvadrat broja 44 niti 66 (jer njihovi kvadrati završavaju znamenkom 6).

Drugo rješenje.

Traženi broj je oblika

$$\begin{aligned}\overline{aabb} &= 1000a + 100a + 10b + b = 1100a + 11b \\ &= 11 \cdot (100a + b) \qquad \text{(1 bod)}\end{aligned}$$

gdje je $a \neq 0$.

Budući da je traženi broj potpuni kvadrat, zaključujemo da izraz $100a + b$ mora biti djeljiv sa 11. (1 bod)

Budući da je $100a + b = 99a + (a + b)$, to znači da $11 \mid a + b$,
a kako je $1 \leqslant a + b \leqslant 18$, zaključujemo da je $a + b = 11$. (1 bod)

Stoga je traženi broj oblika

$$11 \cdot (99a + 11) = 11^2 \cdot (9a + 1).$$

Sada vidimo da $(9a + 1)$ mora biti potpuni kvadrat. (1 bod)

Dakle mora biti $9a = m^2 - 1 = (m - 1)(m + 1)$ za neki prirodan broj m. (1 bod)

Budući da je $a \leqslant 9$, zaključujemo da je $m \leqslant 9$.

Jedini zajednički djelitelj brojeva $m - 1$ i $m + 1$ može biti 2,
pa 9 mora dijeliti jednog od njih. (2 boda)

To je moguće jedino ako je $m + 1 = 9$, tj. ako je $m = 8$ i $a = m - 1 = 7$. (1 bod)

Sada iz $a + b = 11$ slijedi $b = 4$. (1 bod)

Traženi broj je $7744 = 88^2$. (1 bod)

Napomena.

Jednom kad se uoči da $9a + 1$ potpun kvadrat, može se i računati:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$9a + 1$	10	19	28	37	46	55	64	73	82

Jedini kvadrat u donjem retku je 64, pa mora biti $a = 7$.

Zadatak A-1.2.

Dokaži da je umnožak bilo koja dva elementa skupa

$$\{m \mid m = a^2 - 5b^2, a, b \in \mathbb{N}\}$$

također element tog skupa.

Rješenje.

Neka su m i n elementi danog skupa tj. neka vrijedi

$$m = a^2 - 5b^2, \qquad n = c^2 - 5d^2,$$

pri čemu su a, b, c, d prirodni brojevi.

Tada je

$$\begin{aligned}
m \cdot n &= \left(a^2 - 5b^2\right)\left(c^2 - 5d^2\right) && \text{(1 bod)}\\
&= a^2c^2 - 5b^2c^2 - 5a^2d^2 + 25b^2d^2 && \text{(1 bod)}\\
&= a^2c^2 + 25b^2d^2 + 10abcd - 5b^2c^2 - 5a^2d^2 - 10abcd \\
&= \left(a^2c^2 + 10\,ac \cdot bd + 25b^2d^2\right) - 5\left(b^2c^2 + 2bc \cdot ad + a^2d^2\right) && \text{(5 bodova)}\\
&= (ac + 5bd)^2 - 5\,(bc + ad)^2\,. && \text{(2 boda)}
\end{aligned}$$

Kako su a, b, c, d prirodni brojevi i brojevi $ac + bd$ i $bc + ad$ su također prirodni.
(1 bod)

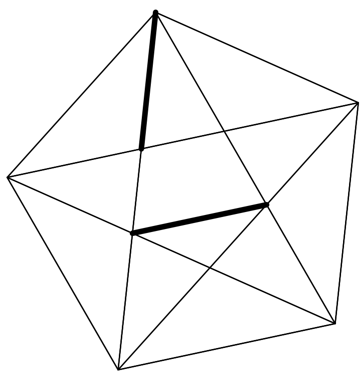
Napomena. Vrijedi i $(a^2 - 5b^2)(c^2 - 5d^2) = (ac - 5bd)^2 - 5\,(bc - ad)^2$.

Učeniku koji napiše takvu jednakost treba dati 7 bodova ili 8 bodova ovisno o tome je li objasnio da se može postići da je broj u zagradi nenegativan.

Dva boda se gube ako ostane mogućnost da je u nekoj zagradi broj jednak nuli.

Zadatak A-1.3.

Na slici je pravilni peterokut s dijagonalama. Dokaži da su istaknute dužine sukladne.

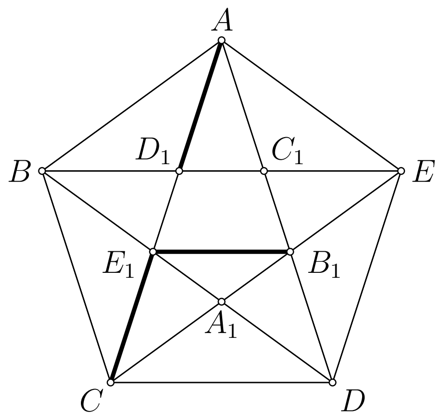


Prvo rješenje.

Budući da je $|CE_1| = |AD_1|$, dovoljno je dokazati da je trokut B_1CE_1 jednakokračan. (1 bod)

Kako je dijagonala pravilnog peterokuta paralelna njegovoj stranici, vrijedi $B_1E_1 \parallel C_1D_1$, odnosno $E_1B_1 \parallel D_1E$. (2 boda)

Promotrimo trokute CB_1E_1 i CED_1.



Kako su im odgovarajuće stranice paralelne, oni imaju jednake kutove (kutovi s paralelnim kracima) pa je $\sphericalangle CB_1E_1 = \sphericalangle CED_1$. (3 boda)

Zbog simetrije peterokuta trokut CED_1 je jednakokračan pa je $\sphericalangle CED_1 = \sphericalangle ECD_1$. (2 boda)

Konačno dobivamo $\sphericalangle CB_1E_1 = \sphericalangle B_1CE_1$ što znači da je trokut CB_1E_1 jednakokračan, a to smo i htjeli dokazati. (2 boda)

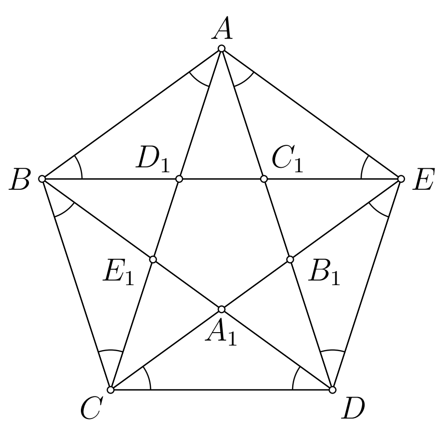
Drugo rješenje.

Unutarnji kut pravilnog peterokuta je $3 \cdot 180^\circ/5 = 108^\circ$. (1 bod)

Kako je trokut $\triangle CDE$ jednakokračan vrijedi

$$\sphericalangle DCE = \sphericalangle DEC = (180^\circ - \sphericalangle CDE)/2 = (180^\circ - 108^\circ)/2 = 36^\circ. \quad \text{(1 bod)}$$

Jasno je da su svi označeni kutovi na donjoj slici sukladni, i iznose 36°. (1 bod)



Zato su kutovi $\sphericalangle DAC$, $\sphericalangle EBD$, $\sphericalangle ACE$, $\sphericalangle BDA$ i $\sphericalangle CEB$ svi jednaki

$$\sphericalangle BDA = 108° - \sphericalangle CDB - \sphericalangle EDA = 108° - 36° - 36° = 36°. \qquad \text{(2 boda)}$$

Dalje možemo nastaviti na razne načine.

Prvi način.

Uočimo da zbog simetrije vrijedi $|AD_1| = |CE_1|$.

Stoga je dovoljno dokazati da je trokut CB_1E_1 jednakokračan. (1 bod)

Peterokut $A_1B_1C_1D_1E_1$ je također pravilan pa je i $\sphericalangle A_1B_1E_1 = 36°$. (2 boda)

Stoga je trokut $\triangle CB_1E_1$ jednakokračan i time je tvrdnja dokazana. (2 boda)

Drugi način.

Analogno, u pravilnom peterokutu $A_1B_1C_1D_1E_1$ vrijedi $\sphericalangle D_1B_1E_1 = 36°$. (1 bod)

Promotrimo trokute BD_1E_1 i $B_1D_1E_1$.
Oba su jednakokračna i imaju po jedan kut od 36°. (1 bod)

Kutovi uz zajedničku stranicu $\overline{D_1E_1}$ u oba trokuta su jednaki 72° pa su ti trokuti sukladni (po poučku "kut-stranica-kut"). (1 bod)

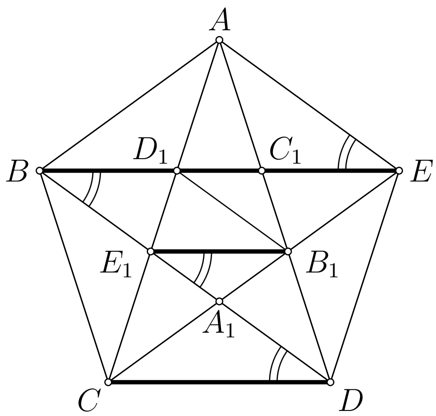
Stoga je $|B_1E_1| = |BD_1|$, a kako je očito $|BD_1| = |AD_1|$, (2 boda)

time je tvrdnja dokazana.

Treći način.

Analogno, u pravilnom peterokutu $A_1B_1C_1D_1E_1$ vrijedi $\sphericalangle A_1E_1B_1 = 36°$. (1 bod)

Sada iz $\sphericalangle CDB = \sphericalangle DBE = \sphericalangle A_1E_1B_1$ (jer su svi jednaki 36°)



slijedi $BE \parallel CD \parallel E_1B_1$. (1 bod)

Analogno je i $BD \parallel AE \parallel B_1D_1$.

Stoga je četverokut $BE_1B_1D_1$ paralelogram (1 bod)

i njegove nasuprotne stranice $\overline{BD_1}$ i $\overline{E_1B_1}$ su sukladne. (1 bod)

Kako je $|BD_1| = |AD_1|$, time smo dokazali tvrdnju zadatka. (1 bod)

Zadatak A-1.4.

U nekom trokutu jedna je srednjica dulja od jedne težišnice. Dokaži da je taj trokut tupokutan.

Prvo rješenje.

Neka je dan trokut ABC i neka su P, Q, R redom polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$.

Bez smanjenja općenitosti, neka je $\overline{AP}$ težišnica koja je kraća od jedne od srednjica.

Postoje dva bitno različita slučaja ovisno o tome jesu li srednjica i težišnica pridružene istim ili različitim stranicama trokuta.

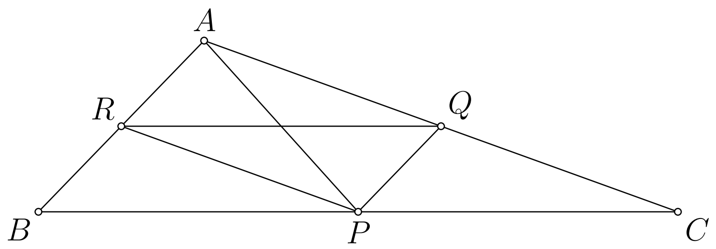
1. slučaj

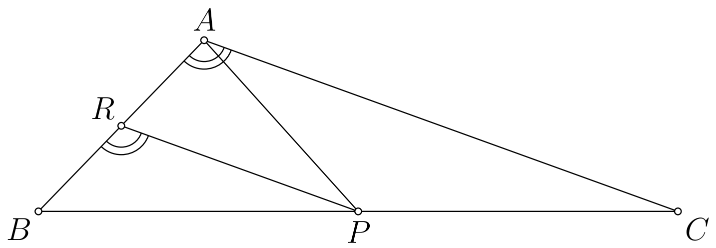
Pretpostavimo da je $|RQ| > |AP|$.

Dužine $\overline{RP}$ i $\overline{PQ}$ su srednjice trokuta ABC pa je $ARPQ$ je paralelogram. (2 boda)

$\overline{RQ}$ je dulja dijagonala paralelograma $ARPQ$, pa je kut nasuprot njoj tupi kut.

Dakle, kut $\sphericalangle BAC$ je tupi. (3 boda)





2. slučaj

Pretpostavimo da je $|RP| > |AP|$. (Slučaj $|PQ| > |AP|$ rješava se analogno.)

$\overline{AP}$ nije najdulja stranica trokuta ARP pa je $\sphericalangle ARP$ šiljasti kut. (1 bod)

Zato je $\sphericalangle BRP$ tupi, (1 bod)

a zbog $PR \parallel AC$ vrijedi $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BRP$ (1 bod)

pa je i $\sphericalangle BAC$ tupi kut. (2 boda)

Drugo rješenje.

Koristimo oznake kao u prvom rješenju.

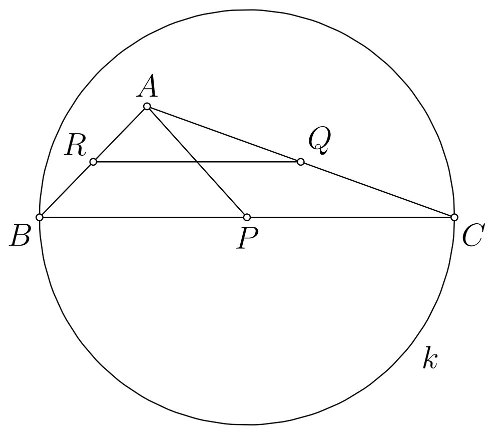
Bez smanjenja općenitosti, neka je $\overline{RQ}$ srednjica koja je dulja od jedne od težišnica.

Postoje dva bitno različita slučaja ovisno o tome jesu li srednjica i težišnica iz zadatka pridružene istim ili različitim stranicama trokuta.

1. slučaj

Pretpostavimo da je $|RQ| > |AP|$.

Neka je k kružnica s promjerom $\overline{BC}$. (1 bod)



Tada je $|AP| < |RQ| = |BP| = |CP|$. (1 bod)

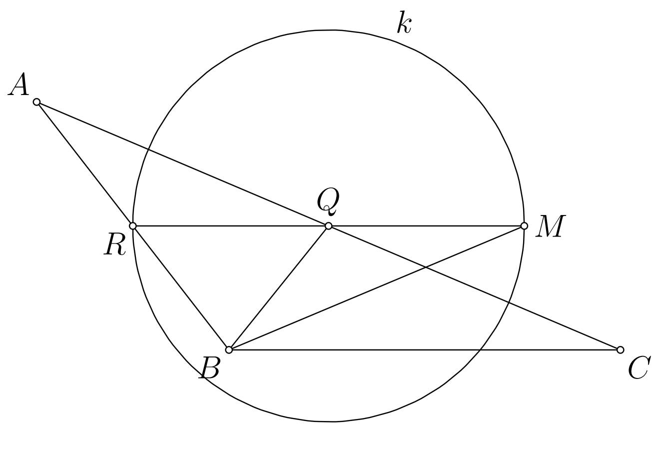
Dakle, $|AP|$ je manje od polumjera kružnice k
pa se točka A nalazi unutar te kružnice (1 bod)

odakle slijedi da je kut $\sphericalangle BAC$ tupi. (2 boda)

2. slučaj

Pretpostavimo da je $|RQ| > |BQ|$. (Slučaj $|RQ| > |CR|$ rješava se analogno.)

Neka je k kružnica sa središtem u Q i promjerom $\overline{RM}$. (1 bod)



Budući da je $|BQ|$ manje od polumjera od k, B se nalazi unutar kružnice k, (1 bod)

pa je kut $\sphericalangle MBR$ tupi, (2 boda)

odakle slijedi da je i kut $\sphericalangle ABC$ koji je od njega veći također tupi. (1 bod)

Zadatak A-1.5.

Prijateljice Anica i Neda igraju igru tako da u svakom potezu, nakon što jedna od njih kaže broj n, druga mora reći neki broj oblika $a \cdot b$ pri čemu su a i b prirodni brojevi za koje vrijedi $a + b = n$. Igra se zatim nastavlja na isti način, od upravo izrečenog broja. S kojim je sve brojevima mogla započeti igra ako je nakon određenog vremena jedna od njih rekla broj 2011 ?

Rješenje.

Uočimo da se potezom

$$n = (n-1) + 1 \qquad \mapsto \qquad (n-1) \cdot 1 = n - 1$$ (1 bod)

izrečeni broj smanjuje točno za 1
pa se nizom takvih poteza izrečeni broj može po volji smanjiti. (2 boda)

Potezom

$$n = (n-2) + 2 \qquad \mapsto \qquad (n-2) \cdot 2 = 2n - 4$$ (1 bod)

se izrečeni broj n povećava ukoliko vrijedi $2n - 4 > n$, tj. ako je $n > 4$. (2 boda)

Krenuvši od bilo kojeg broja $n > 4$, ponavljanjem tog poteza
može se doći do nekog broja koji je veći od 2011 (1 bod)

i zatim smanjivanjem kako je gore opisano možemo dobiti broj 2011. (1 bod)

Uočimo da brojeve 1, 2, 3, 4 dopuštenim potezima ne možemo uvećati:

$$\begin{array}{llll} 2 = 1 + 1 \qquad & 3 = 2 + 1 \qquad & 4 = 3 + 1 \qquad & 4 = 2 + 2 \\ 1 \cdot 1 = 1 & 2 \cdot 1 = 2 & 3 \cdot 1 = 3 & 2 \cdot 2 = 2 \end{array}$$

pa počevši od njih ne možemo doći do broja 2011. (2 boda)

Dakle, igra je mogla početi bilo kojim brojem n koji zadovoljava $n \geqslant 5$.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2011.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-2.1.

Odredi sva rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} 2a^2 - 2ab + b^2 &= a \\ 4a^2 - 5ab + 2b^2 &= b \end{aligned}$$

u skupu realnih brojeva.

Prvo rješenje.

Pomnožimo li prvu jednadžbu s 2, a zatim to oduzmemo od druge jednadžbe, dobit ćemo $ab = 2a - b$. $(*)$ (1 bod)

Slijedi $b = \dfrac{2a}{a+1}$. (1 bod)

(Za $a = -1$ iz $(*)$ bi slijedilo $a = 0$, pa je $a \neq -1$.)

Uvrštavanjem u prvu jednadžbu danog sustava dobiva se:

$$2a^2 - 2a \cdot \frac{2a}{a+1} + \frac{4a^2}{(a+1)^2} = a, \qquad \text{(1 bod)}$$

$$2a^2(a+1)^2 - 4a^2(a+1) + 4a^2 = a(a+1)^2,$$

$$2a^4 - a^3 - a = 0, \qquad \text{(1 bod)}$$

$$a(a-1)\left(2a^2 + a + 1\right) = 0. \qquad \text{(2 boda)}$$

Odavde je $a = 0$ ili $a = 1$ ili $2a^2 + a + 1 = 0$. (1 bod)

Za $a = 0$ dobije se $b = 0$, pa je $(0, 0)$ jedno rješenje danog sustava.

a za $a = 1$ dobije se $b = 1$, pa je i $(1, 1)$ rješenje. (1 bod)

Jednadžba $2a^2 + a + 1 = 0$ nema realna rješenja jer je njena diskriminanta negativna ($D = -7$). (2 boda)

Dakle, rješenja danog sustava jednadžbi su

$$(a, b) \in \{(0, 0), (1, 1)\}.$$

Napomena. Iz $(*)$ slijedi $a = \dfrac{b}{2-b}$.

Analogno kao u gornjem rješenju dobivamo $b^4 - 2b^3 + 3b^2 - 2b = 0$,

odnosno $b(b-1)\left(b^2 - b + 2\right) = 0$.

Drugo rješenje.

Množenjem prve jednadžbe s b i druge s a, dobivamo sustav jednadžbi

$$2a^2b - 2ab^2 + b^3 = ab$$
$$4a^3 - 5a^2b + 2b^2a = ab$$

čijim oduzimanjem dobivamo

$$b^3 - 4b^2a + 7a^2b - 4a^3 = 0. \qquad \text{(2 boda)}$$

Iz $a = 0$ slijedi $b = 0$ pa je $(a, b) = (0, 0)$ jedno rješenje sustava.

Za $a \neq 0$, uz oznaku $w = \dfrac{b}{a}$, imamo

$$w^3 - 4w^2 + 7w - 4 = 0, \qquad \text{(2 boda)}$$

Jedno rješenje te jednadžbe je $w = 1$, pa jednadžbu možemo faktorizirati:

$$(w - 1)(w^2 - 3w + 4) = 0. \qquad \text{(2 boda)}$$

Za $w = 1$ vrijedi $b = a$, (1 bod)

a potom se, uvrštavanjem u polazni sustav, zbog $a \neq 0$,
dobije jedno rješenje $(a, b) = (1, 1)$. (1 bod)

Jednadžba $w^2 - 3w + 4 = 0$ ima diskriminantu -7, pa njena rješenja nisu realna,

te stoga ni dani sustav nema više realnih rješenja. (2 boda)

Zadatak A-2.2.

Tetiva $\overline{AB}$ paralelna je s promjerom $\overline{MN}$ kružnice. Neka je t tangenta te kružnice u točki M te neka su točke C i D redom sjecišta pravaca NA i NB s pravcem t. Dokaži da vrijedi

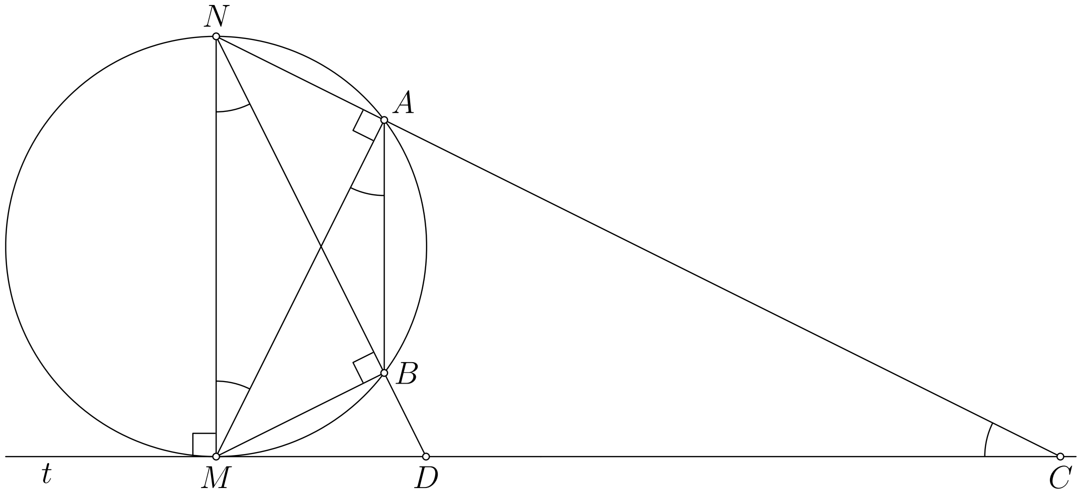
$$|MC| \cdot |MD| = |MN|^2 .$$

Rješenje.

Neka je $\sphericalangle MND = \alpha$. Tada je

$$\begin{aligned} \alpha &= \sphericalangle MNB = \sphericalangle MAB \qquad \text{(obodni kutovi)} && \text{(1 bod)} \\ &= \sphericalangle AMN \qquad (\text{jer je } AB \parallel MN) && \text{(1 bod)} \end{aligned}$$

pa je $\sphericalangle AMC = \sphericalangle CMN - \sphericalangle AMN = 90° - \alpha$. (1 bod)



Uočimo da je trokut MAN pravokutan jer je $\overline{MN}$ promjer kružnice. (1 bod)

Stoga je $MA \perp NC$, te iz pravokutnog trokuta AMC dobivamo

$$\sphericalangle ACM = 90° - \sphericalangle AMC = 90° - (90° - \alpha) = \alpha. \qquad \text{(1 bod)}$$

Sada vidimo da su trokuti MCN i MND slični jer su im odgovarajući kutovi sukladni.
($\sphericalangle MCN = \sphericalangle MND = \alpha$, $\sphericalangle NMC = \sphericalangle DMN = 90°$) (2 boda)

Stoga vrijedi jednakost

$$\frac{|MC|}{|MN|} = \frac{|MN|}{|MD|}, \qquad \text{(2 boda)}$$

koja je ekvivalentna s $|MC| \cdot |MD| = |MN|^2$. (1 bod)

Napomena.

Poznato je da je kut između tetive i tangente jednak obodnom kutu nad tom tetivom.

Nakon što se dokaže da je $\sphericalangle MND = \sphericalangle NCM$ može se nastaviti ovako:

Neka je k kružnica koja prolazi točkama C, D i N. Kut $\sphericalangle NCD$ je obodni kut nad tetivom $\overline{DN}$, a $\sphericalangle MND$ kut između te tetive i pravca NM. Kako su ti kutovi jednaki, zaključujemo da je MN tangenta na kružnicu k.

Sada koristeći svojstvo potencije točke M u odnosu na kružnicu k dobivamo željenu relaciju: $|MC| \cdot |MD| = |MN|^2$.

Zadatak A-2.3.

Duljine svih stranica i dijagonala pravokutnika su prirodni brojevi. Dokaži da je njegova površina prirodan broj djeljiv s 12.

Rješenje.

Označimo s a i b duljine stranica, a sa d duljinu dijagonale danog pravokutnika.

Vrijedi $a^2 + b^2 = d^2$, a treba dokazati da je ab djeljivo s 12.

Najprije ćemo dokazati da je jedan od brojeva a i b djeljiv s 3 (pa je i ab djeljivo s 3). Pretpostavimo suprotno, da nijedan od brojeva a i b nije djeljiv s 3.

Takvi brojevi daju ostatak 1 ili 2 pri dijeljenju s 3, a njihovi kvadrati a^2 i b^2 daju ostatak 1 pri dijeljenju s 3. No, to znači da d^2 daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3, što je nemoguće.
(3 boda)

Sada dokažimo da je ab djeljivo s 4. Promotrimo tri različita slučaja:

1. slučaj Ako su a i b oba parni, tvrdnja očito vrijedi. (1 bod)

2. slučaj Neka su brojevi a i b neparni.

Tada a^2 i b^2 daju ostatak 1 pri dijeljenju s 4
pa d^2 daje ostatak 2 pri dijeljenju s 4, a to ne može biti. (2 boda)

3. slučaj Neka su sada a i b različite parnosti.
Bez smanjenja općenitosti, uzmimo da je a neparan, a b paran.

Tada je d očito neparan pa možemo staviti $a = 2k + 1$, $b = 2m$, $d = 2n + 1$ za neke prirodne brojeve k, l, m. Imamo:

$$
\begin{aligned}
(2k+1)^2 + (2l)^2 &= (2m+1)^2, \\
4k^2 + 4k + 1 + 4l^2 &= 4m^2 + 4m + 1, \\
k(k+1) + l^2 &= m(m+1).
\end{aligned}
$$
(1 bod)

Brojevi $k(k+1)$ i $m(m+1)$ su parni (1 bod)

pa onda i l^2 mora biti paran, što znači da je l paran, (1 bod)

a to znači da je b djeljiv s 4 pa je i ab djeljiv s 4. (1 bod)

Konačno zaključujemo da je broj ab djeljiv s $3 \cdot 4 = 12$.

Zadatak A-2.4.

Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $x^3+y^3+z^3=1$.
Dokaži da je tada

$$x^2+y^2+z^2>x^5+y^5+z^5+2x^2y^2z^2(x+y+z).$$

Prvo rješenje.

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= (x^2+y^2+z^2)\cdot 1 \\ &= (x^2+y^2+z^2)(x^3+y^3+z^3) && \text{(1 bod)} \\ &= x^5+y^5+z^5+x^2y^3+x^2z^3+y^2x^3+y^2z^3+z^2x^3+z^2y^3 && \text{(1 bod)} \end{aligned}$$

Koristeći elementarne nejednakosti

$$x^2+y^2\geqslant 2xy \qquad y^2+z^2\geqslant 2yz \qquad z^2+x^2\geqslant 2zx$$

dobivamo

$$\begin{aligned} & x^2y^3+x^2z^3+y^2x^3+y^2z^3+z^2x^3+z^2y^3 \\ &\qquad = x^3\left(y^2+z^2\right)+y^2\left(x^2+z^2\right)+z^3\left(x^2+y^2\right) \\ &\qquad \geqslant x^3\cdot 2yz+y^2\cdot 2xz+z^3\cdot 2xy && \text{(2 boda)} \\ &\qquad = 2xyz\left(x^2+y^2+z^2\right). && \text{(1 bod)} \end{aligned}$$

Potrebno je još pokazati $x^2+y^2+z^2\geqslant xyz\,(x+y+z)$.

Primijetimo da iz uvjeta zadatka slijedi da su x,y,z iz intervala $\langle 0,1\rangle$. (1 bod)

Stoga vrijedi $0<y\cdot z<1$ pa je $x^2>x^2\cdot yz$. (2 boda)

Slično je i $y^2>y^2\cdot xz$, $z^2>z^2\cdot xy$,

pa imamo

$$x^2+y^2+z^2>x^2yz+xy^2z+xyz^2=xyz\,(x+y+z) \qquad \text{(2 boda)}$$

što je i trebalo dokazati.

Drugo rješenje.

Treba dokazati da je

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)-\left(x^5+y^5+z^5\right)-2x^2y^2z^2(x+y+z)>0.$$

Računamo

$$\begin{aligned}
A&=\left(x^2+y^2+z^2\right)-\left(x^5+y^5+z^5\right)-2x^2y^2z^2\left(x+y+z\right)\\
&=\left(x^2+y^2+z^2\right)\cdot 1-\left(x^5+y^5+z^5\right)-2x^2y^2z^2\left(x+y+z\right)\\
&=\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)-x^5-y^5-z^5-2x^2y^2z^2\left(x+y+z\right)
\end{aligned}$$

(1 bod)

$$=x^2y^3+x^2z^3+y^2x^3+y^2z^3+z^2x^3+z^2y^3-2x^3y^2z^2-2x^2y^3z^2-2x^2y^2z^3$$

(1 bod)

$$=x^3\left(y^2+z^2-2y^2z^2\right)+y^3\left(x^2+z^2-2x^2z^2\right)+z^3\left(x^2+y^2-2x^2y^2\right)$$

(1 bod)

Vrijedi

$$\begin{aligned}
y^2+z^2-2y^2z^2&=y^2-y^2z^2+z^2-y^2z^2\\
&=y^2\left(1-z^2\right)+z^2\left(1-y^2\right).
\end{aligned}$$

(2 boda)

Primijetimo da iz uvjeta zadatka slijedi da su x,y,z iz intervala $\langle 0,1\rangle$ (1 bod)

pa vrijedi i $1-y^2>0$, $1-z^2>0$ odnosno $y^2+z^2-2y^2z^2>0$ (2 boda)

i analogno, $z^2+x^2-2z^2x^2>0$ i $x^2+y^2-2x^2y^2>0$,

te konačno dobivamo $A>0$. (2 boda)

Napomena. Nejednakost $y^2+z^2-2y^2z^2>0$ možemo dokazati i ovako:

Vrijedi $y^2+z^2-2y^2z^2=1-(1-y^2)(1-z^2)$.

Kako je zbog uvjeta zadatka $0<x,y,z<1$, vrijedi $1-y^2<1$ i $1-z^2<1$ pa je $(1-y^2)(1-z^2)<1$ i konačno

$$y^2+z^2-2y^2z^2=1-(1-y^2)(1-z^2)>0.$$

Napomena.

Učenik koji ne dokaže strogu nejednakost već samo nejednakost

$$x^2+y^2+z^2\geqslant x^5+y^5+z^5+2x^2y^2z^2(x+y+z)$$

gubi 1 bod.

Zadatak A-2.5.

Dokaži da u skupu od devet prirodnih brojeva, od kojih ni jedan nema prostog djeljitelja većeg od 6, postoje dva broja čiji je umnožak potpun kvadrat (kvadrat nekog prirodnog broja).

Rješenje.

Jedini mogući prosti djelitelji danih devet brojeva su 2, 3 i 5,

pa se radi o brojevima oblika $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$. (1 bod)

Razvrstajmo te brojeve u klase, ovisno o parnosti pojedinih eksponenata:

a	b	c
paran	paran	paran
paran	paran	neparan
paran	neparan	paran
paran	neparan	neparan
neparan	paran	paran
neparan	paran	neparan
neparan	neparan	paran
neparan	neparan	neparan

Tih klasa ima $2^3 = 8$. (3 boda)

Broj je potpun kvadrat ako i samo ako su u njegovom rastavu na proste faktore svi eksponenti parni.

Lako se vidi da umnožak dva broja iz različitih klasa nije potpun kvadrat i da je umnožak dva broja koja pripadaju istoj klasi uvijek potpun kvadrat. (3 boda)

Kako je dano devet brojeva, po Dirichletovom principu barem u jednoj klasi nalaze se barem dva broja. Njihov umnožak je potpun kvadrat. (3 boda)

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2011.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-3.1.

Ako za kutove α, β, γ nekog trokuta vrijedi $\cos\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta - 1$, dokaži da je taj trokut jednakokračan.

Rješenje.

U trokutu vrijedi $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$, odnosno $\gamma = 180^\circ - (\alpha+\beta)$,

pa je $\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta)$. (2 boda)

Zbog toga iz dane jednakosti $\cos\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta - 1$ redom slijedi

$$\cos(\alpha+\beta) + 2\sin\alpha\sin\beta = 1$$

$$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + 2\sin\alpha\sin\beta = 1 \qquad \text{(2 boda)}$$

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = 1$$

$$\cos(\alpha-\beta) = 1. \qquad \text{(2 boda)}$$

Posljednja jednakost vrijedi ako i samo ako je
$\alpha - \beta = 180^\circ \cdot k$, gdje je $k \in \mathbb{Z}$. (2 boda)

Budući da su α i β kutovi trokuta, mora biti $k = 0$, (1 bod)

odnosno $\alpha = \beta$. (1 bod)

Time smo dokazali da je trokut jednakokračan.

Zadatak A-3.2.

Vladimir je na ploču napisao brojeve 1 i 2, a zatim nastavio pisati brojeve tako da je svaki novi broj suma kvadrata zadnjih dvaju napisanih brojeva. Dokaži da, ponavljajući taj postupak, Vladimir nikad neće napisati broj djeljiv s 3 niti broj djeljiv sa 7.

Prvo rješenje.

Primijetimo da Vladimir redom ispisuje članove niza zadanog rekurzijom:

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 2, \qquad a_k = a_{k-1}^2 + a_{k-2}^2 \quad \text{za } k \geqslant 3.$$

Prvih nekoliko članova je $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 5$, $a_4 = 29$, ...

Promotrimo li ostatke koje ti brojevi daju pri dijeljenju s 3,
uočavamo da svi, osim broja a_1, daju ostatak 2. (1 bod)

Matematičkom indukcijom se lako pokaže da to vrijedi za sve članove a_k za $k \geqslant 2$:

$$a_k = a_{k-1}^2 + a_{k-2}^2 \equiv 2^2 + 2^2 = 8 \equiv 2 \pmod{3}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Stoga nijedan član promatranog niza nije djeljiv s 3. (1 bod)

Promotrimo sada ostatke pri dijeljenju sa 7.

$$\begin{aligned}
a_1 &\equiv 1 \pmod{7} \\
a_2 &\equiv 2 \pmod{7} \\
a_3 &\equiv 1^2 + 2^2 \equiv 5 \pmod{7} \\
a_4 &\equiv 2^2 + 5^2 = 29 \equiv 1 \pmod{7} \\
a_5 &\equiv 5^2 + 1^2 = 26 \equiv 5 \pmod{7} \\
a_6 &\equiv 1^2 + 5^2 = 26 \equiv 5 \pmod{7} \\
a_7 &\equiv 5^2 + 5^2 = 50 \equiv 1 \pmod{7} \qquad \text{(1 bod)} \\
a_8 &\equiv 5^2 + 1^2 = 26 \equiv 5 \pmod{7}
\end{aligned}$$

Uočavamo da se nakon prva dva člana ponavljaju ostaci 1 i 5, (1 bod)

točnije

$$\begin{aligned}
a_{3l} &\equiv 5 \pmod{7} \\
a_{3l+1} &\equiv 1 \pmod{7} \\
a_{3l+2} &\equiv 5 \pmod{7}, \qquad \text{za } l \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

što nije teško provjeriti matematičkom indukcijom. (3 boda)

Stoga nijedan član promatranog niza nije djeljiv sa 7. (1 bod)

Drugo rješenje.

Na ploči su na početku brojevi 1 i 2 koji nisu djeljivi s 3.

Da bismo u nekom trenutku dobili broj djeljiv s 3, trebala bi suma kvadrata dva broja koja nisu djeljiva s 3 biti djeljiva s 3, (1 bod)

a to je moguće samo ako jedan od njih pri dijeljenju s 3 daje ostatak 1, a drugi ostatak 2. (1 bod)

Uočimo da kvadrat prirodnog broja koji nije djeljiv s 3 pri dijeljenju s 3 daje ostatak 1. (Kvadrat prirodnog broja ne može dati ostatak 2 pri dijeljenju s 3.) (1 bod)

Stoga suma kvadrata dvaju prirodnih brojeva koji nisu djeljivi s 3 daje pri dijeljenju s 3 ostatak 2, dakle nije djeljiva s 3. (1 bod)

Slično možemo zaključivati i pri promatranju djeljivosti sa 7.

Kako je

$$0^2 = 0 \qquad 1^2 = 1 \qquad 2^2 = 4 \qquad 3^2 = 9 = 7 + 2$$

$$4^2 = 16 = 2 \cdot 7 + 2 \qquad 5^2 = 25 = 3 \cdot 7 + 4 \qquad 6^2 = 36 = 5 \cdot 7 + 1$$

jedini mogući ostaci pri dijeljenju potpunog kvadrata brojem 7 su 0, 1, 2 i 4. (2 boda)

Dakle, suma dva kvadrata je djeljiva sa 7 samo ako su oba djeljiva sa 7. (2 boda)

Kako početni brojevi nisu djeljivi sa 7, nikad nećemo dobiti broj djeljiv sa 7. (2 boda)

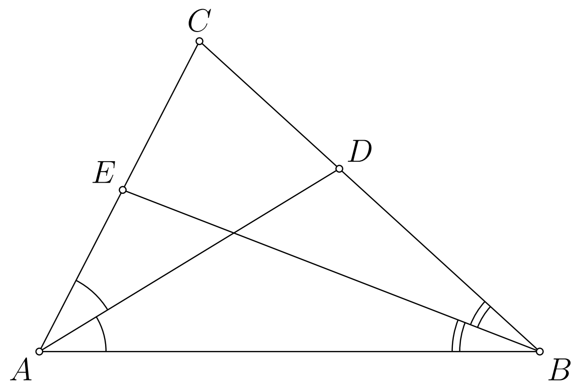
Napomena. Tvrdnja vrijedi i ako se zbrajaju kvadrati bilo kojih dvaju brojeva na ploči. Dokaz je isti, pa i takvo rješenje treba priznati.

Zadatak A-3.3.

Dan je trokut ABC. Simetrala kuta $\sphericalangle CAB$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D, a simetrala kuta $\sphericalangle ABC$ siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki E. Ako je $\sphericalangle ACB \geqslant 60°$, dokaži da je $|AE| + |BD| \leqslant |AB|$.

Prvo rješenje.

Koristimo uobičajene oznake za duljine stranica i kutove trokuta.



Kako simetrala kuta dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru preostalih dviju stranica imamo da je

$$|AE| = \frac{bc}{a+c} \quad \text{i} \quad |BD| = \frac{ac}{b+c}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Zbog toga je

$$|AE| + |BD| = \frac{bc}{a+c} + \frac{ac}{b+c} = \frac{\left(a^2+b^2+ac+bc\right)c}{(a+c)(b+c)}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Nejednakost koju želimo dokazati ekvivalentna je s

$$\frac{\left(a^2+b^2+ac+bc\right)c}{(a+c)(b+c)} \leqslant c$$

odnosno redom

$$a^2+b^2+ac+bc \leqslant (a+c)(b+c), \qquad \text{(1 bod)}$$

$$a^2+b^2+ac+bc \leqslant ab+ac+bc+c^2,$$

$$a^2+b^2-ab+c^2 \leqslant 0. \qquad (*) \qquad \text{(2 boda)}$$

S druge strane, kako je $\gamma \geqslant 60°$, vrijedi $\cos\gamma \leqslant \cos 60°$. (1 bod)

Iskoristimo li poučak o kosinusu, ta nejednakost poprima oblik

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \leqslant \frac{1}{2}, \qquad \text{(1 bod)}$$

odakle je $a^2+b^2 \leqslant ab+c^2$, (1 bod)

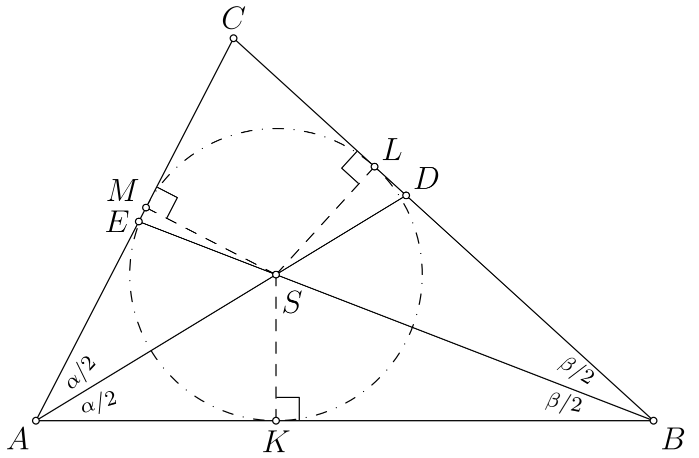
a to je ekvivalento s $(*)$. Time je tvrdnja dokazana. (1 bod)

Drugo rješenje.

Označimo $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BCA = \gamma$.

Neka je S sjecište pravaca AD i BE (tj. središte trokutu upisane kružnice), a K, L, M ortogonalne projekcije točke S redom na dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$.

Očito je $|SK| = |SL| = |SM| = r$, gdje je r polumjer trokutu ABC upisane kružnice.



Trokuti $\triangle AKS$ i $\triangle AMS$ su sukladni

jer je $\sphericalangle KAS = \sphericalangle MAS$, $\sphericalangle AKS = \sphericalangle AMS = 90°$, a stranica $\overline{AS}$ je zajednička

pa slijedi $|AK| = |AM|$. (1 bod)

Analogno vrijedi $\triangle BKS \cong \triangle BLS$ pa je $|BK| = |BL|$. (1 bod)

Kako je $|AB| = |AK| + |BK| = |AM| + |BL|$

nejednakost $|AE| + |BD| \leqslant |AB|$ je ekvivalentna s $|AE| + |BD| \leqslant |AM| + |BL|$,

odnosno $(|AM| - |AE|) + (|BL| - |BD|) \geqslant 0$. (1 bod)

Kako je $\sphericalangle CEB = \alpha + \frac{\beta}{2}$ i $\sphericalangle CDA = \beta + \frac{\alpha}{2}$, iz trokuta ESM i DSL imamo

$|AM| - |AE| = r \cdot \operatorname{ctg}(\alpha + \frac{\beta}{2})$, odnosno $|BL| - |BD| = r \cdot \operatorname{ctg}(\beta + \frac{\alpha}{2})$ (2 boda)

pa nejednakost prelazi redom u ekvivalentne nejednakosti:

$$r \cdot \operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) + r \cdot \operatorname{ctg}\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right) \geqslant 0$$

$$\frac{\cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)}{\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)} + \frac{\cos\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)} \geqslant 0$$

$$\sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) + \cos\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \geqslant 0$$

$$\sin\left(\frac{3(\alpha+\beta)}{2}\right) \geqslant 0$$ (2 boda)

Zbog $\alpha + \beta = 180° - \gamma$ vrijedi

$$\sin\left(\frac{3(\alpha+\beta)}{2}\right) = \sin\left(\frac{3(180° - \gamma)}{2}\right) = \sin\left(270° - \frac{3\gamma}{2}\right) = -\cos\left(\frac{3\gamma}{2}\right)$$ (2 boda)

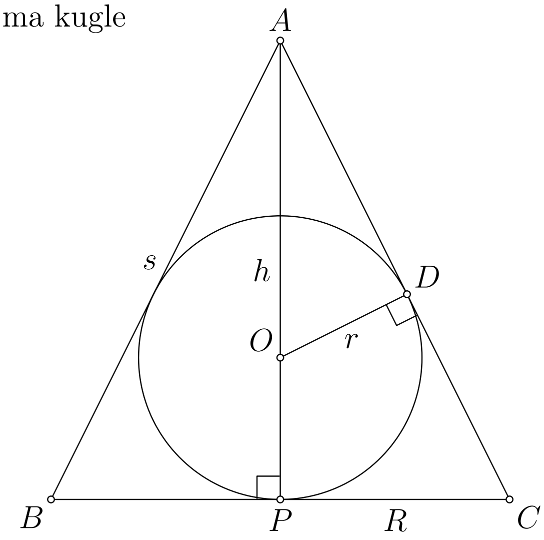
pa je tražena nejednakost ekvivalentna s $\cos\left(\dfrac{3\gamma}{2}\right) \leqslant 0$.

Ta nejednakost vrijedi jer je, zbog $\gamma \geqslant 60°$, $\dfrac{3\gamma}{2} \geqslant 90°$. (1 bod)

Zadatak A-3.4.

Odredi najveću moguću vrijednost omjera obujma kugle i obujma njoj opisanog uspravnog stošca.

Prvo rješenje.



Na slici je prikazan poprečni presjek kugle i njoj opisanog uspravnog stošca.

Označimo točke kao na slici, te neka je

$|OD| = r, \ \ |PC| = R, \ \ |AP| = h.$

Kako je

$\sphericalangle OAD = \sphericalangle CAP$ i

$\sphericalangle ADO = \sphericalangle APC = 90°,$

trokuti ADO i APC su slični. (1 bod)

Odatle slijedi $\dfrac{|AO|}{|DO|} = \dfrac{|AC|}{|PC|}$, (1 bod)

odnosno $\dfrac{h-r}{r} = \dfrac{\sqrt{h^2+R^2}}{R}$. (1 bod)

Nakon kvadriranja dobivamo $\dfrac{h^2-2hr+r^2}{r^2} = \dfrac{h^2+R^2}{R^2}$

odakle slijedi $h^2R^2 - 2hrR^2 = h^2r^2$ i konačno $h = \dfrac{2rR^2}{R^2-r^2}$. (1 bod)

Promatrani omjer je

$$\frac{V_K}{V_S} = \frac{\frac{4}{3}r^3\pi}{\frac{1}{3}R^2\pi \cdot h} = \frac{4r^3}{R^2h} \qquad \text{(2 boda)}$$

$$= \frac{4r^3}{R^2} \cdot \frac{R^2-r^2}{2rR^2} = \frac{2r^2\left(R^2-r^2\right)}{R^4}$$

$$= -2\left(\frac{r}{R}\right)^4 + 2\left(\frac{r}{R}\right)^2 \qquad \text{(2 boda)}$$

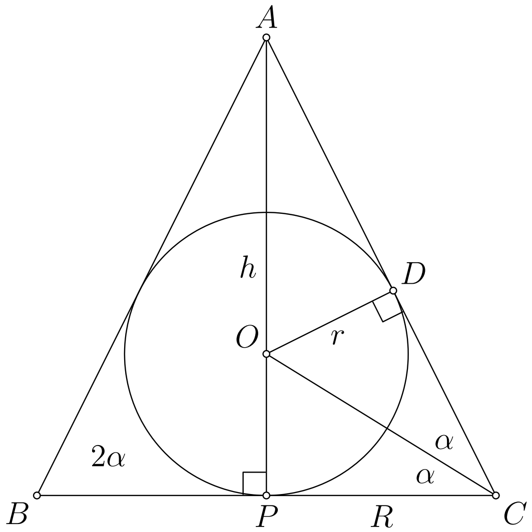
$$= \frac{1}{2} - 2\left(\left(\frac{r}{R}\right)^2 - \frac{1}{2}\right)^2$$

pa traženi maksimum iznosi $\dfrac{1}{2}$ (i postiže se za $R = r\sqrt{2}$). (2 boda)

Drugo rješenje.

Označimo točke kao na slici. Neka je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = 2\alpha$.

Kako je O središte kružnice upisane trokutu ABC, pravac OC je simetrala kuta ABC pa vrijedi $\sphericalangle OCP = \sphericalangle OCD = \alpha$. (1 bod)



Vrijedi $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{|OP|}{|PC|} = \dfrac{r}{R}$ pa je $r = R\operatorname{tg}\alpha$, (1 bod)

i $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{|AP|}{|PC|} = \dfrac{h}{R}$ pa je $h = R\operatorname{tg} 2\alpha$. (1 bod)

Promatrani omjer iznosi $\dfrac{V_K}{V_S} = \dfrac{\frac{4}{3}r^3\pi}{\frac{1}{3}R^2\pi \cdot h} = \dfrac{4r^3}{R^2h}$. (2 boda)

Kako je $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$, (1 bod)

imamo

$$\frac{V_K}{V_S} = \frac{4\,(r\operatorname{tg}\alpha)^3}{r^3\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{4\operatorname{tg}^3\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{4\operatorname{tg}^3\alpha}{\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}} = 2\operatorname{tg}^2\alpha\left(1-\operatorname{tg}^2\alpha\right). \qquad \text{(2 boda)}$$

Označimo $t = \operatorname{tg}^2\alpha$.

Tada je $\dfrac{V_K}{V_S} = 2t\,(1-t) = \dfrac{1}{2} - 2\left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2$

pa je traženi maksimalni omjer jednak $\dfrac{1}{2}$. (2 boda)

Treće rješenje.

Koristimo iste oznake kao u prvom rješenju, te $|AB| = |AC| = s$.

Površina trokuta ABC iznosi $\frac{1}{2}|BC| \cdot |AP| = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot h = Rh$,

pa je polumjer njegove upisane kružnice

$$r = \frac{\text{površina}}{\text{poluopseg}} = \frac{Rh}{\frac{1}{2}(2s + 2R)} = \frac{Rh}{s + R}$$ (2 boda)

Promatrani omjer je

$$\frac{V_k}{V_s} = \frac{\frac{4}{3} r^3 \pi}{\frac{1}{3} \cdot R^2 \pi \cdot h} = \frac{4r^3}{R^2 h}$$ (1 bod)

$$= \frac{4R^3 h^3}{R^2 h (s + R)^3} = \frac{4Rh^2}{(s + R)^3}$$

$$= \frac{4R(s^2 - R^2)}{(s + R)^3} = \frac{4R(s - R)}{(s + R)^2}$$

$$= \frac{4\left(\frac{s}{R} - 1\right)}{\left(\frac{s}{R} + 1\right)^2}$$ (2 boda)

Uvedimo supstituciju $t = \frac{s}{R} - 1$. Tada je $\frac{s}{R} + 1 = t + 2$

pa je promatrani izraz $\frac{4t}{(t + 2)^2}$. (1 bod)

Kako vrijedi $(t - 2)^2 \geqslant 0$ slijedi $(t + 2)^2 \geqslant 8t$. (1 bod)

Stoga je

$$\frac{V_k}{V_s} = \frac{4t}{(t + 2)^2} \leqslant \frac{4t}{8t} = \frac{1}{2}$$ (3 boda)

(Jednakost se postiže ako i samo ako je $t = 2$, odnosno $s = 3R$.)

Zadatak A-3.5.

Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $a+b+c=abc$.
Dokaži da vrijedi

$$a^5(bc-1)+b^5(ca-1)+c^5(ab-1) \geqslant 54\sqrt{3}.$$

Rješenje.

Vrijedi

$$a^5(bc-1)+b^5(ca-1)+c^5(ab-1)=abc(a^4+b^4+c^4)-(a^5+b^5+c^5),$$

a zbog uvjeta $abc=a+b+c$ dalje imamo

$$\begin{aligned} abc(a^4+b^4+c^4)-(a^5+b^5+c^5) &= (a+b+c)(a^4+b^4+c^4)-a^5-b^5-c^5 \\ &= ab^4+ac^4+bc^4+ba^4+ca^4+cb^4 \qquad \text{(2 boda)} \end{aligned}$$

Primjenom A–G nejednakosti dobivamo

$$\begin{aligned} ab^4+ac^4+bc^4+ba^4+ca^4+cb^4 &\geqslant 6\sqrt[6]{ab^4\cdot ac^4\cdot bc^4\cdot ba^4\cdot ca^4\cdot cb^4} \\ &= 6\sqrt[6]{a^{10}b^{10}c^{10}}. \qquad \text{(2 boda)} \end{aligned}$$

Sada treba iskoristiti dani uvjet.

Primjenom A-G nejednakosti na brojeve a, b, c dobivamo

$$a+b+c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}, \qquad \text{(1 bod)}$$

pa zbog uvjeta slijedi $abc \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$, odnosno $abc \geqslant 3\sqrt{3}$. (3 boda)

Dakle vrijedi

$$6\sqrt[6]{a^{10}b^{10}c^{10}} = 6\sqrt[6]{(abc)^{10}} \geqslant 6\sqrt[6]{\left(3\sqrt{3}\right)^{10}} = 6\cdot 9\sqrt{3} = 54\sqrt{3}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Time smo dokazali traženu nejednakost.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2011.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-4.1.

Neka su a i b realni brojevi veći od 1 takvi da su brojevi $\log_b a$, $\log_{2b}(2a)$ i $\log_{4b}(4a)$, u tom poretku, uzastopni članovi aritmetičkog niza.

Dokaži da su brojevi a i b jednaki.

Prvo rješenje.

Činjenicu da $\log_b a$, $\log_{2b}(2a)$ i $\log_{4b}(4a)$ čine aritmetički niz možemo zapisati kao:

$$\log_{2b}(2a) = \frac{1}{2}\big(\log_b a + \log_{4b}(4a)\big). \qquad \text{(2 boda)}$$

Kako vrijedi $\log_x y = \dfrac{\log_2 y}{\log_2 x}$, dalje imamo

$$2 \cdot \frac{\log_2(2a)}{\log_2(2b)} = \frac{\log_2 a}{\log_2 b} + \frac{\log_2(4a)}{\log_2(4b)}$$

$$2 \cdot \frac{1+\log_2 a}{1+\log_2 b} = \frac{\log_2 a}{\log_2 b} + \frac{2+\log_2 a}{2+\log_2 b} \qquad \text{(3 boda)}$$

Radi jednostavnijeg zapisa uvedimo supstituciju $A = \log_2 a$, $B = \log_2 b$.

Tada je

$$2 \cdot \frac{1+A}{1+B} = \frac{A}{B} + \frac{2+A}{2+B} \qquad \text{(2 boda)}$$

Pomnožimo tu jednakost s $B(1+B)(2+B)$ i sredimo:

$$2B(2+B)(1+A) = A(1+B)(2+B) + (2+A)B(1+B),$$

$$4B + 4AB + 2B^2 + 2AB^2 = 2A + 2AB + AB + AB^2 + 2B + 2B^2 + AB + AB^2.$$

Konačno dobivamo $A = B$, (2 boda)

tj. $\log_2 a = \log_2 b$, pa je $a = b$, što je i trebalo dokazati. (1 bod)

Drugo rješenje.

Neka je $x = \log_b a$, $y = \log_{2b}(2a)$, $z = \log_{4b}(4a)$.

Tada je $b^x = a$, $(2b)^y = 2a$, $(4b)^z = 4a$. (2 boda)

Iz uvjeta zadatka je $2y = x + z$. (1 bod)

Računamo:

$$
\begin{aligned}
4a^2 &= (2b)^{2y} = (2b)^{x+z} && \text{(1 bod)} \\
&= 2^{x+z} \cdot b^x \cdot b^z = 2^{x+z} \cdot a \cdot \frac{4a}{4^z} && \text{(2 boda)} \\
&= 2^{x-z} \cdot 4 \cdot a^2.
\end{aligned}
$$

Odatle je $2^{x-z} = 1$ pa slijedi $x = z$. (1 bod)

Sada možemo nastaviti na dva načina:

Prvi način.

Iz $2y = x + z$ slijedi $x = y = z$.

Zbog $(2b)^y = 2a$, imamo

$$
\begin{aligned}
2a = (2b)^{\log_b a} &= 2^{\log_b a} \cdot b^{\log_b a} && \text{(1 bod)} \\
&= 2^{\log_b a} \cdot a
\end{aligned}
$$

odakle slijedi $2^{\log_b a} = 2$ (1 bod)

te konačno $\log_b a = 1$ i $a = b$, (1 bod)

što je i trebalo dokazati.

Drugi način.

Zbog $x = z$ i definicije broja z vrijedi

$$(4b)^x = (4b)^z = 4a = 4b^x. \qquad \text{(1 bod)}$$

Slijedi $4^x \cdot b^x = 4 \cdot b^x$ pa je $4^x = 4$ odnosno $x = 1$. (1 bod)

Sada je konačno $a = b^x = b^1 = b$. (1 bod)

Zadatak A-4.2.

Neka su a, b, c kompleksni brojevi za koje vrijedi

$$a + b + c = 0, \qquad ab + bc + ca = 0.$$

Dokaži da je $|a| = |b| = |c|$.

Prvo rješenje.

Neka je $f(z) = z^3 + p\,z^2 + q\,z + r$ polinom kojem su nultočke a, b i c.

Zbog Vièteovih formula za polinom trećeg stupnja i danih jednakosti,

vrijedi $p = 0$ i $q = 0$, (5 bodova)

pa su a, b i c nultočke polinoma $f(z) = z^3 + r$. (1 bod)

Iz $a^3 + r = b^2 + r = c^3 + r = 0$ slijedi $a^3 = b^3 = c^3$,

odnosno $|a^3| = |b^3| = |c^3|$ tj. $|a|^3 = |b|^3 = |c|^3$ i konačno $|a| = |b| = |c|$. (4 boda)

Drugo rješenje.

Iz prve jednadžbe dobivamo da je $a + b = -c$. (1 bod)

Uvrštavanjem u drugu jednadžbu imamo:

$$0 = ab + bc + ca = ab + c(a + b) = ab - c^2,$$

odnosno $ab = c^2$. (3 boda)

Analogno dobivamo $bc = a^2$ i $ca = b^2$. (1 bod)

Sada možemo nastaviti na razne načine.

Prvi način.

Pretpostavimo da nisu $|a|$, $|b|$, $|c|$ svi jednaki.

Neka je, bez smanjenja općenitosti, $|a| < |b|$. (1 bod)

Tada je $|b^2| = |ac| = |a||c| < |b||c| = |bc| = |a^2|$, tj. $|b|^2 < |a|^2$. (3 boda)

No, to je u kontradikciji s pretpostavkom. (1 bod)

Drugi način.

Iz dobivenih jednakosti slijedi da je $|a||b| = |c|^2$, $|b||c| = |a|^2$ i $|c||a| = |b|^2$. (1 bod)

Dijeljenjem prvih dviju jednakosti dobivamo:

$$\frac{|a|}{|c|} = \frac{|c|^2}{|a|^2},$$

odnosno $|a|^3 = |c|^3$, tj. $|a| = |c|$. (3 boda)

Analogno se pokaže da je $|a| = |b|$ pa vrijedi da je $|a| = |b| = |c|$. (1 bod)

Treći način.

Kao i u drugom načinu, imamo $|a||b| = |c|^2$ i $|b||c| = |a|^2$. (1 bod)

Zbrajanjem dobivamo

$$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = |a||b| + |b||c| + |c||a|, \qquad \text{(1 bod)}$$

odnosno

$$(|a| - |b|)^2 + (|b| - |c|)^2 + (|c| - |a|)^2 = 0, \qquad \text{(2 boda)}$$

odakle zaključujemo da je $|a| = |b| = |c|$. (1 bod)

Treće rješenje.

Ukoliko je jedan od brojeva a, b, c jednak nuli, lako se vidi da su i preostala dva jednaka nuli pa je tražena jednakost očito zadovoljena. (1 bod)

Stoga pretpostavimo da su sva tri broja različita od nule.

Dijeljenjem drugog uvjeta s abc dobijemo:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0. \qquad \text{(1 bod)}$$

Uvrštavanjem $c = -a - b$ u gornju jednakost redom dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} &= \frac{1}{a+b}, \\ b\,(a+b) + a\,(a+b) &= ab, \\ a^2 + ab + b^2 &= 0. \end{aligned} \qquad \text{(4 boda)}$$

Odavde slijedi:

$$a^3 - b^3 = (a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right) = 0, \qquad \text{(1 bod)}$$

odnosno $a^3 = b^3$ iz čega slijedi da je $|a| = |b|$. (2 boda)

Na analogan način se dokaže da je $|a| = |c|$ pa slijedi tražena tvrdnja. (1 bod)

Napomena. Vrijedi $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2\,(ab + bc + ca) = 0$,

no iz $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ <u>ne slijedi</u> $a = b = c = 0$.

Zadatak A-4.3.

Na rubu kvadrata označeno je ukupno $4n$ točaka: sva četiri vrha kvadrata i još po $n-1$ točaka na svakoj stranici kvadrata. Odredi broj svih (nedegeneriranih) trokuta kojima su označene točke vrhovi.

Prvo rješenje.

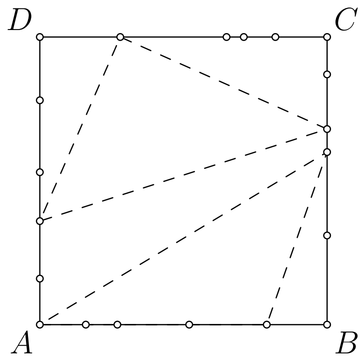
Od danih $4n$ točaka možemo na $\binom{4n}{3}$ načina odabrati tri točke. (3 boda)

Međutim, te tri točke bit će vrhovi trokuta samo ako ne leže na istoj stranici. (1 bod)

Prebrojimo na koliko načina možemo odabrati tri točke na jednoj stranici kvadrata. Kako je na svakoj stranici $n+1$ točka (uključujući i vrhove), to očito možemo na $\binom{n+1}{3}$ načina. (3 boda)

Isto vrijedi za svaku od četiri stranice kvadrata pa ranije dobiveni broj treba umanjiti za $4 \cdot \binom{n+1}{3}$. (1 bod)

Konačno, traženi broj trokuta je $\binom{4n}{3} - 4\binom{n+1}{3}$. (2 boda)



Drugo rješenje.

Razvrstajmo trokute prema tome koliko vrhova trokuta su ujedno i vrhovi kvadrata.

Razlikujemo četiri slučaja:

1. *Sva tri vrha trokuta su vrhovi kvadrata.*

Takvih trokuta ima 4. (1 bod)

2. *Dva vrha trokuta su vrhovi kvadrata.*

Imamo 4 para vrhova koji leže na istoj stranici. Za treći vrh trokuta onda možemo odabrati bilo koju od preostalih $3n-3$ točaka koje ne leže na toj stranici. (1 bod)

Imamo 2 para nasuprotnih vrhova kvadrata. Za treći vrh trokuta možemo odabrati bilo koju od preostalih $4n-4$ točaka. (1 bod)

Dakle, ukupno trokuta ovog tipa ima $4 \cdot (3n-3) + 2 \cdot (4n-4) = 20 \cdot (n-1)$.

3. *Točno jedan vrh trokuta je vrh kvadrata.*

Na 4 načina možemo odabrati vrh kvadrata. Razlikujemo tri podslučaja:

a) Oba preostala vrha se nalaze na stranicama uz istaknuti vrh.

Takvih trokuta ima $(n-1)^2$. (1 bod)

b) Oba preostala vrha nalaze se na stranicama nasuprot vrhu.

Takvih trokuta ima $\binom{2n-2}{2}$. (1 bod)

c) Jedan preostali vrh je uz istaknuti vrh kvadrata, a drugi nasuprot njemu.

Na $2n-2$ načina biramo točku uz vrh, i na $2n-2$ načina biramo točku nasuprot vrhu. Takvih trokuta ima $(2n-2)^2$. (1 bod)

Dakle, ukupno trokuta ovog tipa ima

$$4 \cdot \left((n-1)^2 + \binom{2n-2}{2} + (2n-2)^2 \right) = 4 \cdot (7n^2 - 15n + 18).$$

4. *Nijedan vrh trokuta nije vrh kvadrata.*

Ako su svi vrhovi na različitim stranama, takvih trokuta ima $4 \cdot (n-1)^3$. (1 bod)

Ako su 2 vrha na istoj strani, takvih trokuta ima $4 \cdot \binom{n-1}{2} \cdot (3n-3)$.

Dakle, ukupno trokuta ovog tipa ima $4 \cdot (n-1)^3 + 6(n-1)^2(n-2)$. (2 boda)

Dakle, traženih trokuta ukupno ima

$$\begin{aligned} &4 + 20 \cdot (n-1) + 4 \cdot (7n^2 - 15n + 18) + 4 \cdot (n-1)^3 + 6(n-1)^2(n-2) \\ &= 10n^3 - 8n^2 + 2n. \end{aligned}$$ (1 bod)

Treće rješenje.

Biramo redom tri vrha trokuta.

Prvi odabrani vrh trokuta može biti vrh kvadrata ili neka od preostalih točaka.

1. *slučaj*

Prvi vrh možemo izabrati na $4n-4$ načina ako ne uzmemo jedan od vrhova kvadrata.

1.1.
U tom slučaju, drugi vrh možemo odabrati na $3n-1$ načina ako ne želimo da bude na istoj stranici kao prvi vrh. Treći vrh tada može biti bilo koja od preostalih $4n-2$ točaka. (1 bod)

1.2.
U slučaju da drugi vrh želimo na istoj stranici (n načina), treći vrh ne smije biti na toj istoj stranici pa ga možemo izabrati na $3n-1$ načina. (1 bod)

Ukupno u 1. slučaju postoji

$$(4n-4) \cdot ((3n-1) \cdot (4n-2) + n \cdot (3n-1))$$ (2 boda)

mogućnosti.

2. *slučaj*

Druga je mogućnost da prvi vrh biramo među vrhovima kvadrata (4 načina).

2.1.
U tom slučaju, drugi vrh možemo izabrati na $2n$ načina tako da bude na istoj stranici kao i prvi vrh. U tom slučaju, preostaje nam $3n-1$ mogućnosti za treći vrh. (1 bod)

2.2.
Ukoliko drugi vrh nije na istoj stranici kao i prvi ($2n-1$ načina), treći vrh može biti bilo koja od preostalih $4n-2$ točaka. (1 bod)

Ukupno u 2. slučaju imamo

$$4 \cdot (2n \cdot (3n-1) + (2n-1) \cdot (4n-2)) \qquad \text{(2 boda)}$$

mogućnosti.

Ovakvim brojanjem svaki od trokuta smo brojali $3! = 6$ puta, jer poredak vrhova trokuta nije bitan, stoga ukupni broj traženih trokuta iznosi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \cdot \Big[&(4n-4) \cdot ((3n-1) \cdot (4n-2) + n \cdot (3n-1)) \\ &+ 4 \cdot (2n \cdot (3n-1) + (2n-1) \cdot (4n-2)) \Big] \\ &= 10n^3 - 8n^2 + 2n. \end{aligned} \qquad \text{(2 boda)}$$

Zadatak A-4.4.

Kružnice k_1 i k_2, polumjera r i R redom ($r < R$) dodiruju se iznutra u točki A. Neka je p pravac paralelan njihovoj zajedničkoj tangenti, neka je B jedno sjecište pravca p s kružnicom k_1, a C jedno sjecište pravca p s kružnicom k_2, tako da se točke B i C nalaze s iste strane pravca koji spaja središta danih kružnica.
Dokaži da polumjer kružnice opisane trokutu ABC ne ovisi o izboru pravca p i izrazi taj polumjer pomoću r i R.

Prvo rješenje.

Uz oznake kao na slici neka je $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle BAF = \beta$ i neka je traženi polumjer ρ.

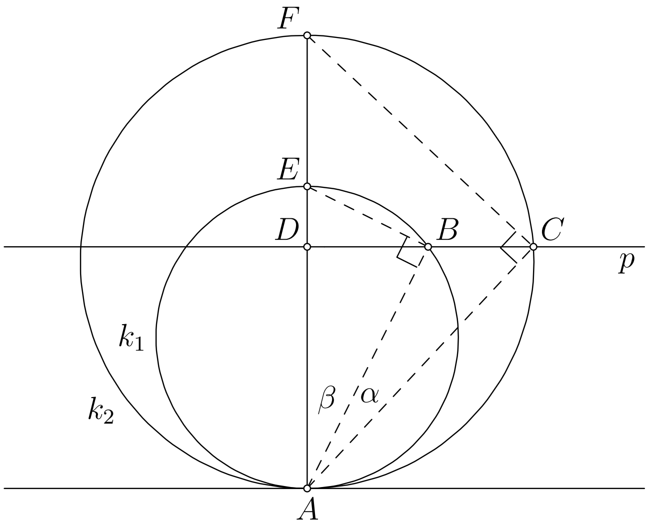
Tada je

$$\begin{aligned} \sphericalangle ACB &= 90^\circ - (\alpha + \beta) \\ \sphericalangle ABC &= 180^\circ - \sphericalangle ACB - \alpha = 90^\circ + \beta. \end{aligned} \qquad \text{(1 bod)}$$

Prema teoremu o sinusu za trokut ABC imamo $\rho = \dfrac{|BC|}{2\sin\alpha}$. (1 bod)

Također, iz teorema o sinusu na trokut ABC dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{|BC|}{\sin\alpha} &= \frac{|AC|}{\sin(90^\circ + \beta)} = \frac{|AB|}{\sin(90^\circ - (\alpha+\beta))}, \\ \frac{|BC|}{\sin\alpha} &= \frac{|AC|}{\cos\beta} = \frac{|AB|}{\cos(\alpha+\beta)}. \end{aligned} \qquad (*) \qquad \text{(2 boda)}$$



Trokut ACF je pravokutan (kut nad promjerom $\overline{AF}$ je pravi) (1 bod)

pa je $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{|AC|}{|AF|}$, odnosno $|AC|=2R\cos(\alpha+\beta)$.

Analogno iz trokuta ABE dobijemo $|AB|=2r\cos\beta$. (1 bod)

Uvrštavanjem toga u $(*)$ dobivamo

$$\frac{2R\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta}=\frac{2r\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$\left(\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta}\right)^2=\frac{r}{R}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Konačno, $\rho=\dfrac{|BC|}{2\sin\alpha}=\dfrac{|AC|}{2\cos\beta}=\dfrac{2R\cos(\alpha+\beta)}{2\cos\beta}=R\cdot\sqrt{\dfrac{r}{R}}=\sqrt{rR}$

što ne ovisi o izboru pravca p. (2 boda)

Drugo rješenje.

Uz oznake iz prvog rješenja, neka je još ρ radijus kružnice opisane trokutu ABC te s x udaljenost pravca p i tangente na dane kružnice u točki A.

Kako je $\rho=\dfrac{|BC|\cdot|CA|\cdot|AB|}{4P(ABC)}$ (2 boda)

vrijedi $\rho=\dfrac{|BC|\cdot|CA|\cdot|AB|}{2\cdot|BC|\cdot x}=\dfrac{|CA|\cdot|AB|}{2x}$. (2 boda)

Trokuti ABE i ACF su pravokutni s hipotenuzama $\overline{AE}$, odnosno $\overline{AF}$. (1 bod)

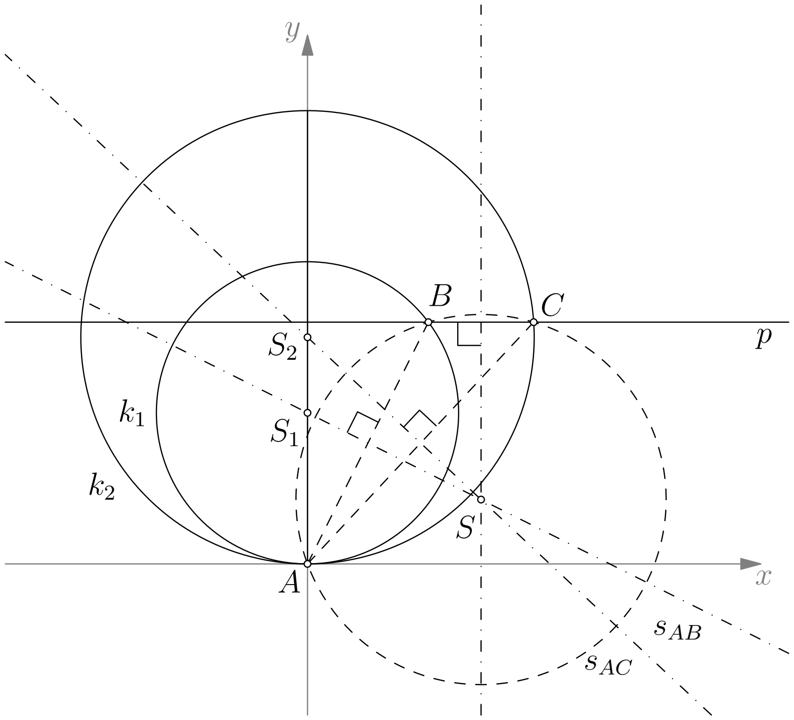
Tada po Euklidovom poučku na te pravokutne trokute vrijedi
$|AB|=\sqrt{2rx}$ i $|CA|=\sqrt{2Rx}$. (3 boda)

Kad to uvrstimo u gornji izraz za radijus ρ, dobivamo $\rho=\dfrac{\sqrt{4rRx^2}}{2x}=\sqrt{rR}$,
što ne ovisi o izboru pravca p. (2 boda)

Treće rješenje.

Postavimo koordinatni sustav tako da zajednička tangenta kružnica k_1 i k_2 bude x-os, a da njihova središta leže na pozitivnom dijelu y-osi.

Tada je $A = (0, 0)$, a središta kružnica su $S_1 = (0, r)$ i $S_2 = (0, R)$.



Kružnica k_1 ima jednadžbu $x^2 + (y - r)^2 = r^2$,

a kružnica k_2 jednadžbu $x^2 + (y - R)^2 = R^2$, (1 bod)

Neka je p ordinata točaka $B\,(x_B, y_B)$ i $C\,(x_C, y_C)$.

Točka B leži na kružnici k_1 pa vrijedi $x_B^2 = 2pr - p^2$, $y_B = p$.

Analogno, točka C leži na kružnici k_2 pa je $x_C^2 = 2pR - p^2$, $y_C = p$.

Neka je S središte opisane kružnice trokutu ABC.
Točka S je presjek simetrala dužina $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$.

Jednadžba pravca AB je $y = \dfrac{y_B}{x_B}x$.

Simetrala dužine $\overline{AB}$ prolazi točkom $\left(\dfrac{x_B}{2}, \dfrac{y_B}{2}\right)$ i ima koeficijent smjera $-\dfrac{x_B}{y_B}$,
pa joj je jednadžba

$$y - \frac{y_B}{2} = -\frac{x_B}{y_B}\left(x - \frac{x_B}{2}\right). \qquad \text{(1 bod)}$$

Nakon uvrštavanja $x_B^2 = 2pr - p^2$, $y_B = p$ i sređivanja dobivamo

$$s_{AB} \quad \ldots \quad yp + x_B x = rp. \qquad \text{(1 bod)}$$

Analogno, jednadžba simetrale dužine $\overline{AC}$ je

$$s_{AC} \quad \ldots \quad yp + x_C x = Rp. \qquad \text{(1 bod)}$$

Zbrojimo li te dvije jednadžbe dobivamo

$$2yp + x\left(x_B + x_C\right) = p\left(R + r\right). \qquad \text{(1 bod)}$$

Nadalje, točka S leži na simetrali dužine $\overline{BC}$ (ta je simetrala paralelna s osi y), pa je $2x_S = x_B + x_C$. (1 bod)

Iz toga slijedi $2py_S + \dfrac{(x_B + x_C)^2}{2} = p\,(R + r)$, (1 bod)

što je, nakon uvrštavanja $x_B^2 = 2pr - p^2$ i $x_C^2 = 2pR - p^2$ ekvivalentno s

$$y_S = \frac{p}{2} - \frac{x_B x_C}{2p}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Kružnica k prolazi kroz $A = (0, 0)$ pa je kvadrat njenog polumjera

$$\begin{aligned}
x_S^2 + y_S^2 &= \left(\frac{x_B + x_C}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{2} - \frac{x_B x_C}{2p}\right)^2 \\
&= \frac{x_B^2 + 2x_B x_C + x_C^2}{4} + \frac{p^2}{4} - \frac{2p x_B x_C}{4p} + \frac{x_B^2 x_C^2}{4p^2} \\
&= \frac{x_B^2 + x_C^2}{4} + \frac{p^2}{4} + \frac{x_B^2 x_C^2}{4p^2} \\
&= \frac{(2pr - p^2) + (2pR - p^2)}{4} + \frac{p^2}{4} + \frac{(2pr - p^2)(2pR - p^2)}{4p^2} \\
&= \frac{1}{4}\left(2pr - p^2 + 2pR - p^2 \ + \ p^2 \ + \ 4rR - 2pR - 2pr + p^2\right) \\
&= rR. \qquad \text{(2 boda)}
\end{aligned}$$

Dakle, polumjer opisane kružnice trokutu ABC zaista ne ovisi o izboru parametra p i iznosi $\sqrt{rR}$.

Zadatak A-4.5.

Zadan je niz brojeva (a_n) takav da je

$$a_0 = 9 \qquad \text{i} \qquad a_{k+1} = 3a_k^4 + 4a_k^3 \quad \text{za sve } k \geqslant 0.$$

Dokaži da dekadski zapis broja a_{11} završava s barem 2011 devetki.

Prvo rješenje.

Ako broj a_n završava s određenim brojem devetki, onda broj $a_n + 1$ završava s isto toliko nula. Definirajmo niz (b_n) tako da je $b_n = a_n + 1$.
Treba dokazati da b_{11} završava s barem 2011 nula. (2 boda)

Vrijedi $b_0 = 10$.

Uvrštavanjem $a_k = b_k - 1$ i $a_{k+1} = b_{k+1} - 1$ u danu relaciju dobivamo

$$b_{k+1} - 1 = 3\left(b_k - 1\right)^4 + 4\left(b_k - 1\right)^3 \qquad \text{(1 bod)}$$

$$b_{k+1} - 1 = 3\left(b_k^4 - 4b_k^3 + 6b_k^2 - 4b_k + 1\right) + 4\left(b_k^3 - 3b_k^2 + 3b_k - 1\right)$$

$$b_{k+1} - 1 = 3b_k^4 - 12b_k^3 + 18b_k^2 - 12b_k + 3 + 4b_k^3 - 12b_k^2 + 12b_k - 4$$

$$b_{k+1} = 3b_k^4 - 8b_k^3 + 6b_k^2 \qquad \text{(1 bod)}$$

$$b_{k+1} = b_k^2(3b_k^2 - 8b_k + 6) \qquad \text{(1 bod)}$$

Iz dobivene formule zaključujemo da, ako b_k završava s m nula,
onda b_{k+1} završava s barem $2m$ nula. (2 boda)

Kako b_0 završava s jednom nulom, slijedi da b_1 završava s dvije nule,
b_2 s četiri nule, b_3 s 8 nula,

i općenito b_k završava s (barem) 2^k nula. (2 boda)

Broj b_{11} završava s barem $2^{11} = 2048$ nula, pa a_{11} završava s barem 2048 devetki.
Time je tvrdnja dokazana. (1 bod)

Drugo rješenje.

Pretpostavimo da a_k završava s l devetki, tj. da je $a_k = A \cdot 10^l - 1$ za neki $A \in \mathbb{N}$. (1 bod)

Tada je

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= 3\left(A \cdot 10^l - 1\right)^4 + 4\left(A \cdot 10^l - 1\right)^3 && \text{(1 bod)}\\
&= \left(A \cdot 10^l - 1\right)^3 \left(3A \cdot 10^l - 3 + 4\right)\\
&= \left(A^3 \cdot 10^{3l} - 3A^2 \cdot 10^{2l} + 3A \cdot 10^l - 1\right)\left(3A \cdot 10^l + 1\right)\\
&= \left(3A \cdot 10^l + 1\right)\left(A^3 \cdot 10^l - 3A^2\right) \cdot 10^{2l} + \left(3A \cdot 10^l - 1\right)\left(3A \cdot 10^l + 1\right)\\
&= \left[\left(3A \cdot 10^l + 1\right)\left(A^3 \cdot 10^l - 3A^2\right) + 9A^2\right] \cdot 10^{2l} - 1 && \text{(3 boda)}
\end{aligned}$$

a to znači da a_{k+1} završava s $2l$ devetki. (2 boda)

Kako a_0 završava s jednom devetkom, a_1 završava s dvije devetke,...,

a_{11} završava s $2^{11} = 2048$ devetki, čime je tvrdnja dokazana. (3 boda)