DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

1. travnja 2011.

Zadatak A-1.1.

Odredi x_{1006} ako je

$$\frac{x_1}{x_1+1} = \frac{x_2}{x_2+3} = \frac{x_3}{x_3+5} = \ldots = \frac{x_{1006}}{x_{1006}+2011},$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{1006} = 503^2.$$

Rješenje.

Označimo
$$\frac{x_1}{x_1+1} = \frac{x_2}{x_2+3} = \frac{x_3}{x_3+5} = \ldots = \frac{x_{1006}}{x_{1006}+2011} = a.$$

Iz $\dfrac{x_k}{x_k+(2k-1)} = a$ slijedi $x_k = \dfrac{a}{1-a} \cdot (2k-1)$ za $k = 1, 2, \ldots, 1006$.

Uvrštavanjem u posljednju zadanu jednakost dobivamo

$$\frac{a}{1-a} \cdot (1+3+\ldots+2011) = 503^2.$$

Kako je

$$\begin{aligned} 1+3+5+\ldots+2011 &= (1+2011)+(3+2009)+\ldots+(1005+1007) \\ &= 503 \cdot 2012 = 1006^2, \end{aligned}$$

dobivamo $\dfrac{a}{1-a} \cdot 1006^2 = 503^2$, odnosno $\dfrac{a}{1-a} = \dfrac{1}{4}$.

Konačno, $x_{1006} = \dfrac{a}{1-a} \cdot 2011 = \dfrac{2011}{4}$.

Zadatak A-1.2.

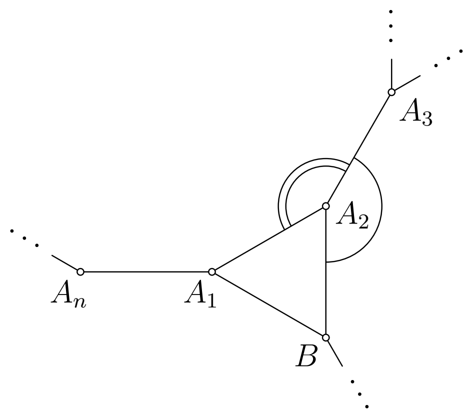
Izvan pravilnog mnogokuta $A_1A_2\ldots A_n$ nalazi se točka B takva da je trokut A_1A_2B jednakostraničan. Odredi sve n za koje su točke B, A_2 i A_3 uzastopni vrhovi nekog pravilnog mnogokuta.

Rješenje.

Neka novi pravilni mnogokut ima m vrhova. Moguća su dva slučaja:

1. slučaj

Novi mnogokut leži izvan danog mnogokuta. Drugim riječima, m-terokut i n-terokut nalaze se sa suprotnih strana pravca A_2A_3.



Tada vrijedi $\sphericalangle BA_2A_3 + \sphericalangle A_1A_2A_3 + 60° = 360°$.

Unutarnji kut pravilnog k-terokuta iznosi $\frac{k-2}{k} \cdot 180°$ pa imamo:

$$\frac{n-2}{n} \cdot 180° + \frac{m-2}{m} \cdot 180° + 60° = 360°$$

$$3m(n-2) + 3n(m-2) + mn = 6mn$$

$$mn - 6m = 6n$$

$$m = \frac{6n}{n-6} = 6 + \frac{36}{n-6}.$$

Očito mora biti $n-6 \in \mathbb{N}$ i $n-6$ dijeli 36.

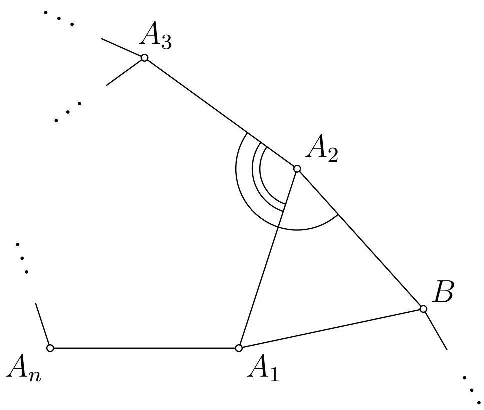
Provjerom svih mogućnosti

$n-6$	1	2	3	4	6	9	12	18	36
n	7	8	9	10	12	15	18	24	42
m	42	24	18	15	12	10	9	8	7

nalazimo devet rješenja.

2. slučaj

Promatrani m-terokut i n-terokut se nalaze s iste strane pravca A_2A_3.



U ovom slučaju vrijedi $\sphericalangle BA_2A_3 = \sphericalangle A_1A_2A_3 + 60°$

$$\frac{m-2}{m} \cdot 180° = 60° + \frac{n-2}{n} \cdot 180°$$

$$3n\,(m-2) = mn + 3m\,(n-2)$$

$$6n + nm = 6m$$

$$n = \frac{6m}{m+6} = 6 - \frac{36}{m+6}.$$

Kako mora biti $n \geqslant 3$, nužno $\dfrac{36}{m+6}$ mora biti u skupu $\{1, 2, 3\}$.

Tada je

$m+6$	36	18	12
m	30	12	6
n	5	4	3

pa smo dobili još tri rješenja.

Dakle, uvjete zadatka ispunjavaju $n \in \{3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 24, 42\}$.

Zadatak A-1.3.

Četiri prirodna broja a, b, c, d zadovoljavaju jednakosti

$$a+b=c, \qquad a+d=2c.$$

Dokaži da postoji pravokutni trokut površine $abcd$ kojem su duljine svih stranica prirodni brojevi.

Rješenje.

Izrazimo iz danih jednadžbi a i d pomoću b i c:

$$a=c-b, \qquad d=2c-a=b+c.$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} abcd &= (c-b)\cdot b\cdot c\cdot (b+c) \\ &= bc\left(c^2-b^2\right) = \frac{1}{2}(2bc)\left(c^2-b^2\right). \end{aligned}$$

Kako su b i c prirodni brojevi i $c>b$ (jer je $c-b=a>0$) vidimo da je $c^2-b^2>0$.

Stoga je $abcd$ površina pravokutnog trokuta s katetama duljina $2bc$ i c^2-b^2.

Duljina hipotenuze tog trokuta je

$$\sqrt{(2bc)^2+\left(c^2-b^2\right)^2} = \sqrt{c^4+b^4+2b^2c^2} = b^2+c^2.$$

Kako su b i c prirodni brojevi i $c>b$, duljine svih triju stranica,

$$2bc, \quad c^2-b^2, \quad b^2+c^2$$

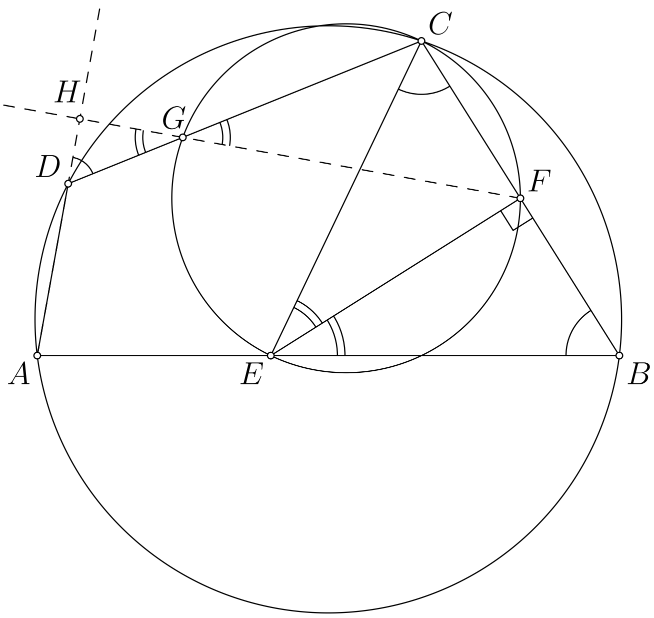
su prirodni brojevi.

Zadatak A-1.4.

Dan je tetivni četverokut $ABCD$. Simetrala dužine $\overline{BC}$ siječe dužinu $\overline{AB}$ u točki E. Kružnica koja prolazi točkom E, vrhom C i polovištem F stranice $\overline{BC}$ siječe dužinu $\overline{CD}$ u točki G. Dokaži da su pravci AD i FG međusobno okomiti.

Rješenje.

Neka se pravci AD i FG sijeku u točki H.



Kako su četverokuti $ABCD$ i $EFCG$ tetivni, vrijedi

$$\sphericalangle HDG = 180^\circ - \sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC,$$

$$\sphericalangle HGD = \sphericalangle FGC = \sphericalangle FEC = \sphericalangle FEB = 90^\circ - \sphericalangle ABC.$$

Stoga je

$$\sphericalangle DHG = 180^\circ - \sphericalangle HDG - \sphericalangle HGD = 90^\circ$$

pa je $AD \perp FG$.

Zadatak A-1.5.

Supružnici Ana i Tomislav došli su na zabavu na kojoj su sudjelovala još četiri para. Prilikom dolaska dogodio se izvjestan broj rukovanja. Pritom se nitko nije rukovao sa svojim bračnim drugom niti sa samim sobom. Kada je kasnije Tomislav upitao sve prisutne s koliko su se osoba rukovali, dobio je devet različitih odgovora. S koliko se osoba rukovala Ana?

Rješenje.

Nitko se nije rukovao s više od osam osoba pa su odgovori koje je Tomislav dobio: "0", "1", "2", "3", "4", "5", "6", "7", "8".

Ana se sigurno nije rukovala s osam osoba. Naime, da se Ana rukovala s osam osoba, svi ostali (osim Tomislava) bi se rukovali s njom pa nijedan odgovor ne bi bio "0".

Neka se s osam osoba rukovala osoba A_1. Možemo zaključiti da je jedina osoba koja se mogla rukovati s nula osoba bračni drug od A_1. Nazovimo tu osobu A_2.

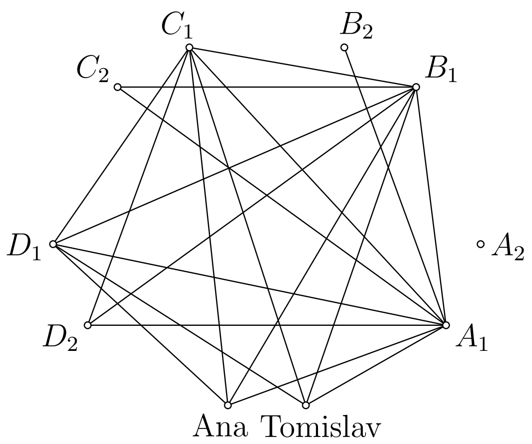
Ako sada pretpostavimo da se Ana rukovala sa sedam osoba, onda bi se svi osim Tomislava i osobe A_2 rukovali s Anom i s osobom A_1 pa nitko ne bi na Tomislavovo pitanje odgovorio "1".

Neka se sa sedam osoba rukovala osoba B_1. Zaključujemo da je osoba koja je dala odgovor "1" njen bračni drug B_2 jer su se sve ostale osobe rukovale i s Anom i s osobom A_1.

Sličnim zaključivanjem dobivamo da je bračni par C_1 i C_2 dao odgovore "6" i "2", a bračni par D_1 i D_2 odgovore "5" i "3".

Na kraju preostaje Ana koja je dala odgovor "4".

Sljedeći graf pokazuje da je to zaista moguće:



Dakle, Ana se rukovala s četiri osobe.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

1. travnja 2011.

Zadatak A-2.1.

Odredi sve parove (m, n) prirodnih brojeva takve da n dijeli $2m-1$ i m dijeli $2n-1$.

Rješenje.

Iz uvjeta zadatka, postoje prirodni brojevi k, l takvi da vrijedi

$$2m - 1 = kn, \qquad 2n - 1 = lm.$$

Vrijedi $2m = kn + 1$, $2n = lm + 1$, pa slijedi

$$4n - 2 = 2\,(2n-1) = 2 \cdot ml = 2m \cdot l = (nk+1)\,l.$$

Iz $4n - 2 = (nk+1)\,l$ slijedi

$$(4 - kl)\,n = l + 2.$$

Budući da je desna strana pozitivna, mora vrijediti $4 - kl > 0$, odnosno $kl < 4$. Budući da su k i l prirodni brojevi, imamo ove mogućnosti:

1. $kl = 1$, odnosno $k = l = 1$.

   Mora vrijediti $2m - 1 = n$, $2n - 1 = m$, iz čega slijedi $m = n = 1$.

2. $kl = 2$

   To nije moguće, jer iz $2m-1 = kn$, $2n-1 = lm$ slijedi da su k i l neparni brojevi.

3. $kl = 3$, odnosno $k = 3$, $l = 1$ ili $k = 1$, $l = 3$.

   U prvom slučaju iz $2m - 1 = 3n$, $2n - 1 = m$ dobijemo $m = 5$, $n = 3$.
   Analogno, u drugom slučaju je $m = 3$, $n = 5$.

Dakle, rješenja su $(m, n) \in \{(1,1), (3,5), (5,3)\}$.

Zadatak A-2.2.

Neka su a i b realni brojevi takvi da su sve nultočke polinoma

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 8$$

realne. Dokaži da vrijedi $a^2 \geqslant 2b + 12$.

Rješenje.

Polinom $P(x)$ ima tri nultočke, označimo ih x_1, x_2 i x_3.

Prema Vièteovim formulama je:

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + x_3 = -a \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b \\ x_1x_2x_3 = 8. \end{gathered}$$

Vrijedi

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2\left(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1\right) = a^2 - 2b.$$

Iz A-G nejednakosti sada slijedi:

$$a^2 - 2b = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geqslant 3\sqrt[3]{x_1^2x_2^2x_3^2} = 3\sqrt[3]{64} = 12,$$

odnosno $a^2 \geqslant 2b + 12$, što smo i trebali dokazati.

Zadatak A-2.3.

Odredi sve vrijednosti parametra a za koje sustav

$$
\begin{aligned}
2^{|x|}+|x| &= x^2+y+a \\
x^2+y^2 &= 1
\end{aligned}
$$

ima točno jedno rješenje $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Rješenje.

Ako je par (x,y) rješenje danog sustava, onda je očito i par $(-x,y)$ rješenje.

Zaključujemo da jedinstveno rješenje ovog sustava mora biti oblika $(0,y)$.

Uvrstimo li $x=0$ u dani sustav dobivamo

$$
\begin{aligned}
1 &= y+a, \\
y^2 &= 1,
\end{aligned}
$$

pa je $y=1$ ili $y=-1$, i stoga $a=0$ ili $a=2$.

Pogledajmo najprije slučaj $a=0$.

Početni sustav se svodi na

$$
\begin{aligned}
2^{|x|}+|x| &= x^2+y \\
x^2+y^2 &= 1.
\end{aligned}
$$

Lako se vidi da je $(0,1)$ rješenje. Pokažimo da nema drugih rješenja.

Iz druge jednadžbe slijedi $|x|\leqslant 1$ i $|y|\leqslant 1$. Zbog $0\leqslant |x|\leqslant 1$ vrijedi $|x|\geqslant x^2$.

Također vrijedi

$$
2^{|x|}\geqslant 2^0=1\geqslant |y|\geqslant y
$$

pa je

$$
2^{|x|}+|x|\geqslant x^2+y.
$$

Da bi vrijedila jednakost, mora biti $|x|=0$ i $|y|=y$, tj. $x=0$ i $y\geqslant 0$.

Zbog druge jednadžbe tada je $(x,y)=(0,1)$, pa ovaj sustav nema drugih rješenja.

U slučaju $a=2$ možemo uočiti da su osim $(0,-1)$ rješenja sustava

$$
\begin{aligned}
2^{|x|}+|x| &= x^2+y+2 \\
x^2+y^2 &= 1
\end{aligned}
$$

i parovi $(1,0)$ i $(-1,0)$.

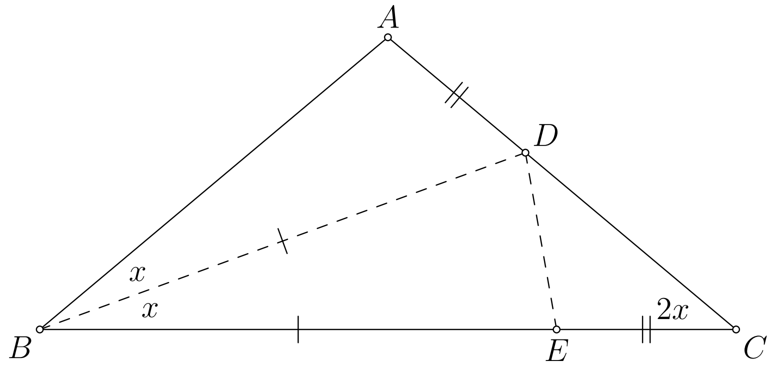
Zaključujemo je da sustav ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je $a=0$.

Zadatak A-2.4.

U trokutu ABC vrijedi $|AB| = |AC|$, a simetrala kuta $\sphericalangle ABC$ siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki D tako da je $|BC| = |BD| + |AD|$. Odredi kutove tog trokuta.

Rješenje.

Odaberimo točku E na stranici $\overline{BC}$ tako da je $|BE| = |BD|$ i $|CE| = |AD|$.



Kako je BD simetrala kuta $\sphericalangle CBA$, vrijedi $|CD| : |AD| = |BC| : |AB|$.

Zato je $\dfrac{|CD|}{|CE|} = \dfrac{|CD|}{|AD|} = \dfrac{|BC|}{|AB|} = \dfrac{|CB|}{|CA|}$.

Trokuti ABC i EDC imaju zajednički kut u vrhu C i jednake omjere odgovarajućih stranica uz taj vrh pa su slični. Stoga je $\sphericalangle CED = \sphericalangle CAB$.

Neka je $\sphericalangle ABC = 2x$. Tada je $\sphericalangle CBD = \sphericalangle EBD = x$, $\sphericalangle DBA = x$ i $\sphericalangle ACB = 2x$.

Nadalje, $\sphericalangle CED = \sphericalangle BAC = 180° - 4x$.
Kako je trokut BED jednakokračan, vrijedi $\sphericalangle DEB = 90° - \dfrac{x}{2}$.

Kako su $\sphericalangle DEB$ i $\sphericalangle CED$ sukuti, vrijedi

$$\left(90° - \frac{x}{2}\right) + (180° - 4x) = 180°,$$

odakle slijedi $x = 20°$.

Konačno, kutovi promatranog trokuta su $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = 40°$ i $\sphericalangle BAC = 100°$.

Zadatak A-2.5.

U vreći se nalazilo 255 kuglica označenih brojevima 1, 2, ..., 255, a onda je svaki od N učenika uzeo iz vreće po jednu kuglicu. Pokazalo se da nijedan od izvučenih brojeva nije točno dvostruko veći od nekog drugog izvučenog broja. Odredi najveći mogući N.

Rješenje.

Grupirajmo promatrane brojeve u skupove:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \{1\} \\
A_1 &= \{2, 3\} \\
A_2 &= \{4, 5, 6, 7\} \\
A_3 &= \{8, 9, \ldots, 15\} \\
A_4 &= \{16, 17, \ldots, 31\} \\
A_5 &= \{32, 33, \ldots, 63\} \\
A_6 &= \{64, 65, \ldots, 127\} \\
A_7 &= \{128, 129, \ldots, 255\}
\end{aligned}$$

U skupu A_k nalazi se 2^k brojeva, za $k = 0, 1, \ldots, 7$.

Uočimo da se brojevi n i $2n$ nalaze redom u A_k i A_{k+1} za neki k.

Neka su izvučeni svi brojevi iz skupova A_1, A_3, A_5 i A_7. Tih brojeva ima $2+8+32+128 = 170$ i među njima nijedan nije dvostruko veći od nekog drugog.

Pokažimo da nije moguće odabrati više od 170 brojeva koji ispunjavaju uvjet.

Neka je iz skupa A_k izvučeno a_k brojeva, za $k = 0, 1, 2, \ldots, 7$.

Promotrimo skupove A_k i A_{k+1}. Za svaki $m \in A_k$ broj $2m$ je u skupu A_{k+1}. Takvih parova $(m, 2m)$ ima 2^k. Očito je izvučen najviše jedan broj iz svakog para.

Osim tih brojeva, u skupu A_{k+1} je još 2^k neparnih brojeva, pa je iz skupova A_k i A_{k+1} ukupno izvučeno najviše $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ brojeva.

To znači da je $\quad a_0 + a_1 \leqslant 2^1, \quad a_2 + a_3 \leqslant 2^3, \quad a_4 + a_5 \leqslant 2^5, \quad a_6 + a_7 \leqslant 2^7.$

Zbrajanjem tih nejednakosti dobivamo

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_7 \leqslant 170.$$

Time smo pokazali da je najveći mogući N jednak 170.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

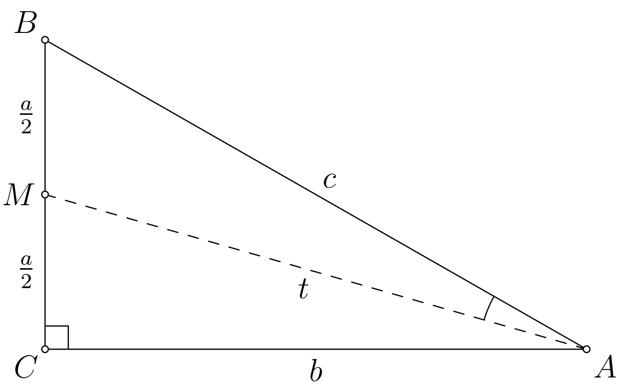
3. razred – srednja škola – A varijanta

1. travnja 2011.

Zadatak A-3.1.

Dan je pravokutan trokut ABC s pravim kutom pri vrhu C, u kojem je M polovište katete $\overline{BC}$. Dokaži da je $\sin(\sphericalangle MAB) \leqslant \frac{1}{3}$. Kada se postiže jednakost?

Rješenje.



Kako je $\sphericalangle MAB = \sphericalangle CAB - \sphericalangle CAM$, po adicijskom teoremu za sinus imamo

$$\sin(\sphericalangle MAB) = \sin(\sphericalangle CAB)\cos(\sphericalangle CAM) - \cos(\sphericalangle CAB)\sin(\sphericalangle CAM).$$

Uz oznake $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$ i $|AM| = t$, iz pravokutnih trokuta ABC i AMC dobivamo

$$\sin(\sphericalangle MAB) = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{t} - \frac{b}{c} \cdot \frac{a/2}{t} = \frac{ab}{2ct}.$$

Kako je $\sphericalangle MAB$ šiljasti kut, njegov sinus je pozitivan, pa je dovoljno dokazati da vrijedi

$$(\sin(\sphericalangle MAB))^2 \leqslant \frac{1}{9}, \qquad \text{odnosno} \qquad \frac{a^2b^2}{4c^2t^2} \leqslant \frac{1}{9}.$$

Budući da je $c^2 = a^2 + b^2$ i $t^2 = \frac{a^2}{4} + b^2$, to je ekvivalentno s

$$9a^2b^2 \leqslant (a^2 + b^2)(a^2 + 4b^2)$$

odnosno $\left(a^2 - 2b^2\right)^2 \geqslant 0$.

Sada je jasno da zadana nejednakost vrijedi u svakom pravokutnom trokutu.

Jednakost se postiže kada je $a^2 = 2b^2$, tj. u pravokutnim trokutima u kojima vrijedi $|BC| = |AC|\sqrt{2}$.

Zadatak A-3.2.

Odredi sve parove (x, y) cijelih brojeva koji zadovoljavaju jednadžbu

$$x^2(y-1)+y^2(x-1)=1.$$

Rješenje.

Dana jednadžba je ekvivalentna s

$$\begin{aligned} x^2y-x^2+xy^2-y^2&=1\\ xy(x+y)-\left(x^2+y^2\right)&=1\\ xy(x+y)-\left((x+y)^2-2xy\right)&=1 \end{aligned}$$

Uvedemo li nove nepoznanice $u=x+y$, $v=xy$ dobivamo jednadžbu:

$$uv-\left(u^2-2v\right)=1$$

iz koje slijedi $uv+2v=u^2+1$ odnosno

$$v=\frac{u^2+1}{u+2}=\frac{u^2-4+5}{u+2}=u-2+\frac{5}{u+2}.$$

Sada vidimo da $u+2$ mora biti djelitelj broja 5, pa imamo četiri slučaja:

$u+2=5$	$u+2=1$	$u+2=-1$	$u+2=-5$
$\frac{5}{u+2}=1$	$\frac{5}{u+2}=5$	$\frac{5}{u+2}=-5$	$\frac{5}{u+2}=-1$
$u=3$	$u=-1$	$u=-3$	$u=-7$
$v=2$	$v=2$	$v=-10$	$v=-10$

Sada zbog Vièteovih formula znamo da su x, y rješenja kvadratnih jednadžbi:

$$z^2-3z+2=0 \tag{1}$$
$$z^2+z+2=0 \tag{2}$$
$$z^2+3z-10=0 \tag{3}$$
$$z^2+7z-10=0 \tag{4}$$

Rješenja prve jednadžbe su 1 i 2, a rješenja treće -5 i 2.

Rješenja druge jednadžbe nisu realna jer joj je diskriminanta negativna, dok su rješenja četvrte jednadžbe iracionalna jer njena diskriminanta 89 nije potpun kvadrat.

Konačno, tražena rješenja su $(x, y) \in \{(1,2),\ (2,1),\ (2,-5),\ (-5,2)\}$.

Zadatak A-3.3.

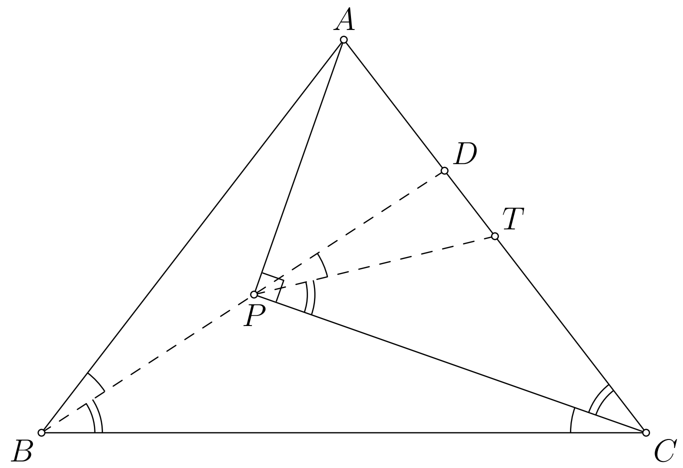
U trokutu ABC vrijedi $|AB| = |AC|$. Na stranici $\overline{AC}$ nalazi se točka D takva da je $|AD| < |CD|$, a na dužini $\overline{BD}$ točka P takva da je $\sphericalangle APC$ pravi kut. Ako je $\sphericalangle ABP = \sphericalangle BCP$, odredi $|AD| : |CD|$.

Prvo rješenje.

Označimo $\sphericalangle ABP = \sphericalangle BCP = \varphi$ i $\sphericalangle PBC = \sphericalangle PCA = \psi$.

Neka je točka T polovište dužine $\overline{AC}$. Kako je $\overline{AC}$ hipotenuza pravokutnog trokuta APC, vrijedi $|AT| = |PT| = |CT|$.

Stoga vrijedi $\sphericalangle CPT = \sphericalangle PCA = \psi$.



S obzirom da je $\sphericalangle DPC$ vanjski kut trokuta BCP, vrijedi

$$\sphericalangle DPC = \sphericalangle PCB + \sphericalangle PBC = \varphi + \psi$$

pa je $\sphericalangle DPT = \varphi$.

Primjenom poučka o sinusima u trokutima ABD i PDT dobije se

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{\sin \sphericalangle ABD}{\sin \sphericalangle ADB} \qquad \text{i} \qquad \frac{|DT|}{|PT|} = \frac{\sin \sphericalangle DPT}{\sin \sphericalangle PDT}.$$

Zato je

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{\sin \sphericalangle ABD}{\sin \sphericalangle ADB} = \frac{\sin \varphi}{\sin (180^\circ - \sphericalangle ADB)} = \frac{\sin \sphericalangle DPT}{\sin \sphericalangle PDT} = \frac{|DT|}{|PT|}.$$

Odatle slijedi

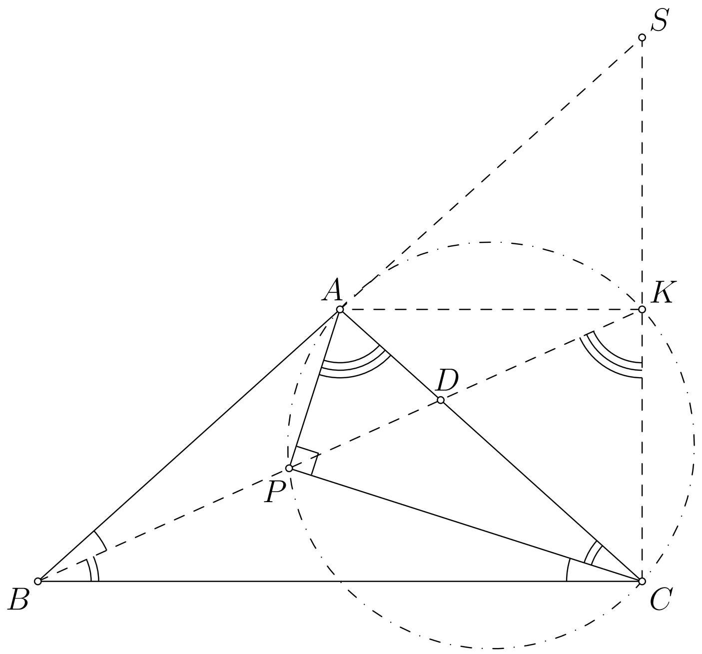
$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|DT|}{|PT|} = \frac{|AT| - |AD|}{|PT|} = \frac{\frac{1}{2}|AC| - |AD|}{\frac{1}{2}|AC|} = 1 - 2 \cdot \frac{|AD|}{|AC|}$$

pa je $|AD| : |AC| = 1 : 3$.

Konačno, traženi omjer je $|AD| : |CD| = 1 : 2$.

Drugo rješenje.

Dopunimo trokut ABC do pravokutnog trokuta BCS kojem je točka A polovište hipotenuze $\overline{BS}$. Neka pravac BD siječe dužinu $\overline{CS}$ u točki K.



Trokut ABC je jednakokračan pa zbog danog uvjeta vrijedi i $\sphericalangle ACP = \sphericalangle CBP$.

Nadalje vrijedi

$$\sphericalangle PAC = 90^\circ - \sphericalangle ACP = 90^\circ - \sphericalangle PBC = 90^\circ - \sphericalangle KBC = \sphericalangle BKC = \sphericalangle PKC.$$

Stoga je četverokut $PCKA$ je tetivan.

Zato je $\sphericalangle AKC = 180^\circ - \sphericalangle APC = 90^\circ$ pa zaključujemo da je $AK \parallel BC$.

Stoga je $\overline{AK}$ srednjica trokuta BCS, a točka K polovište dužine $\overline{CS}$.

Dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BK}$ su težišnice trokuta BCS, pa je njihovo sjecište D težište tog trokuta.

Sada je jasno da je $|AD| : |DC| = 1 : 2$.

Zadatak A-3.4.

Neka su a, b, c različiti prirodni brojevi i k prirodan broj takav da vrijedi

$$ab + bc + ca \geqslant 3k^2 - 1.$$

Dokaži da je $\frac{1}{3}\left(a^3 + b^3 + c^3\right) \geqslant abc + 3k$.

Rješenje.

Tražena nejednakost je ekvivalentna s

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geqslant 9k.$$

Vrijedi

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca\right).$$

Brojevi $|a - b|$, $|b - c|$ i $|c - a|$ ne mogu svi biti jednaki 1 pa je

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}\left((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right) \geqslant \frac{1}{2}\left(1^2 + 1^2 + 2^2\right) = 3.$$

Slijedi

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geqslant 3(a + b + c).$$

Kako je

$$\begin{aligned}
(a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \\
&= \left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac\right) + 3(ab + bc + ac) \\
&\geqslant 3 + 3\left(3k^2 - 1\right) = 9k^2
\end{aligned}$$

slijedi $a + b + c \geqslant 3k$ pa je $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geqslant 9k$.

Zadatak A-3.5.

Svako polje ploče 1000×1000 obojano je crnom ili bijelom bojom. Ukupan broj crnih polja na ploči je za 2012 veći od ukupnog broja bijelih polja. Dokaži da postoji kvadrat 2×2 koji sadrži tri polja jedne boje i jedno polje druge boje.

Prvo rješenje.

Pretpostavimo suprotno od tvrdnje zadatka, da svaki 2×2 kvadrat sadrži paran broj crnih polja. Usporedimo dva susjedna retka.

Ako je prvo polje u donjem retku iste boje kao prvo polje u gornjem retku (recimo crna), onda su i druga polja u tim recima iste boje (bilo crne, bilo bijele). Na isti način zaključujemo dalje te vidimo da su ta dva retka potpuno jednako obojana.

Ako je prvo polje u donjem retku suprotne boje od prvog polja u gornjem retku, onda su i druga polja u tim retcima suprotnih boja. Istim zaključivanjem vidimo da će boja svakog polja donjeg retka biti suprotna od boje odgovarajućeg polja gornjeg retka.

Iz toga slijedi da su svi retci koji počinju crnim poljem međusobno jednaki, kao i svi retci koji počinju bijelim poljem.

Neka je

a – broj redaka koji počinju crnim poljem,

$1000 - a$ – broj redaka koji počinju bijelim poljem.

Neka je d razlika broja crnih i broja bijelih polja u recima koji počinju crnim poljem.

Tada razlika broja crnih i bijelih polja u recima koji počinju bijelim poljem iznosi $-d$.

Razlika između ukupnog broja crnih polja na ploči i ukupnog broja bijelih polja iznosi

$$a \cdot d + (1000 - a) \cdot (-d) = 2ad - 1000d = (2a - 1000)\, d.$$

Stoga mora biti $(2a - 1000)\, d = 2012$.

Uočimo da je broj d paran, jer je ukupan broj crnih i bijelih polja u svakom retku jednak 1000. Također, očito je $d \leqslant 1000$.

Zato iz $(a - 500)\, d = 2 \cdot 503$ slijedi $d = 2$ pa je $a = 1003$ no to očito nije moguće.

Drugo rješenje.

Pretpostavimo suprotno od tvrdnje zadatka, da svaki 2×2 kvadrat sadrži paran broj crnih polja.

Uočimo bilo koja dva susjedna različito obojena polja. Uzmimo, bez smanjenja općenitosti, da se nalaze u istom retku. Uočimo stupce koji sadrže ta dva polja. Pokazat ćemo da se u ta dva stupca, u svakom retku, nalaze dva različito obojena polja.

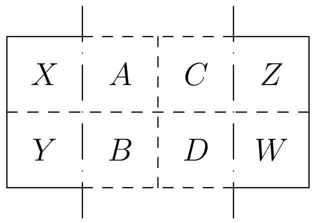
Naime, u 2×2 kvadratu kojeg tvore ta dva polja i dva polja u retku ispod (iznad) moraju biti dva crna i dva bijela polja, pa se npr. ispod (iznad) kombinacije CB može se nalaziti samo CB ili BC, a nikako ne BB ili CC.

Analogno možemo zaključivati i dalje pa vidimo da se isto ponavlja do dna (i do vrha) promatranih dvaju susjednih stupaca pa se u svakom retku nalazi po jedno bijelo i jedno crno polje.

Stoga je ukupan broj crnih polja u promatranim dvama susjednim stupcima jednak broju bijelih polja u tim stupcima.

Izbacimo li ta dva stupca, za ostatak ploče i dalje će vrijediti da je broj crnih polja za 2012 veći od broja bijelih polja.

Neka je izbacivanjem stupaca u kojima se nalaze polja A, B, C i D nastao kvadrat koji se sastoji od polja X, Y, Z i W (vidi sliku).



Ukoliko s $n(K, L, M, N)$ označimo broj crnih polja u kvadratu s poljima K, L, M, N, tada vrijedi:

$$n(X, Y, Z, W) = n(X, Y, A, B) + n(C, D, Z, W) - n(A, B, C, D).$$

Prema pretpostavci, svaki od pribrojnika na desnoj strani je paran pa zaključujemo da je i broj $n(X, Y, Z, W)$ paran.

Time je dokazano da naša pretpostavka vrijedi i za novu ploču, tj. da svaki od novonastalih kvadrata 2×2 također ima paran broj crnih polja.

Možemo nastaviti na isti način s izbacivanjem dvaju susjednih stupaca ili redaka dok god postoje dva susjedna polja različite boje. Na kraju ćemo imati pravokutnu ploču s 2012 polja koja su sva crne boje.

No, ta ploča ima parni broj redaka i parni broj stupaca (jer smo uvijek brisali po dva stupca ili dva retka). Kako je $2012 = 2^2 \cdot 503$, a 503 je prost broj, ploča bi morala biti dimenzija 2×1006. To je naravno nemoguće jer je dimenzija dane ploče 1000×1000.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

1. travnja 2011.

Zadatak A-4.1.

Dokaži da je za svaki $k \in \mathbb{N}_0$ moguće odabrati $4 \cdot 2^k$ različitih prirodnih brojeva koji nisu veći od $5 \cdot 3^k$, tako da među njima ne postoje tri uzastopna člana aritmetičkog niza.

Rješenje.

Tvrdnju zadatka dokazujemo indukcijom po k.

Za $k = 0$ treba među brojevima $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ odabrati 4 broja tako da među njima ne postoje tri uzastopna člana aritmetičkog niza. Jedini takav izbor je $\{1, 2, 4, 5\}$.

Pretpostavimo da smo za neki $k \geqslant 0$ izabrali skup S_k koji sadrži $4 \cdot 2^k$ prirodnih brojeva koji nisu veći od $5 \cdot 3^k$ tako da se među brojevima tog skupa ne pojavljuju tri uzastopna člana aritmetičkog niza.

Označimo skup $T_k = \left\{10 \cdot 3^k + s : s \in S_k\right\}$. Skupovi S_k i T_k imaju isti broj elemenata.

Tvrdimo da tada skup $S_{k+1} = S_k \cup T_k$ zadovoljava uvjete zadatka za $k + 1$.

Skup S_{k+1} ima $2 \cdot (4 \cdot 2^k) = 4 \cdot 2^{k+1}$ elemenata,

i nijedan od njih nije veći od $10 \cdot 3^k + 5 \cdot 3^k = 5 \cdot 3^{k+1}$.

Uzmemo li bilo koja tri broja $a, b, c \in S_{k+1}$ takva da je $a < b < c$, vrijedi točno jedna od sljedećih mogućnosti:

1° $a, b, c \in S_k$
2° $a, b \in S_k, \quad c \in T_k$
3° $a \in S_k, \quad b, c \in T_k$
4° $a, b, c \in T_k$.

Želimo pokazati da je uvijek $a + c \neq 2b$ iz čega slijedi tvrdnja zadatka za $k + 1$, pa bi dokaz indukcijom time bio završen.

U 1° slučaju je $a + c \neq 2b$ zbog pretpostavke da skup S_k zadovoljava tvrdnju zadatka.

U 2° slučaju je $a + c \geqslant 1 + \left(10 \cdot 3^k + 1\right) > 10 \cdot 3^k \geqslant 2b$,

a u 3° slučaju je $a + c \leqslant 5 \cdot 3^k + 5 \cdot 3^{k+1} = 20 \cdot 3^k < 2b$.

U 4° slučaju brojevi $a - 10 \cdot 3^k$, $b - 10 \cdot 3^k$, $c - 10 \cdot 3^k$ pripadaju skupu S_k. Zato vrijedi

$$\left(a - 10 \cdot 3^k\right) + \left(c - 10 \cdot 3^k\right) \neq 2\left(b - 10 \cdot 3^k\right),$$

pa je i $a + c \neq 2b$.

Time su svi slučajevi pokriveni i zadatak je riješen.

Zadatak A-4.2.

Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$f(x^2 + f(y)) = y - x^2.$$

Rješenje.

Uvrštavanjem $x = 0$ u danu jednadžbu dobijemo $f(f(y)) = y$ za svaki $y \in \mathbb{R}$.

Zato za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$f(y - x^2) = f(f(x^2 + f(y))) = x^2 + f(y). \qquad (*)$$

Uvrštavanjem $y = x^2$ u $(*)$ imamo

$$f(0) = x^2 + f(x^2),$$

odnosno

$$f(x^2) = -x^2 + f(0),$$

dok uvrštavanje $y = 0$ u $(*)$ daje:

$$f(-x^2) = x^2 + f(0).$$

Zaključujemo da za svaki realni broj x vrijedi:

$$f(x) = -x + c,$$

pri čemu smo označili $c = f(0)$.

Provjerimo još da sve funkcije oblika $f(x) = -x + c$ za $c \in \mathbb{R}$ zadovoljavaju danu jednadžbu:

$$f(x^2 + f(y)) = f(x^2 - y + c) = -(x^2 - y + c) + c = -x^2 + y.$$

Zadatak A-4.3.

Na koliko načina se broj $\frac{2011}{2010}$ može prikazati kao umnožak dvaju razlomaka oblika $\frac{n+1}{n}$, gdje je n prirodan broj? Poredak faktora nije bitan.

Prvo rješenje.

Neka su p i q prirodni brojevi takvi da vrijedi $\frac{2011}{2010} = \frac{p+1}{p} \cdot \frac{q+1}{q}$.

Tada je $2011pq = 2010\,(pq + p + q + 1)$ tj. $pq = 2010\,(p + q + 1)$.

Iz posljednje jednakosti možemo izraziti

$$p = \frac{2010\,(q+1)}{q-2010} = \frac{2010\,(q-2010) + 2010 \cdot 2011}{q-2010} = 2010 + \frac{2010 \cdot 2011}{q-2010}.$$

Budući da su p i q prirodni brojevi, slijedi da je $q - 2010$ pozitivan djelitelj broja $2010 \cdot 2011$. Svakom djelitelju broja $2010 \cdot 2011$ odgovara točno jedan par (p, q).

Rastav broja $2010 \cdot 2011$ na proste faktore je $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67 \cdot 2011$ pa je broj njegovih djelitelja $2^5 = 32$.

Konačno, budući da parovi (p, q) i (q, p) određuju isti prikaz, traženi broj prikaza je 16.

Drugo rješenje.

Neka su p i q prirodni brojevi takvi da vrijedi $\frac{2011}{2010} = \frac{p+1}{p} \cdot \frac{q+1}{q}$.

Uočimo da je $M(p, p+1) = M(q, q+1) = 1$.

Neka je $a = M(p, q+1)$, $p = am$, $q + 1 = ak$. Tada je $M(m, k) = 1$.

Analogno, za $b = M(q, p+1)$, $q = bn$, $p + 1 = bl$ vrijedi $M(n, l) = 1$.

Dalje imamo

$$\begin{aligned} am - bl &= p - (p+1) = -1 \\ ak - bn &= (q+1) - q = 1, \end{aligned} \tag{$*$}$$

iz čega slijedi $M(l, m) = 1$ i $M(k, n) = 1$. Zato su i brojevi lk i mn relativno prosti.

Vrijedi

$$\frac{2011}{2010} = \frac{bl}{am} \cdot \frac{ak}{bn} = \frac{l}{m} \cdot \frac{k}{n} = \frac{lk}{mn}$$

pa vidimo da mora biti

$$lk = 2011 \qquad \text{i} \qquad mn = 2010. \tag{$**$}$$

Kako je $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$, broj m može biti bilo koji od $2^4 = 16$ djelitelja broja 2010, a onda je n jednoznačno određen.

Broj 2011 je prost pa l i k možemo odabrati samo na dva načina.

Dakle, brojeve $k, l, m, n \in \mathbb{N}$ koji zadovoljavaju $(**)$ možemo odabrati na $16 \cdot 2 = 32$ načina.

Ako odaberemo bilo koje $k, l, m, n \in \mathbb{N}$ koji zadovoljavaju $(**)$, postojat će jedinstveni p, q kakve tražimo.

Naime, rješavanjem sustava $(*)$:

$$bl - am = 1, \qquad ak - bn = 1$$

dobivamo $a = \dfrac{n+l}{kl-mn}$ i $b = \dfrac{k+m}{kl-mn}$.

Zbog $kl - mn = 2011 - 2010 = 1$ vrijedi $a = l + n$, $b = k + m$

pa je $p = am = (n+l)m$ i $q = bn = (k+m)n$.

Konačno, traženi broj jednak je polovini broja 32 jer poredak faktora nije bitan pa je rezultat 16.

Napomena. Općenito, broj prikaza broja $\dfrac{m+1}{m}$ u obliku umnoška dvaju razlomaka tog oblika je $\dfrac{1}{2}\,d(m)\,d(m+1)$.

Zadatak A-4.4.

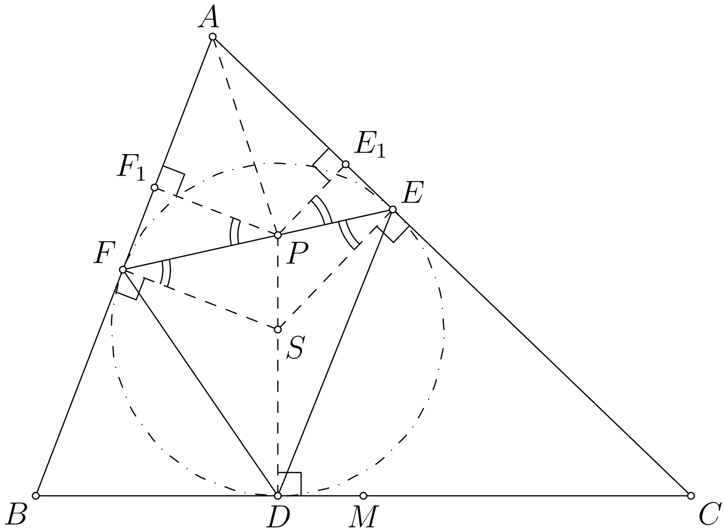
Upisana kružnica šiljastokutnog trokuta ABC dodiruje stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ redom u točkama D, E i F. Središte te kružnice je točka S, a pravac DS siječe dužinu $\overline{EF}$ u točki P. Ako je M polovište stranice $\overline{BC}$, dokaži da su točke A, P i M kolinearne.

Prvo rješenje.

Označimo kutove trokuta kao što je uobičajeno s α, β, γ.

Četverokut $AESF$ je tetivan (dva nasuprotna prava kuta), a AS je simetrala kuta $\sphericalangle EAF$ pa je $\sphericalangle SEF = \sphericalangle SFE = \frac{\alpha}{2}$.

Analogno, $\sphericalangle SDF = \sphericalangle SFD = \frac{\beta}{2}$, $\sphericalangle SDE = \sphericalangle SED = \frac{\gamma}{2}$.



Neka su točke E_1 i F_1 redom nožišta okomica iz točke P na stranice $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$. Tada je $\sphericalangle E_1PE = \sphericalangle PES = \dfrac{\alpha}{2}$ (kutovi uz presječnicu). Analogno, $\sphericalangle F_1PF = \sphericalangle PFS = \dfrac{\alpha}{2}$.

Dakle, pravokutni trokuti E_1EP i F_1FP su slični i vrijedi $\dfrac{|PE_1|}{|PF_1|} = \dfrac{|PE|}{|PF|}$.

Primjenom poučka o sinusima na trokute DEP i DFP dobivamo

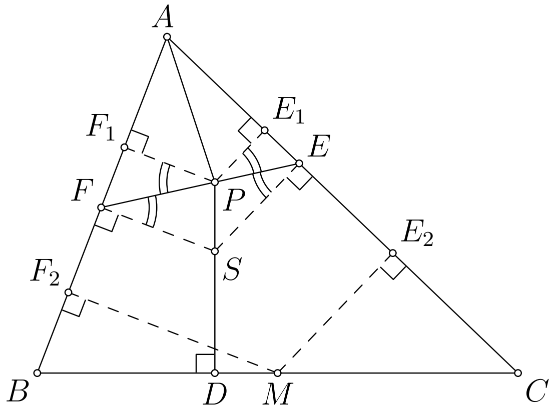
$$\frac{|PE|}{\sin(\sphericalangle PDE)} = \frac{|DP|}{\sin(\sphericalangle PED)}, \qquad \frac{|PF|}{\sin(\sphericalangle PDF)} = \frac{|DP|}{\sin(\sphericalangle PFD)}.$$

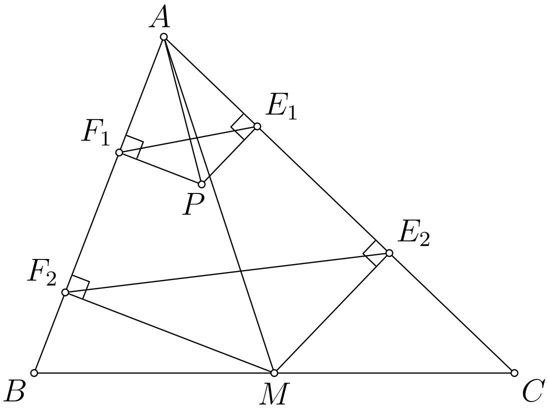
Kako je $\sphericalangle PED = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$ i $\sphericalangle PFD = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$ vrijedi

$$\frac{|PE|}{|PF|} = \frac{\dfrac{|DP|}{\sin\left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right)}\sin\frac{\gamma}{2}}{\dfrac{|DP|}{\sin\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right)}\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}.$$

Neka su točke E_2 i F_2 redom nožišta okomica iz točke M na stranice $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$.

Iz pravokutnih trokuta MCE_2 i MBF_2 zaključujemo $\dfrac{|ME_2|}{|MF_2|} = \dfrac{|MC|\sin\gamma}{|MB|\sin\beta} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\beta}$.



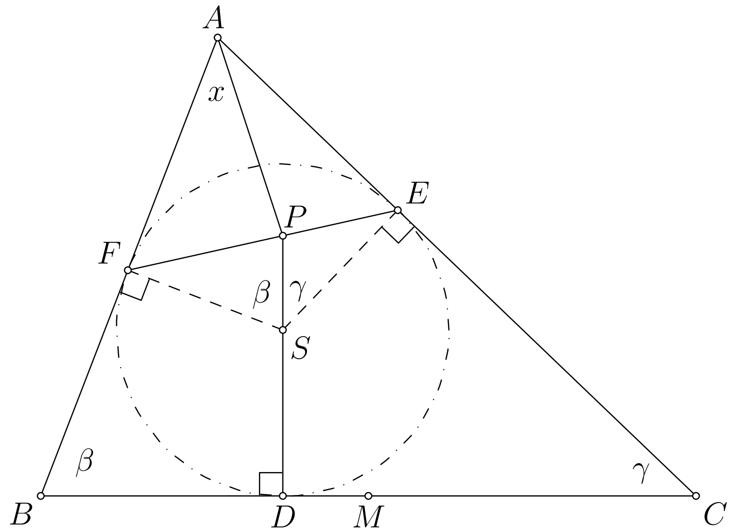


Stoga vrijedi $|ME_2| : |MF_2| = |PE| : |PF| = |PE_1| : |PF_1|$ pa su zbog $\sphericalangle E_1PF_1 = \sphericalangle E_2MF_2$ (kutovi s paralelnim kracima) trokuti E_1PF_1 i E_2MF_2 slični.

Odgovarajuće stranice tih trokuta su paralelne pa su oni homotetični. Središte homotetije je sjecište pravaca E_1E_2 i F_1F_2, tj. točka A. Istom homotetijom točka P se preslikava u točku M pa su točke A, P i M kolinearne.

Drugo rješenje.

Kako su četverokuti $BFSD$ i $CDSE$ tetivni, vrijedi $\sphericalangle FSD = 180° - \beta$ i $\sphericalangle ESD = 180° - \gamma$ pa je $\sphericalangle FSP = \beta$ i $\sphericalangle ESP = \gamma$.



Neka je $x = \sphericalangle FAP$ i $y = \sphericalangle BAM$. Tada je $\sphericalangle EAP = \alpha - x$ i $\sphericalangle CAM = \alpha - y$.

Primjenom poučka o sinusima na trokute EAP i FAP dobivamo

$$\frac{|EP|}{\sin(\alpha - x)} = \frac{|AE|}{\sin(\sphericalangle APE)}, \qquad \frac{|FP|}{\sin x} = \frac{|AF|}{\sin(\sphericalangle APF)}.$$

Dijeljenjem tih jednakosti zbog $|AE| = |AF|$ i $\sphericalangle APE + \sphericalangle APF = 180°$ dobivamo

$$\frac{\sin x}{\sin(\alpha - x)} = \frac{|FP|}{|EP|}.$$

Primjenom poučka o sinusima na trokute EPS i FPS dobivamo

$$\frac{|EP|}{\sin(\sphericalangle PSE)} = \frac{|SP|}{\sin(\sphericalangle PES)}, \qquad \frac{|FP|}{\sin(\sphericalangle PSF)} = \frac{|SP|}{\sin(\sphericalangle PFS)},$$

tj.

$$\frac{|EP|}{\sin\gamma} = \frac{|SP|}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \qquad \frac{|FP|}{\sin\beta} = \frac{|SP|}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

pa je $\dfrac{|EP|}{|FP|} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\beta}$.

Promatrajući trokute ABM i ACM uočavamo da vrijedi:

$$\frac{|BM|}{\sin y} = \frac{|AM|}{\sin\beta}, \qquad \frac{|CM|}{\sin(\alpha - y)} = \frac{|AM|}{\sin\gamma}$$

pa je

$$\frac{\sin y}{\sin(\alpha - y)} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Iz svega navedenog dobivamo jednadžbu

$$\frac{\sin x}{\sin(\alpha - x)} = \frac{\sin y}{\sin(\alpha - y)}$$

iz koje treba zaključiti da je $x = y$.

To nije teško dobiti koristeći formule za pretvaranje umnoška trigonometrijskih funkcija u zbroj i obratno.

Zadatak A-4.5.

Neka je $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$ permutacija vrhova pravilnog $2n$-terokuta.
Dokaži da zatvorena poligonalna linija koja se sastoji od dužina

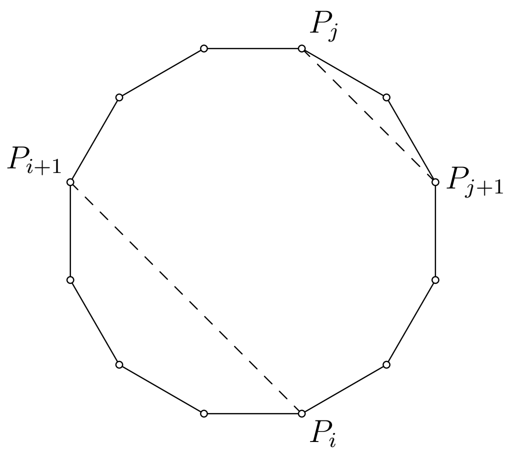
$$\overline{P_1P_2},\ \overline{P_2P_3},\ \ldots,\ \overline{P_{2n-1}P_{2n}},\ \overline{P_{2n}P_1}$$

sadrži barem jedan par paralelnih dužina.

Rješenje.

Pridružimo vrhovima promatranog $2n$-terokuta brojeve $1, 2, \ldots, 2n$ redom.

Neka je a_k broj pridružen vrhu P_k.
Tada je $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ permutacija brojeva $1, 2, \ldots, 2n$.



Dužine $\overline{P_iP_{i+1}}$ i $\overline{P_jP_{j+1}}$ za $i \neq j$ su paralelne ako i samo ako je njima određen jednakokračan trapez s osnovicama $\overline{P_iP_{i+1}}$ i $\overline{P_jP_{j+1}}$. Njegovi krakovi (ili dijagonale) $\overline{P_iP_{j+1}}$ i $\overline{P_jP_{i+1}}$ su sukladni i nekom rotacijom oko središta opisane kružnice točke P_i i P_j preslikavaju se redom u točke P_{j+1} i P_{i+1}.

Zato je uvjet $\overline{P_iP_{i+1}} \parallel \overline{P_jP_{j+1}}$ ekvivalentan uvjetu da je broj vrhova između točaka P_i i P_{j+1} jednak broju vrhova između točaka P_j i P_{i+1}, uzimajući u obzir orijentaciju. Taj uvjet možemo pisati u obliku $a_i - a_{j+1} \equiv a_j - a_{i+1} \pmod{2n}$, odnosno

$$a_i + a_{i+1} \equiv a_j + a_{j+1} \pmod{2n}.$$

Pretpostavimo da među navedenim dužinama nema paralelnih.

Tada svi zbrojevi $a_k + a_{k+1}$ daju različite ostatke pri dijeljenju s $2n$, pa vrijedi

$$\sum_{k=1}^{2n} (a_k + a_{k+1}) \equiv 0 + 1 + \ldots + (2n-1) \pmod{2n}$$

Suma na desnoj strani iznosi $n\,(2n-1)$ pa pri dijeljenju s $2n$ dalje ostatak n.

S druge strane, vrijedi

$$\sum_{k=1}^{2n} (a_k + a_{k+1}) = 2\sum_{k=1}^{2n} a_k = 2\sum_{k=1}^{2n} k = 2n\,(2n+1)$$

Dobiveni izraz je djeljiv s $2n$, što je u kontradikciji s gornjim zaključkom.

Stoga pretpostavka nije valjana i time je tvrdnja zadatka dokazana.