PROF.DR.SC. VESNA ŽUPANOVIĆ | DR.SC. KRISTINA ŠORIĆ, PROF. V.Š.

PRIRUČNIK ZA NASTAVNIKE

PRIMIJENJENA MATEMATIKA PODRŽANA RAČUNALOM

Korisnik
GIMNAZIJA MATIJA MESIĆ

Strojarski fakultet u Slavonskom Brodu

PARTNERI

Gimnazija Nova Gradiška

Europska unija
Ulaganje u budućnost

RAZVOJ LJUDSKIH POTENCIJALA

STRUKTURNI I INVESTICIJSKI FONDOVI

Projekt je sufinancirala Europska unija iz Europskog socijalnog fonda.
Sadržaj ovog dokumenta isključiva je odgovornost Gimnazije „Matija Mesić“.
Više informacija na **www.strukturnifondovi.hr**

PRIMIJENJENA MATEMATIKA PODRŽANA RAČUNALOM
Priručnik za nastavnike

Autori:
Prof.dr.sc. Vesna Županović | Dr.sc. Kristina Šorić, prof.v.š.

Korisnik:
GIMNAZIJA MATIJA MESIĆ
Naselje Slavonija I br.8, 35000 Slavonski Brod
Tel.: +385 35 446 252 (centrala), +385 35 446 251 (ravnatelj)
Fax.: +385 35 402 880
E-mail: gmm@gimnazija-mmesic-sb.skole.hr | Web: http://www.gimnazija-mmesic-sb.skole.hr

Grafičko oblikovanje: Udruga Lima - Tin Horvatin

Tisak: Diozit d.o.o.

Partneri:
GIMNAZIJA NOVA GRADIŠKA
Trg kralja Tomislava 9, 34000 Nova Gradiška, Hrvatska
Tel: +385 35 361 427 | Fax: +385 35 492 721
Email: ured@gimnazija-nova-gradiska.skole.hr | Web: http://gimnazija-nova-gradiska.skole.hr

STROJARSKI FAKULTET U SLAVONSKOM BRODU
Trg Ivane Brlić Mažuranić 2, 35000 Slavonski Brod, Hrvatska
Tel: +385 35 446 188 | Fax: +385 35 446 446
Email: info@sfsb.hr | Web: http://www.sfsb.unios.hr

Posrednička tijela:
MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I SPORTA
Donje Svetice 38, 10000 Zagreb, Hrvatska
www.mzos.hr | email: esf@mzos.hr

AGENCIJA ZA STRUKOVNO OBRAZOVANJE I OBRAZOVANJE ODRASLIH
Organizacijska jedinica za upravljanje strukturnim instrumentima
Radnička cesta 37b, 10000 Zagreb, Hrvatska - www.asoo.hr/defco/
email: defco@asoo.hr

Priručnik je izrađen u sklopu projekta „STEM genijalci“ kojega je sufinancirala Europska unija iz Europskog socijalnog fonda.

Više informacija o EU fondovima na www.strukturnifondovi.hr.

Slavonski Brod, 2016.

Sadržaj

Predgovor

Priručnik je namijenjen nastavnicima matematike, učenicima trećeg i četvrtog razreda srednjih škola, kao i studentima tehničkih, prirodoslovno-matematičkih fakulteta i ekonomskih fakulteta. Tri su osnovna cilja ovog priručnika:

1. U priručniku su obrađene funkcije na način da predstavljaju temelj za uvođenje diferencijalnog i integralnog računa funkcija jedne i više varijabli, na sveučilišnoj razini. Cilj je učenicima olakšati nastavak školovanja.
2. Priručnik se bavi matematičkim modeliranjem pomoću funkcija, te se u njemu može naći veliki broj primjera iz stvarnog života, ekonomije, fizike, kemije i biologije, koji matematiku povezuju sa stvarnošću. Cilj je pokazati da je matematika povezana sa stvarnim svijetom.
3. Problemi se rješavaju pomoću računala, jer se u današnje vrijeme ne smijemo ograničavati samo na probleme koji se mogu riješiti papirom i olovkom. Cilj je uvesti računalno rješavanje problema u nastavu matematike.

Priručnik se sastoji od 6 poglavlja.

1. Osnovni pojmovi o funkcijama
2. Matematičko modeliranje pomoću linearne, kvadratne, eksponencijalne i logaritamske funkcije
3. Trigonometrijske i hiperboličke funkcije i njihove inverzne
4. Polinomi, racionalne i iracionalne funkcije
5. Matematičko modeliranje jednostavnim funkcijama više varijabli
6. Matematičko modeliranje jednostavnim vektorskim funkcijama

Glavna tema kojom se bavimo u priručniku je matematičko modeliranje pomoću funkcija. **U prvom poglavlju** se uvode osnovni pojmovi vezani uz funkcije. Pojmovi su uvedeni kroz jednostavne primjere iz svakodnevnog života. **Drugo poglavlje** se sastoji od primjera matematičkog modeliranja linearnom, kvadratnom, eksponencijalnom i logaritamskom funkcijom. **Ostala poglavlja, od trećeg do šestog** koncipirana su tako da unutar poglavlja najprije dolaze potpoglavlja u kojima se upoznajemo s određenim tipom funkcije, a onda kao zasebno potpoglavlje dolazi dio s primjerima iz matematičkog modeliranja tim funkcijama.

Početna dva poglavlja su drugačija od ostalih poglavlja, jer su učenici trećeg razreda, oni najmlađi koji mogu koristiti ovaj priručnik već upoznati s funkcijama kojima se modelira u drugom poglavlju. Nisu upoznati s općim pojmovima vezanim za funkcije, ali jesu s linearnom, kvadratnom, eksponencijalnom i logaritamskom funkcijom, pa te funkcije nisu posebno obrađene.

U priručniku ima dovoljno materijala za dva izborna kolegija po 70 sati nastave. Sve teme koje su obrađene, u budućnosti će pomoći učenicima pri svladavanju kolegija iz matematike na tehničkim, prirodoslovno-matematičkim i ekonomskim fakultetima. Ako je nastavniku na raspolaganju manja satnica, nastavnik će sam odrediti koja poglavlja želi raditi i koja poglavlja predstavljaju logički slijed. Preporučujemo da se svakako rade prva tri poglavlja, jer se u njima uvode osnovni pojmovi, te se modelira funkcijama koje su gradivo opće i prirodoslovno-matematičke gimnazije. Ako je u tim poglavljima potrebno izvršiti skraćivanja, u drugom poglavlju se može napraviti manji broj primjera, a u trećem poglavlju se mogu preskočiti polarne koordinate.

Nastavnik može odlučiti da nakon trećeg poglavlja obradi jedno ili više poglavlja koja su preostala. Četvrto poglavlje s polinomima i šesto poglavlje s vektorima su gimnazijsko gradivo, prikazano na malo drukčiji način uz dodatak matematičkog modeliranja. Peto poglavlje donosi funkcije više varijabli, što nije gimnazijsko gradivo. Smatramo da je pri razumijevanju pojma funkcije jako važno povezivanje sa stvarnošću, a u stvarnosti rijetko koji proces ovisi samo o jednoj varijabli! Nadalje, grafovi funkcija dviju varijabli nacrtani na računalu su vrlo atraktivni, pa očekujemo da će zainteresirati učenike. Dakle, nastavnik nakon prva tri poglavlja može preskočiti neko poglavlje i nastaviti dalje. U slučaju da nastavnik odluči raditi poglavlja 1, 2, 3 i 6 neće imati poteškoća.

Grafovi, simbolički i numerički računi nastali uz pomoć Wolframove Mathematice, mogu biti napravljeni i u nekom drugom programskom paketu. Oznake korištene u priručniku su standardne oznake koje se koriste u matematici i fizici. Umjesto decimalnog zareza korištena je decimalna točka, kao u udžbenicima iz informatike, i to zbog usklađivanja s Wolframovom Mathematicom.

Primjere iz fizike je izradila izv.prof.dr.sc. Lahorija Bistričić s Fakulteta elektrotehnike i računarstva u Zagrebu, te joj zahvaljujemo na tome. Zahvaljujemo Petri Vidović, magistri inženjerki informacijske i komunikacijske tehnologije na izradi primjera iz života, obradi primjera računalom, izradi slika i cjelokupnoj velikoj tehničkoj pomoći u realizaciji ovog priručnika.

Autorice

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi o funkcijama

1.1 Motivacija za uvođenje pojma funkcije

Pojam funkcije jedan je od najvažnijih pojmova u matematici. Za funkciju koristimo i riječ preslikavanje. Temeljito poznavanje pojma funkcije i dobro računanje s elementarnim funkcijama osnovni su preduvjeti za razumijevanje više matematike. Pod višom matematikom podrazumijevamo diferencijalni i integralni račun, s kojim se učenici prvi put susreću u 4. razredu gimnazije. Svaki početni sveučilišni matematički kolegij kreće s diferencijalnim i integralnim računom funkcija jedne varijable. U nastavku matematičkog obrazovanja, ovisno o studiju, rade se diferencijalni i integralni račun funkcija više varijabli i vektorskih funkcija.

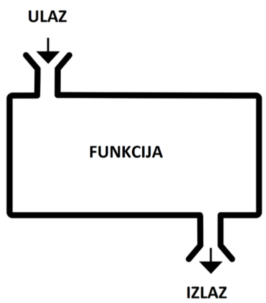
Mi se u ovom priručniku prvenstveno bavimo elementarnim funkcijama jedne varijable, pri čemu stavljamo naglasak na matematičko modeliranje pomoću funkcija. Jako je važno razumjeti i usvojiti pojam funkcije na apstraktnom nivou, te naučiti primjenjivati funkcije u konkretnim situacijama. Treba naučiti kako odabrati prikladan tip funkcije koji se može primijeniti na određeni problem koji dolazi iz stvarnog života, fizike, ekonomije, kemije, biologije ili inženjerstva.

Na kraju, u posljednja dva poglavlja uvodimo pojam funkcije dvije i tri varijable, koje proučavamo svođenjem na funkciju jedne varijable. Vektorske funkcije se uvode kao vektori ovisni o nekom parametru, čemu se daje fizikalni smisao.

U ovom priručniku rješavamo probleme uz pomoć programskog paketa Wolframova Mathematica, ne zanemarujući pritom činjenicu da učenik jednostavnije primjere mora biti u stanju napraviti i bez računala.

Učenici su na nastavi matematike obradili pojam linearne, kvadratne, eksponencijalne i logaritamske funkcije, ali nije se govorilo općenito o pojmu funkcije. Pristup u kojemu se kreće od jednostavnijih primjera i pojedinačnih slučajeva, te se tek onda dolazi do općenitog pojma, može biti dobar ako se nakon usvajanja općenitog pojma ponovo sagledaju svi pojedinačni slučajevi u novom svjetlu.

Krećemo s pojmom funkcije na način da se objasni veza pojma funkcije kojeg koristimo u stvarnom životu i matematičkog pojma funkcije. Da bismo mogli efikasno raditi s funkcijama koje su nam potrebne u svakodnevnom životu, fizici, ekonomiji, biologiji, kemiji i drugim znanostima, moramo usvojiti neke



matematičke koncepte koji su povezani s pojmom funkcije. Svaki matematički pojam koji uvodimo bit će popraćen primjerima iz života, te će biti objašnjeno kako neki izračun ili graf možemo dobiti u programskom paketu Wolframova Mathematica.

Učenici se postupno od osnovne škole do trećeg razreda srednje škole susreću s linearnom, kvadratnom, logaritamskom, eksponencijalnom funkcijom i trigonometrijskim funkcijama, ali se pojam funkcije na jednom općem nivou ne uvodi do 4. razreda gimnazije. Matematički pojmovi koji će biti uvedeni u ovom poglavlju su gradivo 4. razreda gimnazije, ali su uvedeni na drugi način uz korištenje primjera iz života. Matematički koncepti su apstraktni i baš zbog svoje općenitosti omogućavaju vrlo raznoliku primjenu. S druge strane, zbog apstraktnosti te koncepte je teško razumjeti, pa oni ostaju bez primjene. U ovom priručniku ćemo paralelno uvoditi matematičke koncepte i njihovu primjenu.

1.2 Pojam funkcije u životu i matematici

Funkciju možemo zamisliti kao stroj u koji ubacujemo neke sirovine (input), a iz stroja izlazi neki proizvod (output). Matematičim jezikom sirovinu bismo nazvali varijablom x (neka je za sada samo jedna sirovina), stroj bismo nazvali funkcijom f, a proizvod bi bio $y = f(x)$. Proizvod $y = f(x)$ još nazivamo vrijednost funkcije u točki x. U inženjerstvu se često na taj način prikazuju procesi. U proces ulaze varijable $x_1, x_2, \ldots x_n$, proces se prikazuje kao neki pravokutnik f u kojem se nešto događa, a iz pravokutnika izlazi kao rezultat $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Takav način prikazivanja procesa naziva se blok dijagram.

Stroj, odnosno proces, ispravno radi ako ubacivanjem istih sirovina uvijek dobivamo isti proizvod.

Primjer 1.1 *Aparat Kačakak radi na patrone. Ako se stavi crna patrona, onda pravi kavu, od zelene patrone se dobije čaj, a od smeđe kakao*

Skup ulaznih varijabli je $\{c, z, s\}$*, gdje* c *predstavlja crnu patronu,* z *zelenu, a* s *smeđu. Skup izlaznih vrijednosti je* $\{kav, caj, kak\}$*, gdje* kav *predstavlja kavu,* caj *je čaj, a* kak *je kakao. Jednakostima*

$$\begin{aligned} f(c) &= kav \\ f(z) &= caj \\ f(s) &= kak \end{aligned}$$

je definirana funkcija jedne varijable. Skup $\{c, z, s\}$ *nazivamo područjem definicije funkcije ili domenom funkcije, a skup izlaznih vrijednosti je*
$\{kav, caj, kak\}$ *slika funkcije. U slučaju da se dogodi da nakon ubacivanja zelene patrone iz aparata izađe kava, reći ćemo da nešto ne funkcionira. Znamo da je* $f(z) = caj$ *i ne može biti* $f(z) = kav$*.* **Da bi funkcija bila dobro definirana svakoj ulaznoj varijabli se pridružuje samo jedna izlazna vrijednost!** *Patroni* z *je pridružen samo čaj. U suprotnom imamo kvar, a matematičkim jezikom kažemo da funkcija nije dobro definirana. Slično je i u slučaju da stavimo neku patronu, a iz aparata ne poteče nikakva tekućina. U pitanju je kvar, odnosno, nije dobro definirana funkcija jer svakoj ulaznoj varijabli trebamo pridružiti neku izlaznu vrijednost.*

Primjer 1.2 *Promotrimo kako bismo opisali rad stroja za pravljenje kruha. Ubacivanjem jedne od 3 vrsta brašna, vode i kvasca u stroj, nakon pritiska tipke* f*, trebamo dobiti jednu od 3 vrste kruha. Na raspolaganju su nam 3 vrste brašna, pšenično, kukuruzno i raženo.*

Funkcioniranje stroja za pravljenje kruha je opisano jednakostima

$$\begin{aligned} f(psbrasno, voda, kvasac) &= psenicnikruh \\ f(kukbrasno, voda, kvasac) &= kukuruznikruh \\ f(razbrasno, voda, kvasac) &= razenikruh \end{aligned}$$

Ako stroj ovako radi, smatramo da dobro funkcionira tj. da je funkcija f *dobro definirana. U slučaju da se dogodi da stroj nakon ubacivanja kukuruznog brašna izbaci pšenični kruh, reći ćemo da nešto ne* *funkcionira. Znamo da je*

$$f(kukbrasno, voda, kvasac) = kukuruznikruh$$

i ne može biti

$$f(kukbrasno, voda, kvasac) = psenicnikruh.$$

Naglašavamo, kao u prethodnom primjeru, da bi funkcija bila dobro definirana svakoj ulaznoj varijabli se pridružuje samo jedna izlazna vrijednost!

Nadalje, ako nakon ubacivanja sastojaka brašno, voda i kvasac, iz stroja ne izađe ništa, opet cemo reći da stroj ne funkcionira. Spomenuli smo da se kaže da funkcija nije dobro definirana, ali možemo jednostavno reći da nije definirana funkcija. Taj stroj ne predstavlja funkciju, ako on radi kako ga je volja, ponekad izbaci kruh od neodgovarajućeg brašna, a ponekad ništa. Jasno je da s takvim strojevima ne želimo imati posla. Želimo strojeve koji su dobro definirane funkcije, ili kraće, strojeve koji jesu funkcije.

Primjer 1.3 *Trgovina živežnih namirnica Brodo iz Slavonskog Broda uvela je dostavu u kuću.*

Zaposlenik trgovine donio je četveročlanoj obitelji Horvat kutiju u kojoj su bile sljedeće namirnice: sir, jogurt, kobasice, naranče, jabuke, maline, sok, pivo, čips, čokolada, keksi i kikiriki. Mama, tata, kći i sin došli su po stvari. Nakon kraćeg dogovora, stvari su raspoređene na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
f(sir) &= mama\\
f(jogurt) &= kci\\
f(kobasice) &= tata\\
f(narance) &= tata\\
f(jabuke) &= sin\\
f(maline) &= sin\\
f(sok) &= kci\\
f(pivo) &= mama\\
f(cips) &= tata\\
f(cokolada) &= tata\\
f(keksi) &= kci\\
f(kikiriki) &= sin.
\end{aligned}$$

Ovim jednakostima je definirana funkcija iz skupa

$$\{sir, jogurt, kobasice, narance, jabuke, maline, sok,$$
$$pivo, cips, cokolada, keksi, kikiriki\},$$

koji je domena funkcije u skup $\{mama, tata, kci, sin\}$*, koji je slika funkcije. Mama je dobila* 2 *namirnice, tata* 4*, a kći i sin po* 3*. Ova funkcija je po tome drugačija od funkcija u prethodnim primjerima, jer su tamo različite ulazne varijable išle različitim izlaznim vrijednostima. Naglasimo da nismo prekršili pravilo da se svakoj ulaznoj varijabli pridružuje samo jedna izlazna vrijednost, pa je* f *zaista funkcija.*

Mi smo u ovom primjeru namirnicama pridružili ljude pomoću funkcije f*. Možemo li definirati neku funkciju* g *koja bi išla obrnuto, da ljudima pridružimo namirnice? Izdvojimo mamu*

$$\begin{aligned} f(sir) &= mama \\ f(pivo) &= mama. \end{aligned}$$

Kako bismo definirali $g(mama)$*? Ne može biti*

$$\begin{aligned} g(mama) &= sir \\ g(mama) &= pivo, \end{aligned}$$

jer to nije funkcija. Očito se moramo odlučiti hoćemo li mami dati sir ili pivo, jer ne može oboje. Sad smo objasnili s kojim problemom se susrećemo ako želimo definirati obrnutu, obično kažemo inverznu, funkciju od f*. Da bismo mogli definirati inverznu funkciju, morat ćemo uvesti neke matematičke pojmove koji nam pomažu u prepoznavanju funkcija kod kojih se različitim ulaznim varijablama pridružuju različite izlazne vrijednosti.*

Primjer 1.4 *Ako u prethodnom primjeru uzmemo istu domenu funkcije* f *(iste namirnice), isto pravilo pridruživanja, ali peteročlanu obitelj*

$$\{mama, tata, baka, kci, sin\},$$

vidimo da baka nije ništa dobila iz dućana. Skup svih vrijednosti funkcije, odnosno slika funkcije f *je i dalje ostao skup* $\{mama, tata, kci, sin\}$*. Skup u kojemu je i baka nazivamo kodomenom funkcije. Slika funkcije je uvijek sadržana u kodomeni funkcije, a ponekad se poklapaju kao u prethodnom primjeru.*

Primjer 1.5 *Ana, Marija i Ivan putuju autobusom za Zagreb. Kupili su karte preko interneta i na karti im ne piše broj sjedala, ali kondukter kaže da su za one s interneta rezervirali mjesta od* 31 *do* 33*. Evo jedne funkcije koja opisuje sjedenje troje prijatelja u autobusu*

$$\begin{aligned} f(Ana) &= 31 \\ f(Ivan) &= 32 \\ f(Marija) &= 33. \end{aligned}$$

Domena funkcije je skup $\{Ana, Marija, Ivan\}$*, a kodomena se poklapa sa slikom funkcije i to je skup* $\{31, 32, 33\}$*. Morali smo paziti da ne stavimo jednu osobu na* 2 *sjedala, jer to ne bi bila funkcija. Ne bi bila funkcija ni u slučaju da je netko od naše trojke ostao bez sjedala. Koliko funkcija* f *možemo definirati iz skupa* $\{Ana, Marija, Ivan\}$ *u skup* $\{31, 32, 33\}$ *koje će opisati sjedenje troje prijatelja u autobusu, tako da ljudima pridružuje sjedala? Ispišite sve takve funcije. Pokažite da ih ima* 6*.*

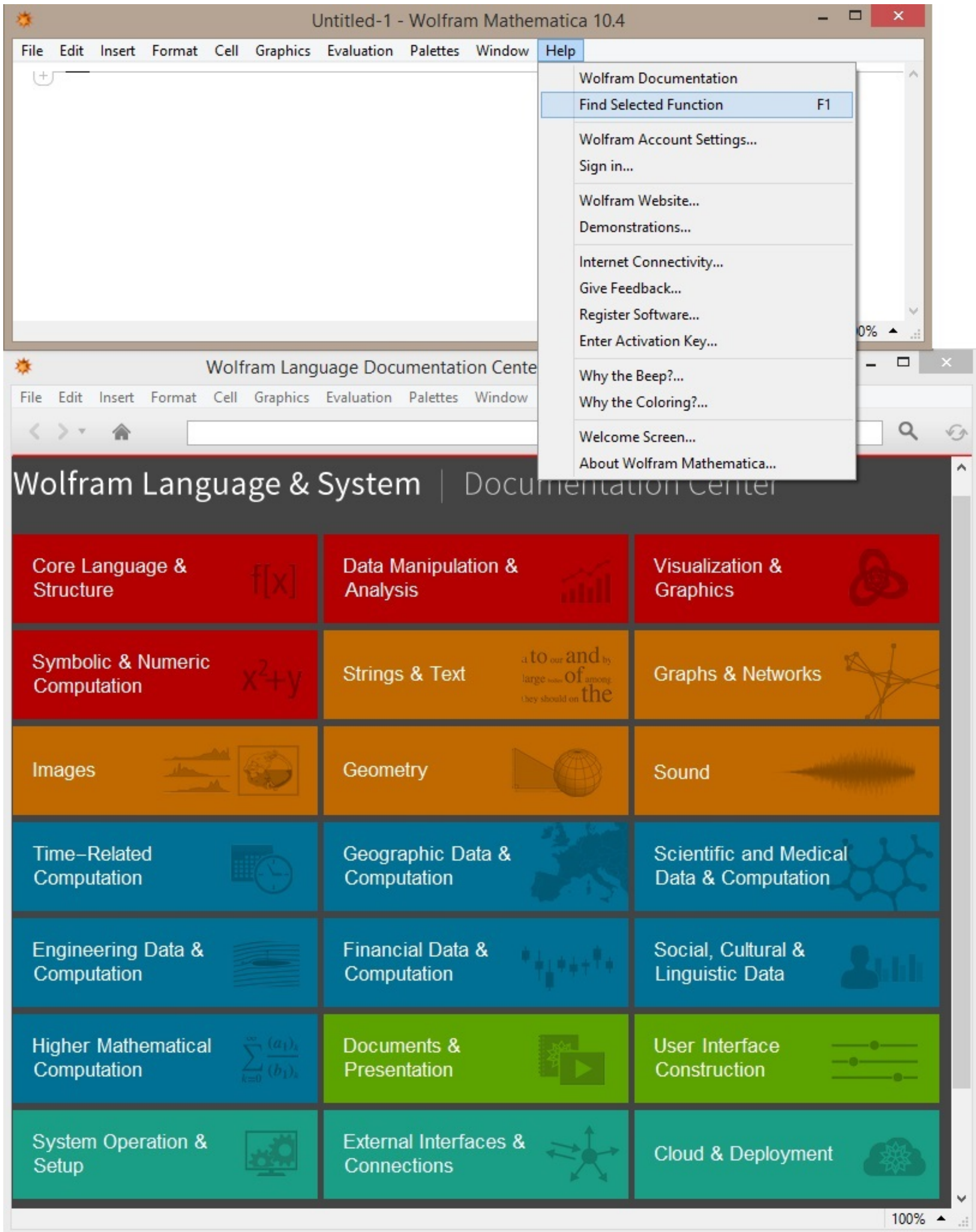
Kod ove funkcije f bismo lako definirali funkciju g koja sjedalima pridružuje ljude. Definirana je jednakostima

$$\begin{aligned} g(31) &= Ana \\ f(32) &= Ivan \\ f(33) &= Marija. \end{aligned}$$

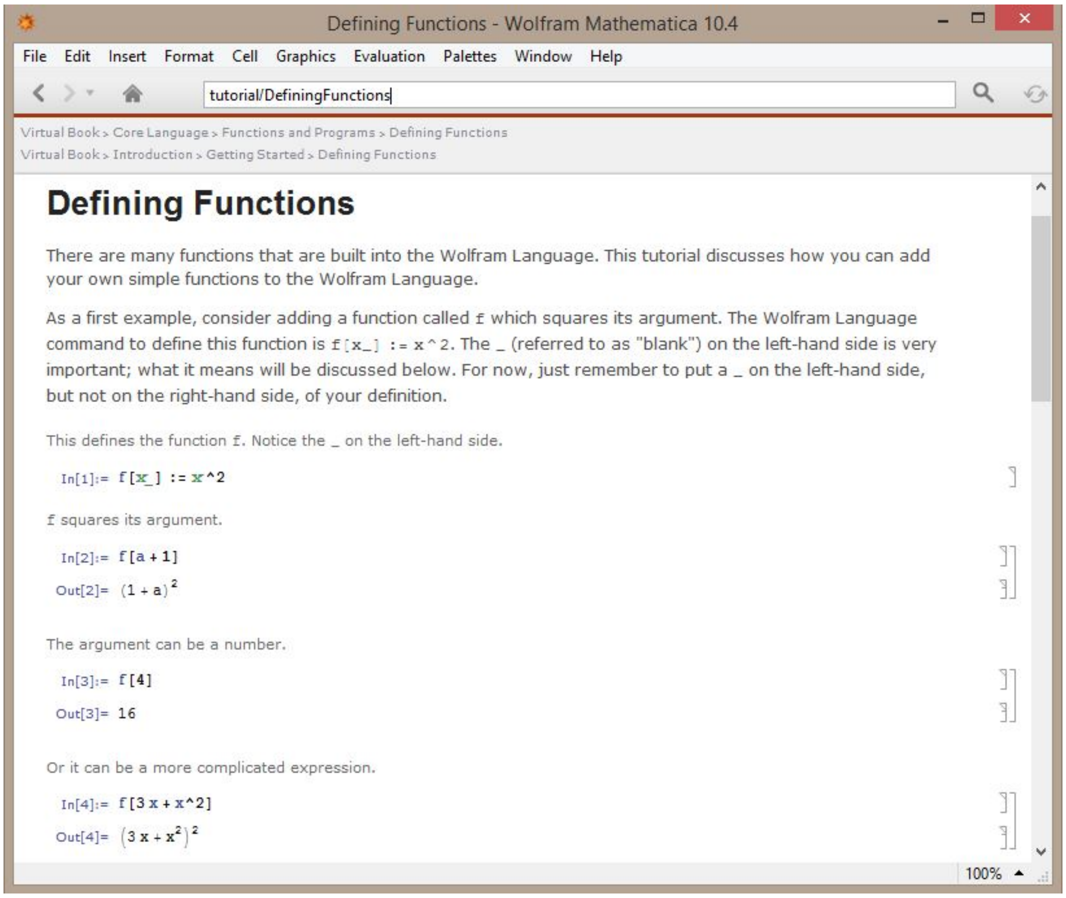
Koliko funkcija g možemo definirati iz skupa $\{31, 32, 33\}$ u skup $\{Ana, Marija, Ivan\}$ koje će opisati sjedenje troje prijatelja u autobusu, tako da sjedalima pridružuje ljude? Ispišite sve takve funcije. Pokažite da ih ima 6.

Primjer 1.6 *Ako u prethodnom primjeru uzmemo istu domenu funkcije f (iste ljude), isto pravilo pridruživanja, ali sjedala $\{31, 32, 33, 34\}$ među kojima trebaju izabrati gdje će sjesti, tada je slika funkcije skup $\{31, 32, 33\}$, a kodomena funkcije skup $\{31, 32, 33, 34\}$.*

Primjer 1.7 *Kod početnog korištenja programa Wolframova Mathematica, često ćemo pogledati što piše u kućici help.*



Tamo ćete naći točke Function Navigator i Find Selected Function, koje definitivno spadaju u najviše korištene pomoćne opcije. Pogledajte kako se definira funkcije pomoću Wolframa. Izračunajte neke funkcijske vrijednosti za definirane funkcije.



Primjer 1.8 *U svim dosadašnjim primjerima osim u primjeru 1.2 naše funkcije imale su samo jednu varijablu. U primjeru 1.2 funkcija je imala 3 varijable. Općenito funkcija može imati više varijabli. Neka su cijene raznih proizvoda* c_1, c_2, c_3. *Ako je netko kupio* 5 *proizvoda cijene* c_1, 7 *proizvoda cijene* c_2 , 3 *proizvoda cijene* c_3, *onda je funkcijom*

$$f(c_1, c_2, c_3) = 5c_1 + 7c_2 + 3c_3$$

određen ukupan iznos koji treba platiti za sve što je kupljeno.

Funkcija f *uzima trojke pozitivnih brojeva i kao rezultat daje jedan pozitivan broj, jer su cijene pozitivni brojevi. U nekim trgovinama postoje popusti na ukupnu cijenu kupnje, pa možemo definirati novu funkciju koja će nam koristiti u tim situacijama. Neka je popust na ukupnu cijenu* 15%, *tada kupac plaća*

$$0.85 \cdot (5c_1 + 7c_2 + 3c_3).$$

U slučaju da se popust P *mijenja ovisno o danu, praktično je definirati novu funkciju* g *u kojoj će popust* P *biti nova varijabla*

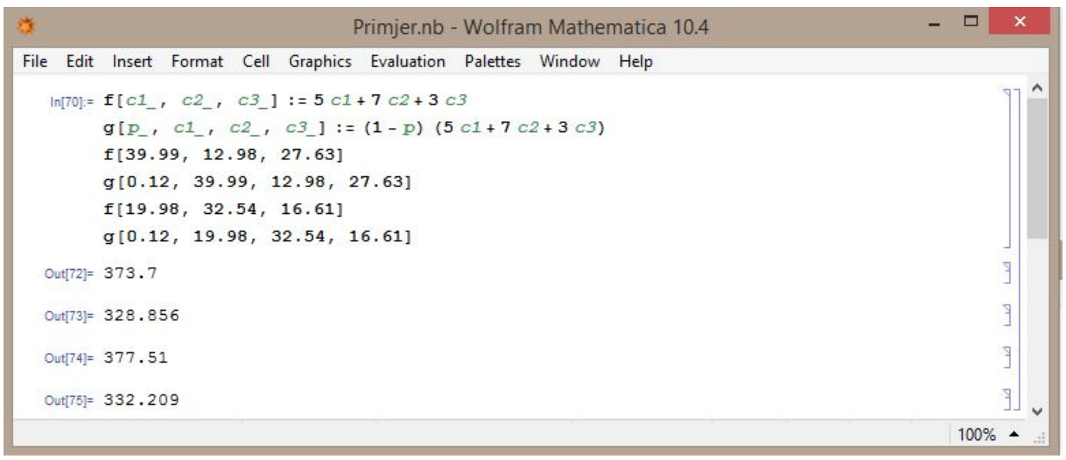
$$g(P, c_1, c_2, c_3) = (1 - P)(5c_1 + 7c_2 + 3c_3).$$

Opisani slučaj s popustom 15% *dobivamo za* $P = 0.15$.

Primjer 1.9 *Definirajte u Wolframovoj Mathematici funkcije f i g iz primjera 1.8, te izračunajte ukupne cijene bez popusta i s popustom* 12% *za*

1. $c_1 = 39.99, c_2 = 12.98, c_3 = 27.63$

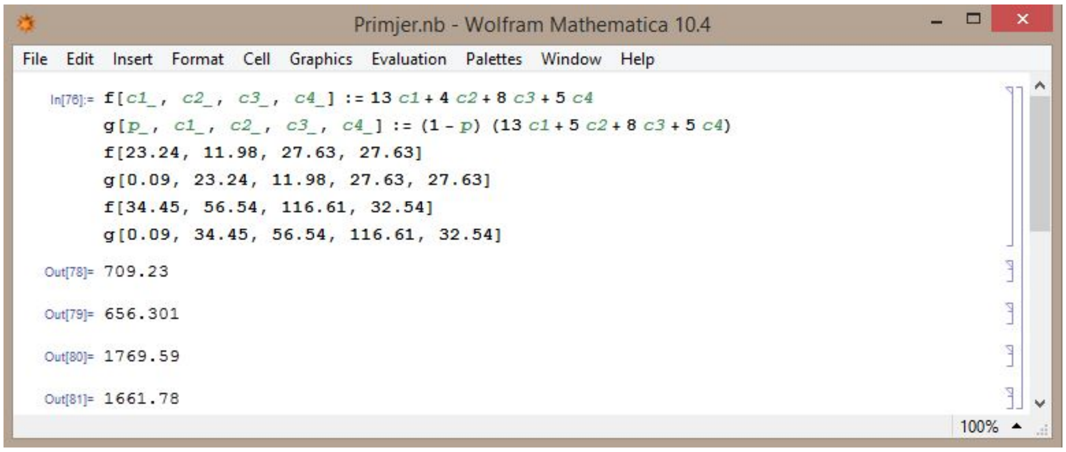
2. $c_1 = 19.98, c_2 = 32.54, c_3 = 16.61$



Primjer 1.10 *Definirajte u Wolframovoj Mathematici funkcije kao iz primjera 1.8, ali za kupnju proizvoda cijena c_1, c_2, c_3, c_4, od kojih je redom kupljeno* 13, 4, 8, 5 *komada, te izračunajte ukupne cijene bez popusta i s popustom* 9% *za*

1. $c_1 = 23.24, c_2 = 11.98, c_3 = 27.63, c_4 = 27.63$

2. $c_1 = 34.45, c_2 = 56.54, c_3 = 116.61, c_4 = 32.54$



Primjer 1.11 *Najopćenitiji oblik funkcije koja se javljala u prethodnim primjerima je*

$$f(P, c_1, \ldots, c_n, k_1, \ldots, k_n) = (1 - P)(k_1 c_1 + \ldots k_n c_n),$$

gdje su c_i cijene proizvoda, k_i pripadne količine proizvoda, $i = 1 \ldots n$, a P popust. Za $P = 0$ dobivamo situaciju kad nema popusta.

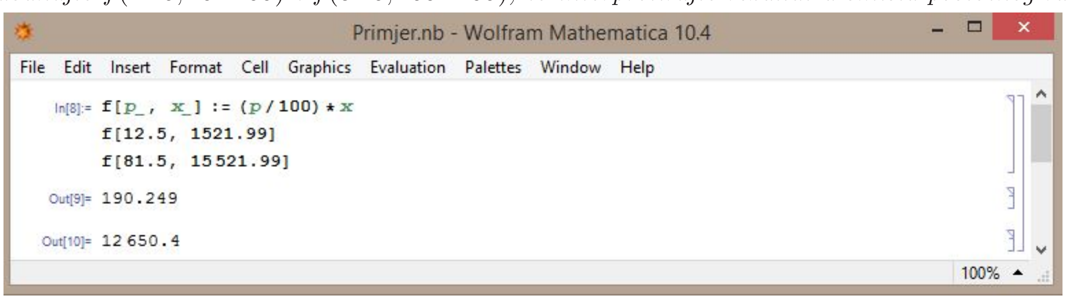
Primjer 1.12 *Standardnu formulu za računanje postotka*

$$y = \frac{p}{100}\, x$$

također možemo smatrati funkcijom dviju varijabli p, x gdje je p postotak, a x ukupna suma. Postotni iznos y se dobije kao vrijednost funkcije

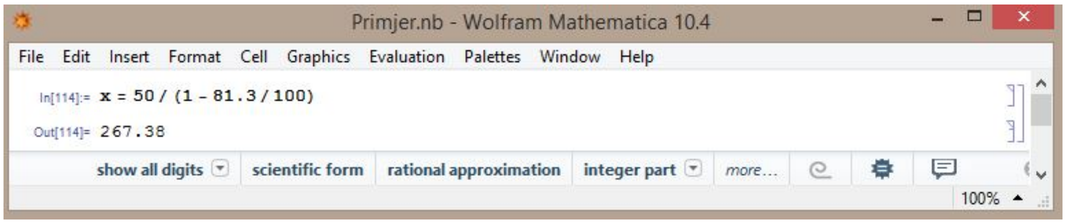
$$f(p, x) = \frac{p}{100}\, x$$

Izračunajte $f(12.5, 1521.99)$ i $f(81.5, 15521.99)$, te interpretirajte rezultat u smislu postotnog računa.



Interpretacija u smislu postotnog računa kaže da 12.5% *od* 1521.99 *iznosi* 190.249. *Analogno je za ovaj drugi iznos.*

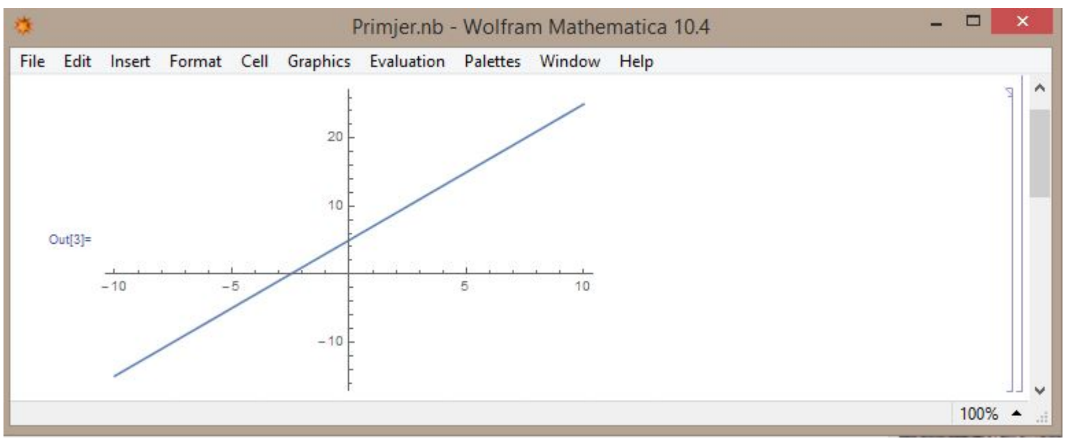
Primjer 1.13 *Sušenjem otpada* 81.3% *ukupne mase gljiva. Koliko gljiva trebamo ubrati da dobijemo* 50 kg *suhih gljiva?*



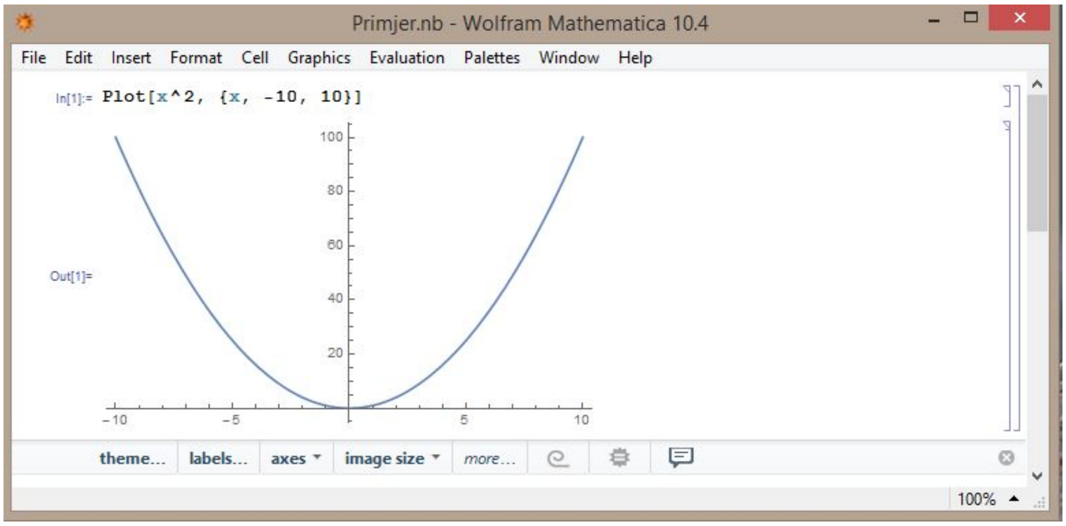
Oznakom x označimo ukupnu količinu gljiva, pa je računamo iz izraza $(1-0.813)x = 50$ i dobivamo $x = 267.38$ kg.

Primjer 1.14 *Već vam je poznata linearna funkcija koja je zadana formulom $f(x) = ax + b$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, neki fiksni realni brojevi, a x je varijabla. Pitamo se za koje $x \in \mathbb{R}$ postoji $f(x)$, pa lako odgovaramo da je to svaki realan broj.* **Područje definicije**, *odnosno* **domena** *linearne funkcije je skup realnih brojeva $\mathbb{R}$. Područje definicije, odnosno domenu neke funkcije čine svi brojevi za koje je neka funkcija definirana. Za linearnu funkciju pišemo $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.*

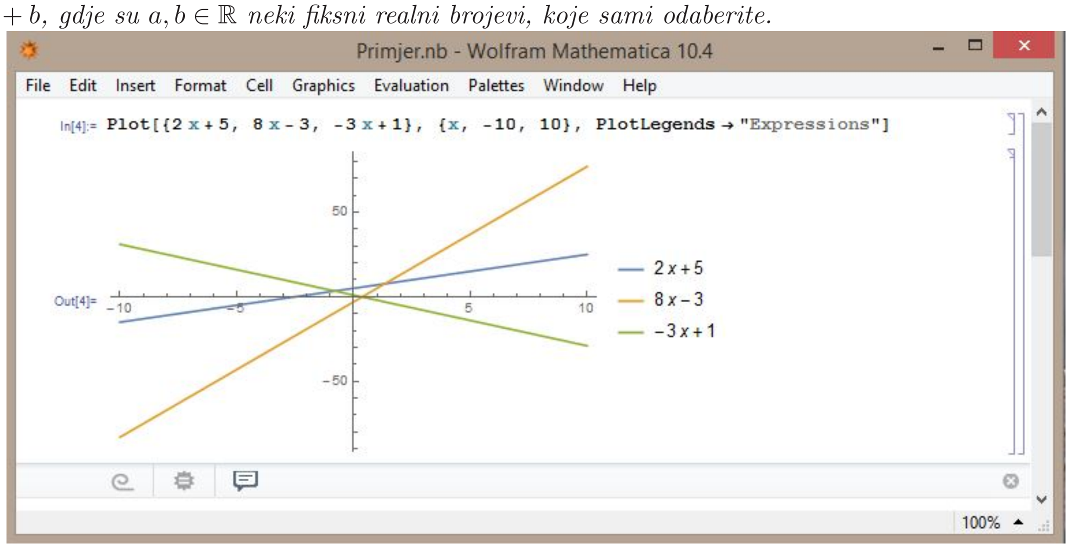
Nadalje, mijenjajući brojeve $x \in \mathbb{R}$ dobivamo različite vrijednosti od $f(x)$. Gledajući pravac koji je graf linearne funkcije primjećujemo da je skup svih **funkcijskih vrijednosti** *$f(x)$, odnosno* **slika funkcije** *baš cijeli skup realnih brojeva. Pišemo $\mathcal{R}(f) = \mathbb{R}$. U ovom slučaju pišemo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*



Graf funkcije *čine sve točke $(x, f(x))$ za koje je $x \in \mathcal{D}$. Graf linearne funkcije je pravac, dok je graf kvadratne funkcije parabola.*



Primjer 1.15 *Pomoću Wolframove Mathematice nacrtajte grafove nekih linearnih funkcija* $f(x) = ax + b$, *gdje su* $a, b \in \mathbb{R}$ *neki fiksni realni brojevi, koje sami odaberite.*



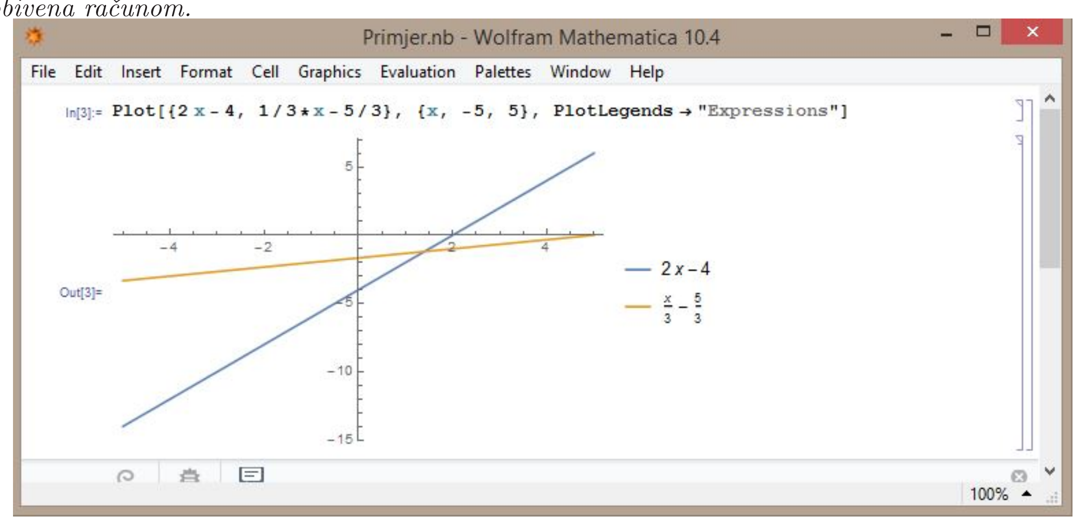
U linearnoj funkciji $f(x) = ax + b$, a je **koeficijent smjera pravca**, a b nazivamo **odrezak na osi** y. Uočite da o koeficijentu a ovisi nagib pravca. Ako je $a > 0$ pravac s pozitivnim dijelom osi x zatvara kut manji od 90°, a ako je $a < 0$, onda pravac s pozitivnim dijelom osi x zatvara kut veći od 90°.

Primijetite da je linearna funkcija definirana formulom na skupu realnih brojeva, koji je beskonačan skup. Funkcije iz primjera s aparatom za kavu, aparatom za kruh i raspodjelom namirnica po ljudima su bile funkcije definirane na konačnim skupovima. Definirane su bile na način da je točno određeno kako funkcija djeluje na svakom elementu domene funkcije. Nije bilo neke opće formule u koju se može uvrstiti bilo koji broj, kao što je slučaj kod linearne funkcije.

Primjer 1.16 *Izračunajte u kojoj točki se presjecaju pravci koji su grafovi funkcija*

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x - 4 \qquad (1.1) \\ g(x) &= \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Nacrtajte pravce pomoću Wolframove Mathematice i provjerite odgovara li njihov presjek točki koja je dobivena računom.



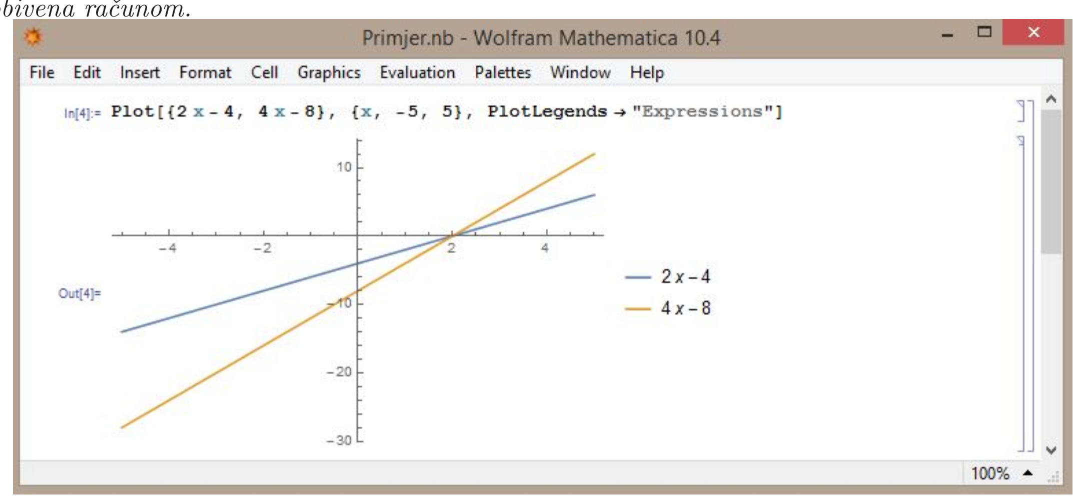
Rješenje.

$(\frac{7}{5}, -\frac{6}{5})$.

Primjer 1.17 *Izračunajte u kojoj točki se presjecaju pravci koji su grafovi funkcija*

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x - 4 \qquad (1.2) \\ g(x) &= 4x - 8. \end{aligned}$$

Nacrtajte pravce pomoću Wolframove Mathematice i provjerite odgovara li njihov presjek točki koja je dobivena računom.



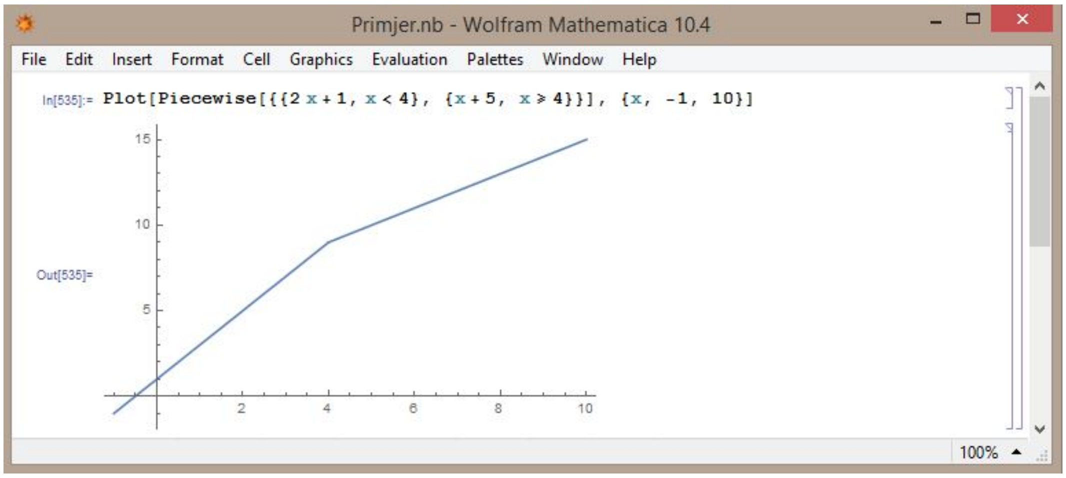
Rješenje.

$(2, 0)$.

U primjenama će nam trebati linearna funkcija koja prikazuje ovisnost puta o vremenu kod jednolikog gibanja. Kod promjene brzine dolazi do promjene koeficijenta smjera linearne funkcije, pa se pojavljuju funkcije koje nazivamo po dijelovima linearne. U ekonomiji se također pojavljuju funkcije ovog tipa.

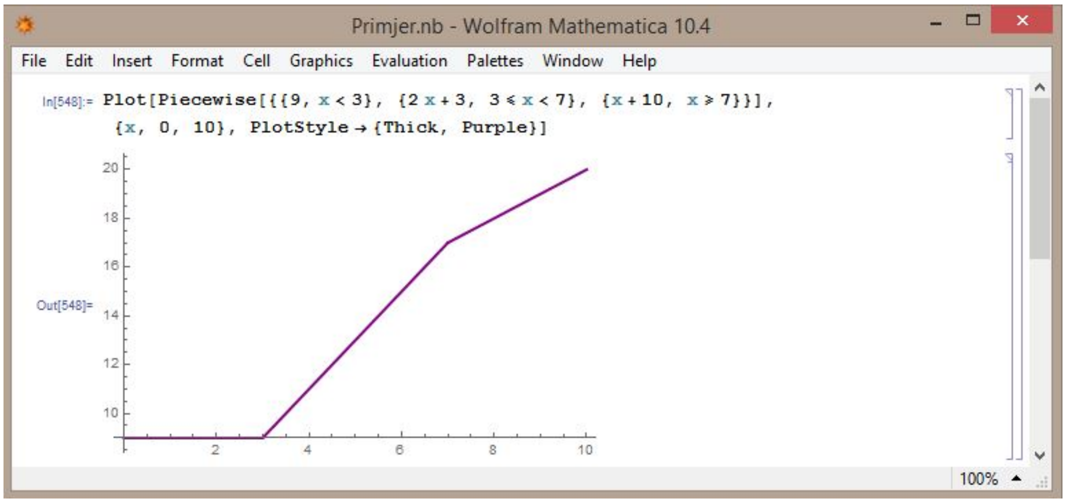
Primjer 1.18 *Nacrtajte graf funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadane s*

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{za } x < 4 \\ x + 5 & \text{za } x \geq 4 \end{cases}$$



Primjer 1.19 *Nacrtajte graf funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadane s*

$$f(x) = \begin{cases} 9 & \text{za } x < 3 \\ 2x + 3 & \text{za } 3 \leq x < 7 \\ x + 10 & \text{za } x \geq 7 \end{cases}$$



Pokušajte sami dobiti graf na kojemu se jasnije vidi da je $f(x) = 9$ za $x < 3$.

Funkciju $f(x) = ax + b$ nazivamo linearnom funkcijom, ali u matematici se često ta funkcija naziva afina funkcija, dok je linearna funkcija $f(x) = ax$. Na taj suženi način definirana linearna funkcija usklađena je s teorijom linearnih operatora. Djelovanjem linearnih operatora na geometrijske objekte, objekti se rotiraju, preslikavaju u simetrične, rastežu i stežu u određenim smjerovima, što se koristi kod kompjuterske grafike. Mi ćemo koristiti širi pojam za linearnu funkciju, pa je za nas linearna funkcija $f(x) = ax + b$.

Primjer 1.20 *Funkcija* $f(c_1, c_2, c_3) = 5c_1 + 7c_2 + 3c_3$ *iz primjera 1.8 je isto linearna funkcija, samo ima 3 varijable. Za funkciju jedne varijeble pišemo* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *a ako imamo 3 ulazne varijable i jednu izlaznu vrijednost onda trebamo napisati*

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Naša funkcija iz primjera s cijenama ima pozitivne ulazne varijable i pozitivnu izlaznu vrijednost, pa to naglašavamo pišući $\mathbb{R}^+$ *umjesto* $\mathbb{R}$,

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+.$$

Uočimo da funkcija

$$g(P, c_1, c_2, c_3) = (1 - P)(5c_1 + 7c_2 + 3c_3),$$

nije linearna jer dolazi do množenja varijable P *s ostalim varijablama. Naglasimo da linearna funkcija, bez obzira na to koliko varijabli ima, uvijek ima samo zbrajanje članova koji su varijable množene konstantama ili konstante*

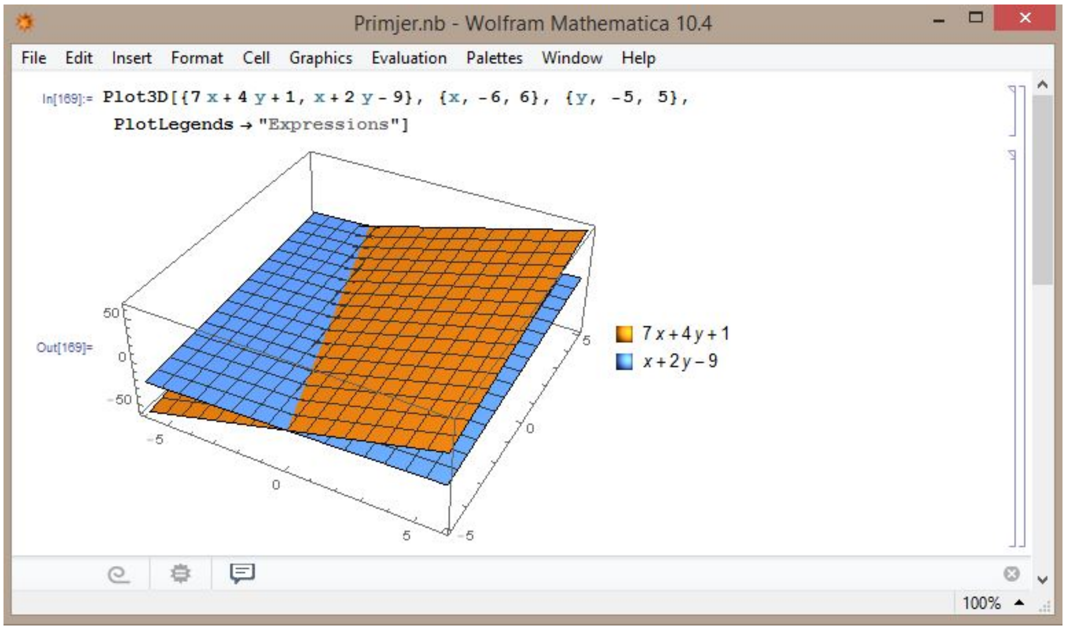
$$const_1\, var_1 + const_2\, var_2 + \cdots + const_n\, var_n + const_{n+1}.$$

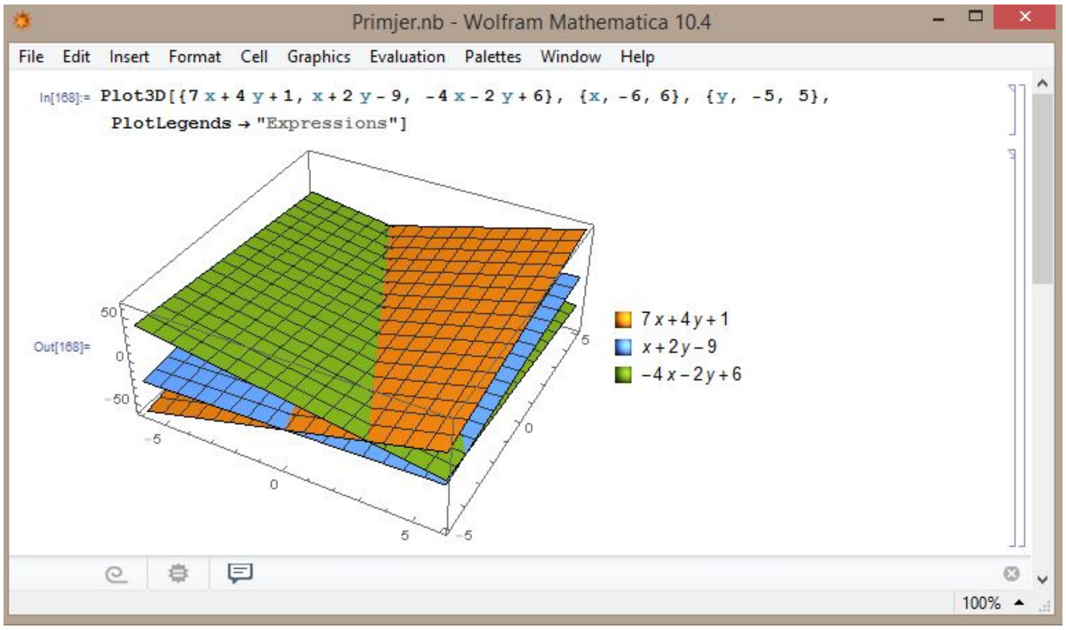
Spomenuli smo da graf funkcije čine sve točke $(x, f(x))$ *za koje je* $x \in \mathcal{D}$ *te da je graf linearne funkcije jedne varijable pravac koji leži u ravnini. Točke* $(x, f(x))$ *imaju dvije koordinate, pa iz toga zaključujemo da leže u ravnini.*

Što se događa ako imamo više varijabli? Iz točke $(x, f(x))$ *s grafa funkcije jasno je, da ako imam dvije ulazne varijable* (x, y), *onda se graf funkcije sastoji od točaka* $(x, y, f(x, y))$. *Točke koje imaju* 3 *koordinate su točke* $3-$*dimenzionalnog prostora. Graf funkcije dviju varijabli nalazi se u* $3-$*dimenzionalnom prostoru, dok se graf funkcije triju varijabli nalazi u* $4-$*dimenzionalnom prostoru, i tako dalje... S obzirom da mi živimo u* $3-$*dimenzionalnom prostoru, lako nam ga je zamisliti, što za prostore s višim dimenzijama nije slučaj... Stoga, osim grafova funkcija jedne varijable, crtat ćemo i grafove nekih jednostavnih funkcija dviju varijabli. Graf linearne funkcije dviju varijabli je ravnina. Nacrtajte grafove nekoliko funkcija oblika*

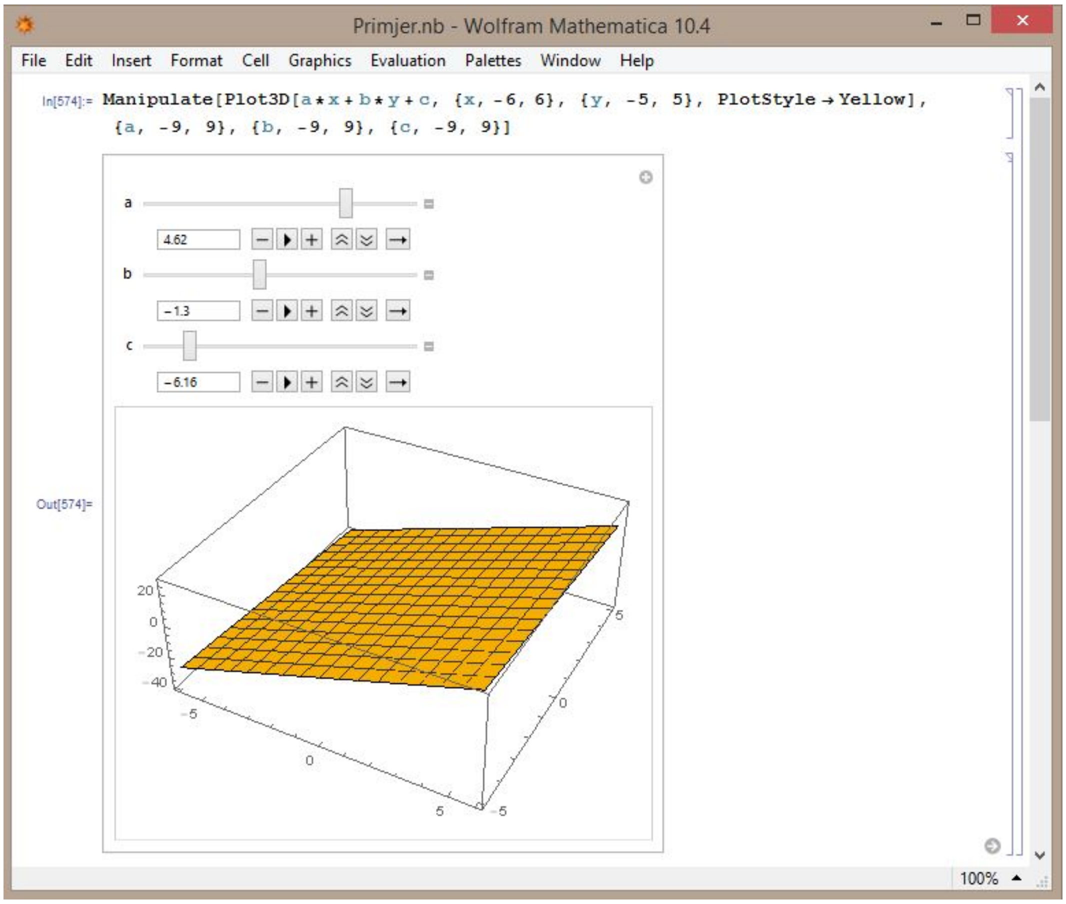
$$f(x, y) = ax + by + c$$

uzimajući različite a, b, c.





Okrećite kvadar u kojem se nalazi graf funkcije!



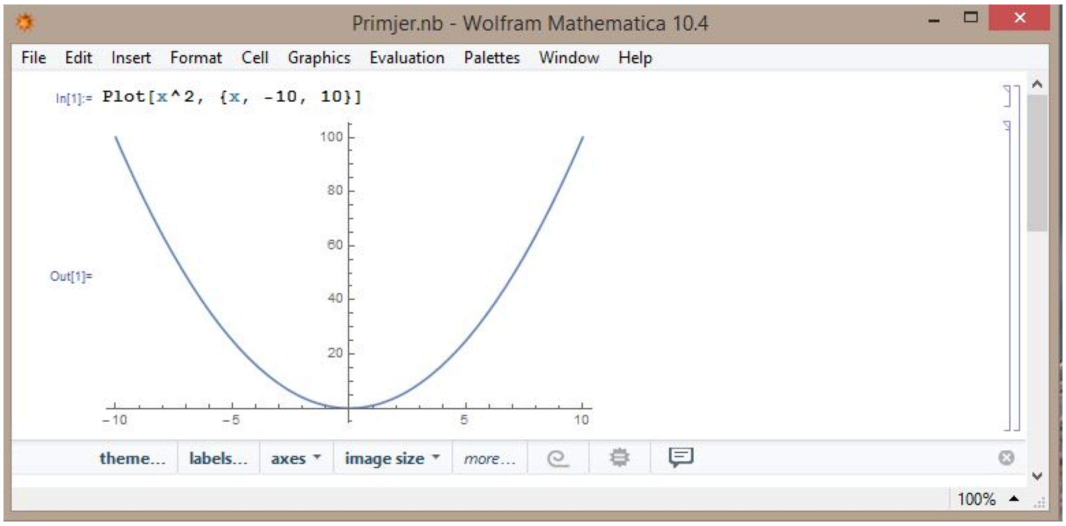
Mijenjajte a, b, c i promatrajte što se događa s ravninom! U poglavlju 5 saznat ćete više o ravninama.

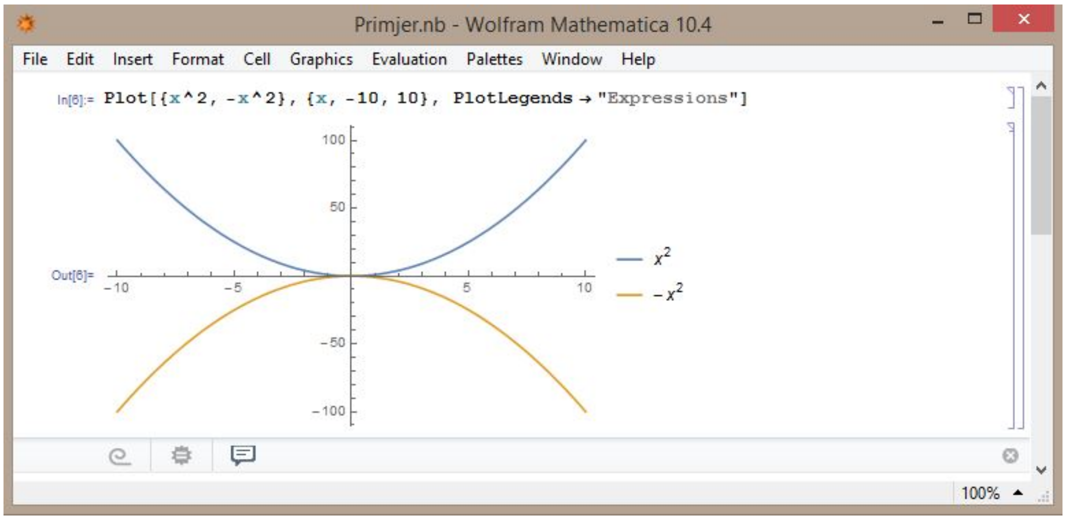
U dosadašnjim primjerima imali smo funkcije zadane na konačnom skupu. Funkcije su bile definirane tako da je posebno određeno djelovanje na svakom elementu domene. Imali smo već linearne funkcije koje se prirodno javljaju iz mnogih životnih problema, a bit će ih još u poglavlju o matematičkom modeliranju. Često se javljaju funkcije koje su po dijelovima linearne, odnosno koje su sastavljene od komada grafova nekoliko linearnih funkcija kao u primjeru 1.18. U primjeru 1.20 prirodno se pojavila funkcija više varijabli koja nije linearna. Pri rješavanju problema iz života, znanosti i tehnike javljaju se različite funkcije ili aproksimacije funkcijama. O aproksimacijama trigonomatrijskim funkcijama bit će malo više rečeno u poglavlju 3, a o aproksimacijama polinomima u poglavlju 4.

Kvadratne funkcije, korijeni, racionalne, eksponencijalne i logaritamske funkcije se također javljaju pri rješavanju mnogih problema, kao što ćemo vidjeti u poglavlju o matematičkom modeliranju tim funkcijama. Spomenimo sad samo nekoliko primjena. Ovisnost prijeđenog puta o vremenu pri jednolikom ubrzanom gibanju je kvadratna, ovisnost brzine o polumjeru zavoja kojim se vozilo giba izražena je pomoću korijena, električni potencijal točkastog naboja izražen je racionalnom funkcijom. U fizici i biologiji često je brzina promjene neke veličine proporcionalna toj veličini. Ovisnost te veličine o vremenu dana je eksponencijalnom funkcijom. Primjer takve ovisnosti je rast bioloških ćelija (bakterija, biljaka i slično, zakon radioaktivnog raspada, apsorpcija elektromagnetskog zračenja). Kod mjerenja buke primjenjuje se logaritamska skala, kao što ćete vidjeti u primjerima s modeliranjem logaritamskom funkcijom. Trigonometrijskim funkcijama opisujemo gibanje ljuljačke, položaj kuglice koja titra na opruzi pod utjecajem elastične sile i ostala periodička ponašanja. Prigušene oscilacije nekog tijela ili nekog sustava opisujemo pomoću eksponencijalne i trigonometrijske funkcije, kao što ćemo vidjeti u poglavlju o modeliranju trigonometrijskim funkcijama.

Primjer 1.21 *Kvadratna funkcija je zadana formulom* $f(x) = ax^2 + bx + c$*, gdje su* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *neki fiksni realni brojevi, a* x *je varijabla. Uzmimo u ovom primjeru* $a = 1, b = c = 0$*. Jasno je da je funkcije* $f(x) = x^2$ *definirana za svaki* $x \in \mathbb{R}$*, pa je* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$*. Funkcijske vrijednosti su samo pozitivni brojevi i nula, pa je slika funkcije* $\mathcal{R}(f) = \mathbb{R}_0^+$*. Možemo pisati*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+.$$





Uveli smo pojam domene, odnosno područja definicije funkcije $\mathcal{D}(f)$. To je skup svih vrijednosti x za koje je neka funkcija definirana. Uveli smo i pojam slike funkcije $\mathcal{R}(f)$. To je skup svih funkcijskih vrijednosti $f(x)$, za x iz domene funkcije. **Kodomena funkcije** $\mathcal{K}(f)$ je neki skup u kojem je sadržan $\mathcal{R}(f)$. U primjeru 1.21 možemo smatrati da je kodomena $\mathcal{K}(f) = \mathbb{R}_0^+$ ili bilo koji skup koji sadrži $\mathbb{R}_0^+$.

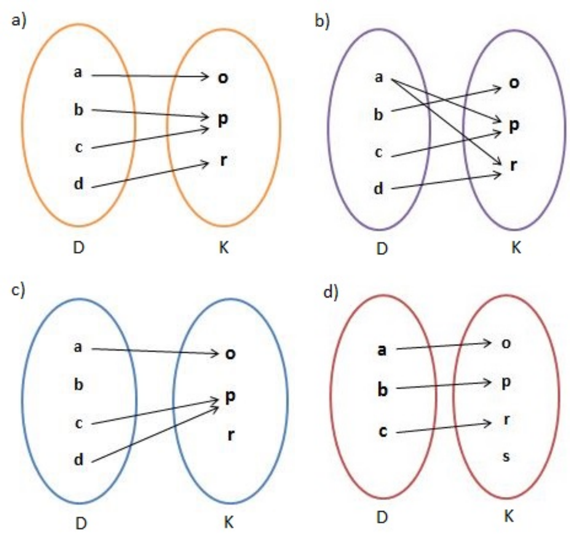
Često za realne funkcije uzimamo da je kodomena $\mathcal{K}(f) = \mathbb{R}$. Najmanju moguću kodomenu, a to je slika funkcije, računamo onda kad nam je to potrebno, o čemu će biti govora u daljem tekstu.

Definicija 1 *Neka su $\mathcal{D}$ i $\mathcal{K}$ neki skupovi.* **Funkcijom** *f na skupu $\mathcal{D}$ s vrijednostima u skupu $\mathcal{K}$ nazivamo bilo koji postupak kojim se* **svakom elementu skupa $\mathcal{D}$ pridruži samo jedan element skupa** *$\mathcal{K}$. Pišemo $f : \mathcal{D} \to \mathcal{K}$.*

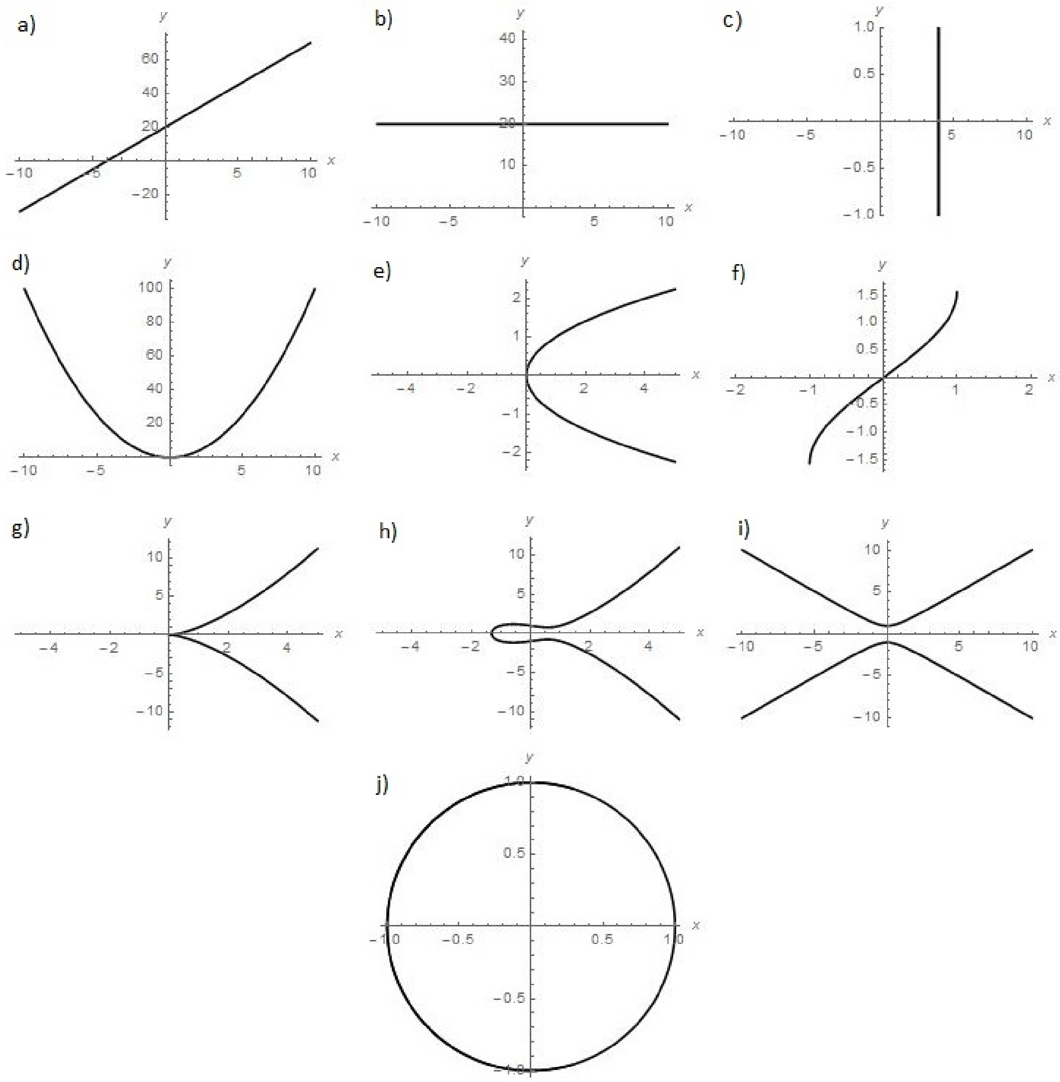
Važno je uočiti što stvarno znači dio rečenice iz gornje definicije, koji kaže da svakom elementu skupa $\mathcal{D}$ pridružujemo samo jedan element skupa $\mathcal{K}$.

Primjer 1.22 *Neka je $\mathcal{D}$ skup svih gradova u Hrvatskoj, a $\mathcal{K}$ skup svih rijeka koje prolaze Hrvatskom. Svakom gradu pridružimo rijeku koja prolazi kroz taj grad. Vidimo da nekim gradovima ne možemo pridružiti rijeku, jer niti jedna rijeka ne prolazi kroz taj grad. Kad se dogodi ova situacija, da neki element nema svoj pridruženi element, već možemo zaključiti da ovim pravilom nismo zadali funkciju. Ovdje imamo i drugi problem, a to je da kroz neke gradove prolazi više rijeka, pa bi onda taj grad imao više pridruženih elemenata (rijeka).*

Dakle, izreka svakom elementu skupa $\mathcal{D}$ pridružujemo samo jedan element skupa $\mathcal{K}$ prekršena je dva puta. Nismo svakom elementu pridružili i nismo pridružili samo jedan element. U primjeru 1.3 nacrtali smo košaru s namirnicama iz trgovine i kuću u kojoj žive ljudi, pa smo radili pridruživanje između elemenata košare i elemenata kuće. U ovom primjeru košara je skup $\mathcal{D}$ svih gradova u Hrvatskoj, a kuća skup $\mathcal{K}$ svih rijeka koje prolaze Hrvatskom. Zbog jednostavnosti uobičajeno je oba skupa, domenu i kodomenu crtati pojednostavnjeno kao na sljedećem dijagramu.

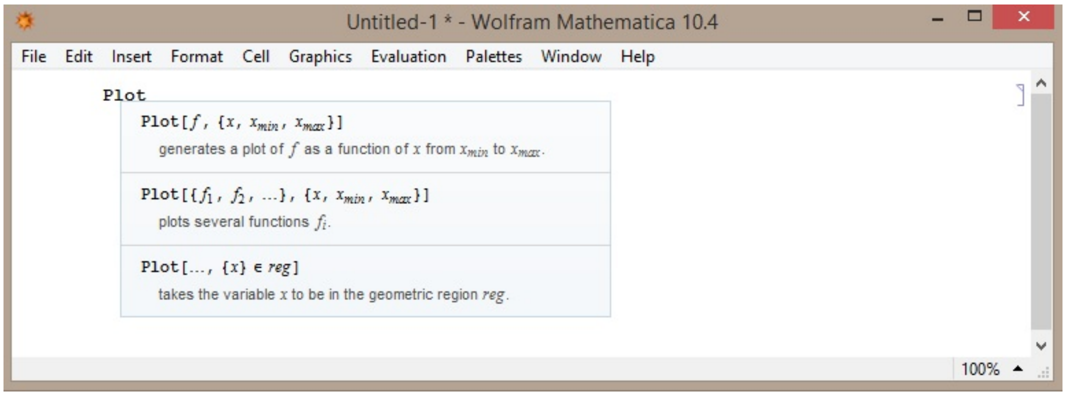


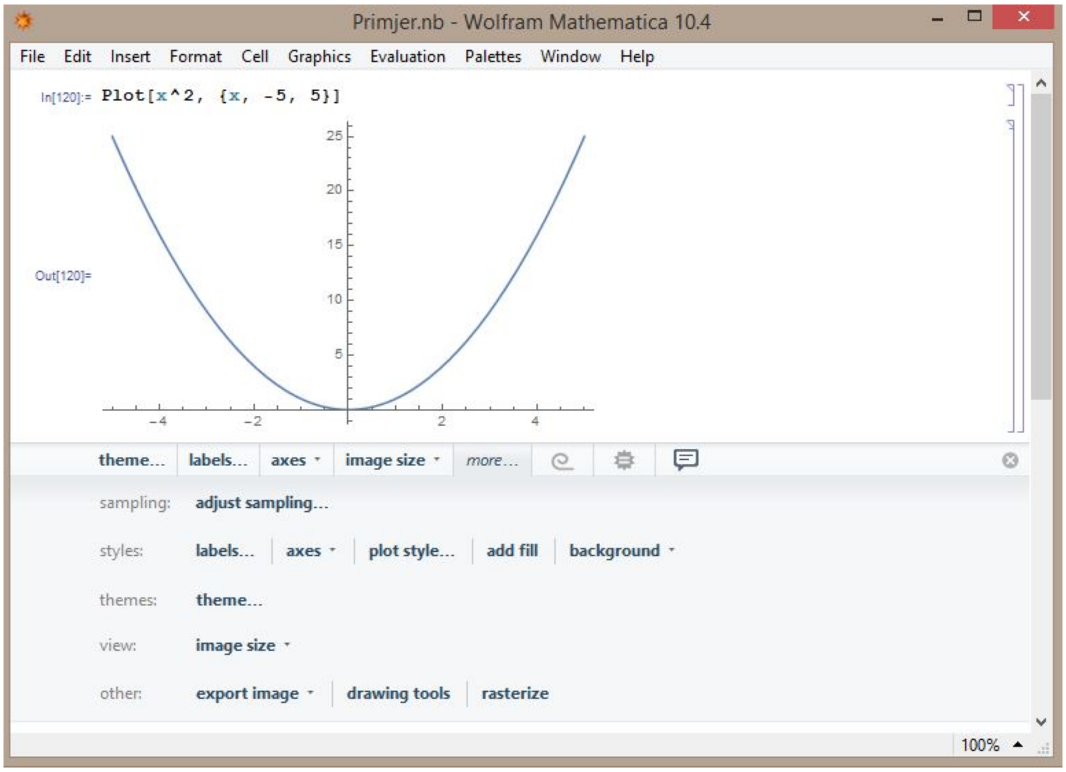
Primjer 1.23 *Ponovimo da funkcija svakom elementu skupa domene pridružuje samo jedan element skupa kodomene. Kad crtamo graf funkcije jedne varijable, onda su elementi domene točke s osi x, te ih označavamo s x. Graf funkcije se sastoji od točaka $(x, f(x))$ i svakom x iz domene mora biti pridružen samo jedan $f(x)$. Na grafu funkcije to znači da ako povučemo pravac kroz x paralelan s osi y, on siječe graf funkcije samo jednom.*



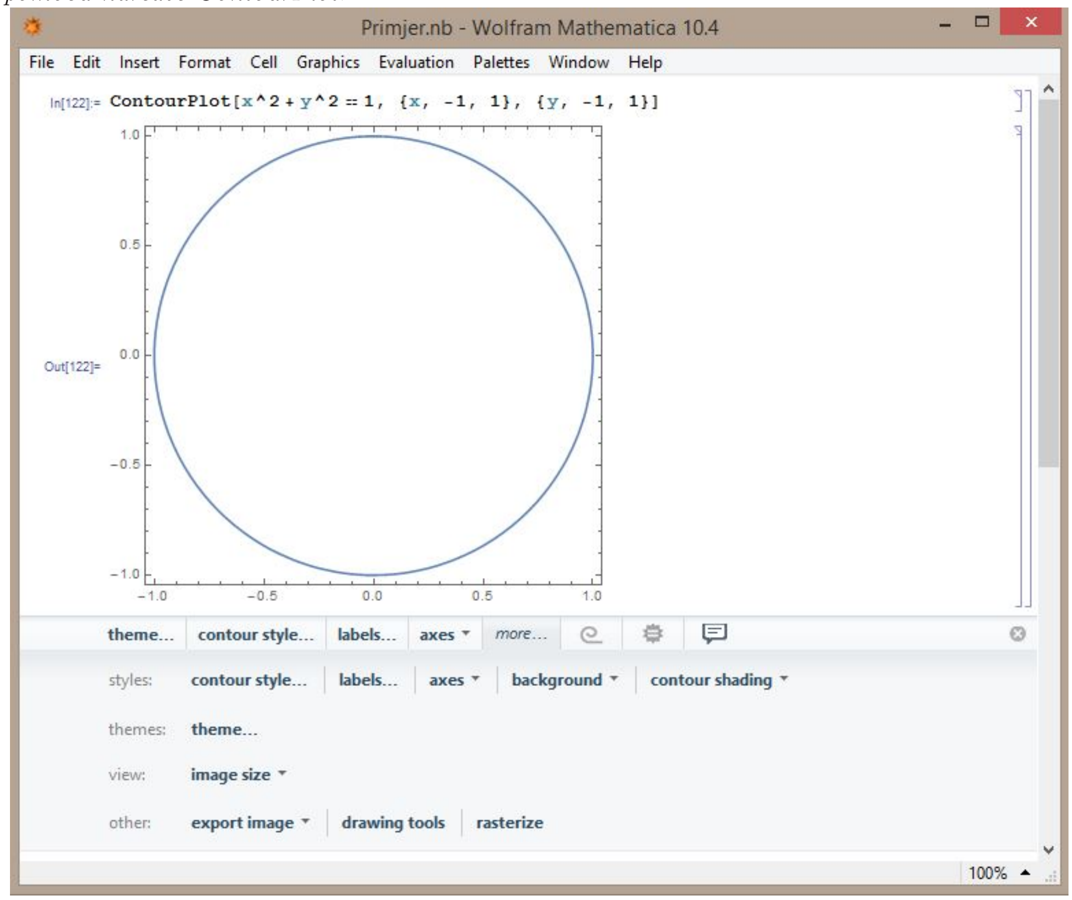
Slika 1.1: a), b), d), f) su grafovi funkcija, c), e), g), h), i), j) nisu grafovi funkcija

Primjer 1.24 *Naredba Plot ima strukturu koja je prilagođena crtanju grafova funkcija. Naredbe iz primjera 1.21 crtaju grafove kvadratnih funkcija.*





Graf koji jednom x pridružuje dvije vrijednosti, kao na primjer u slučaju krivulje $x^2 + y^2 = 1$ crta se pomoću naredbe ContourPlot.



Primjer 1.25 *Pogledajmo graf funkcije iz primjera 1.21 i zapitajmo se je li za funkciju $f(x) = x^2$ zadovoljeno da svakom elementu skupa $\mathcal{D}$ pridružujemo samo jedan element skupa $\mathcal{K}$. To pitanje je ekvivalentno pitanju-da li iznad (ili ispod) svake točke domene funkcije postoji samo jedna točka grafa funkcije? Ovdje je odgovor da, što znači da je nacrtani graf zaista graf funkcije.*

Primjer 1.26 *Označimo s $\mathcal{D}$ skup svih gimnazija u Hrvatskoj, a s $\mathcal{K}_1$ skup ravnatelja svih gimnazija u Hrvatskoj. Svakoj gimnaziji pridružmo samo jednog ravnatelja. Na taj način smo definirali jednu funkciju, nazovimo je f_1. Uočimo da je kodomena funkcije f_1 jednaka slici funkcije, jer u kodomeni nema viška elemenata.*

Primjer 1.27 *Kao u prethodnom primjeru označimo s $\mathcal{D}$ skup svih gimnazija u Hrvatskoj, a s $\mathcal{K}_2$ skup ravnatelja svih škola u Hrvatskoj. Svakoj gimnaziji pridružimo samo jednog ravnatelja. Na taj način smo definirali funkciju f_2. Uočimo da je slika funkcije f_2 skup svih ravnatelja gimnazija u Hrvatskoj, dok je kodomena skup svih ravnatelja škola u Hrvatskoj, što je veći skup. Ovdje u kodomeni imamo viška elemenata, a to su svi oni ravnatelji škola koje nisu gimnazije.*

Postavlja se pitanje jesu li funkcije f_1 i f_2 iz prethodna dva primjera jednake. Odgovor je da nisu, jer funkcije su jednake ako imaju

1. jednake domene
2. jednake kodomene
3. jednaka pravila pridruživanja.

Naše dvije funkcije imaju jednake domene i pravila pridruživanja, ali nemaju jednake kodomene.

Primjer 1.28 *Definirane su funkcije* $g_1 : \mathcal{D}(g_1) \to \mathbb{R}$, $g_2 : \mathcal{D}(g_2) \to \mathbb{R}$ *formulama*

$$g_1(x) = x - 1,$$

$$g_2(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}.$$

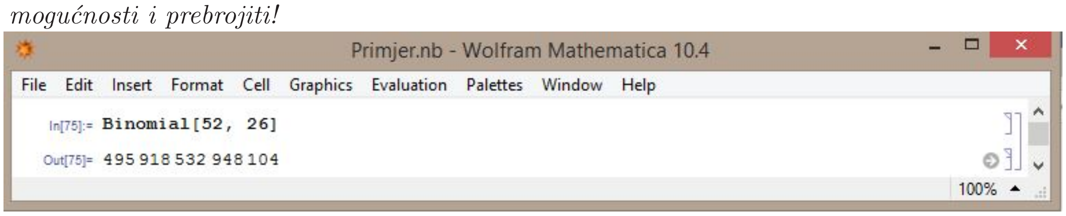
Nakon kraćenja razlomka kod funkcije g_2*, dobivamo da su pravila pridruživanja za obje funkcije jednaka. Ipak funkcije nisu jednake jer su im domene različite,* $\mathcal{D}(g_1) = \mathbb{R}$*, dok je* $\mathcal{D}(g_2) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Primjer 1.29 *Jedan razred sa* 26 *učenika ide u kino u kojemu ima* 52 *mjesta. Neka su učenici određeni brojevima* $1, 2, \ldots 26$ *i mjesta u kinu određena brojevima* $1, 2, \ldots 52$*. Domena funkcije je skup učenika, a kodomena skup sjedala u kinu. Funkciju moémo definirati bilo kojim pravilom kojim se točno zna koje su vrijednosti* $f(1), f(2), \ldots f(26)$*. Jedno od mogućih pravila je* $f(n) = 2n$*. Koliko ima funkcija koje mogu definirati sjedenje ovog razreda u kinu?*

Rješenje je broj

$$52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot \ldots 27$$

jer se prvi učenik može smjestiti na 52 *načina, drugi na* 51 *način i tako dalje, sve do* 26*. učenika koji se može smjestiti na* 27 *načina. Možete u zadatku uzeti neke manje brojeve učenika i mjesta, pa ispisati sve mogućnosti i prebrojiti!*



1.3 Bijekcija

Pojam bijekcije je matematički pojam koji će nam omogućiti definiranje funkcije iz domene u kodomenu, ali i obrnuto, iz kodomene u domenu. U primjeru 1.1 s aparatom Kačakak definirali smo funkciju iz domene $\{c, z, s\}$, gdje c predstavlja crnu patronu, z zelenu, a s smeđu, u kodomenu $\{kav, caj, kak\}$, gdje kav predstavlja kavu, caj je čaj, a kak je kakao. Možemo definirati funkciju g koja ide obrnuto, iz kodomene $\{kav, caj, kak\}$ u domenu $\{c, z, s\}$

$$\begin{aligned} g(kav) &= c \\ g(caj) &= z \\ g(kak) &= s. \end{aligned}$$

Takvo preslikavanje g, ako ga možemo definirati, nazivamo inverznim preslikavanjem preslikavanja f. U primjeru 1.3 smo spomenuli da ne možemo definirati funkciju koja ide iz kodomene u domenu, odnosno inverznu funkciju. Podsjetimo se da je problem bila situacija kad se dvjema varijablama pridružuje ista vrijednost

$$\begin{aligned} f(sir) &= mama \\ f(pivo) &= mama, \end{aligned}$$

pa se onda kod obrnutog pridruživanja ne zna što uzeti. Hoćemo li uzeti

$$g(mama) = sir$$

ili

$$g(mama) = pivo?$$

Pojam bijekcije funkcije nam pomaže kod razlikovanja funkcija kojima možemo definirati inverznu funkciju od onih kojima to ne možemo definirati. Nadalje, otkrivamo zašto se to ne može učiniti i što treba napraviti s funkcijom da je nekako ËťpopravimoËť. Praktično je ne razmišljati o tome trebamo li namirnicama iz kutije pridružiti ljude ili ljudima pridružiti namirnice!

Da li se u hotelu sobama pridružuju brojevi ili brojevima sobe? Kad se dovršava gradnja hotela, onda se sobama pridružuju brave i ključevi s tim brojevima. Kad dođete u hotel i dobijete ključ ili karticu s brojem, onda vi vašem broju pridružujete sobu.

Definicija 2 *Za funkciju $f : \mathcal{D} \to \mathcal{K}$ kažemo da je* **surjekcija** *ako je slika funkcije jednaka kodomeni funkcije, odnosno $\mathcal{R}(f) = \mathcal{K}$.*

Drugim riječima, u kodomeni nema viška elemenata, tamo su samo oni elementi u koje se preslikao neki element iz domene funkcije.

Definicija 3 *Za funkciju $f : \mathcal{D} \to \mathcal{K}$ kažemo da je* **injekcija** *ako*

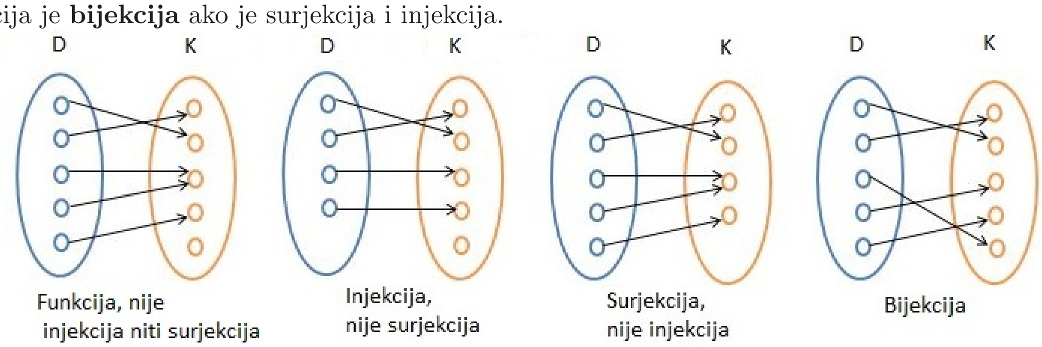
$$x_1 \neq x_2 \quad \textit{povlači} \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

Funkcija je injekcija ako se neka funkcijska vrijednost pojavljuje samo jednom. Gornju definiciju injekcije možemo zapisati na ekvivalentan način.Kažemo da je funkcija injekcija ako

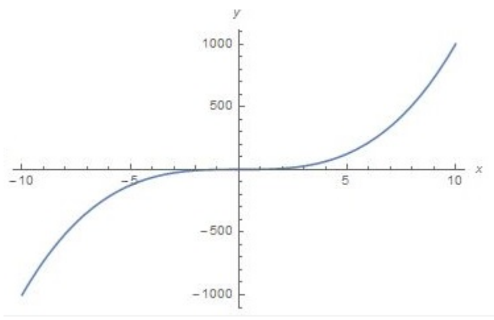
$$f(x_1) = f(x_2) \quad \text{povlači} \quad x_1 = x_2,$$

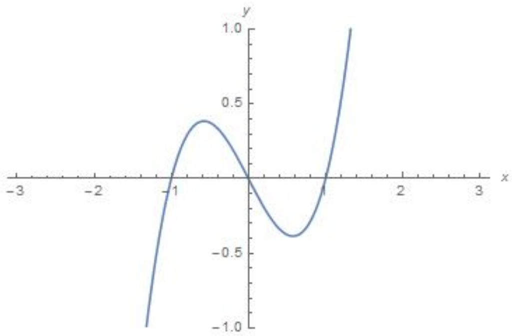
što znači da se mogu dobiti iste vrijednosti funkcije samo ako su točke u kojima se to postiže jednake.

Funkcija je **bijekcija** ako je surjekcija i injekcija.

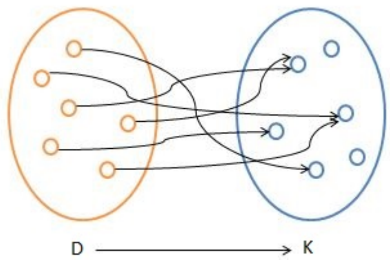


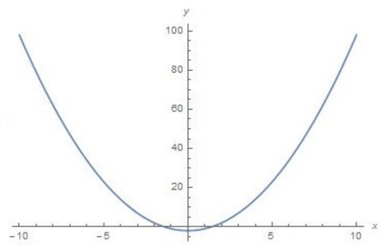
Funkcije iz primjera s aparatom za kavu i strojem za kruh su bijekcije. Injekcije su zato što nema ponavljanja vrijednosti funkcije. Ne mogu patrone različitih boja dati istu vrstu napitka. Ne može





Slika 1.2: Graf bijekcije je lijevo, a desno je graf funkcije koja nije injekcija, pa nije ni bijekcija.





Slika 1.3: Funkcija koja nije surjekcija je lijevo na slici, a graf funkcije koja nije injekcija je desno.

različito brašno dati istu vrstu kruha. Surjekcije su jer svaki element iz kodomene ima svoj element iz domene. Kava ima svoju crnu patronu, čaj svoju zelenu, a kakao svoju smeđu. Surjekciju bismo pokvarili ako bismo proglasili da se kodomena sastoji od kave, čaja, kakaoa i soka. Nema patrone koja bi napravila sok, pa bi takva funkcija prestala biti surjekcija.

Primjer 1.30 *Funkcija iz primjera 1.26 s ravnateljima gimnazija je bijekcija ako smatramo da ne postoje dvije gimnazije koje imaju istog ravnatelja!*

Proučite sve prethodne primjere i zaključite koje funkcije su injekcije i surjekcije!

Na grafu funkcije se lako vidi je li neka funkcija surjekcija, odnosno poklapa li se slika funkcije s kodomenom funkcije. Funkcija je injekcija ako paralela s osi x siječe graf funkcije samo jednom. Sve strogo rastuće i strogo padajuće funkcije su injekcije. Funkcija na nekom intervalu I je strogo rastuća ako

$$x_1 < x_2 \quad \text{povlači} \quad f(x_1) < f(x_2), \text{ za } x_1, x_2 \in I,$$

a strogo padajuća ako

$$x_1 < x_2 \quad \text{povlači} \quad f(x_1) > f(x_2), \text{ za } x_1, x_2 \in I.$$

U životu se strogo rastuće funkcije često javljaju, što se dulje vozimo automobilom, prijeći ćemo više kilometara. Ako se krećemo, ovisnost prijeđenog puta o vremenu je strogo rastuća funkcija. Slično, potrošnja goriva je veća ako prijeđemo više kilometara. Funkcija potrošnje prestaje biti strogo rastuća kad smo na nizbrdici!

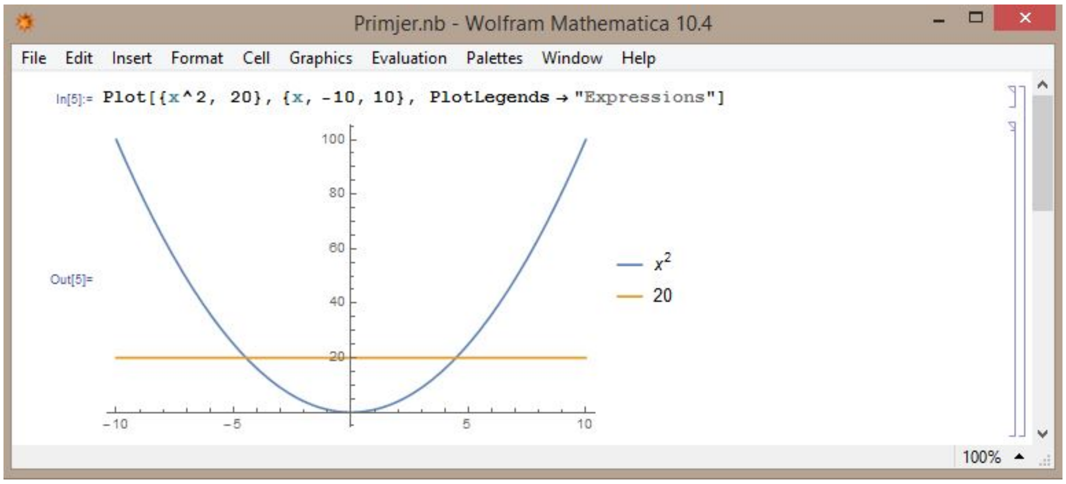
Možemo definirati funkciju koja kao ulaznu varijablu ima broj prijeđenih kilometara puta, a kao izlaznu vrijednost ima broj koji pokazuje koliko je goriva još u spremniku. To je funkcija koju ima ugrađen svaki automobil i kad izlazna vrijednost padne ispod nekog broja, onda se upali crvena lampica na komandnoj ploči automobila. Ta funkcija je padajuća, što više kilometara, to manje goriva u spremniku.

Primjer 1.31 *Linearna funkcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ *je strogo rastuća ako je* $a > 0$, *a strogo padajuća ako je* $a < 0$. *Prema tome, linearna funkcija je injekcija. Već smo u primjeru 1.14 vidjeli da su i slika funkcije i kodomena jednake cijelom skupu realnih brojeva, pa je funkcija surjekcija. Dakle, linearna funkcija je bijekcija. Ako je* $a = 0$, *funkcija je konstanta i ona nije ni injekcija ni surjekcija.*

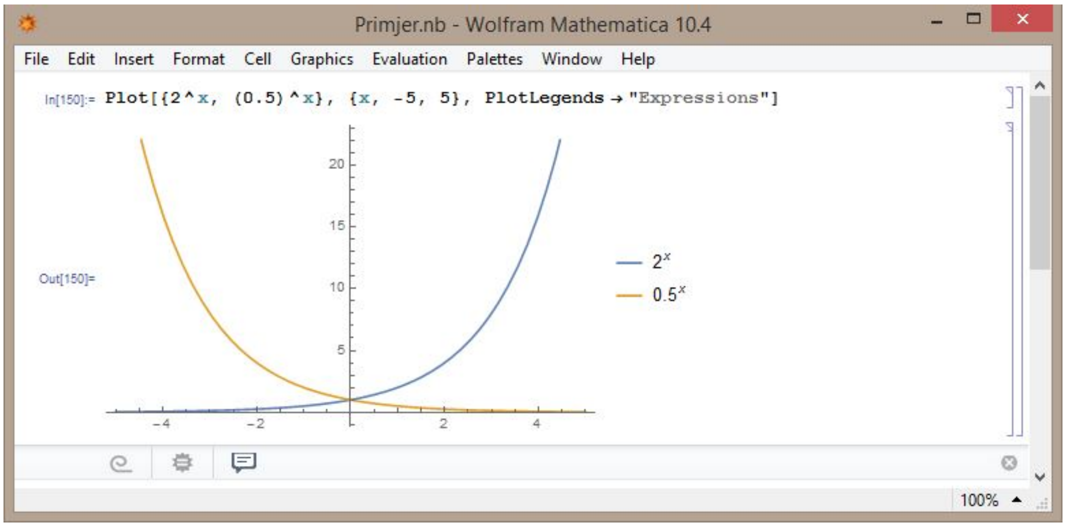
Primjer 1.32 *Kvadratna funkcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ *poprima samo pozitivne vrijednosti i nulu, a kodomena je cijeli skup realnih brojeva, pa funkcija nije surjekcija. Očito je da bi smanjenjem kodomene na* $\mathbb{R}_0^+$ *funkcija postala surjekcija. Točke* x *i* $-x$ *idu u istu vrijednost funkcije*

$$f(-x) = f(x) = x^2,$$

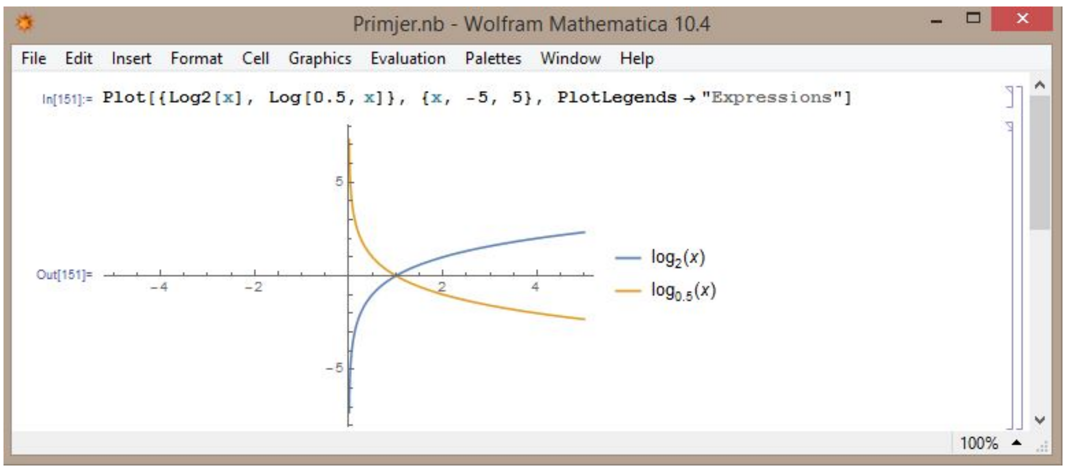
pa funkcija nije injekcija. To se može vidjeti na grafu funkcije, jer ga paralela s osi x, *za* $y > 0$, *siječe dvaput, zbog dvaju ponavljanja iste vrijednosti funkcije.*



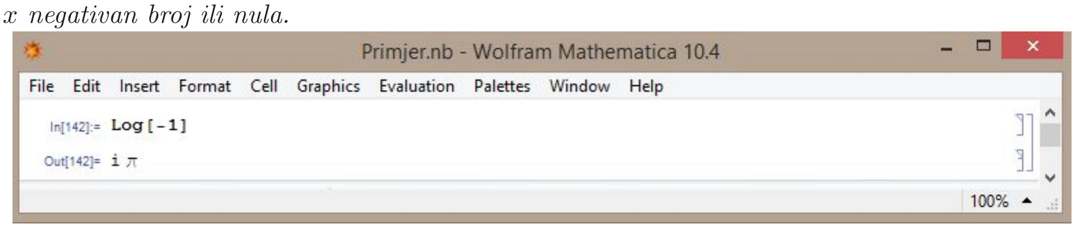
Primjer 1.33 *Eksponencijalna funkcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$, *pri čemu je* $a > 0$, $a \neq 1$ *je strogo rastuća funkcija za* $a > 1$, *a strogo padajuća za* $0 < a < 1$. *U oba slučaja funkcija je injekcija. Ujedno je i surjekcija jer su funkcijske vrijednosti* a^x *pozitivni brojevi i njihov skup se poklapa s kodomenom funkcije.*



Primjer 1.34 *Logaritamska funkcija* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, *pri čemu je* $a > 0$, $a \neq 1$ *je strogo rastuća funkcija za* $a > 1$, *a strogo padajuća za* $0 < a < 1$. *U oba slučaja funkcija je injekcija. Ujedno je i surjekcija jer se kao funkcijske vrijednosti javljaju svi realni brojevi. Funkciju kojoj je baza broj* $e \approx 2.718$ *označavamo s* $f(x) = \ln x$ *i nazivamo prirodnim logaritmom.*



Primjer 1.35 *U Wolframovoj Mathematici funkciju* $f(x) = \ln x$ *dobivamo naredbom* Log[x], *a logaritamsku funkciju s bazom* 10 *dobivamo naredbom* Log10[x]. *Domena logaritamske funkcije su brojevi veći od nule, dakle domena je* $\mathbb{R}^+$. *Istražite što se dogodi ako u Wolframu računamo* Log[x], *pri čemu je* x *negativan broj ili nula.*



Primjer 1.36 *Testirajte hipotezu* $\mathrm{Log}[x] = \mathrm{Log}[-x] + i\,\pi$, *ako je* x *negativan broj, a* i *imaginarna jedinica. Ako u Wolframovoj Matematici uvrstite na primjer* $x = -2$ *u prethodnu formulu dobit ćete* $\mathrm{Log}[-2] = \mathrm{Log}[2] + i\,\pi$. *Kut* π *se javlja jer se negativni brojevi mogu zapisati u obliku* $-2 = 2\cos\pi$. *U poglavlju o trigonometrijskim funkcijama možete naći malo više o tome.*

Osim linearne i kvadratne funkcije, možemo promatrati funkcije koje su potencije x^n, gdje je $n > 2$ prirodan broj. Promatramo korijene $\sqrt[n]{x}$. Ovisno o broju n te funkcije imaju različita svojstva. Poznato je da kvadratni korijen iz negativnog broja nije realan broj, odnosno da niti jedan realan broj kvadriranjem ne daje negativan broj. Ovu činjenicu ćemo objasniti na nivou funkcija. Vidjet ćemo kako se ponašaju funkcije potencije, a kako korijeni, ovisno o broju n. Prije toga, pogledajmo nekoliko primjera gdje se javljaju potencije i korijeni.

Primjer 1.37 *Ivan je od Petra posudio* x *kn i rekao da će vratiti za* 3 *mjeseca. Petar mu je rekao da će računati mjesečne kamate od* 10%, *po kojima mu nakon* 3 *mjeseca treba vratiti* 266 *kn. Koliko je novaca Petar posudio Ivanu?*

Nakon mjesec dana Ivan bi Petru trebao vratiti

$$x + \frac{10}{100}x = 1.1 \cdot x,$$

nakon 2 *mjeseca*

$$1.1^2 \cdot x,$$

a nakon 3 *mjeseca*

$$1.1^3 \cdot x = 266.$$

Ivan je posudio

$$x = \frac{266}{1.1^3} = 199.85 \ kn.$$

Primjer 1.38 *Ivan je od Petra posudio* x *kn i rekao da će vratiti za* 6 *mjeseci. Petar mu je rekao da će računati mjesečne kamate od* 8%, *po kojima mu nakon* 6 *mjeseci treba vratiti* 466 *kn. Koliko je novaca Petar posudio Ivanu?*

Rješenje je 293.65 *kuna.*

Primjer 1.39 *Ivan je od Petra posudio* 342 *kn i rekao da će vratiti za nekoliko mjeseci. Petar mu je rekao da će računati mjesečne kamate od* 8%. *Nakon koliko mjeseci je Ivan vratio novac ako je vratio* 466 *kn?*

Rješenje je

$$\frac{466}{342} = 1.36 = 1.08^n,$$

pa je

$$n = \frac{\log 1.36}{\log 1.08} = 3.99.$$

Zaključujemo da je Ivan vratio novac nakon 4 *mjeseca.*

Diskretno ukamaćivanje koje smo imali u prethodnim zadacima možemo koristiti kao model i kod prirodnih pojava, iako bi kontinuirano ukamaćivanje pomoću eksponencijalne funkcije bilo prikladnije.

Primjer 1.40 *Hrast povećava svoj volumen godišnje za p%. Ako je hrast za 3 godine povećao masu s* $1\,\mathrm{m}^3$ *na* $1.04\,\mathrm{m}^3$*, koliki je postotak p? Računamo*

$$(1.0 \cdot p)^3 = 1.04,$$

pa je

$$p = \sqrt[3]{1.04} = 1.013,$$

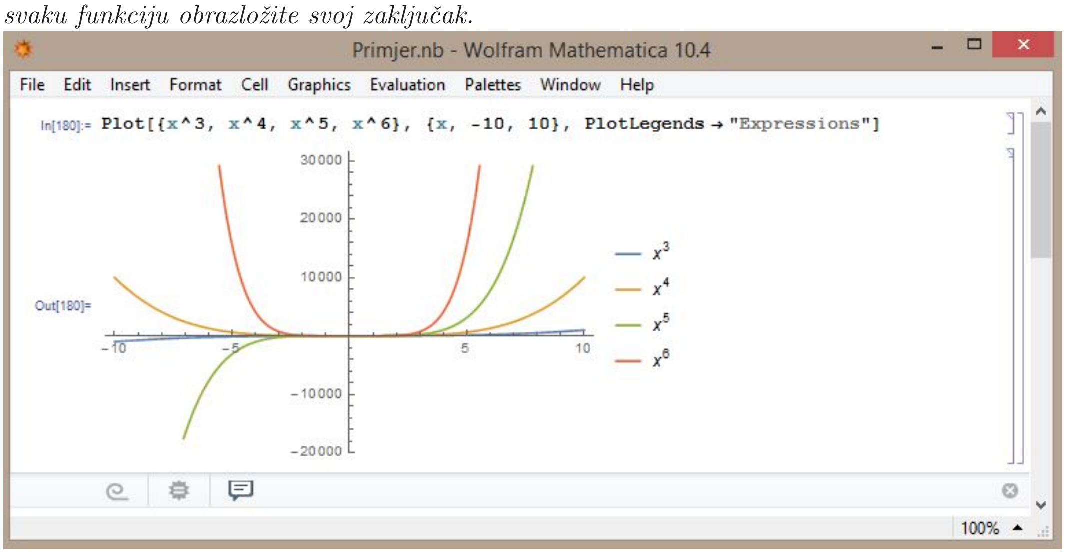
iz čega dobivamo $p = 1.3\%$.

Kod ovih primjera s potencijama i logaritamskom funkcijom nismo imali problema s pozitivnim i negativnim vrijednostima potencija, ali ponekad može priroda problema biti takva da nam trebaju i negativne vrijednosti. Proučimo zato sljedeće primjere i upoznajmo se s grafovima potencija i korijena.

Primjer 1.41 *Nacrtajte grafove funkcija pomoću naredbe Plot i provjerite jesu li sljedeće funkcije* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *bijekcije*

1. $f(x) = x^3$
2. $f(x) = x^4$
3. $f(x) = x^5$
4. $f(x) = x^6$.

Za svaku funkciju obrazložite svoj zaključak.



Primjer 1.42 *Promatranjem grafova funkcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *postavite hipotezu za koji k prirodan broj je funkcija* $f(x) = x^k$ *bijekcija. Objasnite postavljenu hipotezu pomoću definicije surjekcije i injekcije. Možemo li promjenom domene i kodomene postići da sve funkcije s pravilom pridruživanja* $f(x) = x^k$ *budu bijekcije?*

Rješenje je da su funkcije s neparnim k bijekcije. To su strogo rastuće funkcije, pa su injekcije. Za pozitivne x poprimaju pozitivne vrijednosti funkcije, a za negativne x negativne vrijednosti funkcije, pa su surjekcije. Funkcije s parnim k nisu bijekcije:

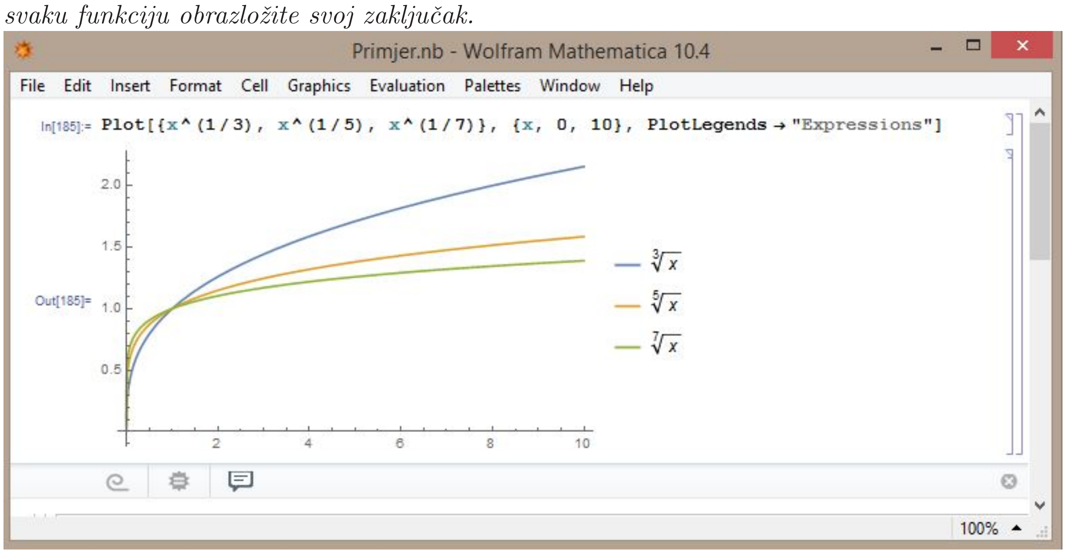
1. *Funkcija f nije surjekcija ako je promatramo kao funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Jasno je da funkcije $f(x) = x^2$, $f(x) = x^4$, $f(x) = x^6, \ldots$ poprimaju samo pozitivne vrijednosti i nulu, pa ako stavimo da je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, onda funkcija postaje surjekcija. Dakle, smanjivanjem kodomene tako da kodomena bude jednaka slici funkcije, naša funkcija je postala surjekcija.*
2. *Sad promatramo funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^4$, $f(x) = x^6, \ldots$, pa odmah vidimo da je $f(-x) = f(x)$, za sve ove funkcije. Kad dvije ulazne varijable idu u istu vrijednost, funkcija nije injekcija. Ako definiramo funkciju samo za pozitivne x ili samo za negativne x, dobit ćemo bijekciju.*
3. *Funkcije $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ s pravilom pridruživanja $f(x) = x^2$, $f(x) = x^4$, $f(x) = x^6, \ldots$ su bijekcije.*
4. *Može i ovako $f : \mathbb{R}_0^- \to \mathbb{R}_0^+$ s pravilom pridruživanja $f(x) = x^2$, $f(x) = x^4$, $f(x) = x^6, \ldots$ su bijekcije.*

Zaključujemo da smanjivanjem kodomene na sliku funkcije dobivamo da je funkcija surjekcija. Smanjivanjem domene dobivamo injekciju. Domenu treba smanjiti tako da se neka vrijednost funkcije javlja samo jednom. To provjeravamo na grafu funkcije, tako da provjerimo da svaka paralela s osi x graf siječe samo jednom.

Primjer 1.43 *Nacrtajte grafove funkcija pomoću naredbe Plot i provjerite jesu li sljedeće funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijekcije*

1. $f(x) = \sqrt[3]{x}$
2. $f(x) = \sqrt[5]{x}$.
3. $f(x) = \sqrt[7]{x}$.

Za svaku funkciju obrazložite svoj zaključak.



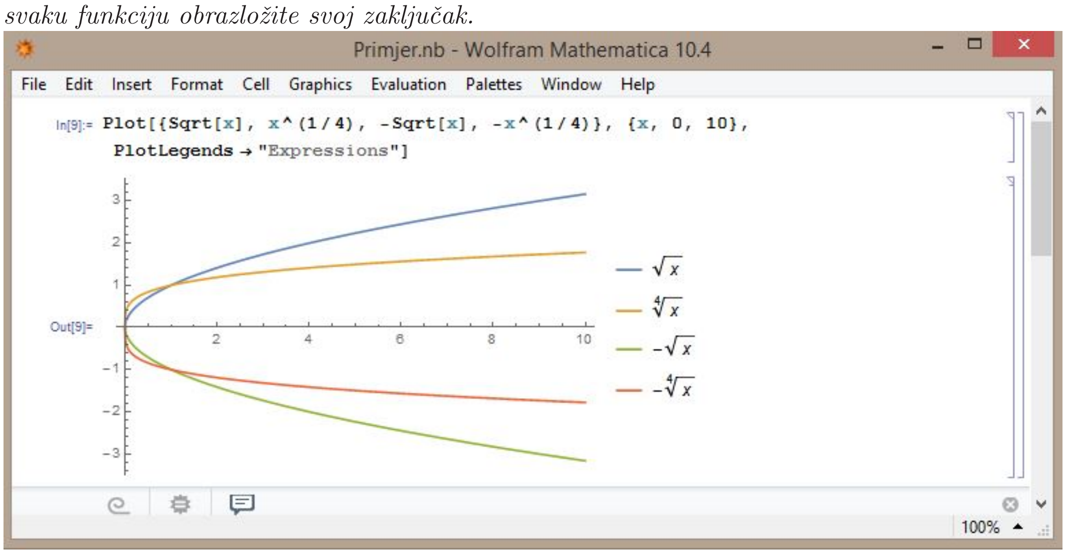
Primjer 1.44 *Je li funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x) = \sqrt[2k+1]{x}$, $k \in \mathbb{N}$ bijekcija? Obrazložite svoj zaključak.*

Rješenje je da su ove funkcije bijekcije. To su strogo rastuće funkcije, pa su injekcije. Neparni korijeni mogu biti i pozitivni i negativni brojevi, pa su surjekcije.

Primjer 1.45 *Nacrtajte grafove funkcija pomoću naredbe Plot i provjerite jesu li sljedeće funkcije* $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ *bijekcije*

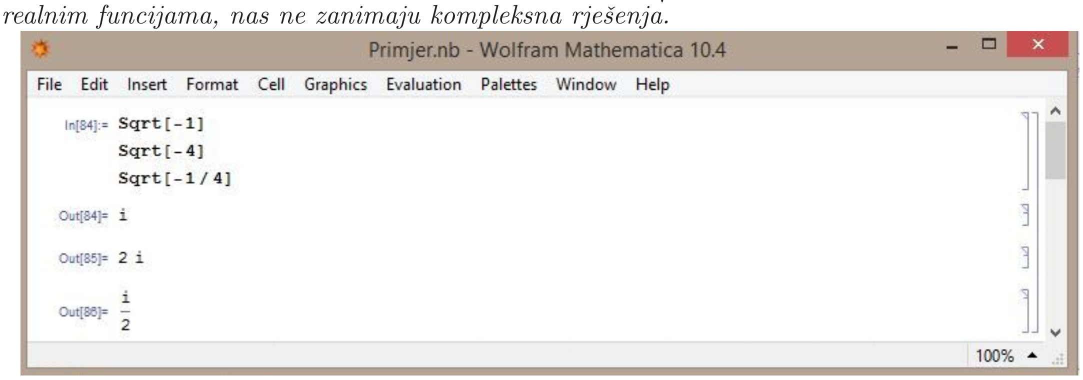
1. $f(x) = \sqrt{x}$
2. $f(x) = \sqrt[4]{x}$
3. $f(x) = -\sqrt{x}$
4. $f(x) = -\sqrt[4]{x}$.

Za svaku funkciju obrazložite svoj zaključak.



Primjer 1.46 *Pomoću Wolframove Mathematice istražite kakav rezultat dobivate kad u funkcije iz primjera 1.45 uvrstite vrijednost koja je negativan broj. Izračunajte* $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-4}$, $\sqrt{\frac{-1}{4}}$.

Rješenja su kompleksni brojevi, $\sqrt{-1} = i$, $\sqrt{-4} = 2i$, $\sqrt{\frac{-1}{4}} = \frac{i}{2}$. *Važno je naglasiti da kad radimo s realnim funcijama, nas ne zanimaju kompleksna rješenja.*



Ako nam neke vrijednosti varijable x daju vrijednosti $f(x)$ koje su kompleksne, onda te x moramo izbaciti iz domene funkcije. Realna funkcija je definirana za one x za koje je $f(x)$ realan broj. Dakle, kad su nam ulazne i izlazne vrijednosti realni objekti, a nama će u cijelom priručniku biti tako, tada je domena funkcije najveći skup vrijednosti x za koje je $f(x)$ realan broj.

Kompleksni brojevi jesu apstraktni koncept, ali treba naglasiti da u mnogim konkretnim problemima iz znanosti i tehnike, pristup preko kompleksnih brojeva donosi odgovor na pitanje koje nam dolazi iz prakse. Osnovne pojmove iz elektrotehnike se obično tumači uz pomoć kompleksnih brojeva. Transformacije ravnine koje koristimo pri računalnoj grafici, razlikuju se po tome javljaju li nam se u izračunu kompleksni brojevi ili samo realni brojevi. Dugoročno ponašanje ekoloških sustava modelira se pomoću jednadžbi kod kojih pojavljivanje kompleksnih rješenja ukazuje na oscilatornost sustava. Na primjer, broj jedinki neke vrste se oscilatorno mijenja u vremenu. Slično je s fizikalnim sustavima, njihalima, oprugama... Za proučavanje ovakvih sustava, potrebno je znati više matematike, pa za sad nastavimo s usvajanjem pojma bijekcije i to u svrhu definiranja inverzne funkcije.

Primjer 1.47 *Koristeći primjer 1.45 provjerite jesu li sljedeće funkcije $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ bijekcije*

1. $f(x) = \sqrt{x}$
2. $f(x) = \sqrt[4]{x}$
3. $f(x) = -\sqrt{x}$
4. $f(x) = -\sqrt[4]{x}$.

Za svaku funkciju obrazložite svoj zaključak.

Primjer 1.48 *Koristeći primjer 1.45 provjerite jesu li sljedeće funkcije $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^-$ bijekcije*

1. $f(x) = \sqrt{x}$
2. $f(x) = \sqrt[4]{x}$
3. $f(x) = -\sqrt{x}$
4. $f(x) = -\sqrt[4]{x}$.

Za svaku funkciju obrazložite svoj zaključak.

Primjer 1.49 *Je li funkcija definirana s $f(x) = \sqrt[2k]{x}$, $k \in \mathbb{N}$ bijekcija?*

1. *Ako je funkcija $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, obrazložite svoj zaključak.*
2. *Ako je funkcija $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, obrazložite svoj zaključak.*
3. *Ako je funkcija $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^-$, obrazložite svoj zaključak.*

Izvedimo neke zaključke nakon ovih primjera.

1. Funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirane s $f(x) = x^{2k+1}$ su bijekcije.
2. Funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirane s $f(x) = x^{2k}$ nisu bijekcije, ali smanjivanjem domene i kodomene tako da je $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ ili $f : \mathbb{R}_0^- \to \mathbb{R}_0^+$ postaju bijekcije.
3. Funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirane s $f(x) = \sqrt[2k+1]{x}$ su bijekcije.
4. Funkcije $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ definirane s $f(x) = \sqrt[2k]{x}$ su bijekcije.
5. Funkcije $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^-$ definirane s $f(x) = -\sqrt[2k]{x}$ su bijekcije.

Funkcija koja ima isto pravilo pridruživanja i istu kodomenu, ali smanjenu domenu naziva se **restrikcijom** početne funkcije.

Na primjer, funkcija $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2k}$ je restrikcija funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2k}$. Dakle, restrikcija funkcije se dobiva kad se smanji domena.

1.4 Inverzna funkcija

U prethodnom poglavlju nismo definirali inverznu funkciju, ali sve smo pripremili da možemo razumjeti pojam inverzne funkcije. Možemo zaključiti da su funkcije $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirane s $f(x) = x^3$ i $g(x) = \sqrt[3]{x}$ inverzne funkcije, jer ako izračunamo treću potenciju nekog broja, pa nakon toga treći korijen, dobit ćemo početni broj.

Utvrdili smo da bi s drugim korijenom moglo biti problema, jer moramo razlikovati pozitivne i negativne vrijednosti. Zato smo se bavili preciznim matematičkim pojmom bijekcije funkcije.

U primjeru 1.1 imali smo funkciju $f : \{c, z, s\} \to \{kav, caj, kak\}$ koja je bijekcija

$$\begin{aligned} f(c) &= kav \\ f(z) &= caj \\ f(s) &= kak, \end{aligned}$$

pa smo jednostavno definirali njezinu inverznu funkciju $g : \{kav, caj, kak\} \to \{c, z, s\}$

$$\begin{aligned} g(kav) &= c \\ g(caj) &= z \\ g(kak) &= s. \end{aligned}$$

Označavali smo domenu s $\mathcal{D}$, a kodomenu s $\mathcal{K}$. Sad ćemo prijeći na oznaku X za domenu, a Y za kodomenu jer oznake želimo uskladiti s oznakama za elemente domene i kodomene, $x \in X$, $y \in Y$. **Inverzna funkcija** funkcije $f : X \to Y$ je funkcija $g : Y \to X$ za koju vrijedi da je $g(f(x)) = x$ za svaki $x \in X$. To znači da nakon što x preslikamo funkcijom f, dobivamo $f(x)$, pa kad $f(x)$ preslikamo inverznom funkcijom g onda dobivamo početnu vrijednost x. Preslikali smo element funkcijom f i natrag se vratili funkcijom g. Inverznu funkciju g funkcije f označavamo s $g = f^{-1}$ i ona postoji ako je funkcija f bijekcija. Ako je $y = f(x)$ onda je $x = f^{-1}(y)$, gdje je $x \in X$, $y \in Y$.

Dakle, za primjer 1.1 inverzna funkcija $f^{-1} : \{kav, caj, kak\} \to \{c, z, s\}$ definirana je s

$$\begin{aligned} f^{-1}(kav) &= c \\ f^{-1}(caj) &= z \\ f^{-1}(kak) &= s. \end{aligned}$$

Primijetimo da vrijedi

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(c)) &= c \\ f^{-1}(f(z)) &= z \\ f^{-1}(f(s)) &= s \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(kav)) &= kav \\ f(f^{-1}(caj)) &= caj \\ f(f^{-1}(kak)) &= kak, \end{aligned}$$

što znači ne samo da je f^{-1} inverzna funkcija od f, već vrijedi i suprotno. Vrijedi

$$f(f^{-1}(y)) = f(x) = y \text{ za svaki } y \in Y$$
$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x \text{ za svaki } x \in X.$$

Primjer 1.50 *Izračunajmo inverznu funkciju linearne funkcije* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *zadane s* $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$. *Stavimo najprije umjesto* $f(x)$ *oznaku* y, *pa imamo* $y = ax + b$. *Nakon toga iz te jednakosti izrazimo* x, *pa dobivamo*

$$x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}.$$

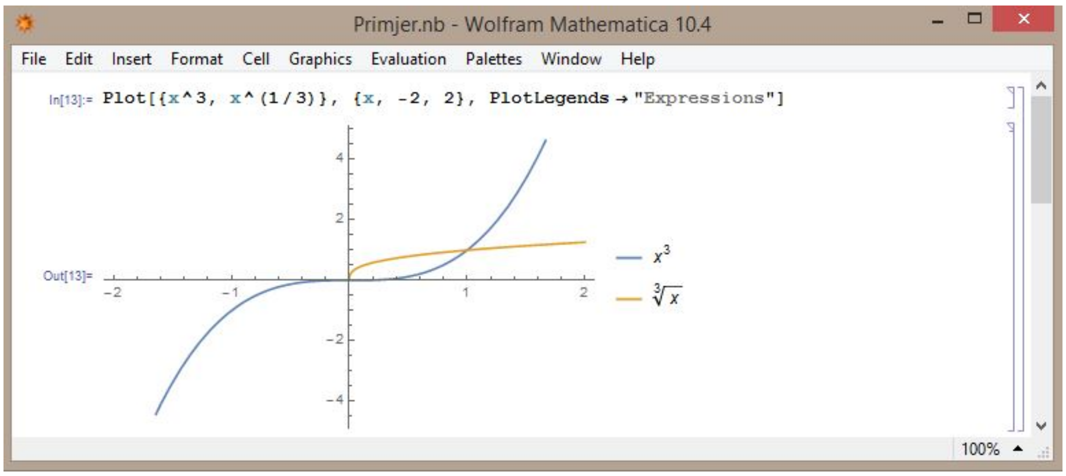
Uobičajeno je varijablu zvati x, *pa onda zamjenom mjesta oznakama* x *i* y, *iz prethodne jednakosti dobivamo*

$$y = f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}.$$

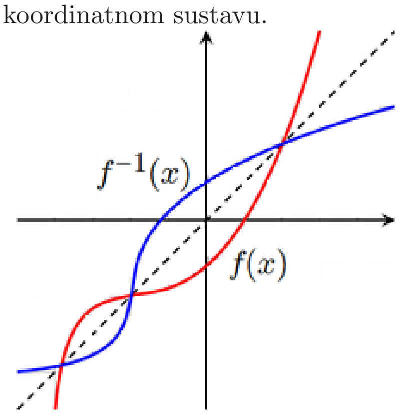
Primjer 1.51 *Za funkcije* $f, f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definirane s* $f(x) = x^3$ *i* $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ *provjerite da su inverzne funkcije.*

Provjera za inverznu funkciju je

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x.$$



Graf funkcije f i njezine inverzne funkcije f^{-1} su osnosimetrične u odnosu na pravac $y = x$, koji je simetrala prvog i trećeg kvadranta u koordinatnom sustavu.



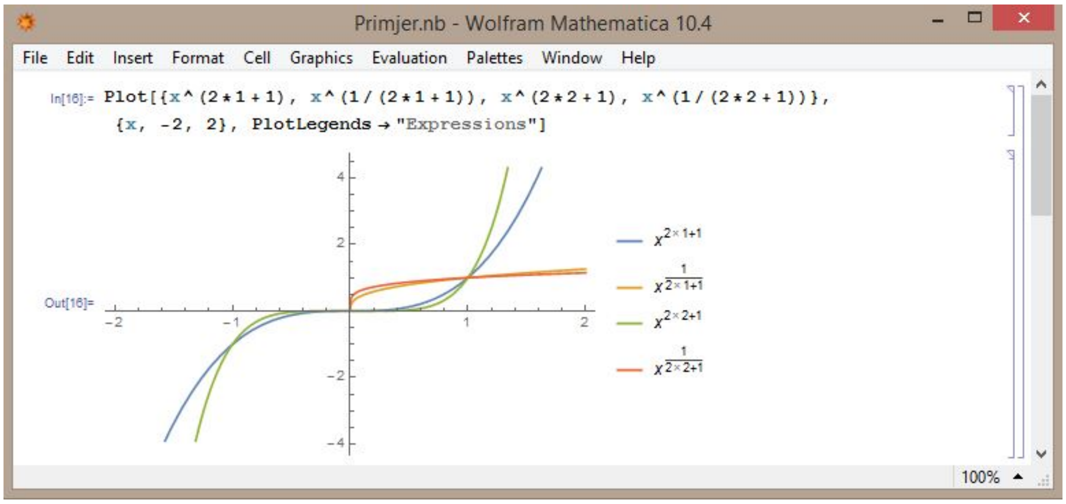
Primjer 1.52 *Odredite linearne funkcije za koje vrijedi $f(x) = f^{-1}(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.*
Rješenje.
Iz jednakosti

$$ax + b = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$$

izjednačavanjem koeficijenata uz iste potencije dobivamo da je $a^2 = 1$ i $b = 0$, pa su tražene funkcije $f(x) = x$ i $f(x) = -x$.

Primjer 1.53 *Za funkcije f, $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirane s $f(x) = x^{2k+1}$ i $f^{-1}(x) = \sqrt[2k+1]{x}$, gdje je k prirodan broj, provjerite da su inverzne funkcije.*
Provjera za inverznu funkciju je

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^{2k+1}) = \sqrt[2k+1]{x^{2k+1}} = x.$$



Primjer 1.54 *Izračunajte inverzne funkcije za funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadane s*

1. $f(x) = x^3 + 1$
2. $f(x) = -x^5 + 2$
3. $f(x) = -2x^7 + 5$
4. $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$
5. $f(x) = 4\sqrt[5]{2x+3}$

Rješenje.

1. $y = x^3 + 1, y - 1 = x^3, x = \sqrt[3]{y-1}$, *pa je* $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$
2. $y = -x^5 + 2, 2 - y = x^5, x = \sqrt[5]{2-y}$, *pa je* $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{2-x}$
3. $f(x) = -2(x+1)^7 + 5, f^{-1}(x) = \sqrt[5]{\frac{5-x}{2}} - 1$
4. $f(x) = \sqrt[3]{x+1}, f^{-1}(x) = x^3 - 1$

5. $f(x) = 4\sqrt[5]{2x} + 3$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(\frac{x-3}{4})^5$

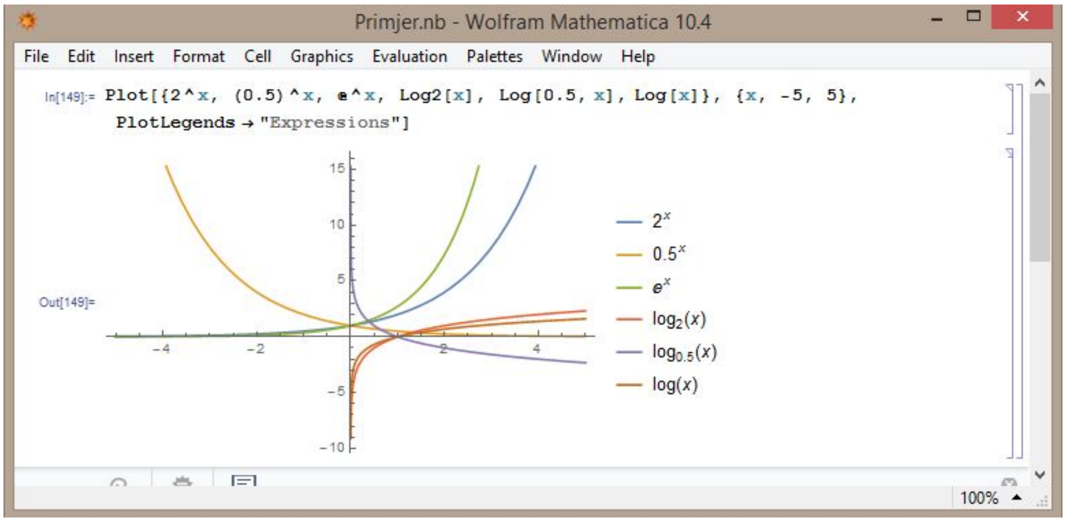
Primjer 1.55 *Eksponencijalna funkcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, *ima za inverznu funkciju logaritamsku funkciju* $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_a x$. *Eksponencijalna funkcija kojoj je baza broj e piše se* $f(x) = e^x$ *ili* $f(x) = \exp x$, *a ima inverznu funkciju* $f^{-1}(x) = \ln x$. *Vrijedi i obratno, spomenute logaritamske funkcije su inverzne eksponencijalnim funkcijama s istom bazom. Grafovi ovih funkcija su osnosimetrični u odnosu na pravac* $y = x$.

Provjera.

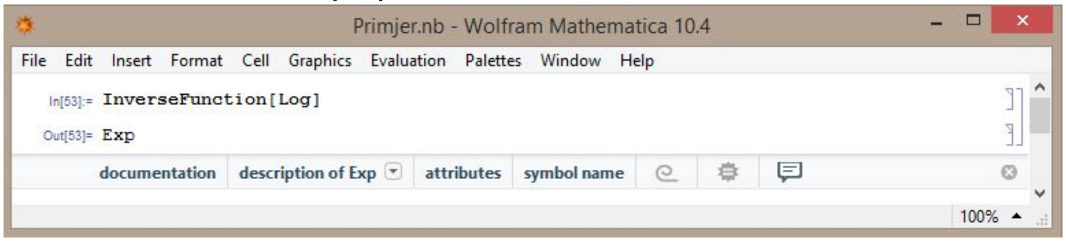
$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(a^x) = \log_a(a^x) = x \log_a a = x.$$

Ako gledamo suprotno, da je $f^{-1}(x) = a^x$ *onda dobivamo*

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\log_a x) = a^{\log_a x} = x.$$



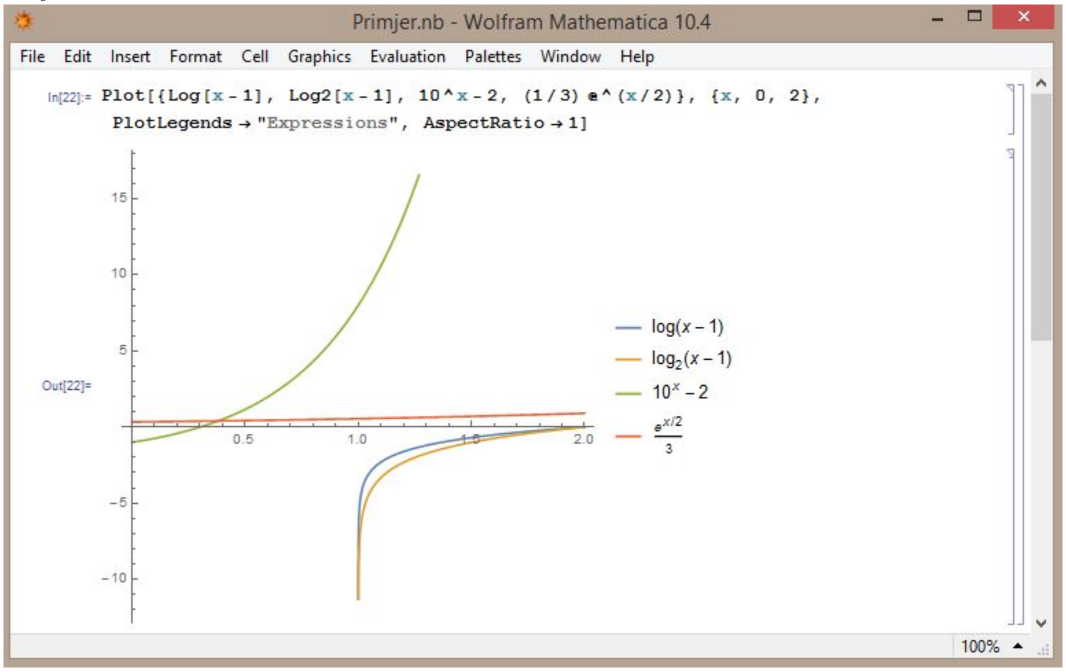
Primjer 1.56 *InverseFunction[Log]*



Primjer 1.57 *Izračunajte inverzne funkcije za funkcije zadane s*

1. $f(x) = e^x + 1$
2. $f(x) = 2^{x+1}$
3. $f(x) = \log(x + 2)$
4. $f(x) = 2\ln(3x)$

te odredite područje definicije i sliku za svaku inverznu funkciju. Dobivena rješenja provjerite pomoću Wolframove Mathematice korištenjem naredbi InverseFunction i Plot za crtanje grafova funkcija. Gledajući graf funkcije provjerite jeste li dobro odredili područje definicije i sliku funkcije.
Rješenje.



1. $f^{-1}(x) = \log(x-1), \mathcal{D}(f^{-1}) = (1, \infty),\ \mathcal{R}(f^{-1}) = \mathbb{R}$
2. $f^{-1}(x) = \log_2 x - 1, \mathcal{D}(f^{-1}) = (0, \infty),\ \mathcal{R}(f^{-1}) = \mathbb{R}$
3. $f^{-1}(x) = 10^x - 2, \mathcal{D}(f^{-1}) = \mathbb{R},\ \mathcal{R}(f^{-1}) = (-2, \infty)$
4. $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}e^{\frac{x}{2}}, \mathcal{D}(f^{-1}) = \mathbb{R},\ \mathcal{R}(f^{-1}) = (0, \infty)$

Primjer 1.58 *Odabrali smo neki prirodni broj, pa smo onda izračunali njegovu treću potenciju. Nakon toga smo tu treću potenciju pomnožili s 2, pa onda tome pribrojili 5 i dobili broj 21. Koji broj smo odabrali? Koji broj smo odabrali ako umjesto 21 dobijemo 59?*

U ovom primjeru radimo s funkcijom $f(x) = 2x^3+5$ i tražmo vrijednosti $f^{-1}(21)$ i $f^{-1}(59)$. Rješenje je $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x-5}{2}}$, pa je $f^{-1}(21) = 2$ i $f^{-1}(59) = 3$. Mogli smo izbjeći rad s inverznom funkcijom i naći rješenja jednadžbi

$$2x^3 + 5 = 21$$

i

$$2x^3 + 5 = 59,$$

što bi u ovom slučaju dalo ista rješenja. Pristup pomoću inverzne funkcije može dati samo jedno rješenje, jer za neku vrijednost varijable x, postoji samo jedna vrijednost funkcije. Ako rješenja ima više, onda dolazi do gubitka rješenja. To ćemo vidjeti u nastavku i objasniti naredbu u Wolframovoj Mathematici koja radi pomoću inverzne funkcije.

Funkcije čije inverzne smo do sad promatrali su bile bijekcije, pa smo definirali inverzne funkcije bez smanjivanja domene i kodomene. Kod funkcija koje su parne potencije to nije slučaj, pa moramo uzeti restrikcije tih funkcija da možemo definirati inverzne funkcije. Da bismo nastavili u tom smjeru, trebat će nam funkcija apsolutne vrijednosti. Apsolutna vrijednost nekog broja je njegova udaljenost od ishodišta na brojevnom pravcu. Tako je $|-5| = 5$, isto kao $|5| = 5$. Funkcija se definira

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{za } x < 0 \\ x & \text{za } x \geq 0 \end{cases}$$

Već smo vidjeli da razlikujemo funkcije $f_1(x) = \sqrt{x}$ i $f_2(x) = -\sqrt{x}$, $f_1 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $f_2 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^-$.

Kad ih ne bismo razlikovali, onda funkcija kvadratni korijen ne bi zadovoljavala uvjet da bude funkcija. Pretpostavimo da je $f(x) = \sqrt{x}$ funkcija za koju možemo računati vrijednosti na ovaj način

$$f(4) = \sqrt{4} = 2,$$

$$f(4) = \sqrt{4} = -2.$$

Ovo nije ispravan način računanja, f broju 4 pridružuje broj 2 i broj -2, pa f nije funkcija. Funkcija nekom elementu pridružuje samo jedan element. Da bi f bila funkcija, mora se odlučiti da li broju 4 pridružuje broj 2 ili broj -2, pa dobivamo dvije funkcije

$$f_1(4) = \sqrt{4} = 2$$

$$f_2(4) = \sqrt{4} = -2.$$

Dakle, kad radimo s funkcijama, onda kao korijen nekog broja ne uzimamo pozitivni i negativni korijen, već samo jedan od njih. Koji uzimamo, ovisi o tome s kojom funkcijom korijen želimo raditi, $f_1(x) = \sqrt{x}$ ili $f_2(x) = -\sqrt{x}$. Praktičnije je raditi s pozitivnim brojevima, pa se uglavnom odlučujemo za $f_1(x) = \sqrt{x}$.

Primjer 1.59 *Neka je $f_1(x) = \sqrt{x}$ i $f_2(x) = -\sqrt{x}$, $f_1 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $f_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^-$. Izračunajmo $f_1(x^2)$ za $x \geq 0$ i $f_2(x^2)$ za $x < 0$.*

Moramo paziti da za $f_1(x^2)$ dobijemo pozitivan broj ili nulu, jer je slika funkcije f_1 skup $\mathbb{R}_0^+$. Izraz $f_2(x^2)$ treba biti negativan broj jer je slika funkcije f_2 skup $\mathbb{R}^-$. Računamo

$$f_1(x^2) = \sqrt{x^2} = x,\ x \geq 0,$$

$$f_2(x^2) = -\sqrt{x^2} = -(-x) = x,\ x < 0,$$

U drugoj jednakosti smo koristili $\sqrt{x^2} = -x$, što je ispravno. Ako ispred korijena ne stavljamo minus predznak, onda uzimamo pozitivan korijen, a $-x$ je pozitivan ako je $x < 0$. Koristeći funkciju apsolutne vrijednosti možemo jednakost

$$\sqrt{x^2} = -x \ \text{za} \quad x < 0$$

i jednakost

$$\sqrt{x^2} = x \ \text{za} \quad x \geq 0$$

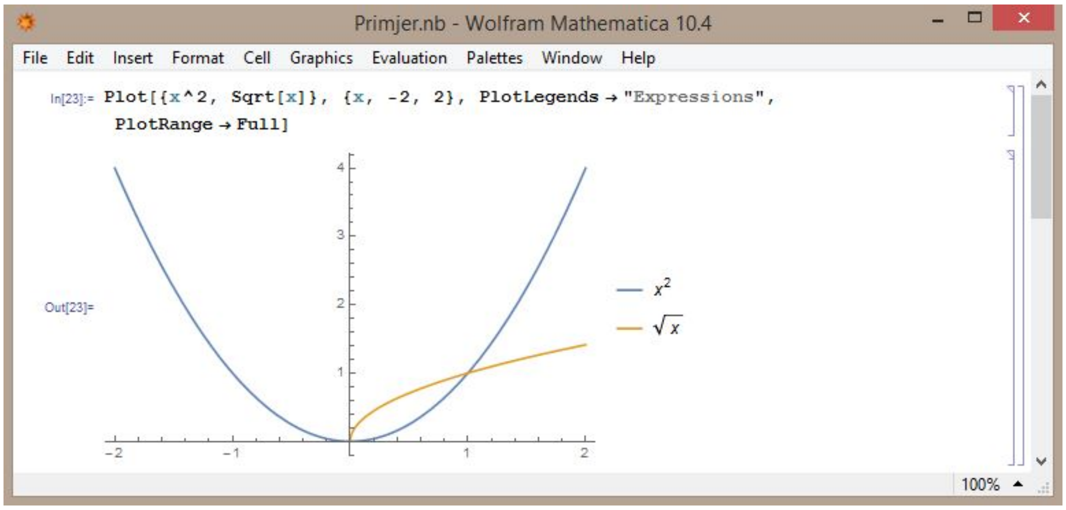
zapisati

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

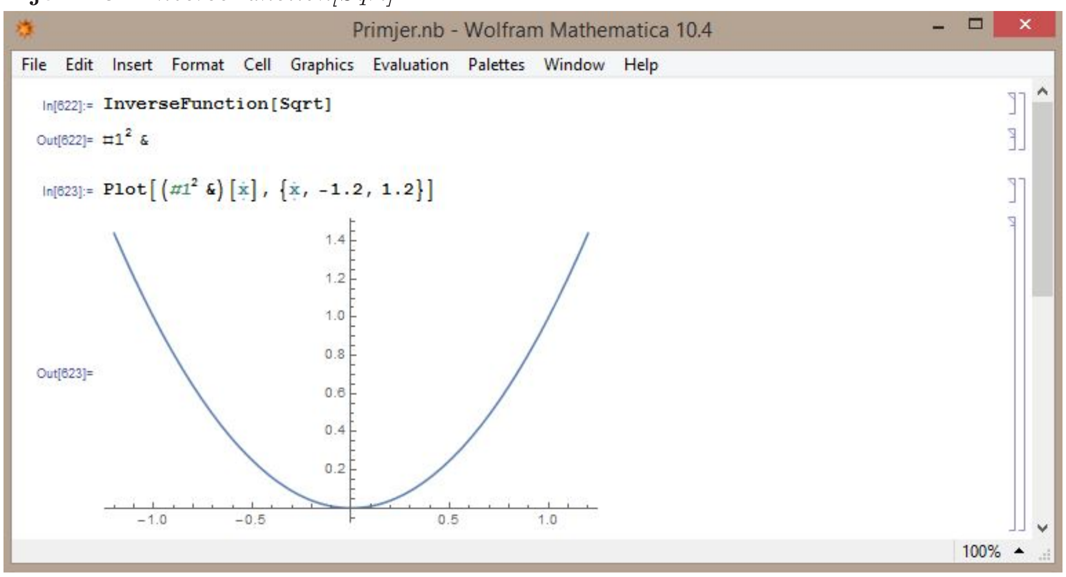
Primjer 1.60 *Za funkcije* $f, f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ *definirane s* $f(x) = x^2$ *i* $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ *provjerite da su inverzne funkcije.*

Provjera za inverznu funkciju je

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = x.$$



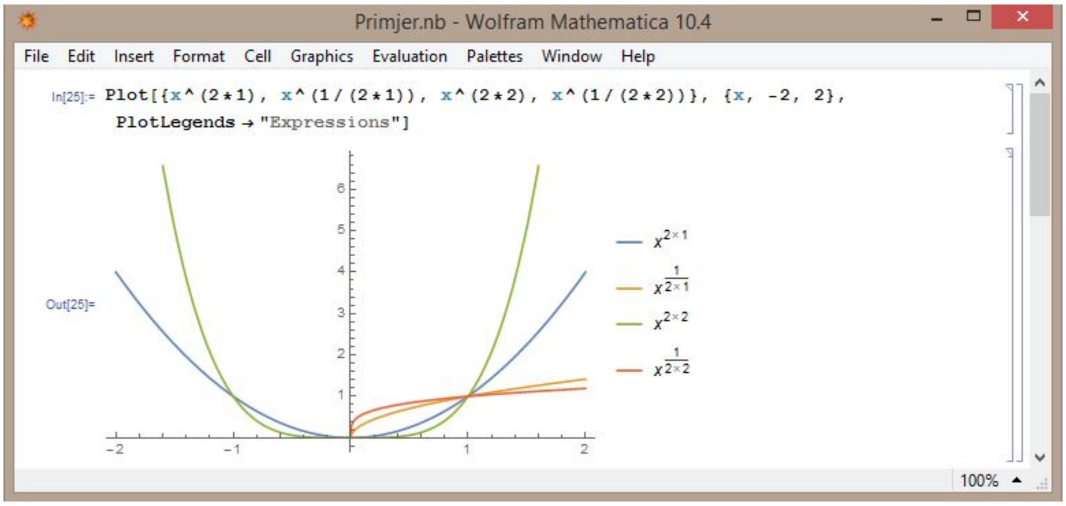
Primjer 1.61 *InverseFunction[Sqrt]*



Primjer 1.62 *Za funkcije* $f, f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ *definirane s* $f(x) = x^{2k}$ *i* $f^{-1}(x) = \sqrt[2k]{x}$, *gdje je* k *prirodan broj, provjerite da su inverzne funkcije.*

Provjera za inverznu funkciju je

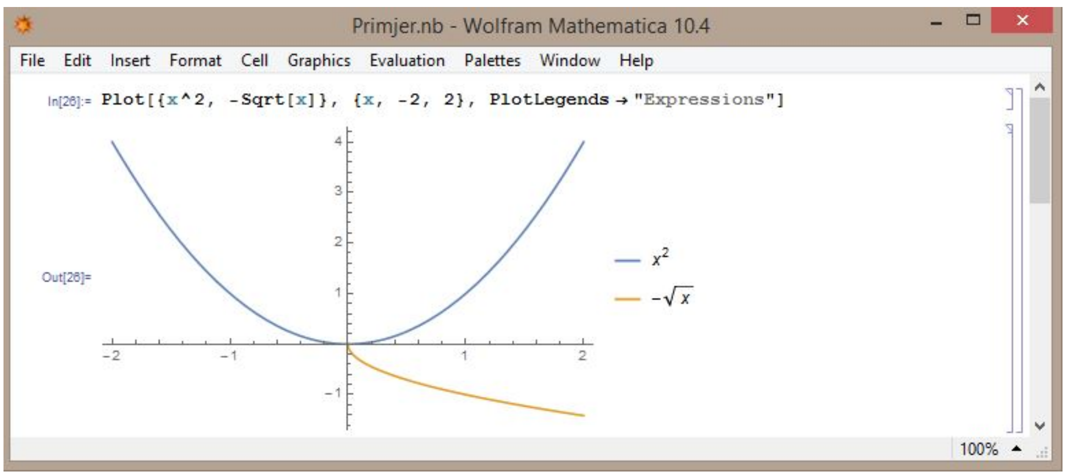
$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^{2k}) = \sqrt[2k]{x^{2k}} = x.$$



Primjer 1.63 *Za funkcije* $f : \mathbb{R}_0^- \to \mathbb{R}_0^+$, $f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^-$ *definirane s* $f(x) = x^2$ *i* $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$ *provjerite da su inverzne funkcije.*

Provjera za inverznu funkciju je

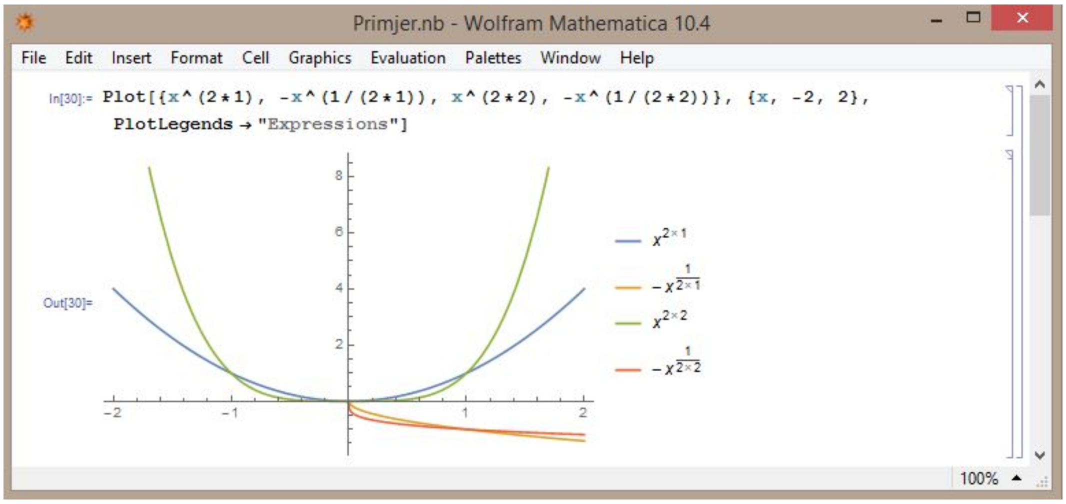
$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2) = -\sqrt{x^2} = -|x| = -(-x) = x.$$



Primjer 1.64 *Za funkcije* $f : \mathbb{R}_0^- \to \mathbb{R}_0^+$ $f, f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^-$ *definirane s* $f(x) = x^{2k}$ *i* $f^{-1}(x) = -\sqrt[2k]{x}$, *gdje je* k *prirodan broj, provjerite da su inverzne funkcije.*

Provjera za inverznu funkciju je

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^{2k}) = -\sqrt[2k]{x^{2k}} = -|x| = -(-x).$$



Primjer 1.65 *Izračunajmo inverznu funkciju funkcije* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *zadane s* $f(x) = x^2+2x+1$. *Najprije ćemo napisati* $f(x) = y = (x+1)^2$, *pa onda moramo korijenovati da bismo dobili* x. *Jasno je da ova funkcija nije bijekcija, jer pozitivan i negativan broj imaju isti kvadrat, pa moramo odlučiti hoćemo li raditi s pozitivnim ili negativnim korijenom. Neka je to pozitivan korijen, pa je*

$$x+1 = \sqrt{y}.$$

Ova jednakost ima smisla ako je $y \geq 0$ *i* $x+1 \geq 0$. *Dakle, ima smisla tražiti inverznu funkciju funkcije* $f : [-1, \infty) \to \mathbb{R}_0^+$ *i ona je jednaka*

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 1.$$

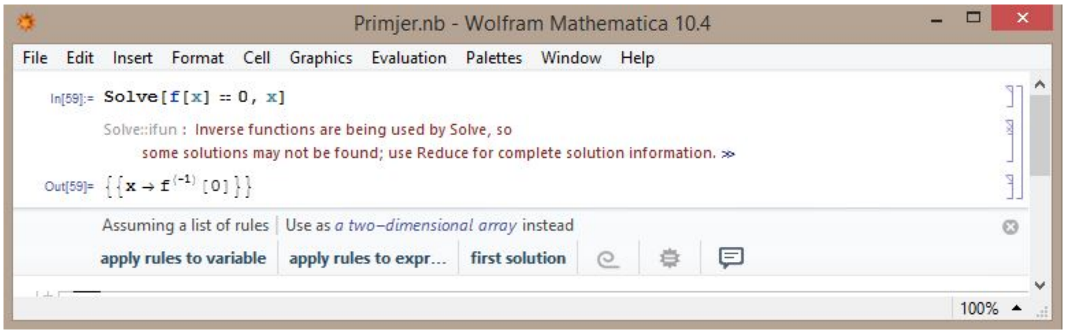
Primjer 1.66 *Izračunajmo inverznu funkciju funkcije* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *zadane s* $f(x) = x^2+x+1$. *Najprije ćemo napisati* $f(x) = y = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$, *pa onda moramo korijenovati da bismo dobili* x. *Ova funkcija nije bijekcija, pa ćemo uzeti pozitivan korijen*

$$x + \frac{1}{2} = \sqrt{y - \frac{3}{4}}.$$

Ova jednakost ima smisla ako je $y - \frac{3}{4} \geq 0$ *i* $x + \frac{1}{2} \geq 0$. *Dakle, ima smisla tražiti inverznu funkciju funkcije* $f : [-\frac{1}{2}, \infty) \to [\frac{3}{4}, \infty)$ *i ona je jednaka*

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}.$$

Primjer 1.67 *U Wolframovoj Mathematici naredba Solve[f[x] = 0, x] javlja poruku: "InverseFunction: ifun: Inverse functions are being used. Values may be lost for multivalued inverses." Javlja da koristi inverznu funkciju da riješi ovu jednadžbu i da može doći do gubitka rješenja jer inverzna funkcija ima samo jednu vrijednost za* f^{-1}. *Svaka funkcija ima samo jednu vrijednost za određenu ulaznu varijablu, to smo već naučili!*



Primjer 1.68 *Riješite primjer 1.58 korištenjem naredbe Solve[f[x] = 0, x] za odgovarajuću funkciju f. U primjeru 1.58 umjesto treće potencije uzmite drugu potenciju i vrijednosti* 13 *i* 23*. Koliko rješenja dobivate u tom slučaju?*

Rješenja za drugu potenciju su ± 2 *i* ± 3*. Dobiju se iz jednadžbi*

$$2x^2 + 5 = 13$$
$$2x^2 + 5 = 23.$$

Pristup pomoću inverzne funkcije nam daje samo jedno rješenje u slučaju kad je vrijednost 13 *i samo jedno u slučaju kad je vrijednost* 23.

1.5 Složena funkcija

Kompozicija funkcija je drugi naziv za funkciju složenu od dvije ili više funkcija. Objasnimo na sljedećem primjeru kako definiramo funkciju složenu od dviju funkcija.

Primjer 1.69 *U primjeru 1.3 imali smo namirnice koje smo funkcijom f pridružili ukućanima. Definirajmo novu funkciju G koja ukućanima pridružuje mjesto kamo oni putuju. Definiramo funkciju G*

$$\begin{aligned} G(mama) &= Split \\ G(tata) &= Osijek \\ G(kci) &= Zagreb \\ G(sin) &= Pula. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Sjetimo se da smo imali

$$\begin{aligned}
f(sir) &= mama\\
f(jogurt) &= kci\\
f(kobasice) &= tata\\
f(narance) &= tata\\
f(jabuke) &= sin\\
f(maline) &= sin\\
f(sok) &= kci\\
f(pivo) &= mama\\
f(cips) &= tata\\
f(cokolada) &= tata\\
f(keksi) &= kci\\
f(kikiriki) &= sin.
\end{aligned}$$

Funkciju h definiranu s

$$\begin{aligned}
h(sir) &= Split\\
h(jogurt) &= Zagreb\\
h(kobasice) &= Osijek\\
h(narance) &= Osijek\\
h(jabuke) &= Pula\\
h(maline) &= Pula\\
h(sok) &= Zagreb\\
h(pivo) &= Split\\
h(cips) &= Osijek\\
h(cokolada) &= Osijek\\
h(keksi) &= Zagreb\\
h(kikiriki) &= Pula.
\end{aligned}$$

nazivamo funkcijom složenom od f i G i zapisujemo $h = G \circ f$. Vrijednosti funkcije h dobivene su kao $h(x) = G(f(x))$. Primijetimo da je

$$\begin{aligned}
f \quad &: \{sir, jogurt, kobasice, narance, jabuke, maline, sok,\\
&pivo, cips, cokolada, keksi, kikiriki\} \to \{mama, tata, kci, sin\}
\end{aligned}$$

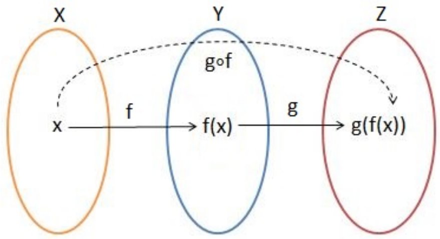
$$G \quad : \{mama, tata, kci, sin\} \to \{Split, Osijek, Zagreb, Pula\}$$

$$\begin{aligned}
h = G \circ f \quad : \quad &\{sir, jogurt, kobasice, narance, jabuke, maline, sok,\\
&pivo, cips, cokolada, keksi, kikiriki\} \to\\
&\{Split, Osijek, Zagreb, Pula\}.
\end{aligned}$$

Namirnice smo preko ljudi prebacili u gradove! Važno je da slika funkcije f bude podskup domene funkcije G ili drugim riječima rečeno, da funkcija G zna baratati s elementima koje dobije. Funkcija f namirnice pridružuje ljudima, a G ljude gradovima.

Provjerimo postoji li funkcija $f \circ G = f(G(x))$. Funkcija G djeluje na ljudima i prebacuje ih u gradove. Vrijednosti $G(x)$ su gradovi, pa bi f trebala djelovati na gradovima da bismo imali $f(G(x))$. Tu nastaje problem, f ne zna djelovati na gradovima, ona djeluje na namirnicama. Matematički rečeno slika funkcije G nije podskup domene od f. Dakle, funkcija $(f \circ G)(x) = f(G(x))$ nije definirana.

Čak i kad su oba poretka $G \circ f$ i $f \circ G$ definirana, te funkcije općenito nisu jednake.



Funkcija složena od funkcija $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ ili kompozicija funkcija je funkcija $h = g \circ f : X \to Z$ definirana s $h(x) = g(f(x))$ za svaki $x \in X$. Funkcija h postoji ako je $\mathcal{R}(f) \subset \mathcal{D}(g)$, odnosno ako je slika funkcije f podskup domene funkcije g.

Primjer 1.70 *Definirajmo funkciju koja sirovini pridružuje vrstu kolača*

$$\begin{aligned} f(sir) &= pita \\ f(jabuka) &= strudla \\ f(orah) &= orahnjaca. \end{aligned}$$

Funkcija g kolaču pridružuje vrećicu u koju će biti zapakiran

$$\begin{aligned} g(pita) &= zuto \\ g(strudla) &= crveno \\ g(orahnjaca) &= smedje. \end{aligned}$$

Funkcija $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ definirana je s

$$\begin{aligned} h(sir) &= zuto \\ h(jabuka) &= crveno \\ h(orah) &= smedje. \end{aligned}$$

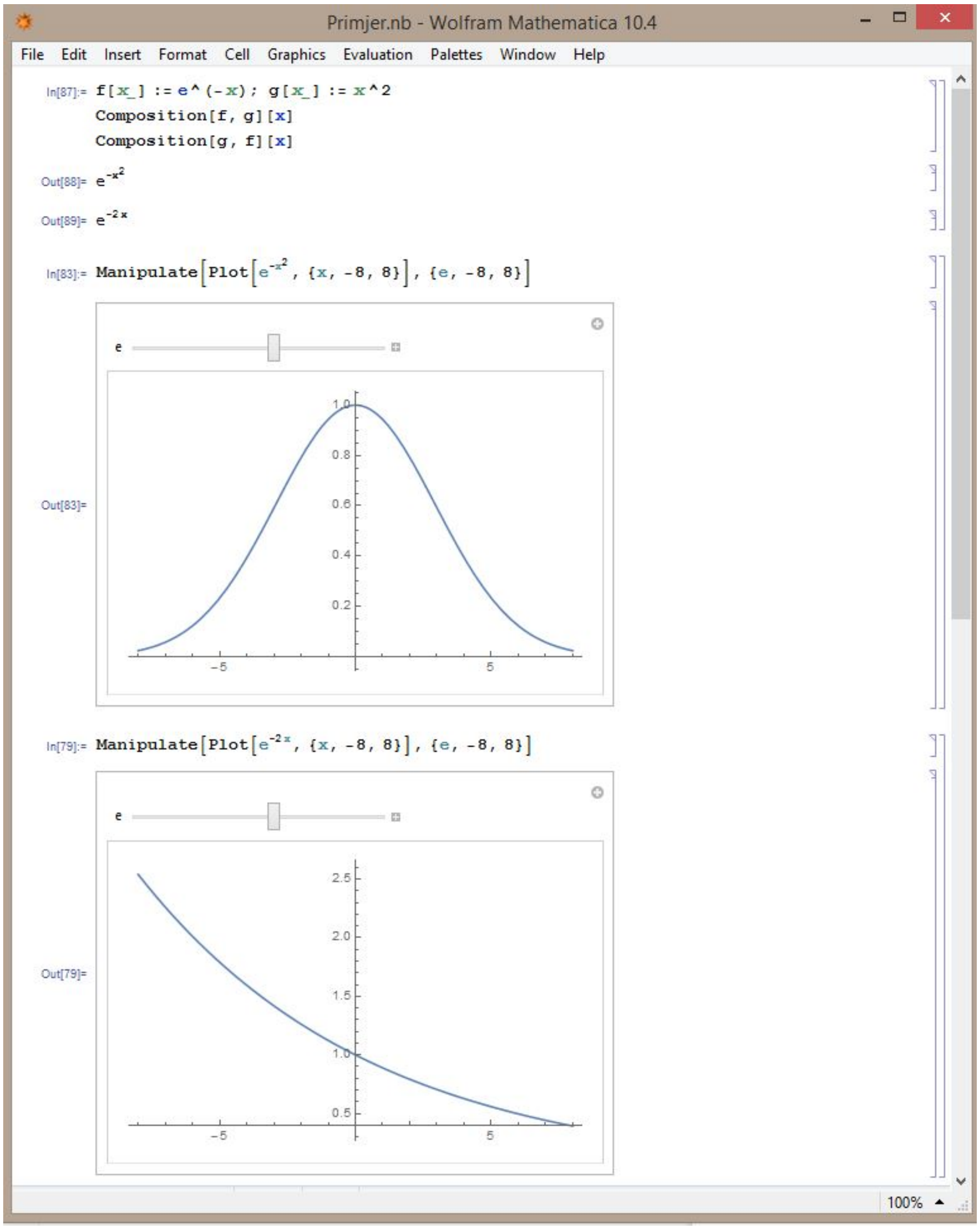
Pitamo se je li definirana funkcija $(f \circ g)(x) = f(g(x))$? Funkcije g pridružuje kolačima boju vrećice, to je vrijednost $g(x)$. Sad bi na tu vrijednost, boju vrećice trebala djelovati funkcija f, ali ona to ne može...Funkcija f zna kako djelovati na namirnicama, a na zna kako djelovati na bojama vrećica. Dakle, vrijednosti $f(g(pita)) = f(zuto)$, $f(g(strudla)) = f(crveno)$, $f(g(orahnjaca)) = f(smedje)$ nisu definirane jer skup $\{zuto, crveno, smedje\}$ nije podskup domene funkcije f.

Općenito vrijedi da je $f^{-1} \circ f = id$ i $f \circ f^{-1} = id$, gdje je id standardna oznaka za funkciju koja zovemo identitetom jer x ostavlja na miru, pa je $id(x) = y = x$. Kompozicija funkcije i njezine inverzne djeluje na varijablu x tako da je preslika funkcijom, pa onda njezinom inverznom, pa se opet dobije početna vrijednost od x.

Primjer 1.71 *U primjeru 1.70 definiraj inverzne funkcije* f^{-1}, g^{-1} *i* h^{-1}. *Provjeri da vrijedi* $f^{-1} \circ g^{-1} = h^{-1}$. *Provjeri da vrijedi* $f^{-1} \circ f = id$ *i* $g^{-1} \circ g = id$.

Primjer 1.72 *Izračunajmo* $f \circ g$ *i* $g \circ f$ *za* $f(x) = e^{-x}$ *i* $g(x) = x^2$. *Dobivamo* $(f \circ g)(x) = e^{-x^2}$ *i* $(g \circ f)(x) = e^{-2x}$.

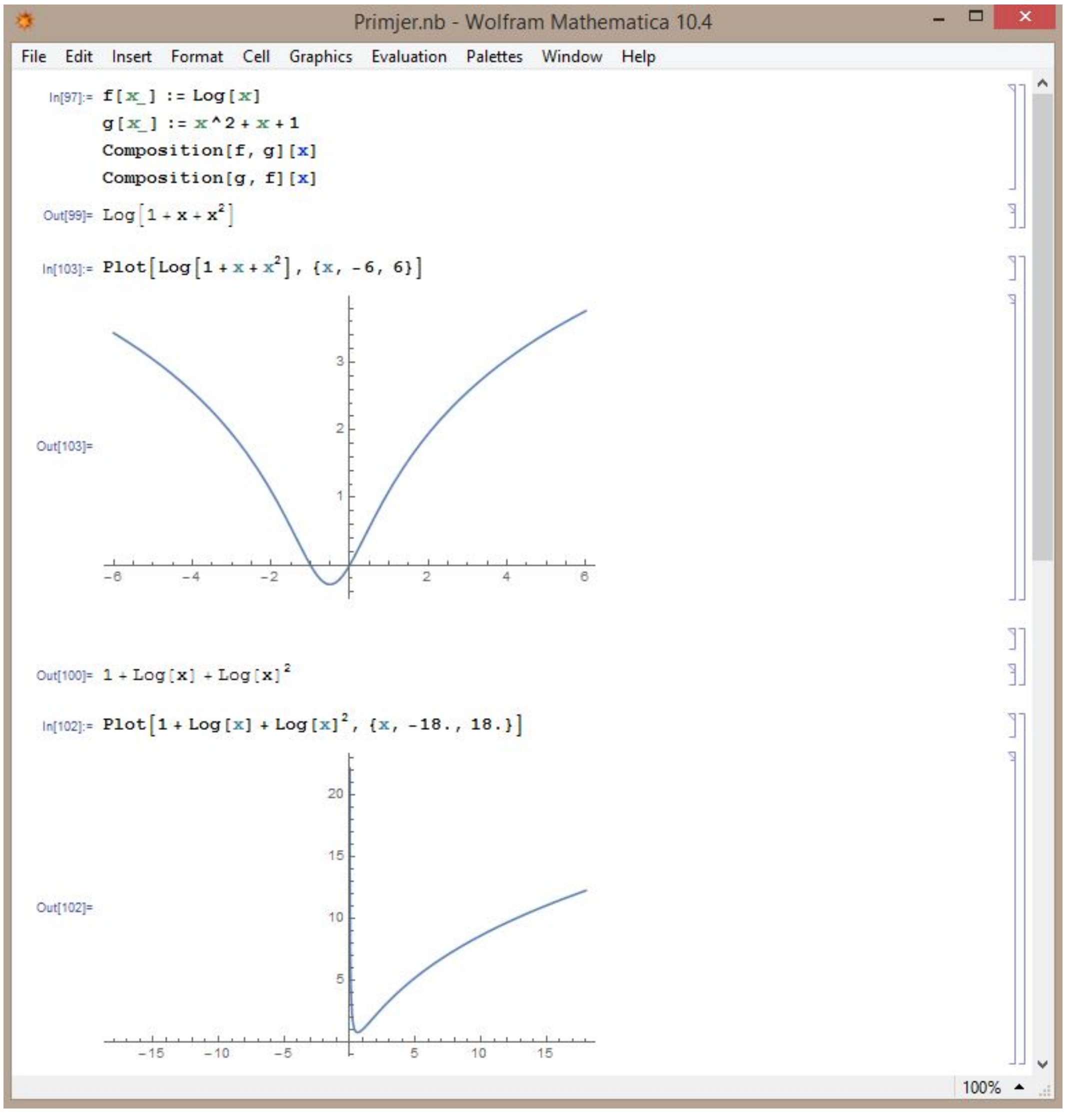
Nacrtajmo grafove funkcija i uvjerimo se u različitost!



Primjer 1.73 *Odredimo područja definicije funkcija* $f(x) = \log x$ *i* $g(x) = x^2 + x + 1$, *te izračunajmo i odredimo područja definicije za* $f \circ g$ *i* $g \circ f$. *Pomoću Wolframove Mathematice nacrtajmo grafove funkcija koje su kompozicije. Domene su* $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$, $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(f \circ g) = \mathbb{R}$ *i* $\mathcal{D}(g \circ f) = (0, \infty)$.

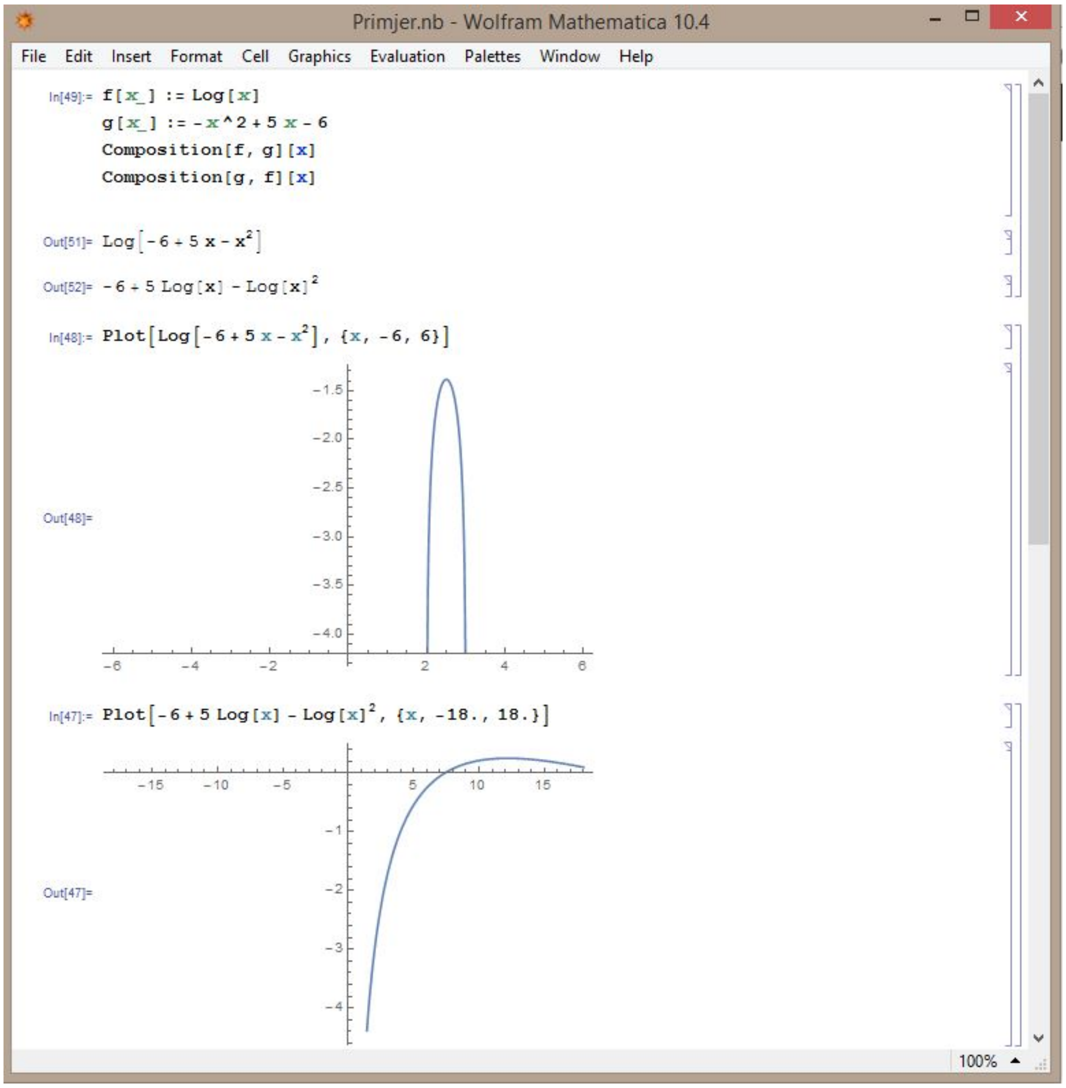
Dobivamo kompozicije

$(f \circ g)(x) = \log(x^2 + x + 1)$, $(g \circ f)(x) = (\log x)^2 + \log x + 1$.



Primjer 1.74 *Odredimo područja definicije funkcija* $f(x) = \ln x$ *i* $g(x) = -x^2 + 5x - 6$, *te izraŭnajmo i odredimo područja definicije za* $f \circ g$ *i* $g \circ f$. *Pomoću Wolframove Mathematice nacrtajmo grafove funkcija koje su kompozicije.*

Domene su $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$, $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R}$. *Kompozicija je* $(f \circ g)(x) = \ln(-x^2 + 5x - 6)$, *pa za domenu treba biti* $-x^2 + 5x - 6 > 0$, *što je za* $x \in (2, 3)$. *To daje* $\mathcal{D}(f \circ g) = (2, 3)$. *Za* $(g \circ f)(x) = -(\ln x)^2 + 5 \ln x - 6$ *imamo domenu* $\mathcal{D}(g \circ f) = (0, \infty)$.



Naredbom Composition[f, g][x] dobivamo ispis f[g[x]] ako funkcije nisu definirane. Za definirane funkcije dobivamo konkretno izračunatu kompoziciju, kao što je prikazano u prethodnim primjerima.

Primjer 1.75 *Studija okoliša određenog društva sugerirala je izraz*

$$c(p) = 0.7p + 2$$

za prosječnu dnevnu razinu ugljičnog monoksida u zraku. Broj stanovnika je p u tisućama, a razina ugljičnog monoksida u zraku mjeri se u dijelovima na milijun. Procijenjeno je da će t godina od danas broj stanovnika biti $p(t) = 7 + 0.3t^2$ tisuća.

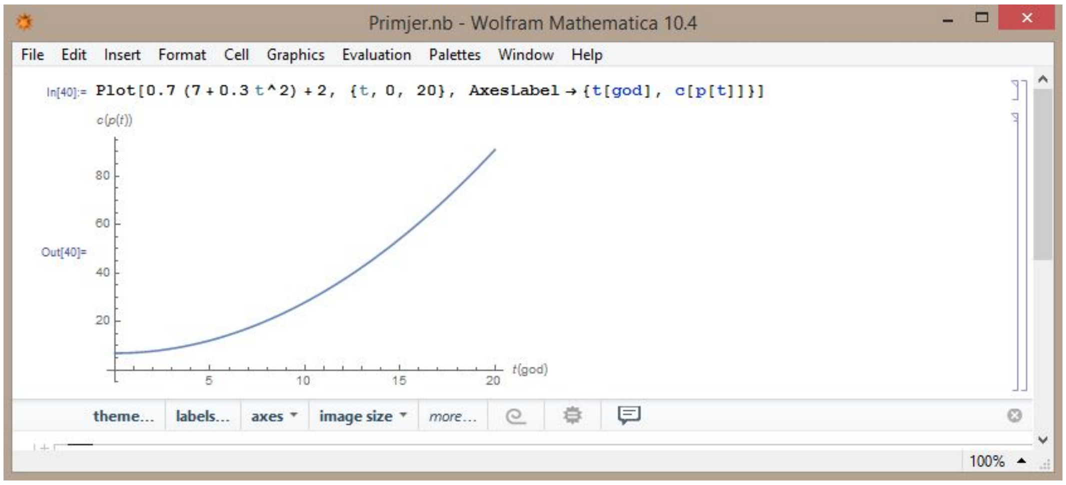
1. *Odredite razinu ugljičnog monoksida u zraku kao funkciju vremena.*

2. *Izračunajte kada će razina ugljičnog monoksida biti 7.6 dijelova na milijun.*

3. *Nacrtajte graf kompozicije funkcije.*

Rješenje.

1. $c(p(t)) = c(7 + 0.3t^2) = 0.7(7 + 0.3t^2) + 2 = 0.21t^2 + 6.9$
2. $c(p(t)) = 0.21t^2 + 6.9 = 7.6$
   $0.21t^2 = 0.7$
   $t = 1.83 \approx 2$ *godine*
3. *Kompozicija funkcije*



Primjer 1.76 *Komponirati se može više funkcija. Provjeri da vrijedi asocijativnost za komponiranje, odnosno da vrijedi*

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

za sve funkcije za koje je ova kompozicija definirana.

Primjer 1.77 *Općenito funkcija može imati više varijabli, pa se i takve funkcije mogu komponirati. U primjeru 1.8 imali smo cijene raznih proizvoda c_1,c_2, c_3. Ako je netko kupio 5 proizvoda cijene c_1, 7 proizvoda cijene c_2 , 3 proizvoda cijene c_3, onda je funkcijom*

$$f(c_1, c_2, c_3) = 5c_1 + 7c_2 + 3c_3$$

određena ukupna cijena koju treba platiti za sve što je kupljeno. Dogodile su se neke promjene, pa je proizvod kojemu je bila cijena c_1 poskupio za 8%, dok su druga dva proizvoda na akciji, pa su jeftinija za 10%. Da bismo ponovo imali funkciju koja računa ukupnu cijenu, trebamo definirati novu funkciju

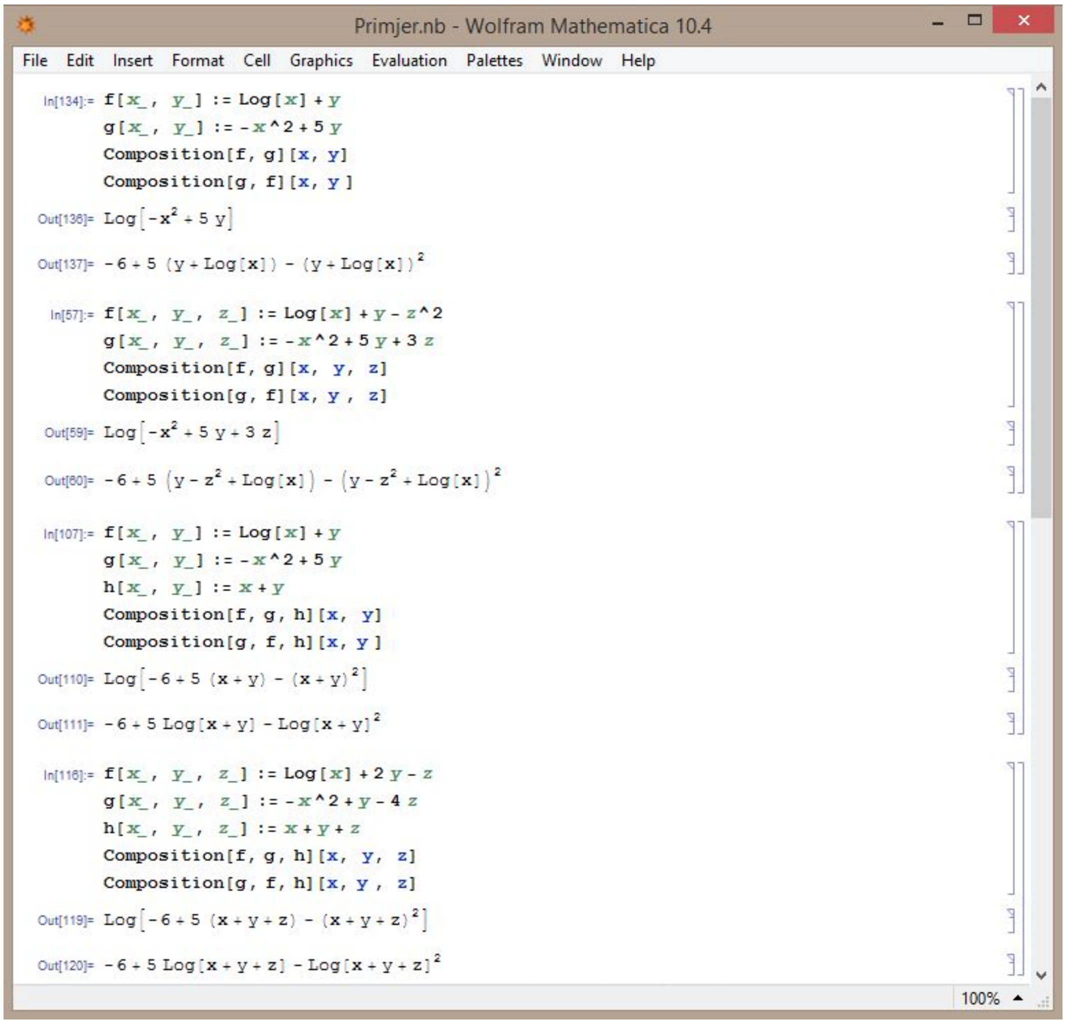
$$g(c_1, c_2, c_3) = (1.08c_1, 0.9c_2, 0.9c_3).$$

Kad izračunamo kompoziciju dobivamo funkciju

$$f(g(c_1, c_2, c_3)) = f(1.08c_1, 0.9c_2, 0.9c_3) = 5.4c_1 + 6.3c_2 + 2.7c_3$$

koja daje ukupnu sumu koju treba platiti. Kompozicija $f \circ g$ ima tri varijable koje su stare cijene, a na izlazu dobivamo cijenu koju treba platiti za cijelu kupnju nakon promjene cijene.

Primjer 1.78 *Korištenjem naredbe Composition[f, g, h][x, y] izračunajte nekoliko primjera s više varijabli.*



```
Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

In[134]:= f[x_, y_] := Log[x] + y
          g[x_, y_] := -x^2 + 5 y
          Composition[f, g][x, y]
          Composition[g, f][x, y]
Out[136]= Log[-x^2 + 5 y]
Out[137]= -6 + 5 (y + Log[x]) - (y + Log[x])^2

In[57]:= f[x_, y_, z_] := Log[x] + y - z^2
         g[x_, y_, z_] := -x^2 + 5 y + 3 z
         Composition[f, g][x, y, z]
         Composition[g, f][x, y, z]
Out[59]= Log[-x^2 + 5 y + 3 z]
Out[60]= -6 + 5 (y - z^2 + Log[x]) - (y - z^2 + Log[x])^2

In[107]:= f[x_, y_] := Log[x] + y
          g[x_, y_] := -x^2 + 5 y
          h[x_, y_] := x + y
          Composition[f, g, h][x, y]
          Composition[g, f, h][x, y]
Out[110]= Log[-6 + 5 (x + y) - (x + y)^2]
Out[111]= -6 + 5 Log[x + y] - Log[x + y]^2

In[116]:= f[x_, y_, z_] := Log[x] + 2 y - z
          g[x_, y_, z_] := -x^2 + y - 4 z
          h[x_, y_, z_] := x + y + z
          Composition[f, g, h][x, y, z]
          Composition[g, f, h][x, y, z]
Out[119]= Log[-6 + 5 (x + y + z) - (x + y + z)^2]
Out[120]= -6 + 5 Log[x + y + z] - Log[x + y + z]^2
100%
```

Spomenuli smo već da možemo komponirati dvije ili tri funkcije, ali nismo naglasili da se funkcija može komponirati sama sa sobom i to n puta, odnosno koliko god puta želimo. Označavamo

$$\begin{aligned}(f\circ f)(x)=f(f(x)) &= f^{(2)}(x)\\ (f\circ f\circ f)(x)=f(f(f(x))) &= f^{(3)}(x)\\ \ldots(f\circ f\circ\cdots\circ f)(x) &= f^{(n)}(x).\end{aligned}$$

Primjer 1.79 *Neka je $f(x)=x^2$, odredite funkcije $f^{(2)}(x)$, $f^{(3)}(x)$ i $f^{(n)}(x)$.*

Rješenje je $f^{(n)}(x)=x^{2^n}$.

Uočimo da $f^{(n)}(x)$ dobivamo kao $f(f^{(n-1)}(x))$, a $f^{(n-1)}(x)$ dobivamo kao $f(f^{(n-2)}(x))$, dakle uvijek iz prethodne kompozicije. Ovakvo komponiranje možemo povezati s rekurzivnim jednadžbama. Rekurzivna jednadžba je jednadžba koja definira n-ti član nekog niza x_n koristeći prethodne članove tog niza $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Ako ste već programirali u nekom programskom jeziku, onda sigurno znate da je logika rekurzije jedan od osnovnih programerskih pristupa.

Primjer 1.80 *Definiramo rekurzivnu jednadžbu za primjer 1.79 sa*

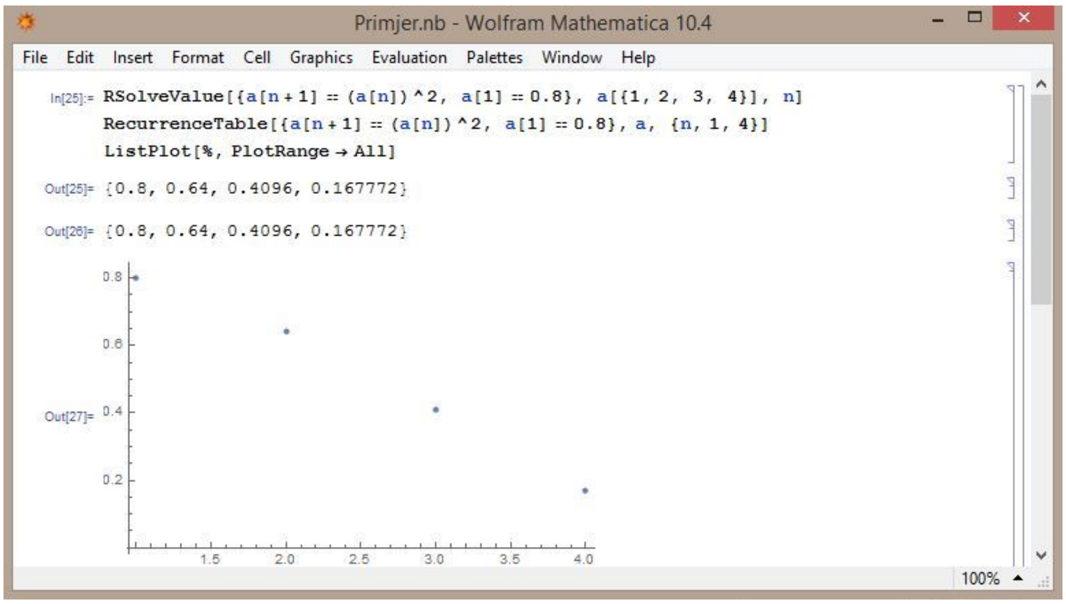
$$x_{n+1} = {x_n}^2,$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= x_{n+1} \\ f^{(n)}(x) &= x_n \end{aligned}$$

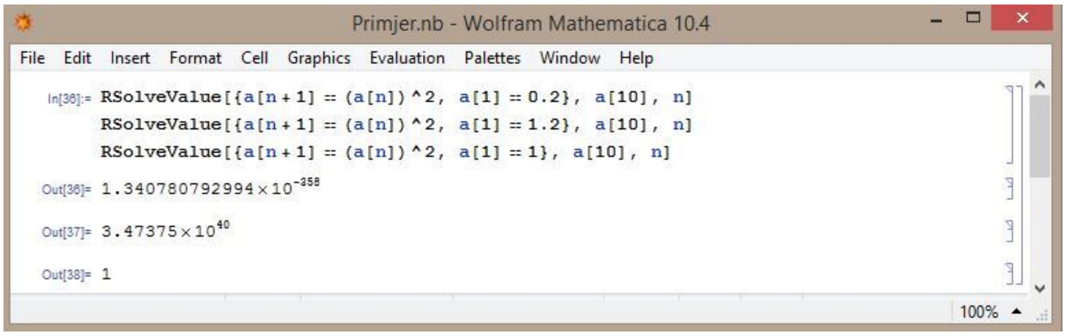
Izračunajmo x_4 *ako je* $x_1 = 0.8$. *Dobivamo vrijednosti*

$$\begin{aligned} x_2 &= 0.8^2 = 0.64 \\ x_3 &= 0.64^2 = 0.4096 \\ x_4 &= 0.4096^2 = 0.16777216. \end{aligned}$$



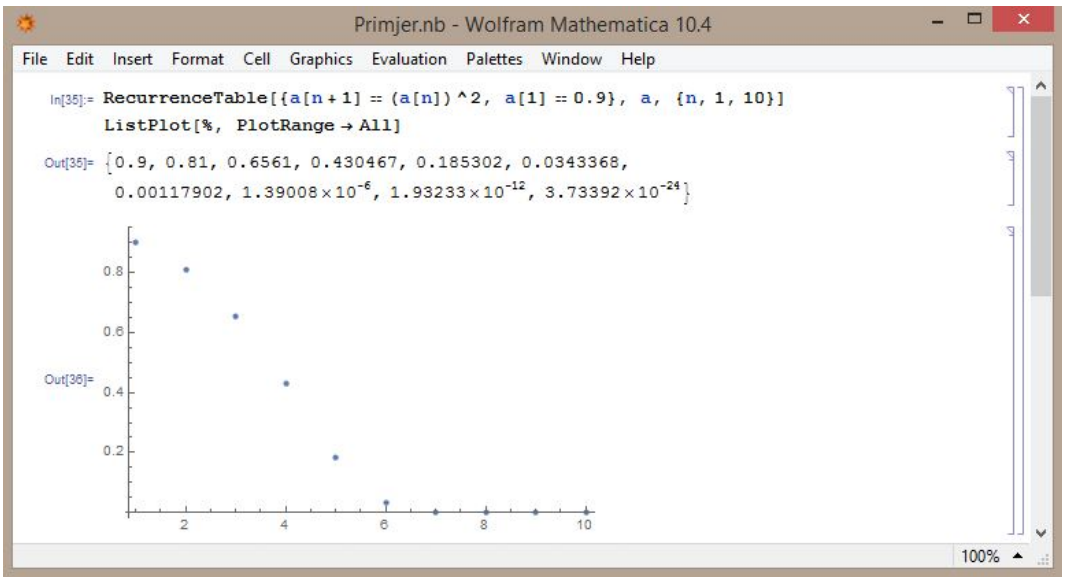
Primjer 1.81 *Pomoću Wolframove Mathematice izračunajte vrijednosti niza* $x_{n+1} = f(x_n)$ *gdje je* $f(x) = x^2$. *Izračunajte*

1. x_{10} *ako je* $x_1 = 0.2$
2. x_{10} *ako je* $x_1 = 1.2$
3. x_{10} *ako je* $x_1 = 1$.



Primjer 1.82 *Koristeći prethodna dva primjera postavite hipotezu o ponašanju niza brojeva $x_{n+1} = {x_n}^2$. Testirajte hipotezu na računalu. Ispišite nizove koje koristite pri testiranju vaše hipoteze.*

Rješenje je da se za pozitivne početne vrijednosti $x_1 < 1$, brojevi niza stalno smanjuju. Za pozitivne početne vrijednosti $x_1 > 1$, brojevi niza se stalno povećavaju. Ako je početna vrijednost $x_1 = 1$, onda imamo niz jedinica. Ako stavimo negativnu početnu vrijednost, onda vidimo da je zaključak da se za $|x_1| < 1$, brojevi niza približavaju nuli. Za početne vrijednosti $|x_1| > 1$, brojevi niza se stalno povećavaju. Ako je početna vrijednost $x_1 = -1$, onda osim ove početne vrijednosti imamo niz jedinica.

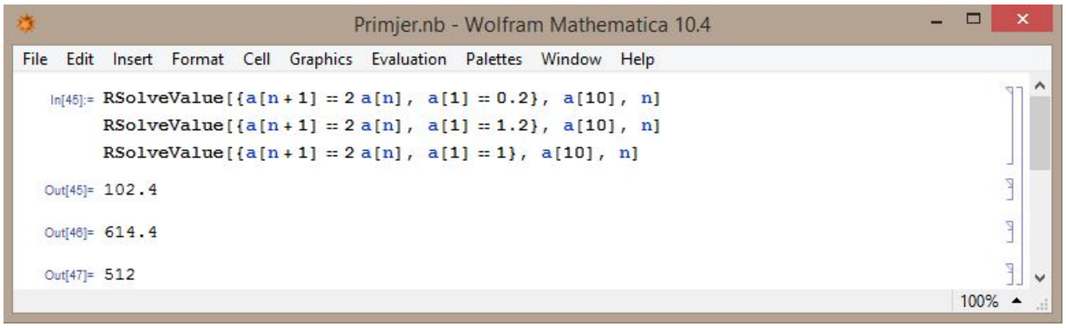


Primjer 1.83 *Pomoću Wolframove Mathematice izračunajte vrijednosti niza $x_{n+1} = f(x_n)$ gdje je $f(x) = 2x$. Izračunajte*

1. *x_{10} ako je $x_1 = 0.2$*

2. *x_{10} ako je $x_1 = 1.2$*

3. *x_{10} ako je $x_1 = 1$.*



Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4

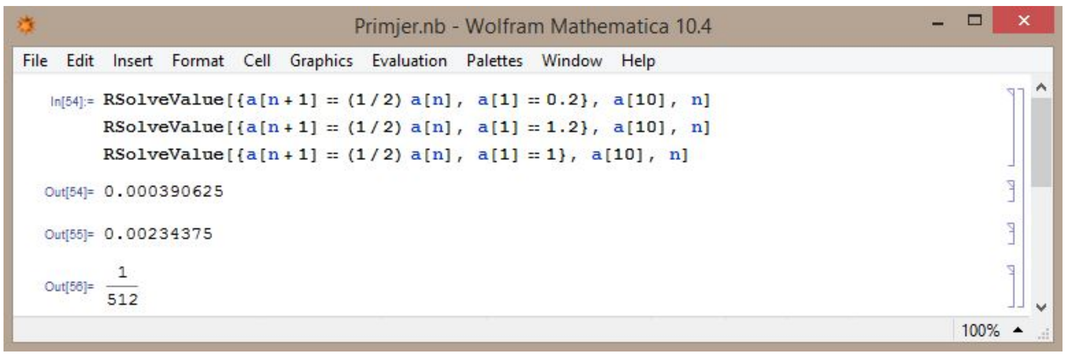
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

```
In[45]:= RSolveValue[{a[n+1] == 2 a[n], a[1] == 0.2}, a[10], n]
         RSolveValue[{a[n+1] == 2 a[n], a[1] == 1.2}, a[10], n]
         RSolveValue[{a[n+1] == 2 a[n], a[1] == 1}, a[10], n]
Out[45]= 102.4
Out[46]= 614.4
Out[47]= 512
```

100%

Primjer 1.84 *Pomoću Wolframove Mathematice izračunajte vrijednosti niza* $x_{n+1} = f(x_n)$ *gdje je* $f(x) = 0.5x$. *Izračunajte*

1. x_{10} *ako je* $x_1 = 0.2$
2. x_{10} *ako je* $x_1 = 1.2$
3. x_{10} *ako je* $x_1 = 1$.



Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4

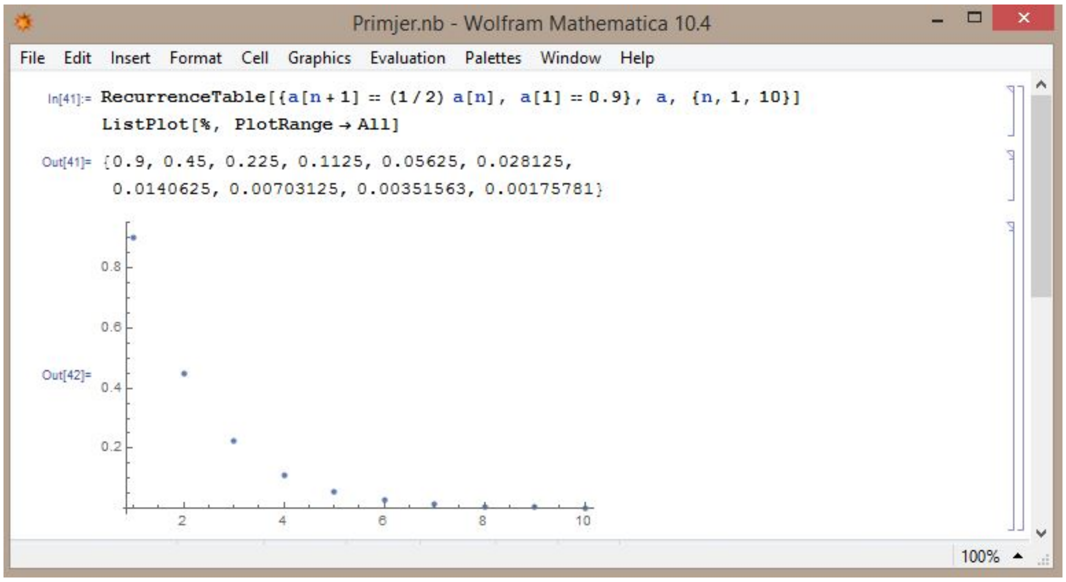
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

```
In[54]:= RSolveValue[{a[n+1] == (1/2) a[n], a[1] == 0.2}, a[10], n]
         RSolveValue[{a[n+1] == (1/2) a[n], a[1] == 1.2}, a[10], n]
         RSolveValue[{a[n+1] == (1/2) a[n], a[1] == 1}, a[10], n]
Out[54]= 0.000390625
Out[55]= 0.00234375
Out[56]= 1/512
```

100%

Primjer 1.85 *Koristeći prethodna dva primjera postavite hipotezu o ponašanju niza brojeva* $x_{n+1} = ax_n$, *za različite* $a \in \mathbb{R}$. *Testirajte hipotezu na računalu. Ispišite nizove koje koristite pri testiranju vaše hipoteze.*

Rješenje je da za $|a| < 1$, *brojevi niza se približavaju nuli neovisno o početnoj točki. Za* $|a| > 1$, *brojevi niza se udaljavaju od nule neovisno o početnoj točki. U oba slučaja za negativne a niz skače oko nule, jedna vrijednost je pozitivna, druge negativna i na taj način ide prema nuli ili od nule, ovisno o apsolutnoj vrijednosti broja a. Ako je* $|a| = 1$, *onda za* $a = 1$ *imamo niz koji se ne mijenja i svi članovi su jednaki početnom članu* x_1, *a za* $a = -1$ *dobivamo niz u kojem se izmijenjuje* x_1 *i* $-x_1$.



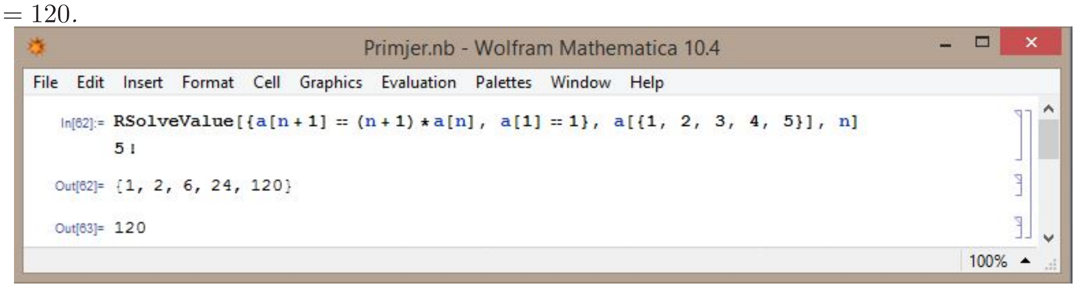
Rekurzivne jednadžbe mogu imati i druge oblike, ne samo oblik $x_{n+1} = f(x_n)$ koji smo do sad spominjali. Oblik $x_{n+1} = f(x_n)$ nam je važan u ovom poglavlju jer on predstavlja kompoziciju funkcija. Ipak, kratko ćemo spomenuti i neke druge poznate rekurzije.

Pokušajmo pomoću rekurzije riješiti ovaj jednostavan problem.

Primjer 1.86 *Želimo izračunati umnožak prvih* 5 *prirodnih brojeva, pa ćemo definirati niz*

$$a_{n+1} = (n+1)a_n,$$

uz početnu vrijednost $a_1 = 1$. *Članovi niza su* $a_2 = 2$, $a_3 = 6$, $a_4 = 24$, $a_5 = 120$. *Traženi umnožak je* 120. *Umnožak prvih* N *brojeva nazivamo* N *faktorijela i zapisujemo* $N!$. *Mi smo izračunali da je* $5! = 120$.



Primjer 1.87 *Fibonaccijev niz je definiran rekurzivno*

$$a_{n+1} = a_{n-1} + a_n.$$

Svaki član niza definiran je kao suma prethodna dva člana niza, pa onda kao početne vrijednosti moramo uzeti dvije vrijednosti. Neka je $a_0 = a_1 = 1$.

1. *Izračunajte prvih* 10 *članova niza.*

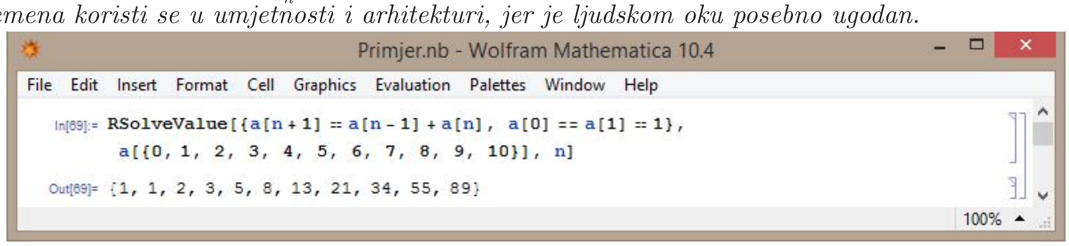
2. *Izračunajte omjere*
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$
za prvih 10 *članova niza.*

3. *Izračunajte razliku između*
$$\frac{a_6}{a_5} \; i \; \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

4. *Izračunajte razliku između*
$$\frac{a_{10}}{a_9} \; i \; \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

5. *Pronađite neki članak koji govori o omjeru koji se naziva zlatni rez. Povežite zlatni rez i Fibonaccijev niz.*

Rješenje je da omjer $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *teži prema broju* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. *Taj omjer nazivamo zlatnim rezom. Od antičkih vremena koristi se u umjetnosti i arhitekturi, jer je ljudskom oku posebno ugodan.*



1.6 Područje definicije složene funkcije

Vidjeli smo do sada da je podrčje definicije ili domena, skup na kojem je funkcija definirana. Činjenica da je neki element u domeni neke funkcije znači da funkcija zna kako djelovati na tom elementu. U primjeru 1.70 naišli smo na problem. Željeli smo da funkcija djeluje na nekim elementima, a ona to nije mogla jer ti elementi nisu bili u domeni funkcije.

Domena linearne i kvadratne funkcije su svi realni brojevi, isto tako je za potencije i neparne korijene. Kod logaritamske funkcije domenu smo ograničili na skup pozitivnih brojeva, a kod parnih korijena na skup pozitivnih brojeva i nulu. Od prije već znamo da nazivnik ne smije biti nula, pa kad naiđemo na funkcije koje imaju nazivnik, treba paziti da on ne bude jednak nuli.

Što se događa ako ne poštujemo ova pravila?

Primjer 1.88 *Pomoću Wolframove Mathematice izračunajte vrijednosti funkcije.*

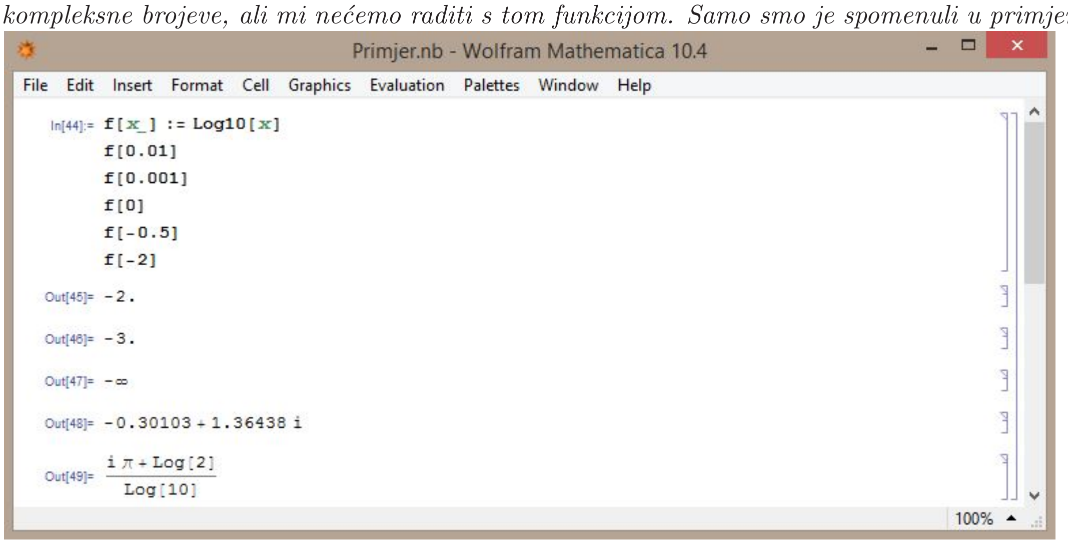
1. $f(0.01)$, $f(0.001)$, $f(0)$ *ako je* $f(x) = \log x$
2. $f(-0.5)$, $f(-2)$ *ako je* $f(x) = \log x$.

Rješenje.

Znamo da je logaritamska funkcija definirana za pozitivne brojeve, pa je $f(0.01) = -2$, $f(0.001) = -3$. *U Wolframovoj Mathematici dobivamo* $f(0) = -\infty$, *što zapravo znači da je*

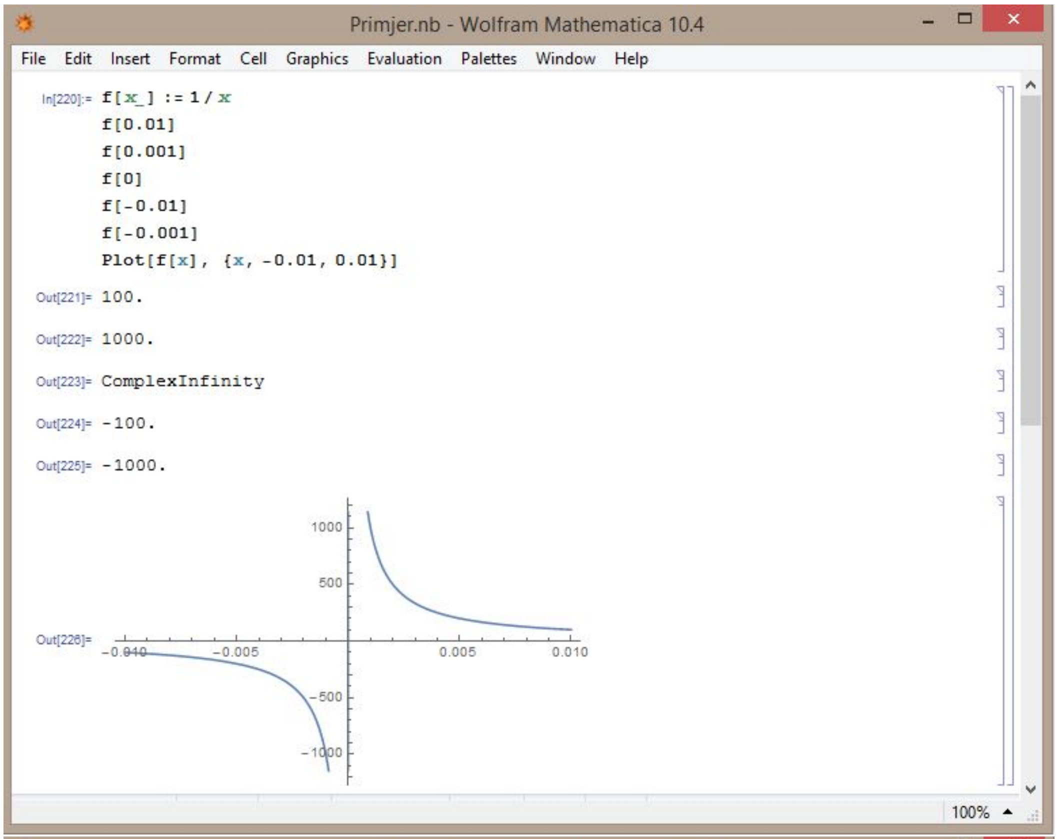
$$10^{-\textit{jako veliki pozitivni broj}} = 0.$$

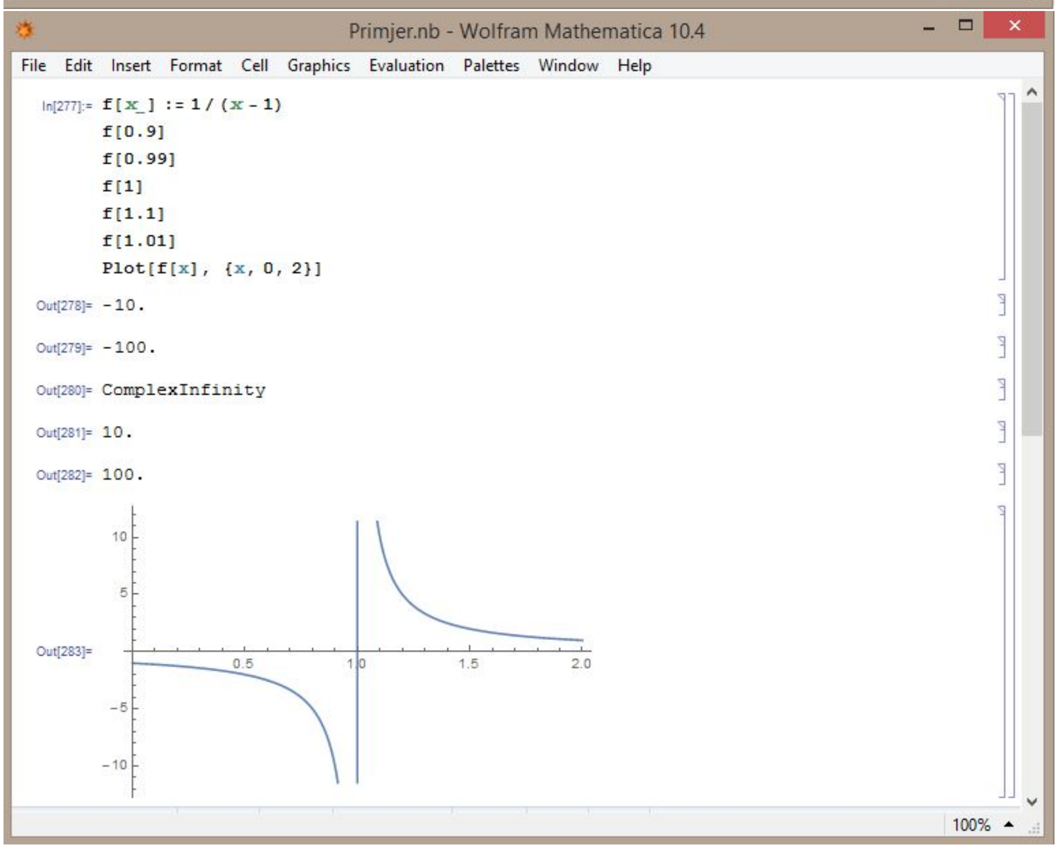
Vidimo da za $f(-0.5)$ *i* $f(-2)$ *dobivamo kompleksne brojeve, što ne želimo jer radimo s realnim funkcijama! Logaritamska funkcija s kojom radi Wolframove Mathematica je proširenje logaritamske funkcije na kompleksne brojeve, ali mi nećemo raditi s tom funkcijom. Samo smo je spomenuli u primjeru 1.36.*



Primjer 1.89 *Pomoću Wolframove Mathematice izračunajte vrijednosti funkcije i nacrtajte grafove funkcija u blizini točaka u kojima računate vrijednosti funkcije*

1. $f(0.01)$, $f(0.001)$, $f(0)$ *ako je* $f(x) = \frac{1}{x}$
2. $f(-0.01)$, $f(-0.001)$, $f(0)$ *ako je* $f(x) = \frac{1}{x}$
3. $f(0.9)$, $f(0.99)$, $f(1)$ *ako je* $f(x) = \frac{1}{x-1}$
4. $f(1.1)$, $f(1.01)$, $f(1)$ *ako je* $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

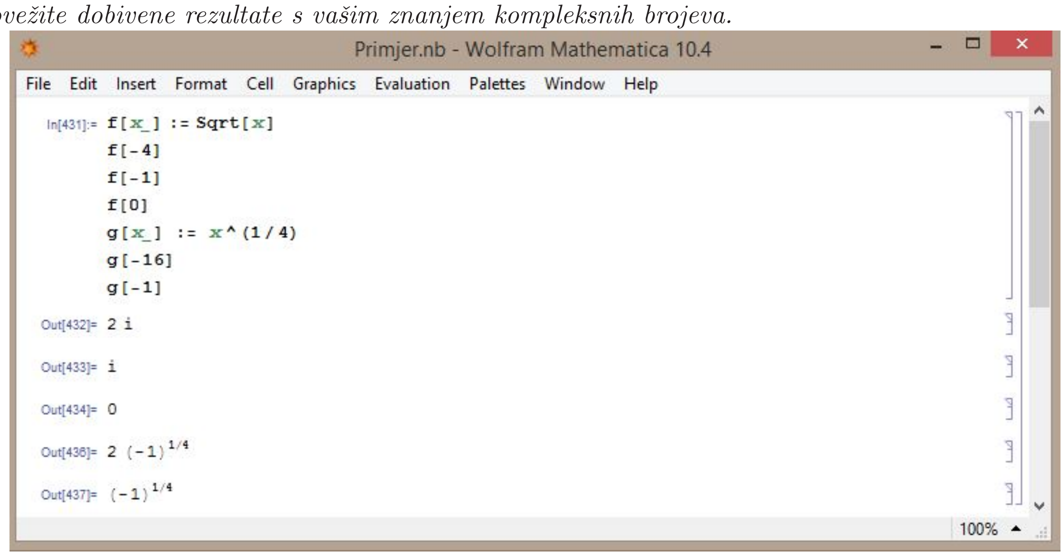

Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[220]:= f[x_] := 1 / x
f[0.01]
f[0.001]
f[0]
f[-0.01]
f[-0.001]
Plot[f[x], {x, -0.01, 0.01}]
Out[221]= 100.
Out[222]= 1000.
Out[223]= ComplexInfinity
Out[224]= -100.
Out[225]= -1000.
Out[226]=
1000
500
-0.010
-0.005
0.005
0.010
-500
-1000
100%


Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[277]:= f[x_] := 1 / (x - 1)
f[0.9]
f[0.99]
f[1]
f[1.1]
f[1.01]
Plot[f[x], {x, 0, 2}]
Out[278]= -10.
Out[279]= -100.
Out[280]= ComplexInfinity
Out[281]= 10.
Out[282]= 100.
Out[283]=
10
5
0.5
1.0
1.5
2.0
-5
-10
100%

Primjer 1.90 *Pomoću Wolframove Mathematice izračunajte vrijednosti funkcije.*

1. $f(-4)$, $f(-1)$, $f(0)$ *ako je* $f(x) = \sqrt{x}$
2. $f(-16)$, $f(-1)$ *ako je* $f(x) = \sqrt[4]{x}$.

Povežite dobivene rezultate s vašim znanjem kompleksnih brojeva.



U ovim primjerima smo se susreli s dva problema:

1. Rezultat je simbol ∞ ili $-\infty$, što su oznake za beskonačno veliki pozitivan ili negativan broj.
2. Rezultat je kompleksni broj.

Mi želimo raditi s realnim brojevima, pa izbjegavamo točke u kojima naša funkcija bježi u ∞ ili $-\infty$. Isto tako izbjegavamo kompleksne brojeve. Već smo spomenuli da su kompleksni brojevi izuzetno moćan i koristan alat u primjenama, ali se ne možemo baviti funkcijama kompleksne varijable dok ne znamo raditi s realnim funkcijama.

Pri računanju domene neke realne funkcije treba poštivati sljedeća pravila:

1. Izraz pod parnim korijenom treba biti ≥ 0.
2. Izraz pod logaritmom treba biti > 0.
3. Nazivnik treba biti $\neq 0$.

Ponekad se mogu pojaviti i netipične funkcije, kao na primjer

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \log_{g(x)} h(x) \\ f_2(x) &= g(x)^x. \end{aligned}$$

Funkcija f_1 ima kao bazu logaritma funkciju $g(x)$. U definiciji logaritamske funkcije stoji da baza mora biti pozitivan broj različit od 1, pa onda ovdje za f_1 imamo uvjete

$$\begin{gathered} g(x) \neq 1 \\ g(x) > 0 \\ h(x) > 0 \end{gathered}$$

Funkcija f_2 ima kao bazu funkciju $g(x)$. U definiciji eksponencijalne funkcije stoji da baza mora biti pozitivan broj različit od 1, pa onda ovdje za f_2 imamo uvjete

$$g(x) \neq 1$$
$$g(x) > 0$$

U sljedećim primjerima mi ćemo se baviti tipičnim funkcijama koje se često pojavljuju u primjeni.

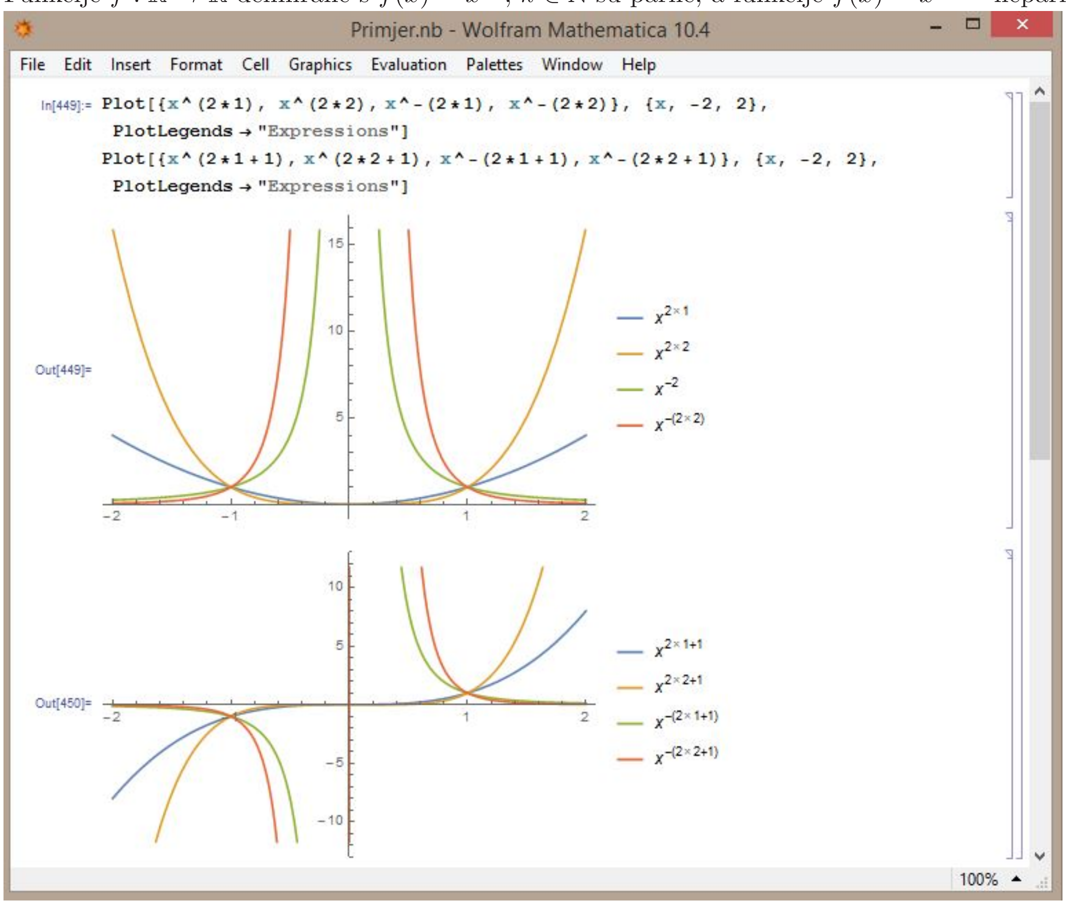
Primjer 1.91 *Odredite domenu funkcije*
1. $f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+1}$, 2. $f(x) = \log(x^2 - 6x + 8)$, 3. $f(x) = \sqrt{\log x}$, 4. $f(x) = \sqrt{x^3}$.
Rješenje.

1. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, 2. $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 2] \cup [4, \infty)$, 3. $\mathcal{D}(f) = [1, \infty)$, 4. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_0^+$.

Funkciju za koju vrijedi $f(-x) = f(x)$, za svaki x iz domene funkcije nazivamo **parnom funkcijom**. Funkciju za koju vrijedi $f(-x) = -f(x)$, za svaki x iz domene funkcije nazivamo **neparnom funkcijom**. Iz ovoga je jasno da funkcija može biti parna ili neparna samo u slučaju kad je definirana za x i za $-x$, odnosno da je definirana na intervalu simetričnom oko nule.

Graf parne funkcije je osnosimetričan u odnosu na os y, a graf neparne funkcije je centralnosimetričan u odnosu na ishodište.

Funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirane s $f(x) = x^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$ su parne, a funkcije $f(x) = x^{2k+1}$ neparne.



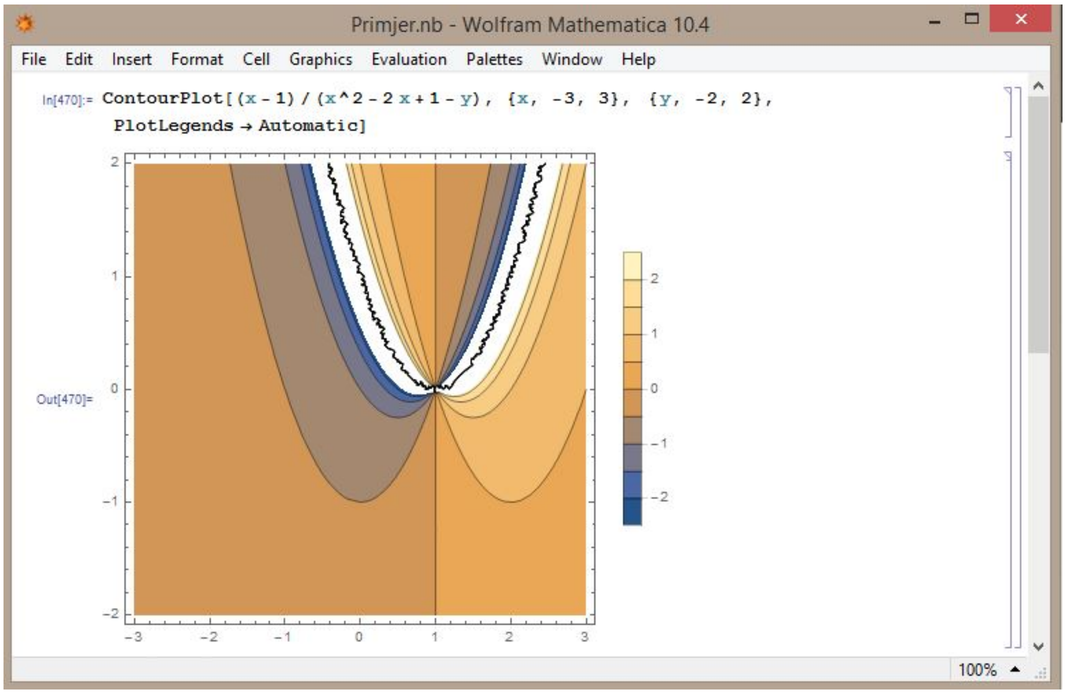
Vidjeli smo da je domena funkcije jedne varijable podskup skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Domena funkcije dviju varijabli je podskup ravnine, koju obično označavamo s $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ jer u ravnini točke označavamo s dvije koordinate (x, y), pri čemu je $x \in \mathbb{R}$ i $y \in \mathbb{R}$. Domena funkcije triju varijabli je podskup prostora, koji obično označavamo s $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ jer u prostoru točke označavamo s tri koordinate (x, y, z), pri čemu je $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ i $z \in \mathbb{R}$.

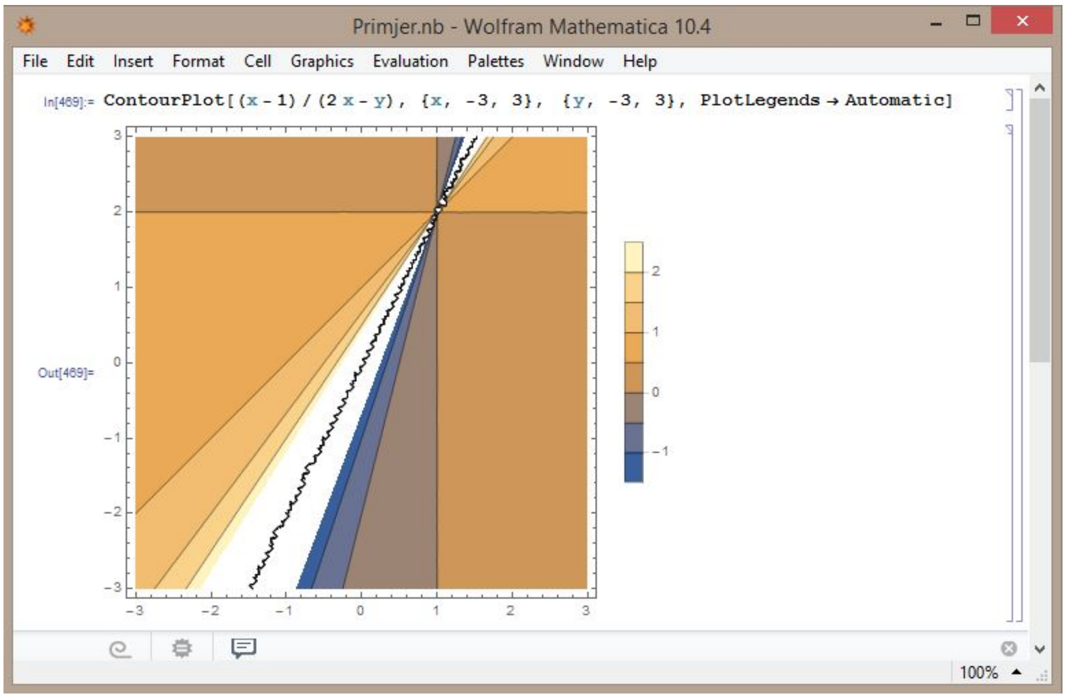
Primjer 1.92 *Odredite domenu funkcije i nacrtajte domenu pomoću Wolframove Mathematice*

1. $f(x, y) = \frac{x-1}{x^2-2x+1-y}$
2. $f(x, y) = \frac{x-1}{2x-y}$
3. $f(x, y) = \log(x - y)$
4. $f(x, y) = \log(x^2 - 6x + 8 - y)$
5. $f(x, y) = \sqrt{y - \log x}$
6. $f(x, y) = \sqrt{y - x^3}$
7. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$.

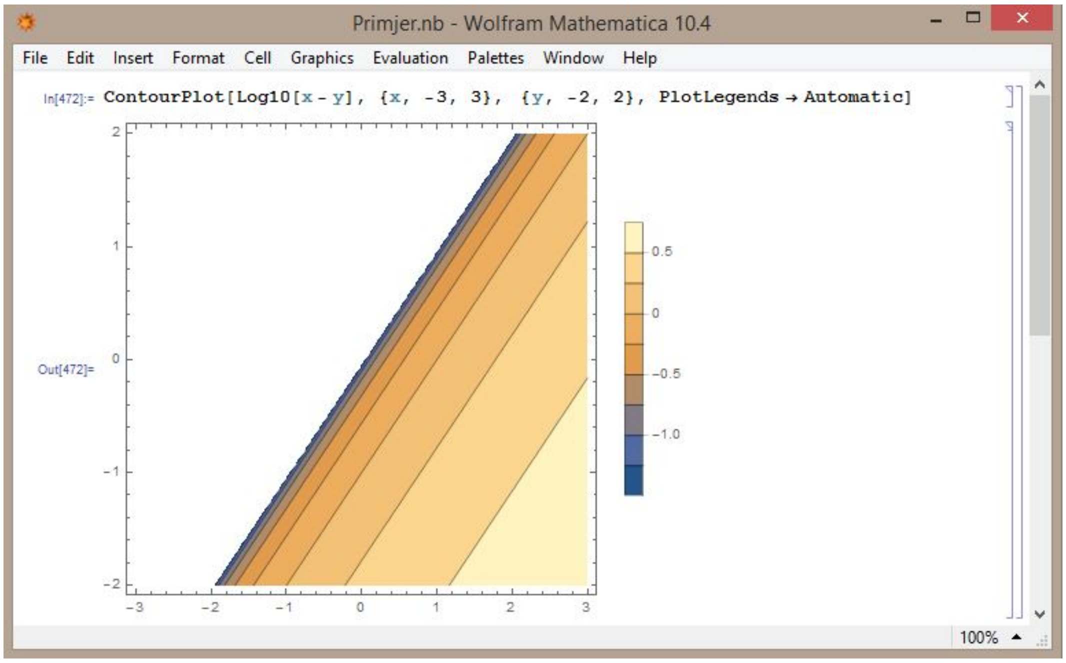
Rješenje.

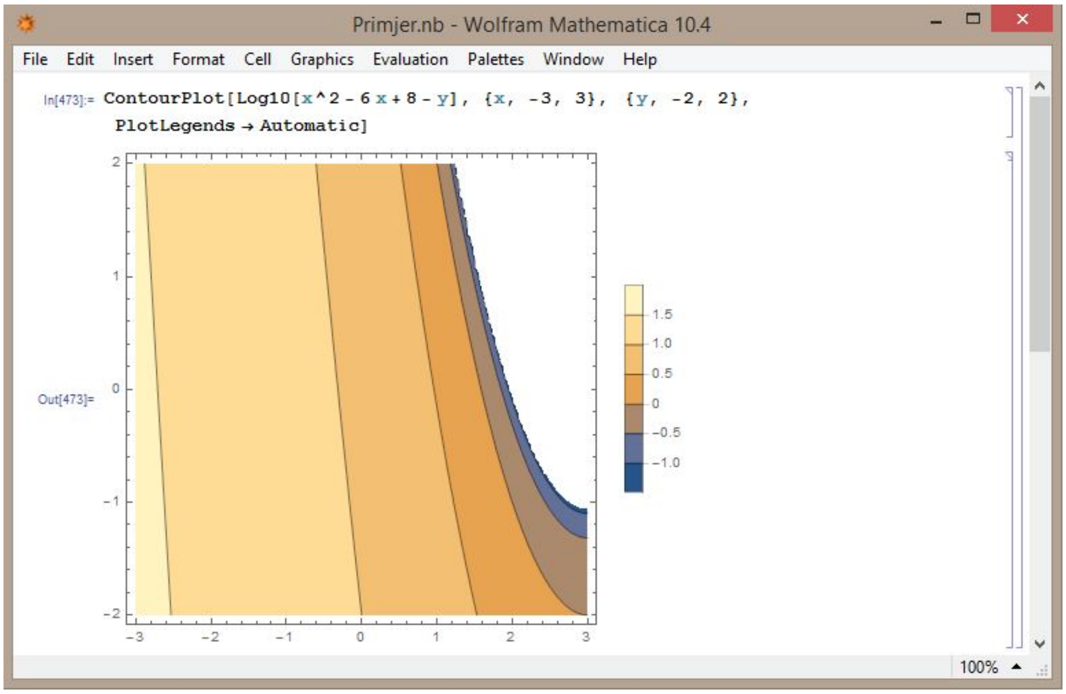
1. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 - 2x + 1\}$, *to je cijela ravnina bez parabole* $y = x^2 - 2x + 1$.
2. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$, *to je cijela ravnina bez pravca* $y = 2x$.
3. $\mathcal{D}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y > 0\}$, *to je poluravnina* $x - y > 0$.
4. $\mathcal{D}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 6x + 8 > y\}$, *to je dio ravnine izvan parabole* $x^2 - 6x + 8 = y$.
5. $\mathcal{D}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \log x\}$, *to je dio ravnine koji graf* $y = \log x$ *dijeli na 2 dijela. Uvrsti se jedna točka i provjeri za koji dio ravnine vrijedi* $y \geq \log x$.
6. $\mathcal{D}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^3\}$, *to je dio ravnine koji kubna parabola* $y = x^3$ *dijeli na 2 dijela. Slično kao u prethodnom zadatku uvrsti se jedna točka i provjeri za koji dio ravnine vrijedi* $y \geq x^3$.
7. $\mathcal{D}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$, *to je dio ravnine izvan kružnice* $x^2 + y^2 = 1$.



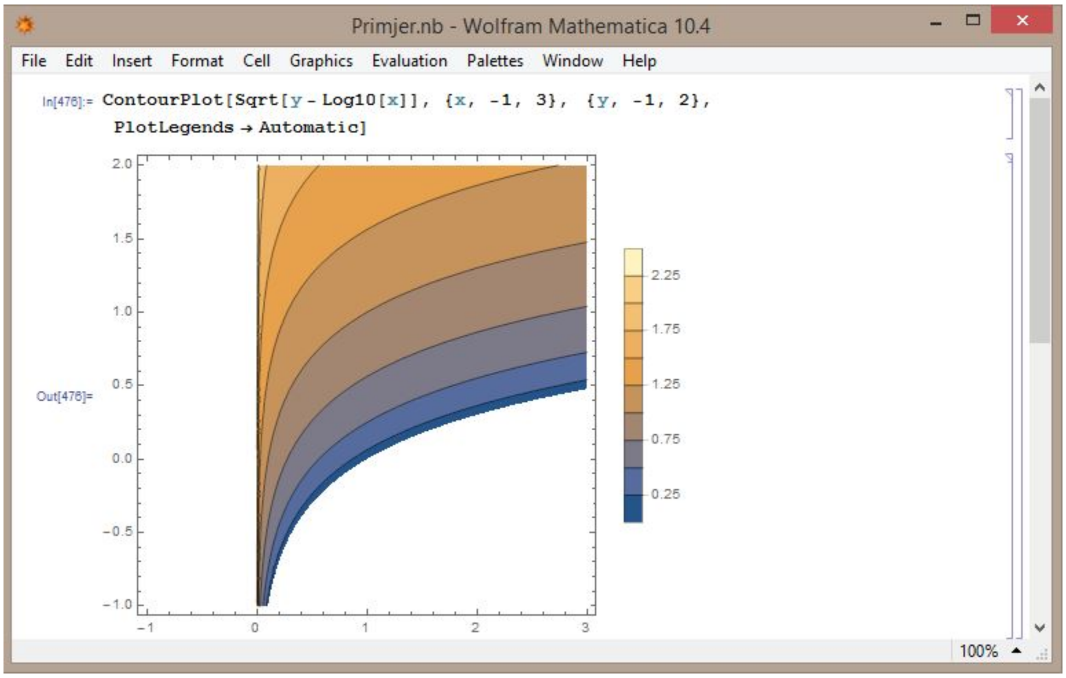


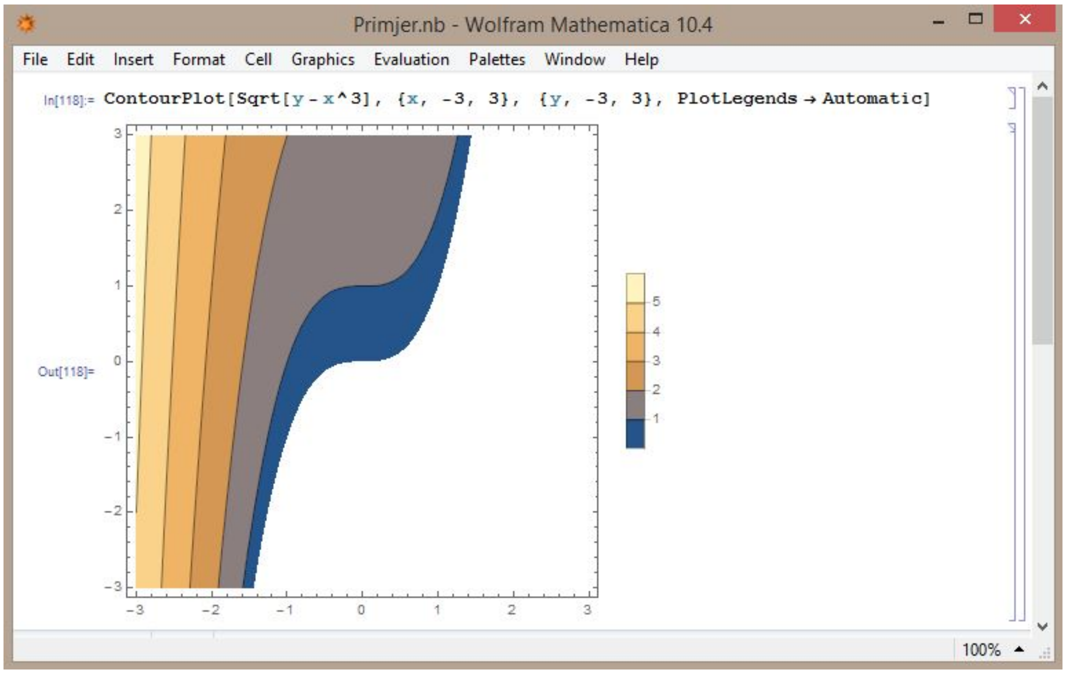
Naredba ContourPlot crta područja u kojima izraz napisan u naredbi mijenja vrijednost. Sa strane na legendi piše vrijednost izraza u području označenom nekom bojom. Na ove dvije slike je cik-cak linijom prikazana krivulja na kojoj funkcija nije definirana.

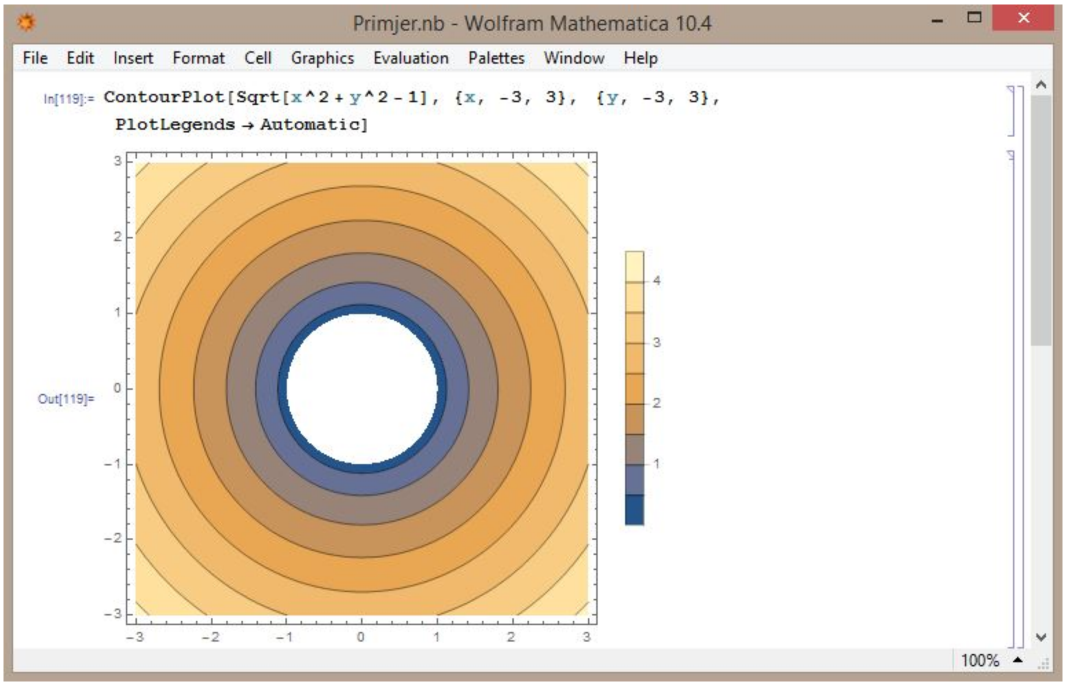




Na ovim primjerima funkcije nisu definirane na bijelom području, a tako je i u preostala 3 primjera.


Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[476]:= ContourPlot[Sqrt[y - Log10[x]], {x, -1, 3}, {y, -1, 2}, PlotLegends → Automatic]
Out[476]=
2.25
1.75
1.25
0.75
0.25
100%


Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[118]:= ContourPlot[Sqrt[y - x^3], {x, -3, 3}, {y, -3, 3}, PlotLegends → Automatic]
Out[118]=
5
4
3
2
1
100%

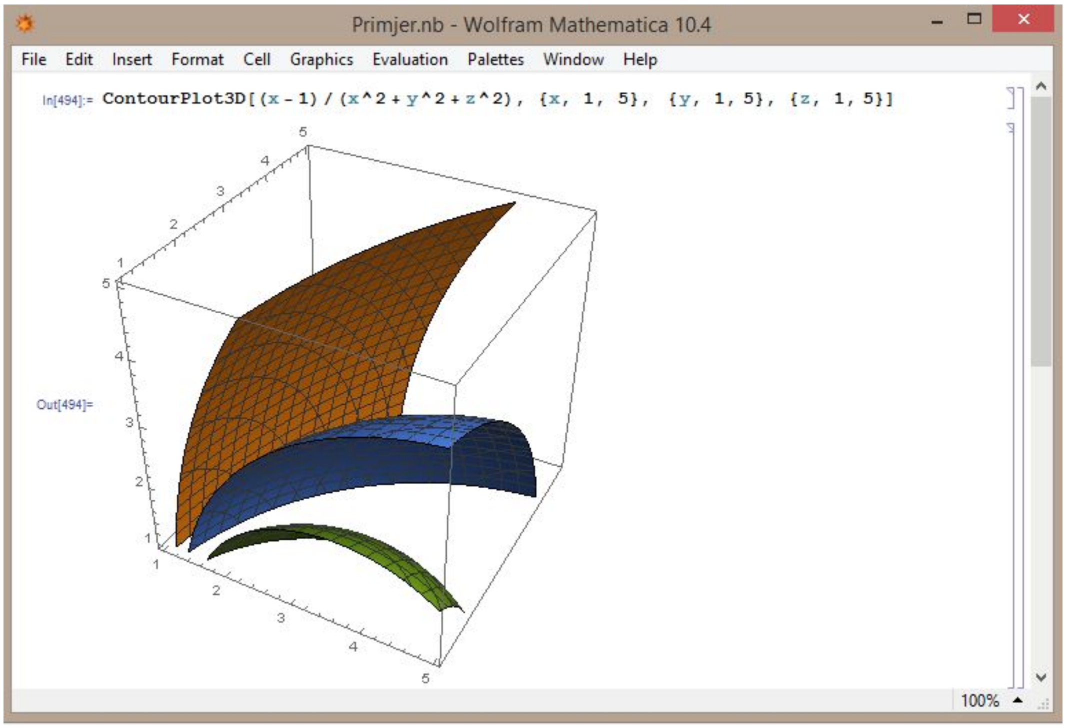


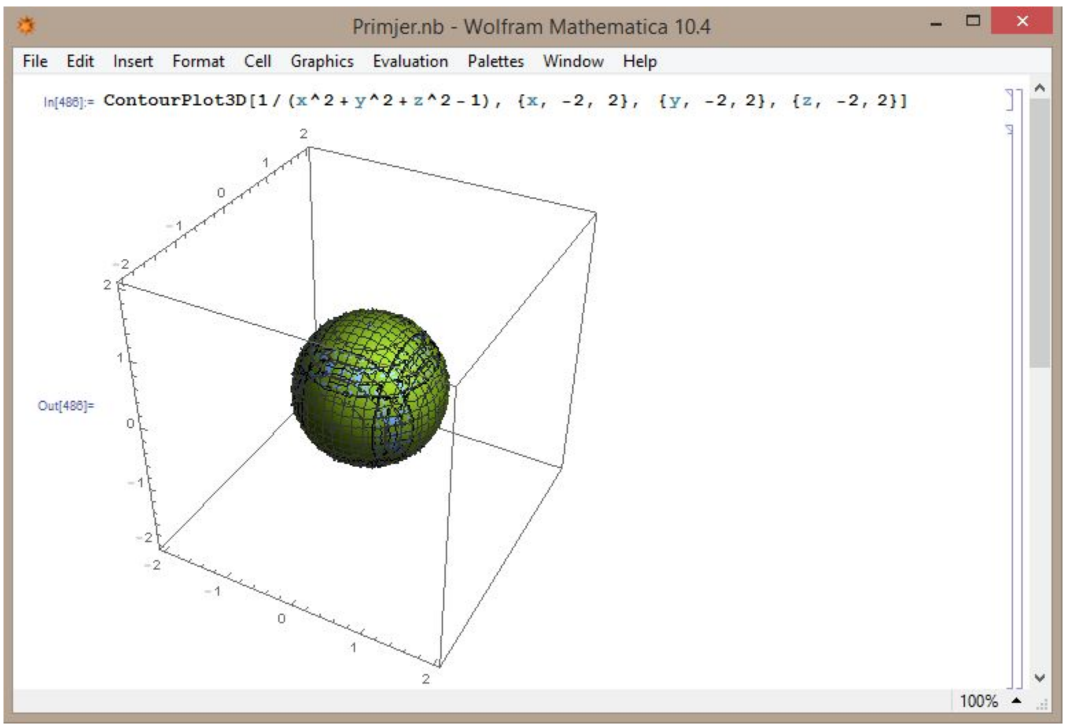
Primjer 1.93 *Odredite domenu funkcije, te nacrtajte domenu pomoću Wolframove Mathematice*

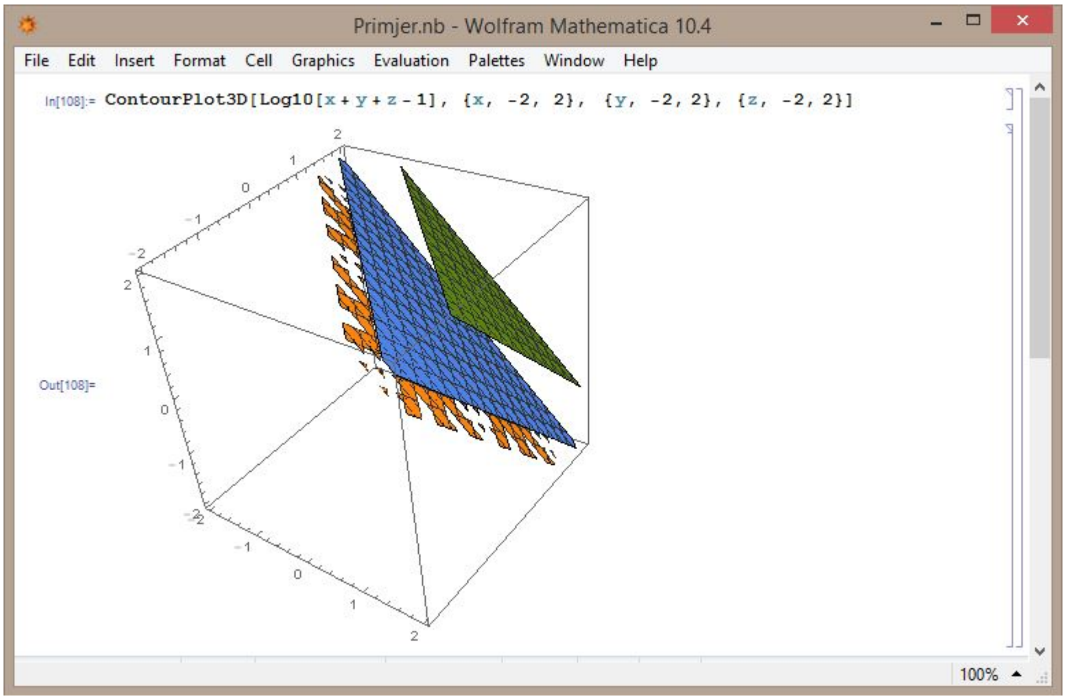
1. $f(x, y, z) = \frac{x-1}{x^2+y^2+z^2}$
2. $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2-1}$
3. $f(x, y, z) = \log(x + y + z - 1)$
4. $f(x, y, z) = \sqrt{2x - y + z + 2}$.

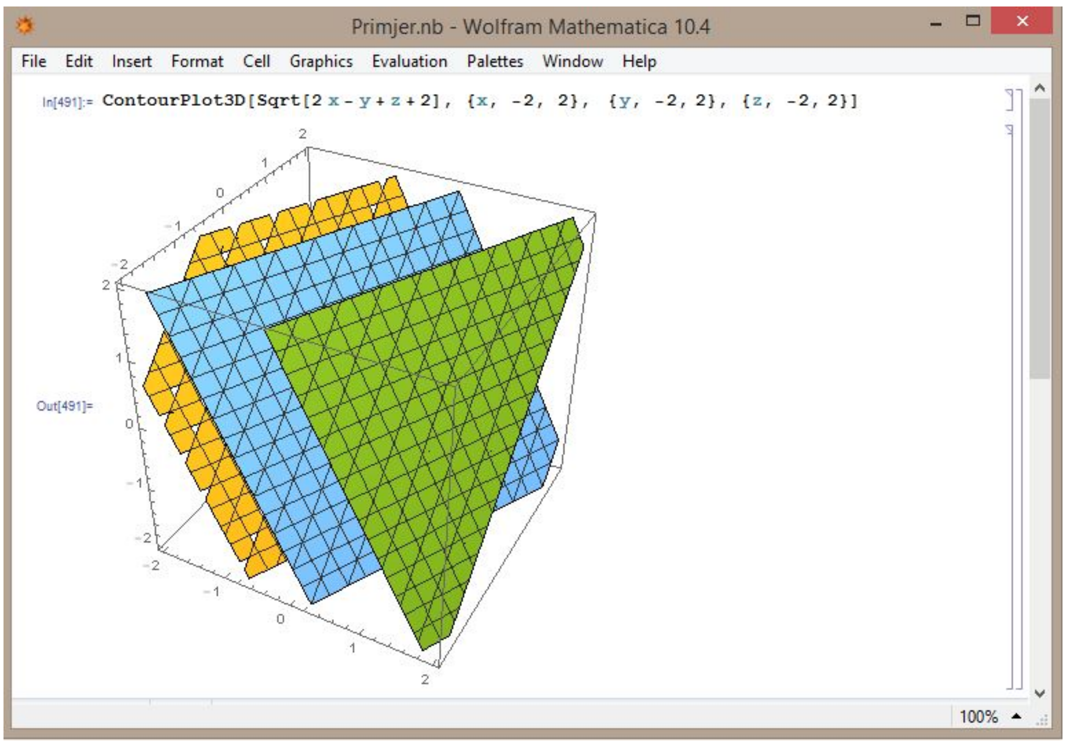
Rješenje.

1. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, *to je cijeli prostor bez ishodišta.*
2. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, *to je cijeli prostor bez jedinične sfere.*
3. $\mathcal{D}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z > 1\}$ *je poluprostor određen ravninom* $x + y + z = 1$. *I ovdje se pomoću uvrštavanja jedne točke utvrdi s koje strane ravnine je domena.*
4. $\mathcal{D}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z + 2 \geq 0\}$ *je poluprostor određen ravninom* $2x - y + z + 2 = 0$. *Ovdje je ravnina uključena u domenu.*


Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[494]:= ContourPlot3D[(x - 1) / (x^2 + y^2 + z^2), {x, 1, 5}, {y, 1, 5}, {z, 1, 5}]
Out[494]=
100%


Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[486]:= ContourPlot3D[1 / (x^2 + y^2 + z^2 - 1), {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, {z, -2, 2}]
Out[486]=
100%


Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[108]:= ContourPlot3D[Log10[x + y + z - 1], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, {z, -2, 2}]
Out[108]=
100%


Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[491]:= ContourPlot3D[Sqrt[2 x - y + z + 2], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, {z, -2, 2}]
Out[491]=
100%

1.7 Izometrije ravnine primijenjene na graf funkcije

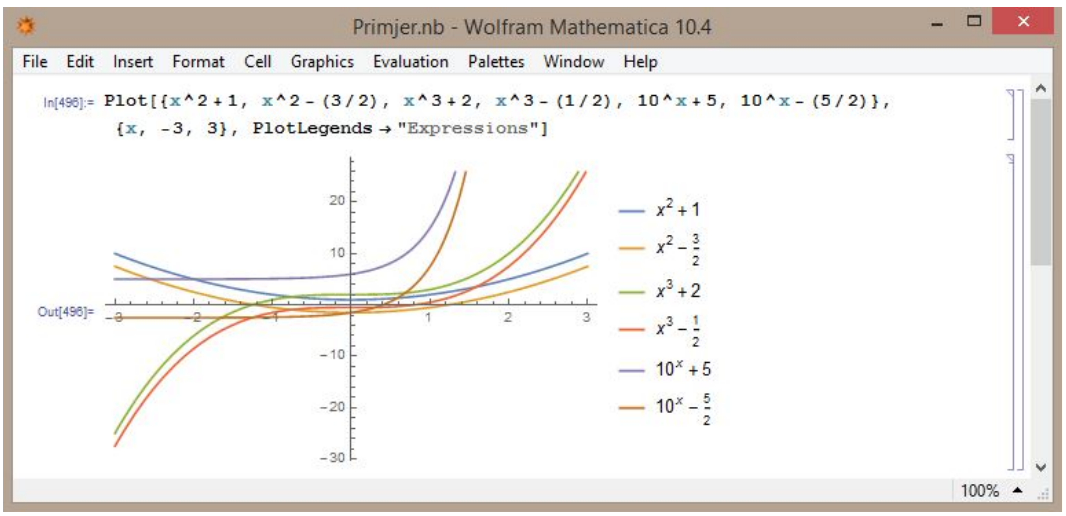
Izometrije su preslikavanja koja čuvaju udaljenost. Ako na listu papira nacrtamo neki objekt, on ostaje isti kad papir pomaknemo, zavrtimo ili kad pogledamo sliku tog objekta u zrcalu. Te aktivnosti možemo smatrati izometrijama. Pomak nazivamo translacijom, vrtnju nazivamo rotacijom, a kod simetrija razlikujemo osnu simetriju i centralnu simetriju.

Simetrije smo već spominjali u prethodnim poglavljima.

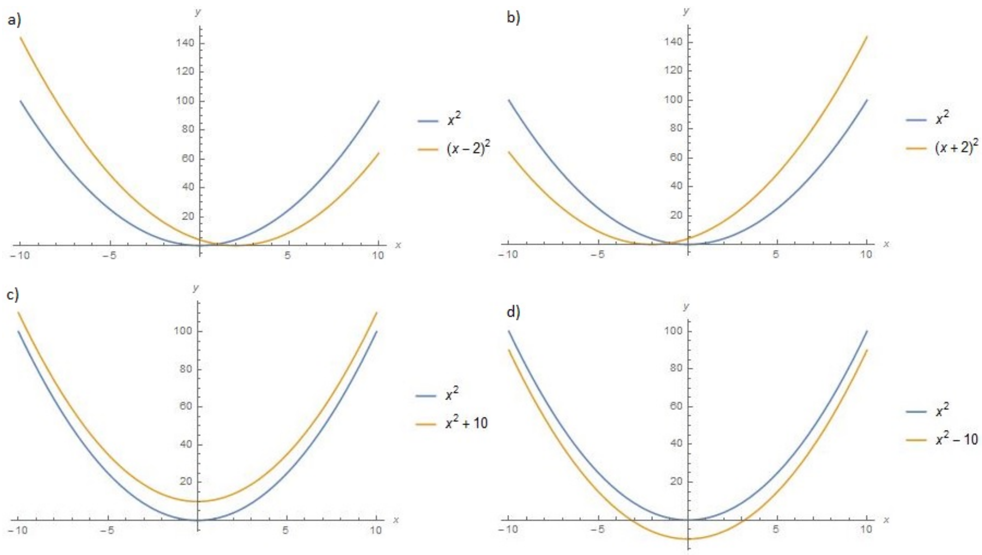
1. Graf funkcije f i njezine inverzne f^{-1} su osno simetrični u odnosu na pravac $y = x$ koji je simetrala prvog i trećeg kvadranta. Sjetimo se grafova funkcija $f(x) = 10^x$ i $f^{-1}(x) = \log x$.
2. Graf parne funkcije je osno simetričan u odnosu na os y. Sjetimo se grafa funkcije $f(x) = x^2$.
3. Graf neparne funkcije je centralno simetričan u odnosu na ishodište. Sjetimo se grafa funkcije $f(x) = x^3$.

Primjer 1.94 *Pomoću Wolframove Mathematice nacrtajte grafove zadanih funkcija i nakon toga formulirajte hipotezu koja govori o tome kako izgleda graf funkcije $y = f(x) + a$, u odnosu na graf funkcije $y = f(x)$, pri čemu je a neki realan broj. Funkcije su:*

1. $f(x) = x^2 + 1$
2. $f(x) = x^2 - \frac{3}{2}$
3. $f(x) = x^3 + 2$
4. $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}$
5. $f(x) = 10^x + 5$
6. $f(x) = 10^x - \frac{5}{2}$.

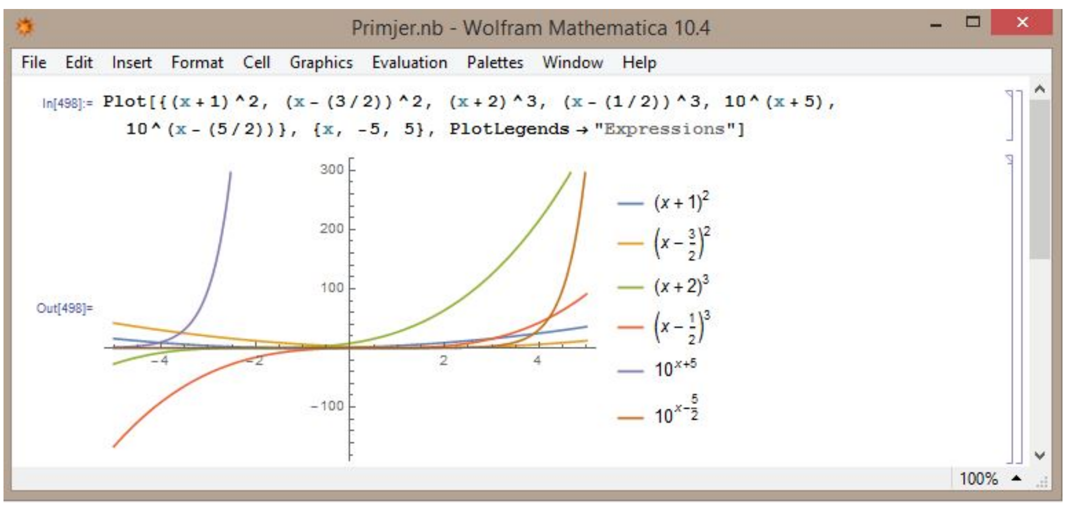


Graf funkcije $y = f(x) + a$ je pomaknut za a, možemo reći i translatiran, prema gore ako je $a > 0$, a prema dolje ako je $a < 0$.



Primjer 1.95 *Pomoću Wolframove Mathematice nacrtajte grafove zadanih funkcija i nakon toga formulirajte hipotezu koja govori o tome kako izgleda graf funkcije $y = f(x+a)$, u odnosu na graf funkcije $y = f(x)$, pri čemu je a neki realan broj. Funkcije su:*

1. $f(x) = (x+1)^2$
2. $f(x) = (x-\frac{3}{2})^2$
3. $f(x) = (x+2)^3$
4. $f(x) = (x-\frac{1}{2})^3$
5. $f(x) = 10^{x+5}$
6. $f(x) = 10^{x-\frac{5}{2}}$.

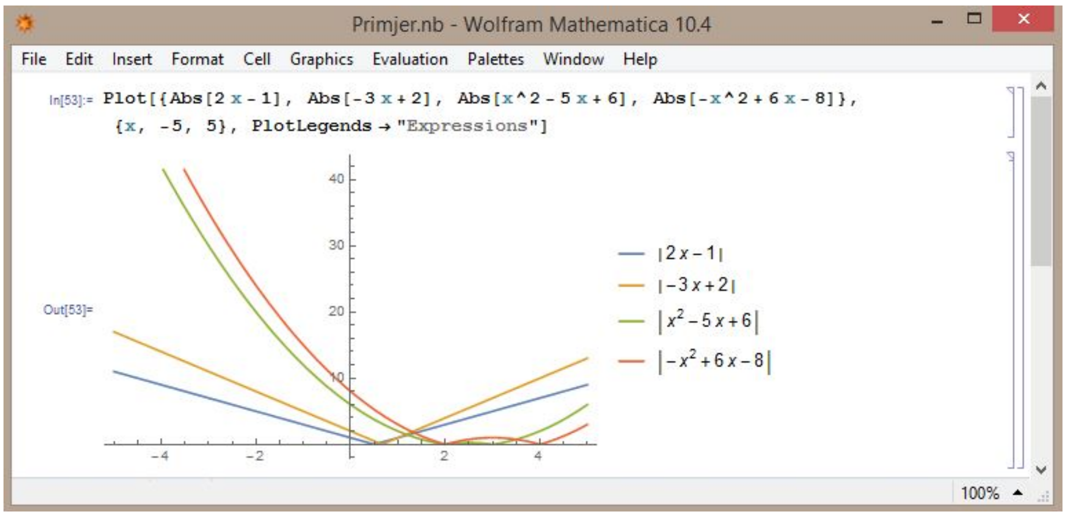


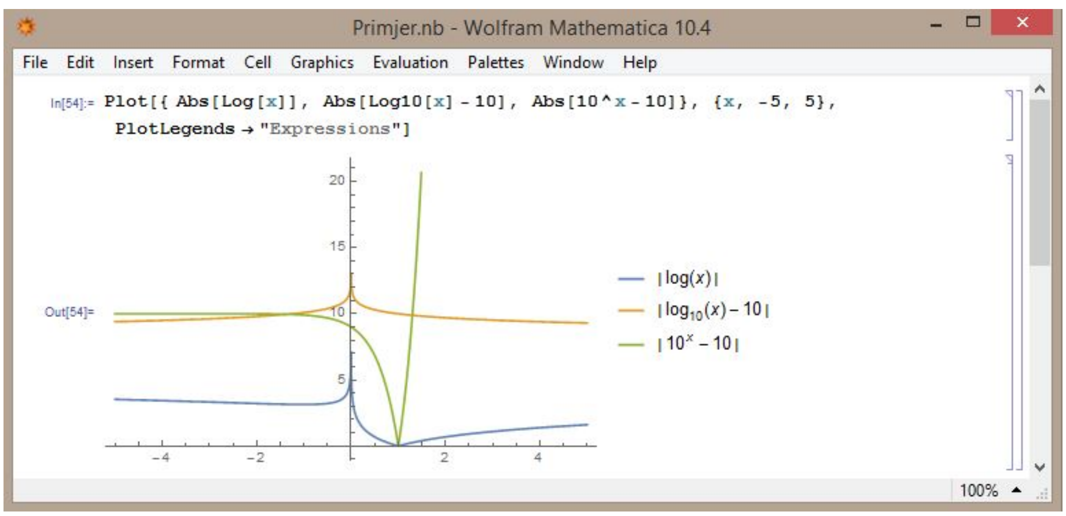
Graf funkcije $y = f(x + a)$ je pomaknut za a u lijevo ako je $a > 0$, a u desno ako je $a < 0$.

U primjenama nas ponekad ne zanima je li nešto pozitivno ili negativno, već nas samo zanima intenzitet pojave opisane nekom funkcijom. U tom slučaju računamo apsolutnu vrijednost funkcije.

Primjer 1.96 *Pomoću Wolframove Mathematice koristeći funkciju Abs[x] nacrtajte grafove funkcija:*

1. $f(x) = |2x - 1|$
2. $f(x) = | - 3x + 2|$
3. $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$
4. $f(x) = | - x^2 + 6x - 8|$
5. $f(x) = |\ln x|$
6. $f(x) = |\log x - 10|$
7. $f(x) = |10^x - 10|$.

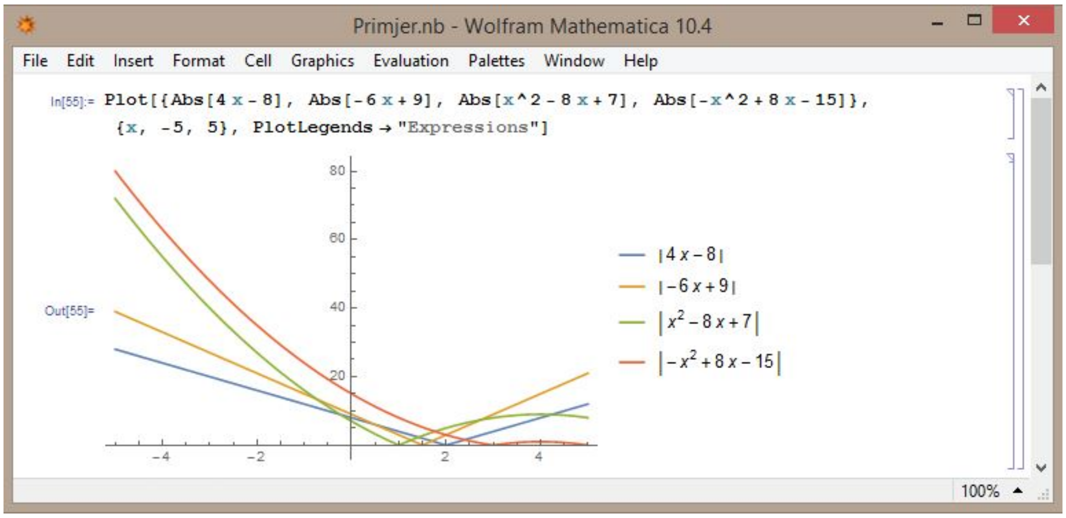


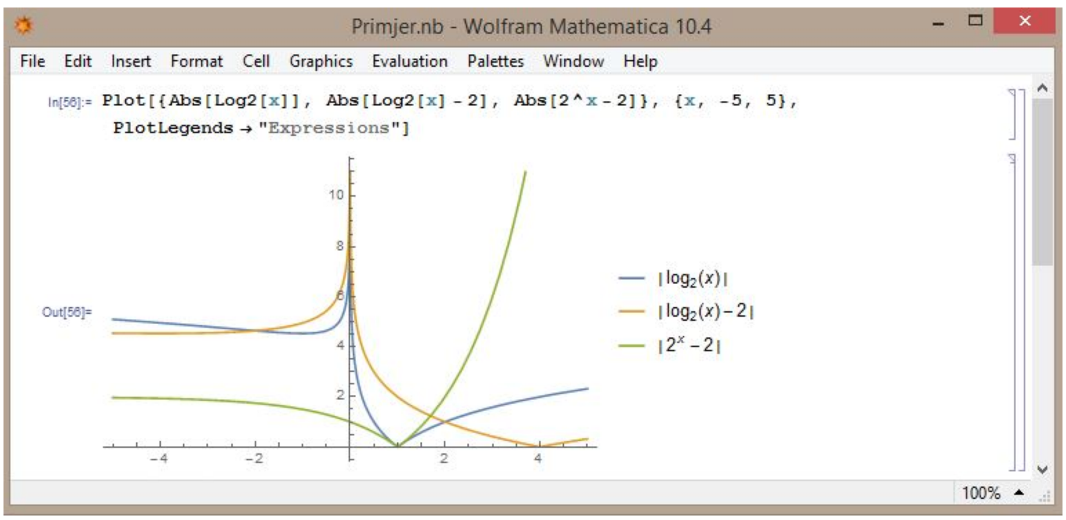


Promatrajući grafove iz prethodnog primjera pokušajte shvatiti kako bez računala možete ispitati ponašanje grafova funkcija oblika $y = |f(x)|$. Sljedeći primjer riješite bez računala.

Primjer 1.97 *Nacrtajte grafove funkcija:*

1. $f(x) = |4x - 8|$
2. $f(x) = |-6x + 9|$
3. $f(x) = |x^2 - 8x + 7|$
4. $f(x) = |-x^2 + 8x - 15|$
5. $f(x) = |\log_2 x|$
6. $f(x) = |\log_2 x - 2|$
7. $f(x) = |2^x - 2|$.



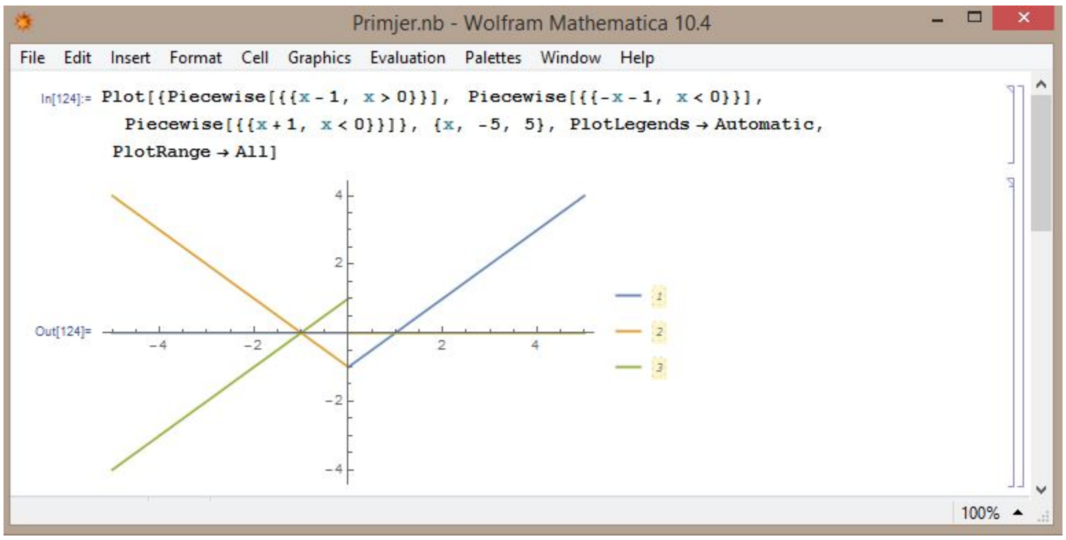


Graf funkcije $y = |f(x)|$ se dobiva iz grafa funkcije $y = f(x)$, tako da se dijelovi grafa koji se nalaze ispod osi x preslikaju osnosimetrično u odnosu na os x.

Primjer 1.98 *Linearna funkcija $f(x) = ax + b$ nije ni parna ni neparna, odnosno za nju ne vrijedi ni $f(-x) = f(x)$ niti $f(-x) = -f(x)$ jer je $f(-x) = -ax + b$. Pokazat ćemo kako od linearne funkcije možemo napraviti parnu ili neparnu funkciju koja se s početnom linearnom funkcijom poklapa na pozitivnim brojevima. Funkcija je definirana na $\mathbb{R}_0^+$ s $f(x) = x - 1$.*

1. *Ako želimo parnu funkciju, onda ćemo graf funkcije $f(x) = x - 1$, za $x > 0$ preslikati osnom simetrijom preko osi y.*

2. *Ako želimo neparnu funkciju, onda ćemo graf funkcije $f(x) = x-1$, za $x > 0$ preslikati centralnom simetrijom preko ishodišta.*



Ovim postupkom možemo od bilo koje funkcije zadane na $\mathbb{R}^+$ ili $\mathbb{R}^-$ napraviti parnu ili neparnu funkciju. Valovi i signali koji se periodički ponavljaju, često se prikazuju pomoću funkcija definiranih na ovaj način. Parne funkcije se mogu prikazati pomoću funkcije kosinus, a neparne pomoću funkcije sinus, o čemu će malo više biti riječi o poglavlju o trigonomatrijskim funkcijama.

Primjer 1.99 *Nacrtajte grafove funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ako je*

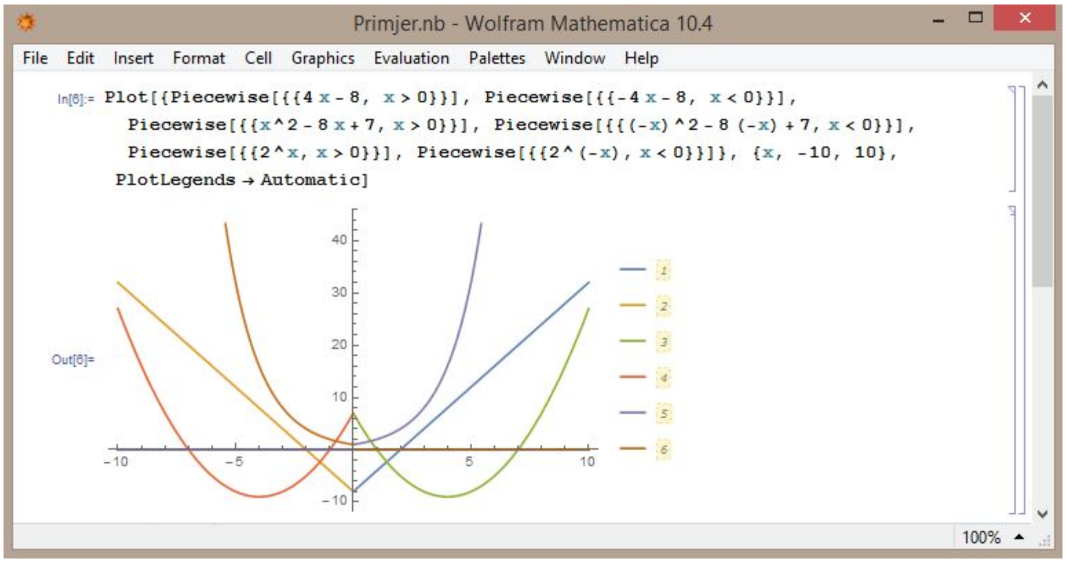
1. *f parna funkcija zadana s $f(x) = 4x - 8$ za $x > 0$*

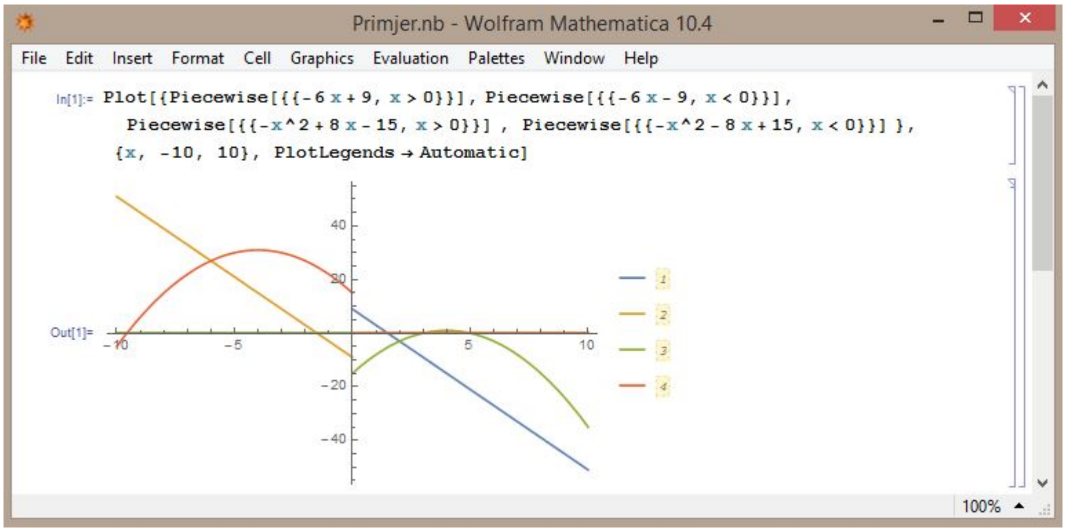
2. *f neparna funkcija zadana s $f(x) = -6x + 9$ za $x > 0$*

3. *f parna funkcija zadana s $f(x) = x^2 - 8x + 7$ za $x > 0$*

4. *f neparna funkcija zadana s $f(x) = -x^2 + 8x - 15$ za $x > 0$*

5. *f parna funkcija zadana s $f(x) = 2^x$ za $x > 0$.*

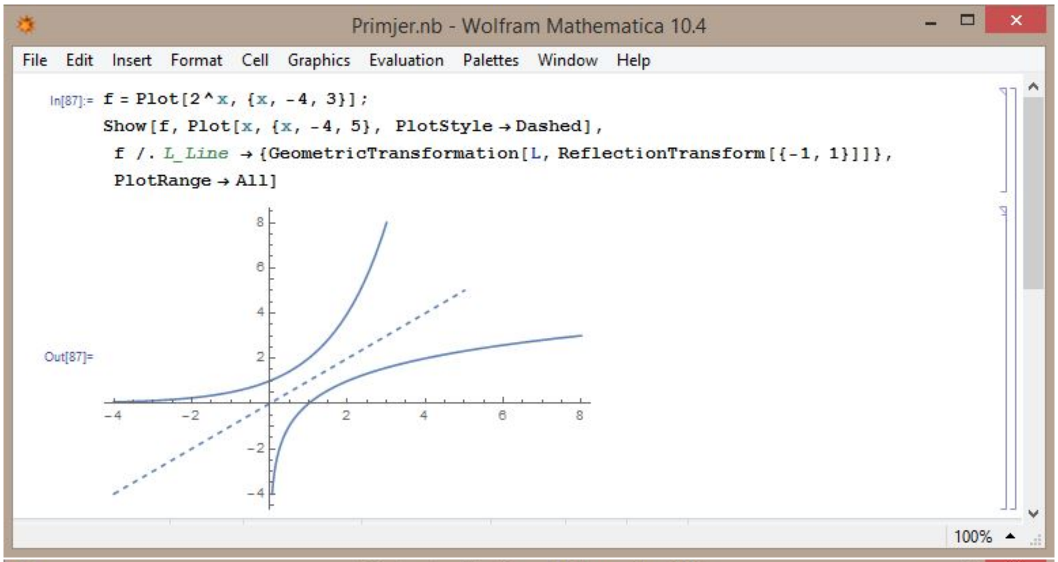


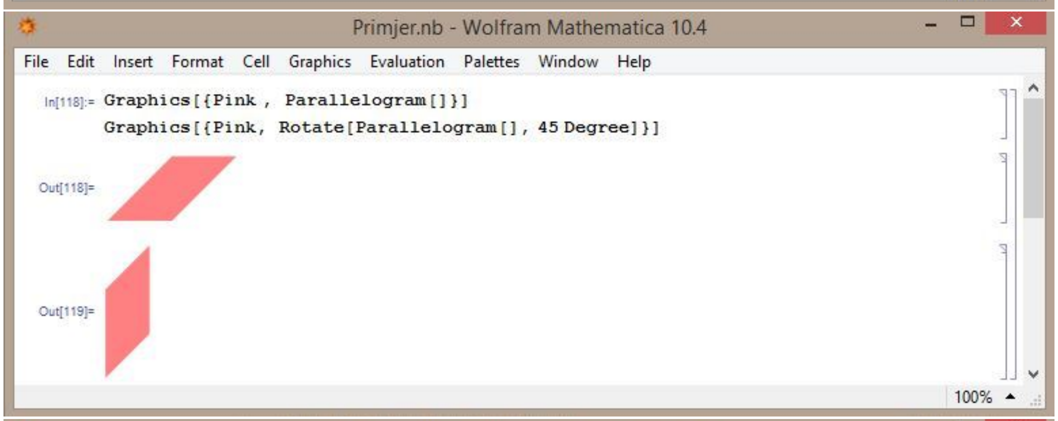


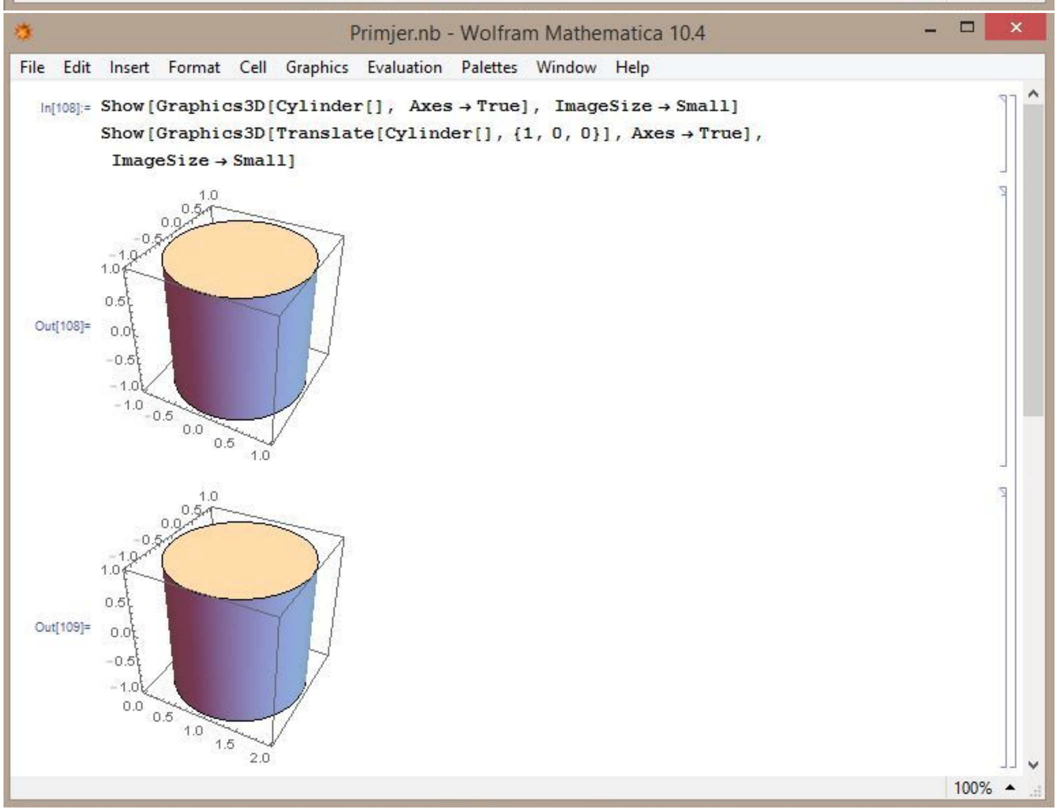
Primjer 1.100 *Pomoću Wolframove Mathematice možemo raditi transformacije koje su izometrije: osne i centralne simetrije, translacije i rotacije. Kod crtanja* 3*-dimenzionalnih objekata, kvadar u kojem se nalazi nacrtani objekt može se okretati, tako da sa svih strana možete vidjeti objekt. Skaliranje koje je prikazano na ovoj slici nije izometrija, to je rastezanje ili stezanje objekta. Pokušajte koristiti ove naredbe tako da malo promijenite definirane fukcije, likove i plohe.*

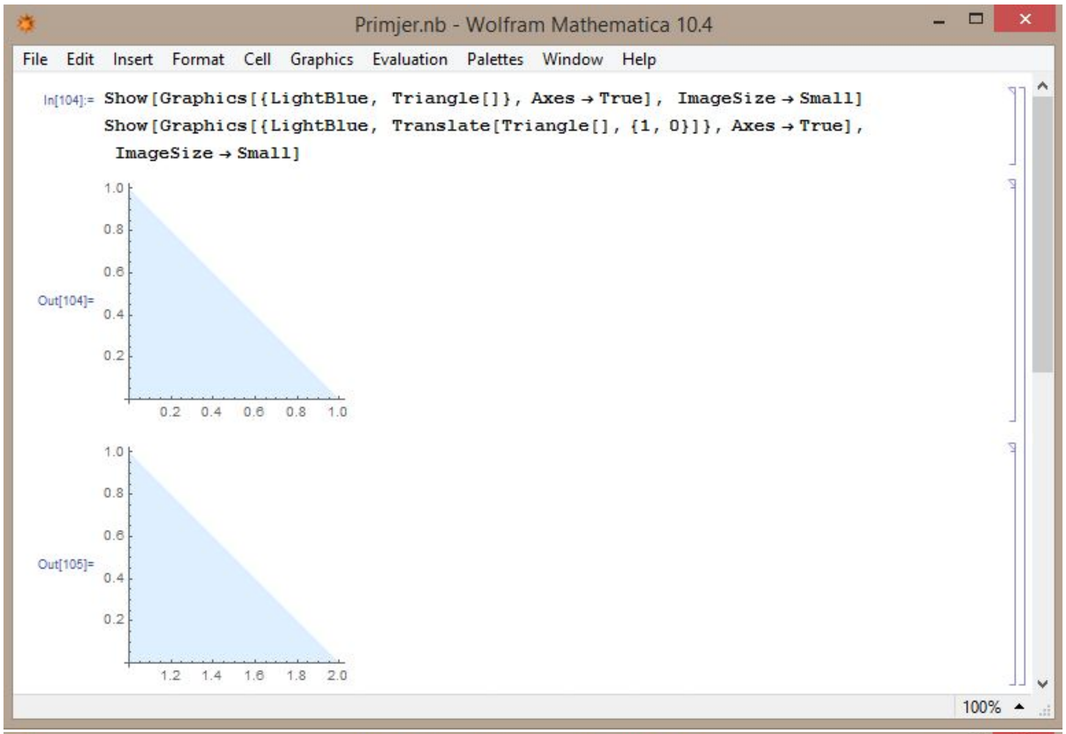
Sve funkcije realne varijable koje smo do sad vidjeli bile su zadane u kartezijevom koordinatnom sustavu, odnosno u ravnini $\langle xy \rangle$ formulom $y = f(x)$. U ovom poglavlju radili smo i dodatne transformacije grafa funkcije, da bismo dobili graf željene funkcije. Funkcije mogu biti zadane pomoću nekog parametra t u obliku

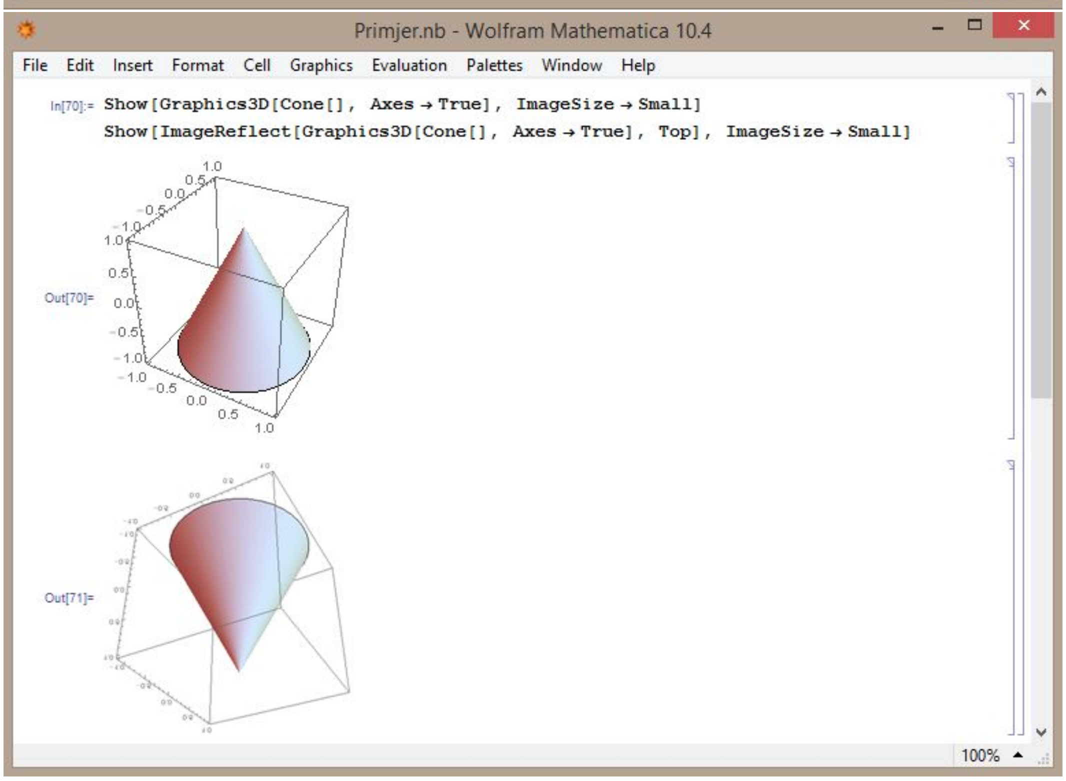
$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t). \end{aligned}$$

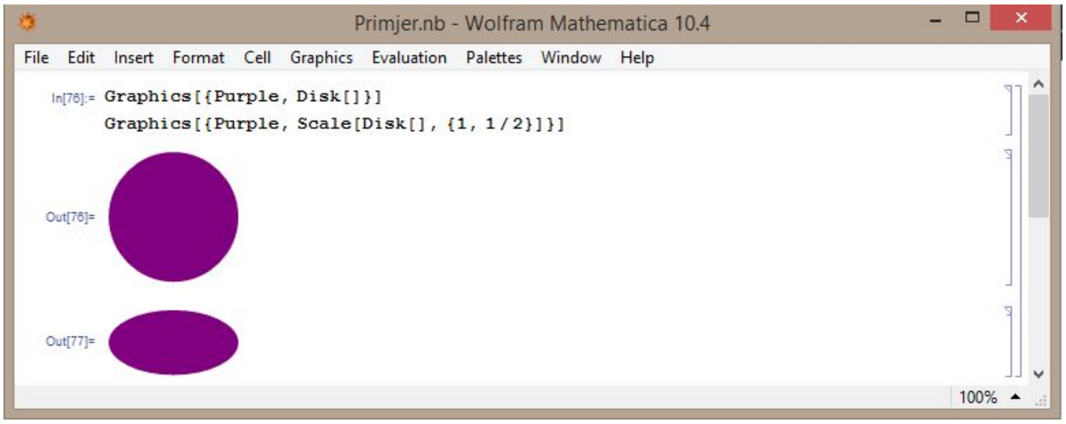

Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[87]:= f = Plot[2^x, {x, -4, 3}];
Show[f, Plot[x, {x, -4, 5}, PlotStyle → Dashed],
f /. L_Line → {GeometricTransformation[L, ReflectionTransform[{-1, 1}]]},
PlotRange → All]
Out[87]=
100%


Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[118]:= Graphics[{Pink , Parallelogram[]}]
Graphics[{Pink, Rotate[Parallelogram[], 45 Degree]}]
Out[118]=
Out[119]=
100%


Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[108]:= Show[Graphics3D[Cylinder[], Axes → True], ImageSize → Small]
Show[Graphics3D[Translate[Cylinder[], {1, 0, 0}], Axes → True],
ImageSize → Small]
Out[108]=
Out[109]=
100%

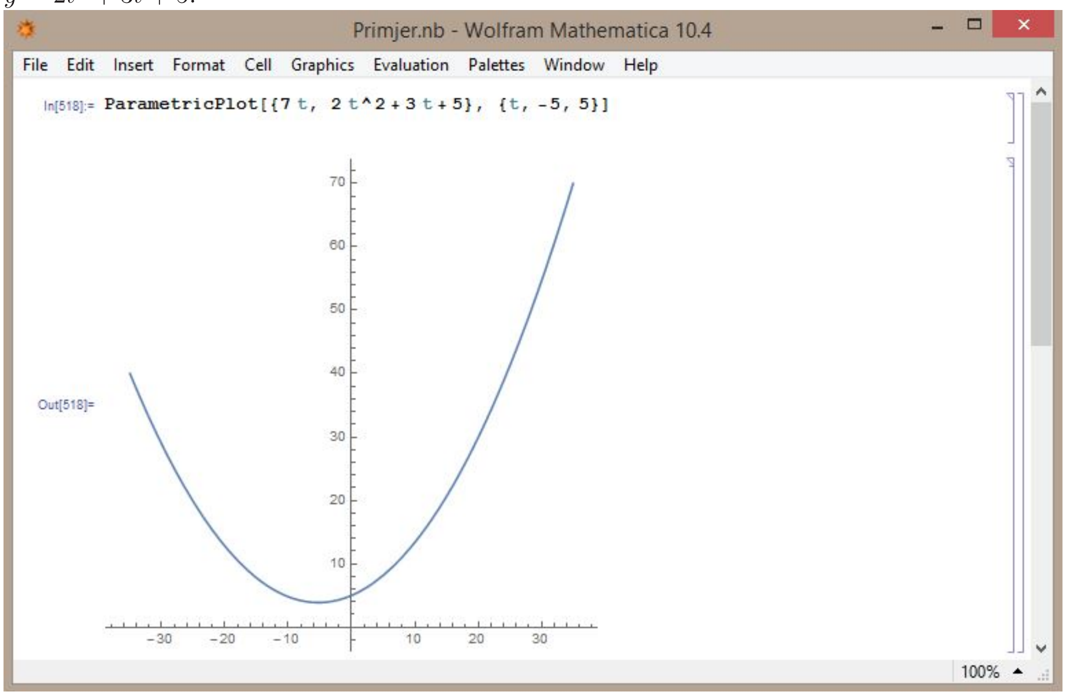

Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[104]:= Show[Graphics[{LightBlue, Triangle[]}, Axes → True], ImageSize → Small]
Show[Graphics[{LightBlue, Translate[Triangle[], {1, 0}]}, Axes → True],
ImageSize → Small]
Out[104]=
1.0 0.8 0.6 0.4 0.2
0.2 0.4 0.6 0.8 1.0
Out[105]=
1.0 0.8 0.6 0.4 0.2
1.2 1.4 1.6 1.8 2.0
100%


Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[70]:= Show[Graphics3D[Cone[], Axes → True], ImageSize → Small]
Show[ImageReflect[Graphics3D[Cone[], Axes → True], Top], ImageSize → Small]
Out[70]=
Out[71]=
100%



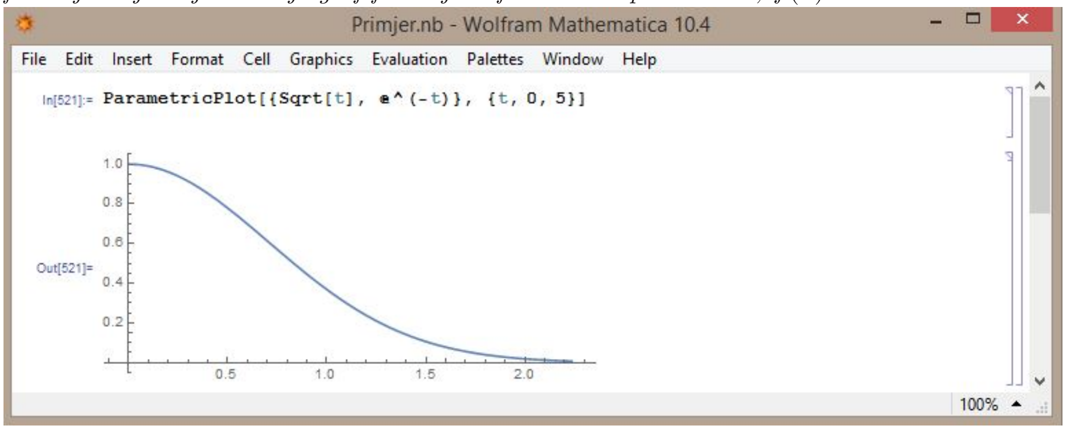
Kod modeliranja ćemo sresti ovakve primjere, gdje je parametar t vrijeme, a x, y su koordinate položaja tijela koje se kreće. U našim primjerima bit će moguće eliminirati parametar t i funkciju napisati na standardni način kao $y = f(x)$. Općenito to nije moguće i tada se graf funkcije može nacrtati korištenjem naredbe ParametricPlot.

Primjer 1.101 *Izrazite funkciju u obliku $y = f(x)$ i nacrtajte graf funkcije zadane s*
$x = 7t$
$y = 2t^2 + 3t + 5$.

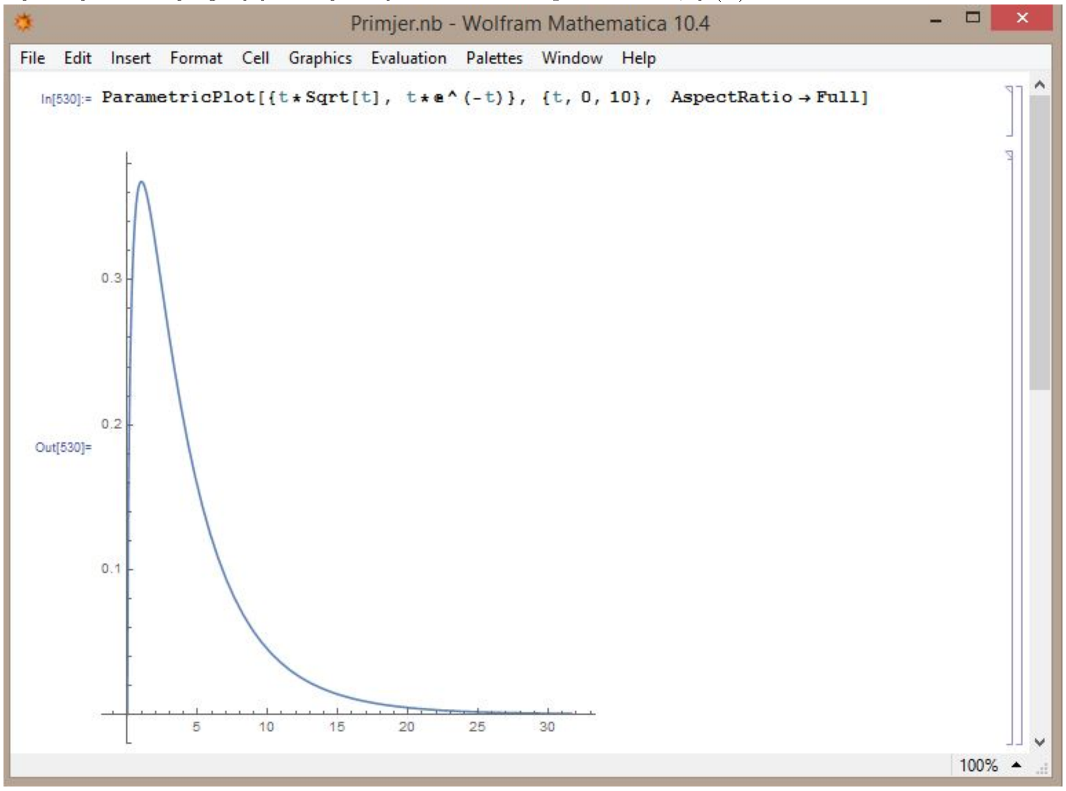


Primjer 1.102 *Pomoću Wolframove Mathematice korištenjem naredbe ParametricPlot nacrtajte graf zadane s*
$x = \sqrt{t}$

$y = e^{-t}$.
Je li dobiveni graf, graf funkcije? Ako jest napišite funkciju u obliku $y = f(x)$ *i odredite domenu funkcije. Rješenje. Ovo je graf funkcije definirane za pozitivne* x, $f(x) = e^{-x^2}$.



Primjer 1.103 *Pomoću Wolframove Mathematice korištenjem naredbe ParametricPlot nacrtajte graf funkcije zadane s*
$x = t\sqrt{t}$
$y = te^{-t}$.
Rješenje. Ovo je graf funkcije definirane za za pozitivne x, $f(x) = x^{2/3}e^{-x^{2/3}}$.



1.8 Zadaci za vježbu

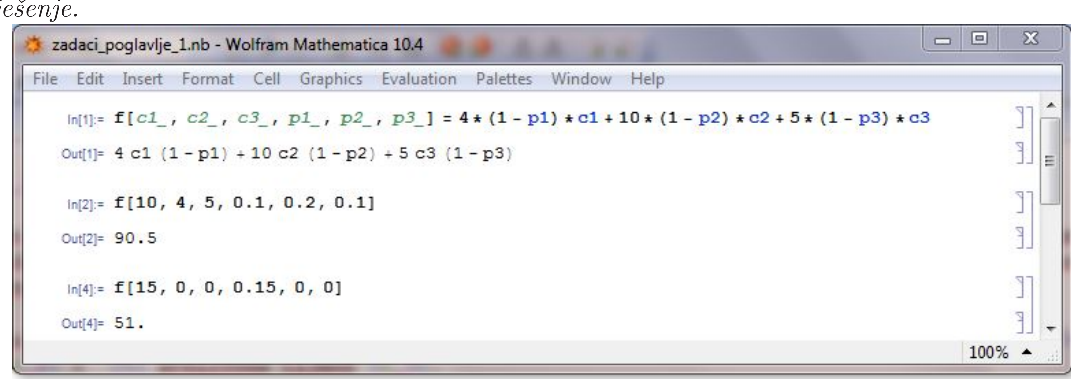
Zadatak 1.1 *Neka su cijene tri proizvoda* c_1, c_2, c_3. *Ako je netko kupio* 5 *proizvoda cijene* c_1, 7 *proizvoda cijene* c_2, 3 *proizvoda cijene* c_3, *onda je funkcijom*

$$f(c_1, c_2, c_3) = 5c_1 + 7c_2 + 3c_3$$

određen ukupan iznos koji treba platiti za sve što je kupljeno. U trgovini su odlučili organizirati akcijsku prodaju sva tri artikla s tim da su odredili popust od $p_1\%$ *za proizvod cijene* c_1, *popust od* $p_2\%$ *za proizvod cijene* c_2 *i popust od* $p_3\%$ *za proizvod cijene* c_3.

1. *Odredite funkciju šest varijabli koja modelira ukupan iznos koji treba platiti ako je kupac kupio* 4 *proizvoda cijene* c_1, 10 *proizvoda cijene* c_2 *i* 5 *proizvoda cijene* c_3.
2. *Izračunajte ukupan iznos koji kupac treba platiti ako su količine iste kao u prethodnom podzadatku, cijene, redom,* 10, 4 *i* 5, *a popusti* 10%, 20% *i* 10%.
3. *Izračunajte ukupan iznos koji kupac treba platiti ako je kupio samo* 50 *komada proizvoda cijene* c_1 *uz* 5% *popusta i cijenu* $c_1 = 15$.

Rješenje.

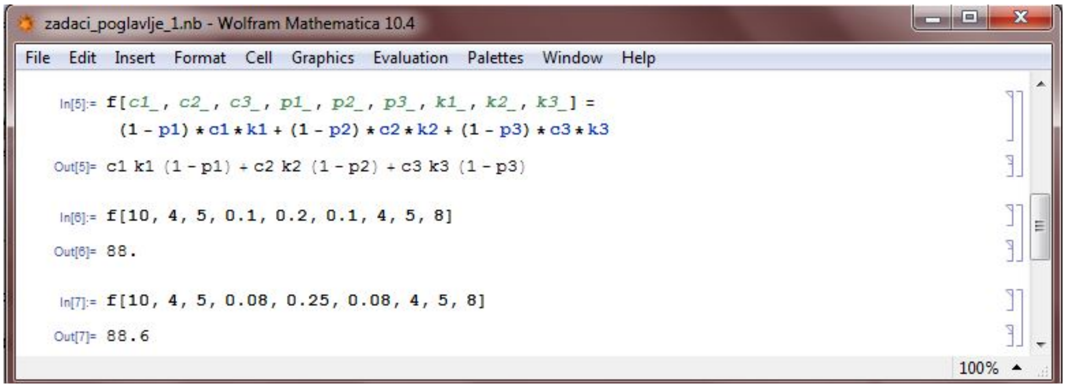


Zadatak 1.2 *Neka su cijene tri proizvoda* c_1, c_2, c_3, *a količine kupljenih proizvoda* k_1, k_2 *i* k_3. *U trgovini su odlučili organizirati akcijsku prodaju sva tri artikla s tim da su odredili popust od* $p_1\%$ *za proizvod cijene* c_1, *popust od* $p_2\%$ *za proizvod cijene* c_2 *i popust od* $p_3\%$ *za proizvod cijene* c_3.

1. *Odredite funkciju devet varijabli koja modelira ukupan iznos koji kupac treba platiti.*
2. *Izračunajte ukupan iznos koji kupac treba platiti ako su količine redom* 4, 5 *i* 8, *cijene, redom,* 10, 4 *i* 5, *a popusti* 10%, 20% *i* 10%.
3. *Odredite funkciju devet varijabli koja modelira ukupan iznos koji treba platiti ako je kupac odlučio kupiti samo proizvod cijene* c_2.
4. *Jedna druga trgovina također organizira akciju, ali s popustima, redom,* 8%, 25% *i* 8%. *Usporedbom s podzadatkom (2), izračunajte u kojoj se trgovini isplati obaviti kupovinu ako su količine redom* 4, 5 *i* 8, *a cijene, redom,* 10, 4 *i* 5*? Kupac cijelu kupovinu obavlja u istoj trgovini.*

Rješenje.

1. $f(x) = \ln^2 x$



2. Vrijednosti funkcije

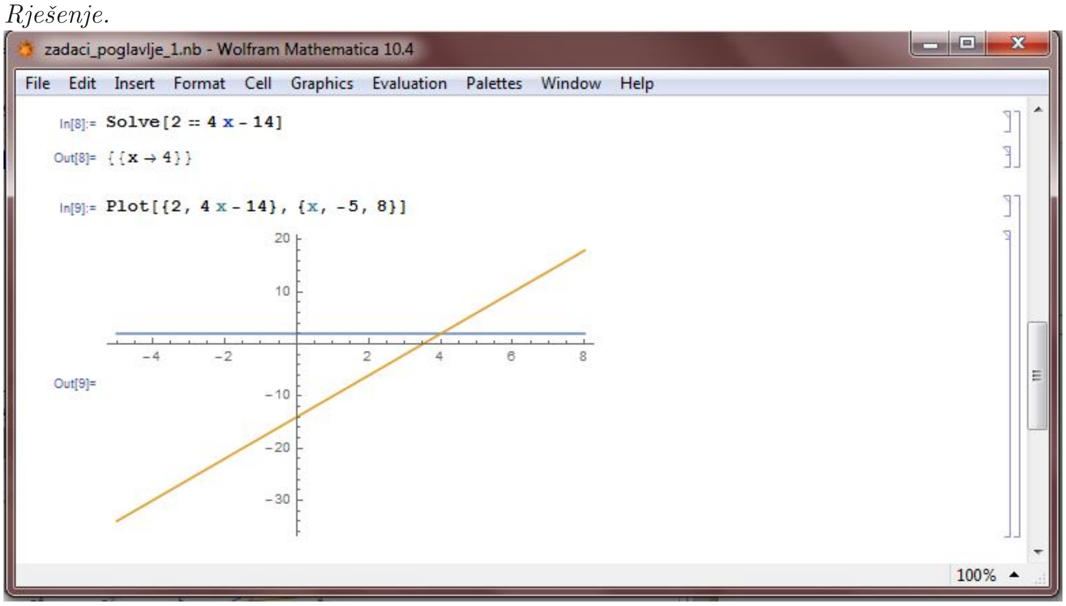
3. $f(x) = \ln^2 x$

4. Isplati se kupovinu obaviti u prvoj trgovini jer je cijena niža.

Zadatak 1.3 *Izračunajte u kojoj točki se presjecaju pravci koji su grafovi funkcija* $f(x) = 2$ *i* $g(x) = 4x - 14$.

Nacrtajte pravce pomoću Wolframove Mathematice i provjerite odgovara li njihov presjek točki koja je dobivena računom.

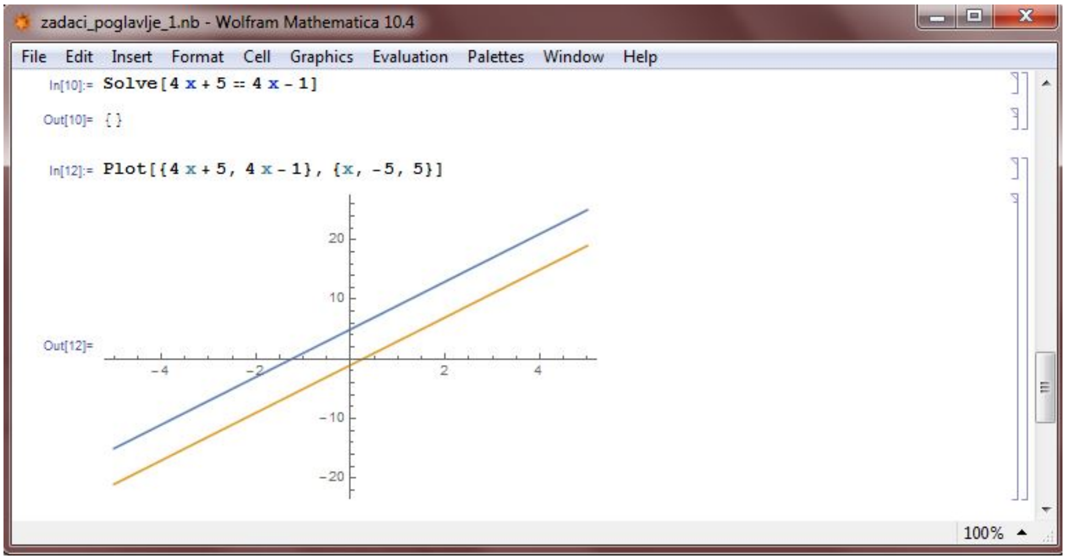
Rješenje.



Pravci se sijeku u točki $(4, 2)$.

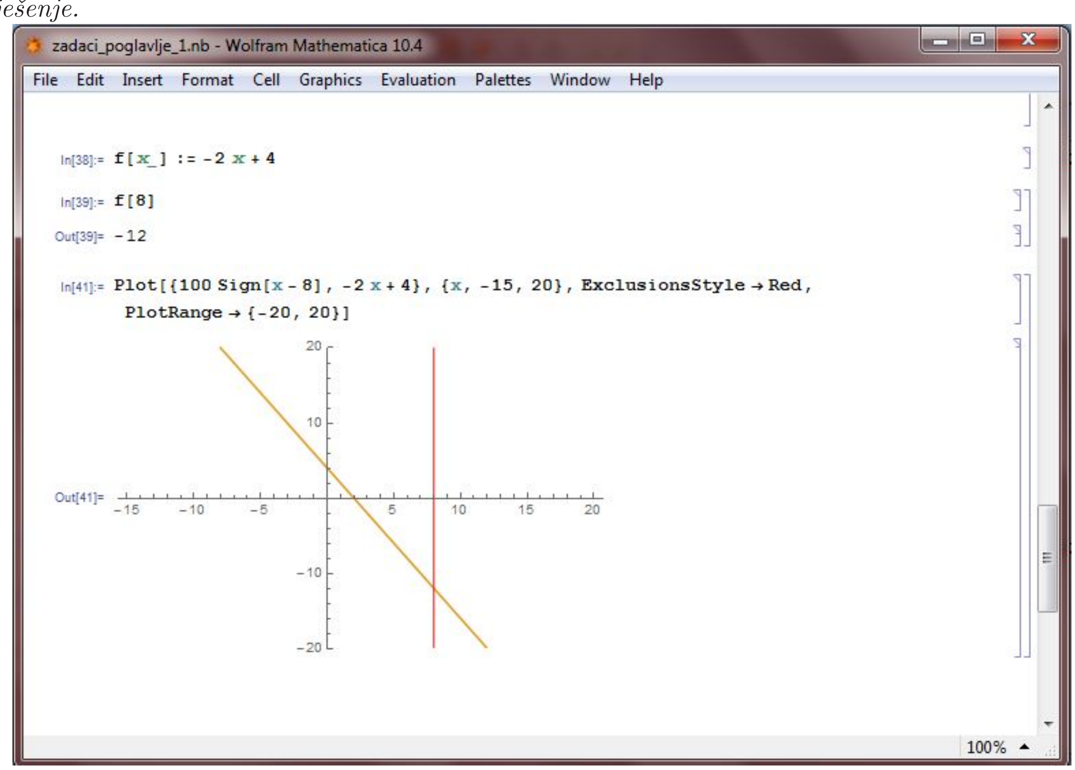
Zadatak 1.4 *Izračunajte u kojoj točki se presjecaju pravci koji su grafovi funkcija* $f(x) = 4x + 5$ *i* $g(x) = 4x - 1$. *Nacrtajte pravce pomoću Wolframove Mathematice i provjerite odgovara li njihov presjek točki koja je dobivena računom.*

Rješenje.



Pravci su paralelni, pa njihovo presjecište ne postoji. Gornja jednadžba $4x + 5 = 4x - 1$ *nema rješenja.*

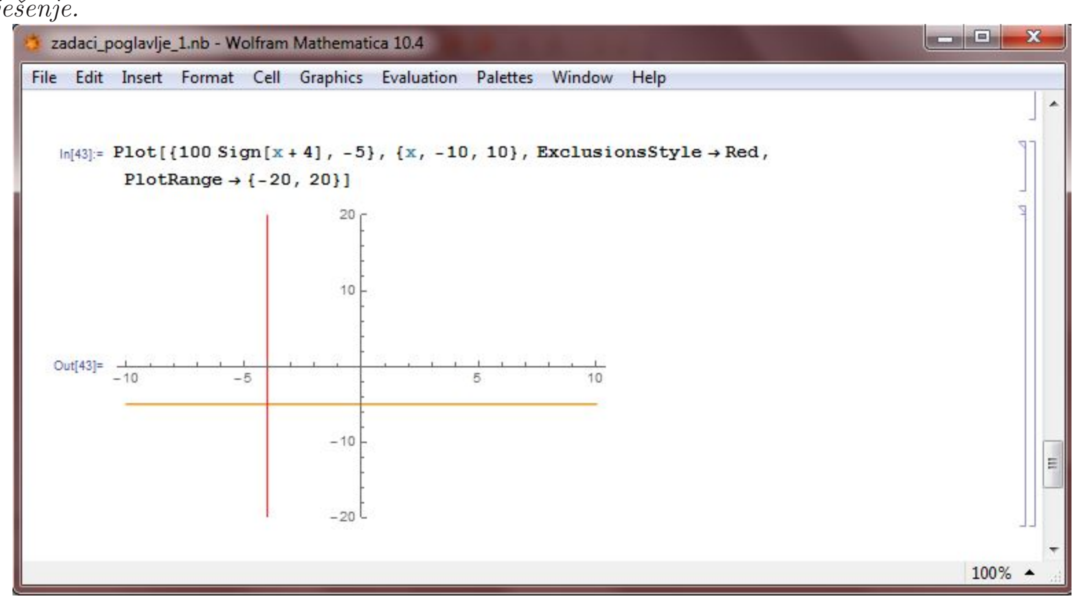
Zadatak 1.5 *Izračunajte u kojoj točki graf funkcije* $f(x) = -2x + 4$ *presjeca pravac* $x = 8$*. Nacrtajte pravce pomoću Wolframove Mathematice i provjerite odgovara li njihov presjek točki koja je dobivena računom.*
Rješenje.



Pravci se sijeku u točki $(8, -12)$.

Zadatak 1.6 *Izračunajte u kojoj točki graf funkcije $f(x) = -5$ presjeca pravac $x = -4$. Nacrtajte pravce pomoću Wolframove Mathematice i provjerite odgovara li njihov presjek točki koja je dobivena računom.*

Rješenje.

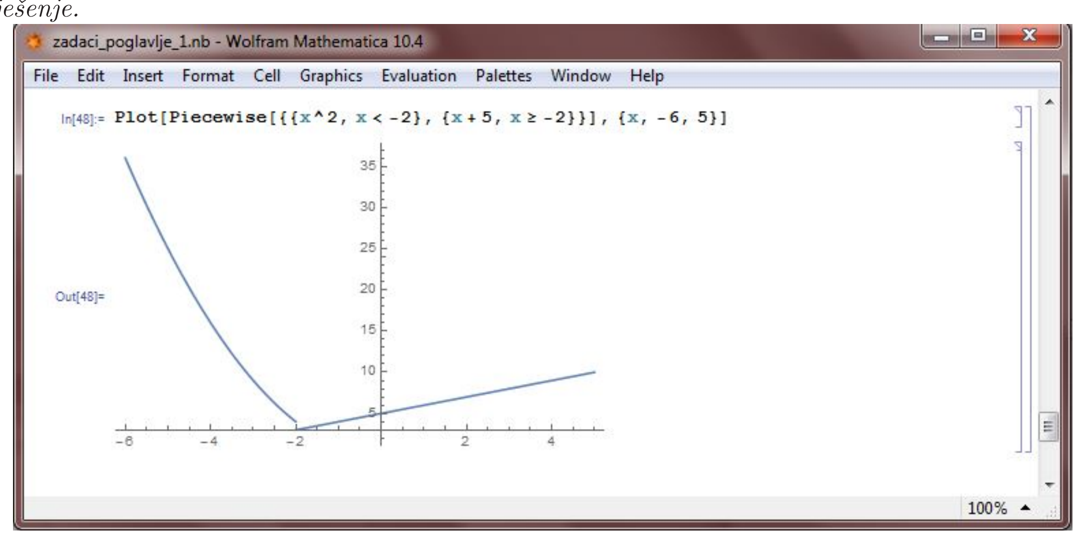


Pravci se sijeku u točki $(-4, -5)$.

Zadatak 1.7 *Nacrtajte graf funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadane s*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & za\ x < -2 \\ x + 5 & za\ x \geq -2 \end{cases}$$

Rješenje.



Zadatak 1.8 *Upravni odbor jedne kompanije organizira sastanak. Situacija sa sastanka je prikazana na sljedećoj slici:*

Je li funkcija koja članove Upravnog odbora pridružuje stolicama bijekcija? Argumentirajte.
Rješenje.

Funkcija je bijekcija jer je injekcija i surjekcija. Različitim osobama pridružuje različite stolice, pa je injekcija. Sve stolice su zauzete, pa je surjekcija. Odgovor na pitanje K̈oliko članova Upravnog odbora je na sastanku?̈je S̈vi su na sastanku,̈ a do njega dolazimo i bez prebrojavanja. Jednostavno vidimo jer su sve stolice zauzete.

Zadatak 1.9 *Kretanje (rast, pad) CROBEX-a na Zagrebačkoj burzi na dan* 29.8.2016. *prikazano je na slici.*

Slika 1.4: Slika je objavljena uz dopuštenje Zagrebačke burze d.d.

1. *Komentirajte kretanje indeksa CROBEX od* $10-11$ h.

2. *Komentirajte kretanje indeksa CROBEX od* $12-13$ h.

3. *U kojem je periodu CROBEX najstrmije padao?*

4. *U kojem je periodu CROBEX najstrmije rastao?*

Rješenje.

1. *Oko* 10h *CROBEX je naglo narastao, pa je jedno vrijeme bio konstantan, pa je opet malo porastao i onda lagano padao, pa naglo pao, bio konstantan i opet naglo pao na razinu ispod one na kojoj je bio u* 10h.

2. *Od* $12 - 13$h *je uglavnom bio konstantan.*

3. *Oko* 10.30h, *oko* 11h, *malo prije* 12h, *oko* 15.30h *i oko* 15.40h.

4. *Malo prije* 10h, *oko* 10h, *oko* 11h, *malo prije* 12h, *oko* 14.30h, *malo prije* 15h *i neposredno prije* 16h.

Zadatak 1.10 *Troškovi proizvodnje jednog poduzeća zadani su modelom* $C(Q) = Q^3$ *gdje je* Q *količina proizvodnje, a* $C(Q)$ *ukupni troškovi.*

1. *Izračunajte ukupne troškove na razini proizvodnje* $Q = 10$.

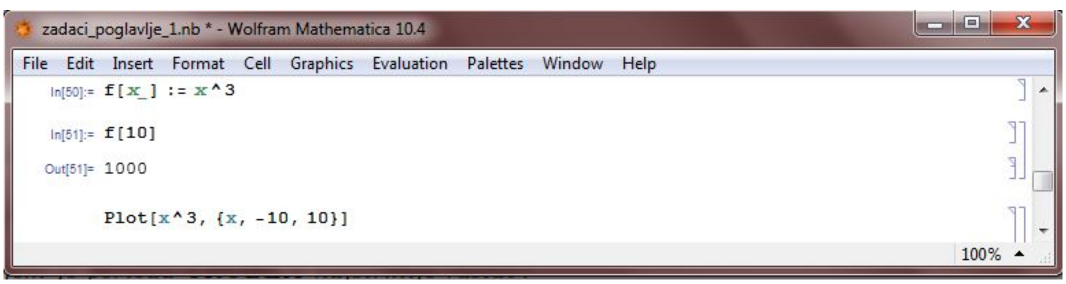
2. *Grafički prikažite funkciju troškova i komentirajte njezin rast i pad.*

3. *Izvedite model koji opisuje kretanje proizvodnje u ovisnosti o ukupnim troškovima.*

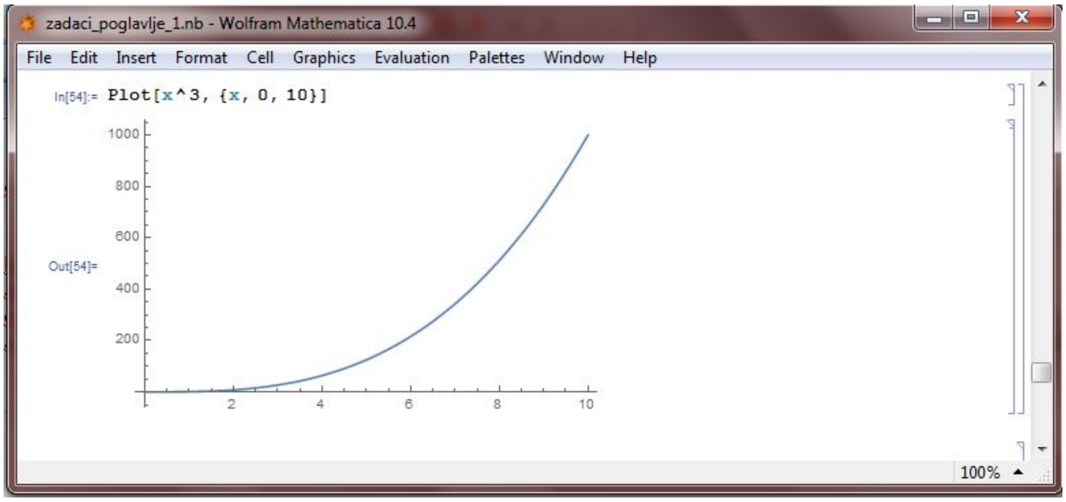
4. *Grafički prikažite proizvodnju kao funkciju ukupnih troškova i komentirajte njezin rast i pad.*

Rješenje.

1. *Vrijednost funkcije*

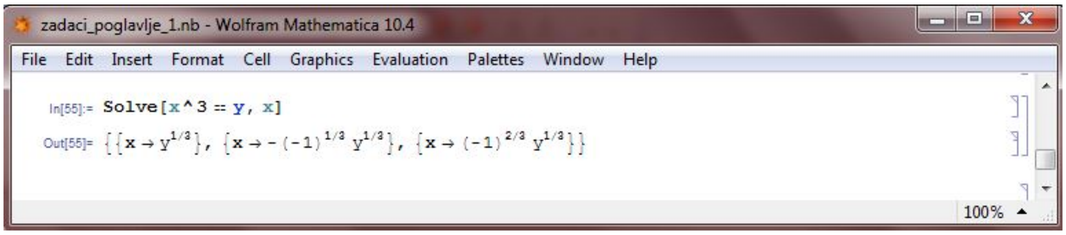


2. *Graf funkcije*

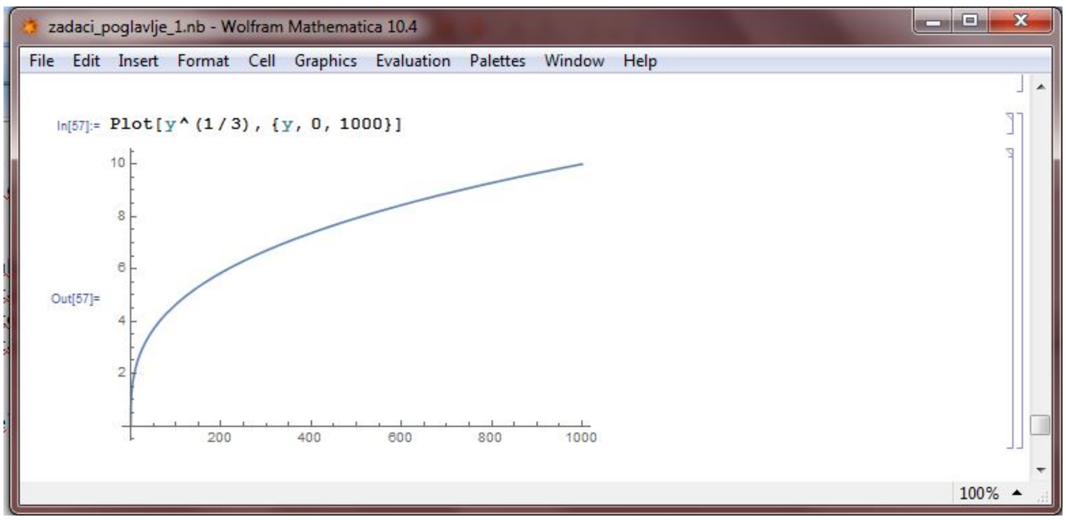


Funkcija raste s rastućim prinosima (sve brže i brže).

3. *Inverz funkcije*



4. *Graf inverza funkcije*



Funkcija raste s opadajućim prinosima (sve sporije i sporije).

Zadatak 1.11 *Izračunajte inverznu funkciju za funkcije:*

1. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$
2. $f(x) = 5^{x^2}$
3. $f(x) = \ln^2 x$
4. $f(x) = \ln(x^2 - 4)$.

Rješenje.

1. *Inverzna funkcija je* $f(x) = \ln^2 x$
2. *Inverzna funkcija je* $f(x) = \sqrt{\log_5 x}$
3. *Inverzna funkcija je* $f(x) = e^{\sqrt{x}}$
4. *Inverzna funkcija je* $f(x) = \sqrt{e^x + 4}$

Zadatak 1.12 *Cijena određenog proizvoda ovisi o količini potražnje za tim proizvodom u skladu s modelom* $p(Q) = \sqrt{100 - Q^2}$*, a kretanje količine potražnje za tim proizvodom kroz vrijeme modelirano je funkcijom* $Q(t) = \sqrt{t}$.

1. *Za koje količine potražnje model cijene ima ekonomskog smisla?*
2. *Prikažite cijenu kao funkciju vremena.*
3. *Za koji vremenski interval model cijene ima ekonomskog smisla?*

Rješenje.

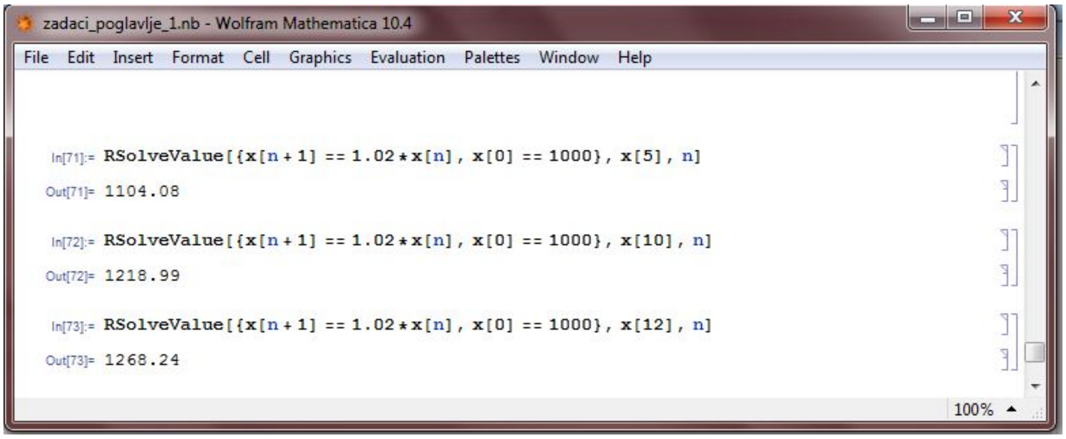
1. $Q \in [0, 10]$
2. $p(t) = \sqrt{100 - t}$
3. $t \in [0, 100]$

Zadatak 1.13 *Ivan je uložio u banku iznos od* 1000 *kn uz godišnje kamate od* 2%.

1. *Izvedite rekurzivnu jednadžbu* $x_{n+1} = f(x_n)$ *koja opisuje kretanje glavnice kroz godine, pri čemu je* x *glavnica, a* n *broj godina.*
2. *Pomoću Wolframove Mathematice izračunajte vrijednosti* x_5, x_{10} *i* x_{12}.

Rješenje.

1. *Jednadžba je* $x_{n+1} = 1.02x_n$, $x_0 = 1000$
2. *Vrijednosti*



Zadatak 1.14 *Početne zalihe poduzeća su bile* 24*, te godišnje rastu za* 10 *jedinica.*

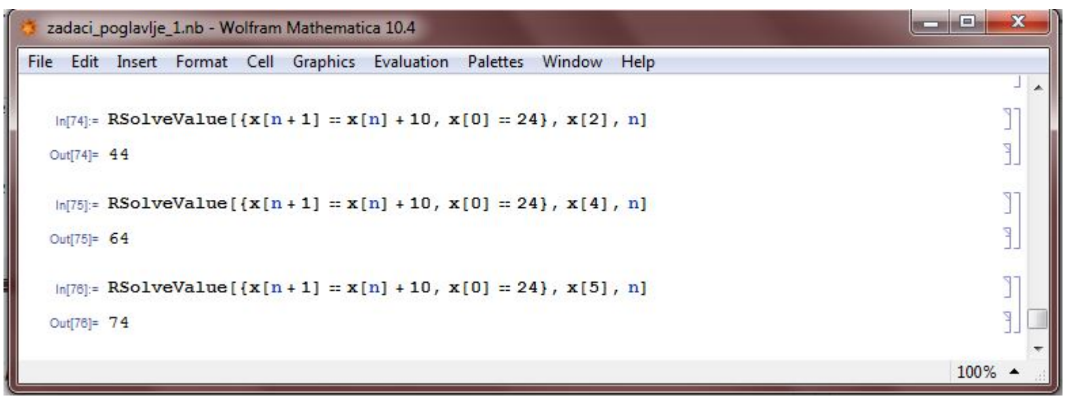
1. *Izvedite rekurzivnu jednadžbu* $x_{n+1} = f(x_n)$ *koja opisuje kretanje zaliha kroz godine, pri čemu je* x *količina zaliha, a* n *broj godina.*

2. *Pomoću Wolframove Mathematice izračunajte vrijednosti* x_2, x_4 *i* x_5.

Rješenje.

1. *Jednadžba je* $x_{n+1} = x_n + 10$, $x_0 = 24$

2. *Vrijednosti*



Zadatak 1.15 *Početna dobit poduzeća je bila* 10 *milijuna, te godišnje raste* 8%.

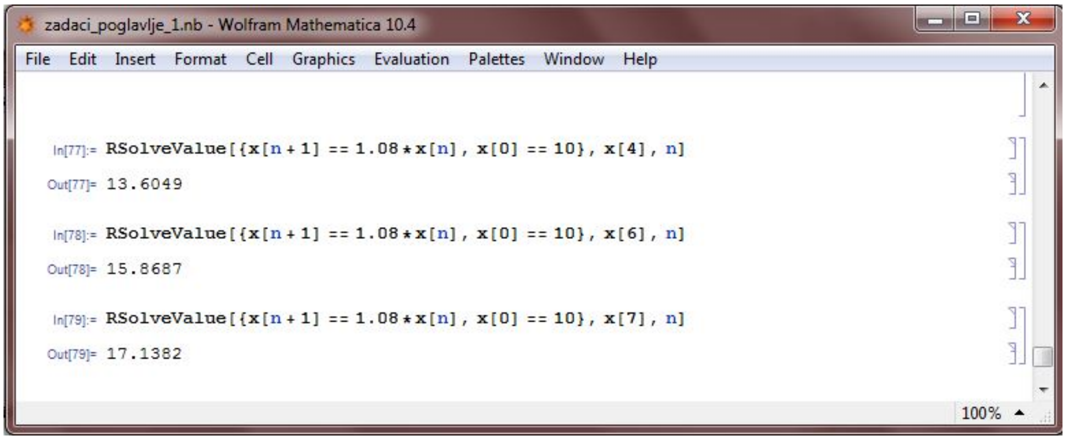
1. *Izvedite rekurzivnu jednadžbu* $x_{n+1} = f(x_n)$ *koja opisuje kretanje dobiti kroz godine, pri čemu je* x *dobit, a* n *broj godina.*

2. *Pomoću Wolframove Mathematice izračunajte vrijednosti* x_4, x_6 *i* x_7.

Rješenje.

1. *Jednadžba je* $x_{n+1} = 1.08x_n$, $x_0 = 10$

2. *Vrijednosti*



Zadatak 1.16 *Odredite domenu funkcije:*

1. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$
2. $f(x) = \frac{x}{e^x}$
3. $f(x) = \sqrt{x^4+2}$
4. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$
5. $f(x) = \frac{2x}{\ln x}$

Rješenje.

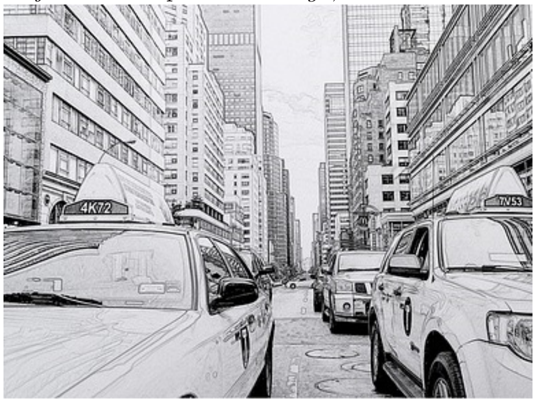
1. $\mathbb{R}$
2. $\mathbb{R}$
3. $\mathbb{R}$
4. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
5. $(0, +\infty) \setminus \{1\}$

Poglavlje 2

Matematičko modeliranje pomoću linearne, kvadratne, eksponencijalne i logaritamske funkcije

2.1 Modeliranje linearnom i po dijelovima linearnom funkcijom

Primjer 2.1 *Taksi služba naplaćuje* 15 *kuna početak usluge, a zatim svaki kilometar* 5 *kuna.*



1. *Odredite jednadžbu taksi usluge i imenujte je.*
2. *Nacrtajte graf usluge prijevoza putnika i komentirajte graf.*
3. *Interpretirajte koeficijent uz varijablu koja predstavlja broj kilometara u modelu podzadatka (1).*

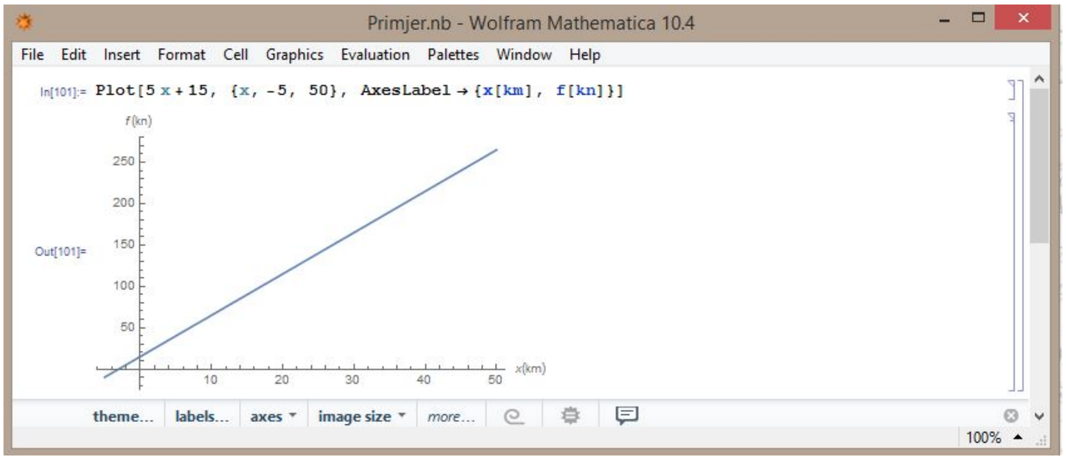
4. *Ispišite tablicu svih mogućih troškova ako je maksimalan broj kilometara koji taksist može proći jednak* $N = 50$. *Počnite s* $N = 1$, *pa nastavite s* $N = 5$, $N = 10$ *i tako dalje s razlikom* 5 *do* $N = 50$. *Komentirajte porast ukupnog troška.*

5. *Napišite domenu i sliku funkcije koja opisuje cijenu taksi usluge.*

Rješenje.

1. *Jednadžba taksi usluge je* $f(x) = 5x + 15$, *pri čemu je* x *broj prijeđenih kilometara.*

2. *Graf je pravac.*



3. *Koeficijent uz varijablu* x *je* 5. *Graf ove funkcije je pravac, pa je* 5 *koeficijent smjera pravca. Budući da je on pozitivan, funkcija raste. Također, ako se broj kilometara poveća za* 1, *ukupan trošak će se povećati za* 5.

4. *Tablica troškova*

Broj kilometara	*Ukupan trošak*
1	20
5	40
10	65
15	90
20	115
25	140
30	165
35	190
40	215
45	240
50	265

5. *Domena je* $\mathcal{D} = [1, 50]$.
Slika funkcije je $\mathcal{R} = [20, 265]$.

Primjer 2.2 *Po cijeni od* 200 *kuna po kutiji banana, u ponudi je* 100000 *kutija, a potražnja je* 70000 *kutija. Po cijeni od* 160 *kuna po kutiji banana, u ponudi je* 80000 *kutija, a potražnja je* 120000 *kutija.*

1. *Odredite jednadžbu cijene i ponude u obliku* $p = mx + b$*, gdje je* p *cijena u kunama i* x *odgovarajuća ponuda u količini* 1000 *kutija.*

2. *Odredite jednadžbu cijene i potražnje u obliku* $p = mx + b$*, gdje je* p *cijena u kunama i* x *odgovarajuća potražnja u količini* 1000 *kutija.*

3. *Nacrtajte grafove cijena-ponuda i cijena-potražnja u istom koordinatnom sustavu i nađite točku sjecišta pravaca.*

4. *Što predstavlja točka sjecišta pravaca?*

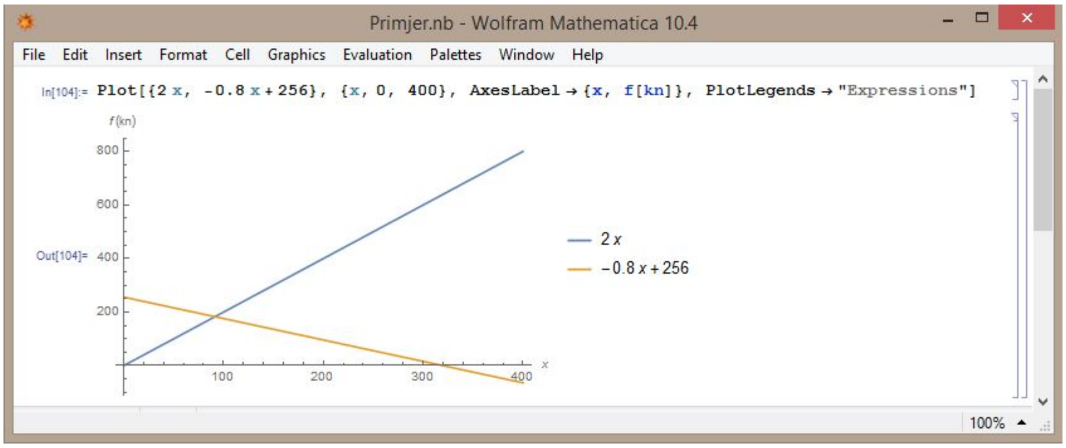
Rješenje.

1. *Točka* (x, p) *nalazi se na jednadžbi pravca ponude, to su točke* $(100, 200)$ *i* $(80, 160)$*. Najprije ćemo naći koeficijent smjera pravca.*
   $m = \frac{200-160}{100-80} = 2$
   $p - p_1 = m\,(x - x_1)$
   $p - 200 = 2\,(x - 100)$
   $p - 200 = 2x - 200$
   $p = 2x$

2. *Točka* (x, p) *nalazi se na jednadžbi pravca potražnje, to su točke* $(70, 200)$ *i* $(120, 160)$*. Prvo ćemo naći koeficijent smjera pravca.*
   $m = \frac{200-160}{70-120} = -0.8$
   $p - p_1 = m\,(x - x_1)$
   $p - 200 = -0.8\,(x - 70)$
   $p - 200 = -0.8x + 56$
   $p = -0.8x + 256$

3. $x = 91.43,\ p = 182.86$

4. *Sjecište pravaca nam daje cijenu pri kojoj su ponuda i potražnja jednake.*

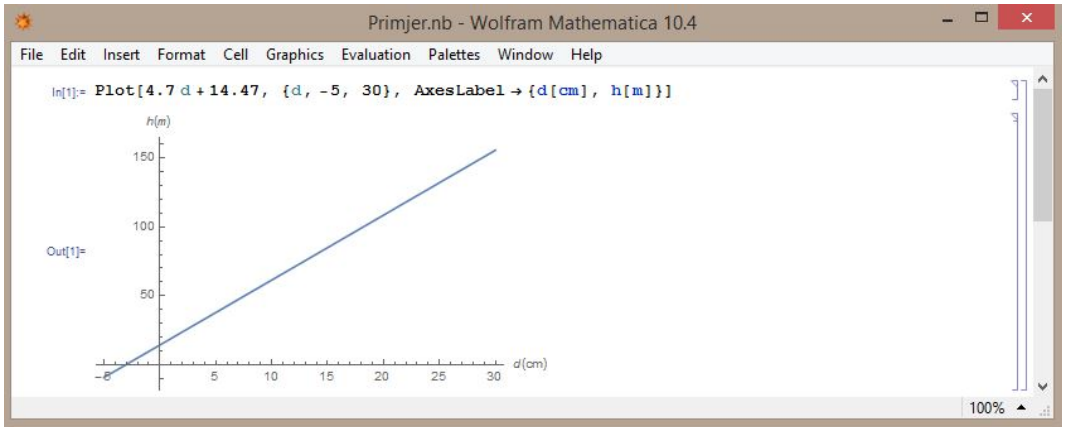


Primjer 2.3 *Prikazana je jednadžba linearnog regresijskog modela visine drveta jele* $h = 4.7d + 14.47$ *gdje je* d *promjer debla u centimetrima, a* h *je visina stabla u metrima.*

1. *Odredite koeficijent smjera pravca, odredite što se dogodi ako nastane porast za* 1 cm *u promjeru te nacrtajte graf.*
2. *Odredite visinu jele ako je promjer* 8 cm.
3. *Odredite promjer jele koja je visoka* 30 *metara.*

Rješenje.

1. *Koeficijent pravca iznosi* 4.7, *a visina jele se poveća za* 4.7 *metara ako se promjer poveća za* 1 cm.



2. $h = 4.7 \cdot 8 + 14.47 = 52.07$ m
3. $30 = 4.7d + 14.47$
   $d = 3.3$ cm

Primjer 2.4 *Privatna tvrtka radi izvještaj za mjesečni trošak prirodnog plina za pojedine kupce. Za prvih* 10 m^3 *cijena iznosi* 4 *kune po kubiku, za sljedećih* 20 m^3 *cijena iznosi* 3.5 *kune po* m^3, *a iznad* 30 m^3 *cijena iznosi* 3 *kune po* m^3.

1. *Odredite funkciju troška plina.*

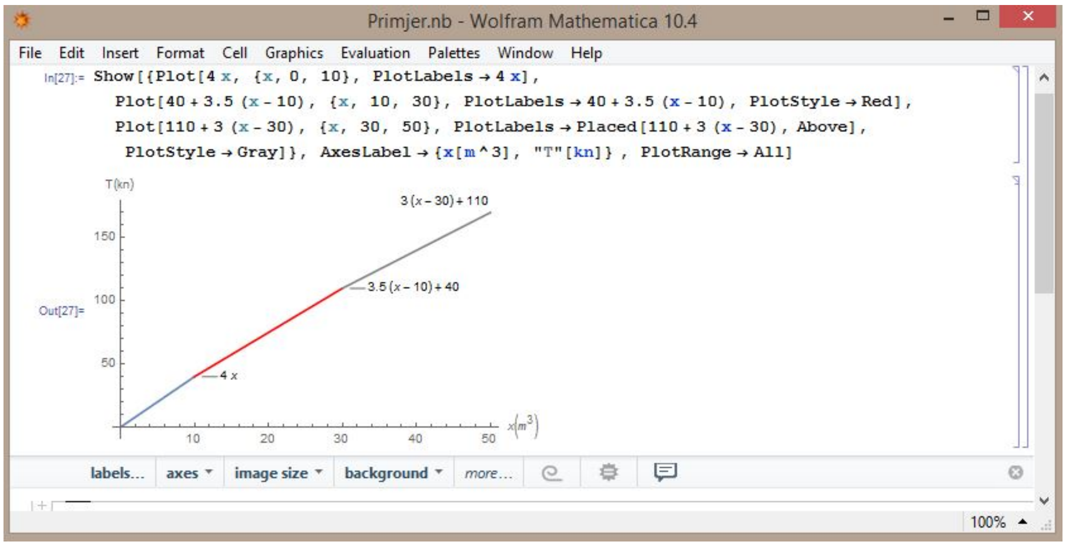
2. *Nacrtajte graf funkcije.*

Rješenje.

1. *Neka je x broj* m^3 *plina, onda je trošak:*

$$T(x) = \begin{cases} 4x & 0 \leq x \leq 10 \\ 40 + 3.5(x - 10) & 10 < x \leq 30 \\ 110 + 3(x - 30) & x > 30 \end{cases}$$

2. *Graf funkcije*



Primjer 2.5 *Sportaš želi povećati dnevni unos vitamina C i kalcija stoga će u prehrani povećati unos limuna i mlijeka. Jedan decilitar cijeđenog limuna sadrži* 83 *miligrama vitamina C i* 7 *miligrama kalcija. Jedan decilitar mlijeka sadrži* 74 *miligrama vitamina C i* 49 *miligrama kalcija.*

1. *Izračunajte koliko ocijeđenog limuna i koliko decilitara mlijeka bi sportaš trebao dnevno piti da organizmu osigura točno* 1400 *miligrama vitamina C i* 700 *miligrama kalcija?*

2. *Nacrtajte graf dobivenih jednadžbi.*

Rješenje.

1. *Označimo s x broj decilitara soka od limuna, a s y broj decilitara mlijeka.*

$7x + 49y = 700/:7$
$83x + 74y = 1400$

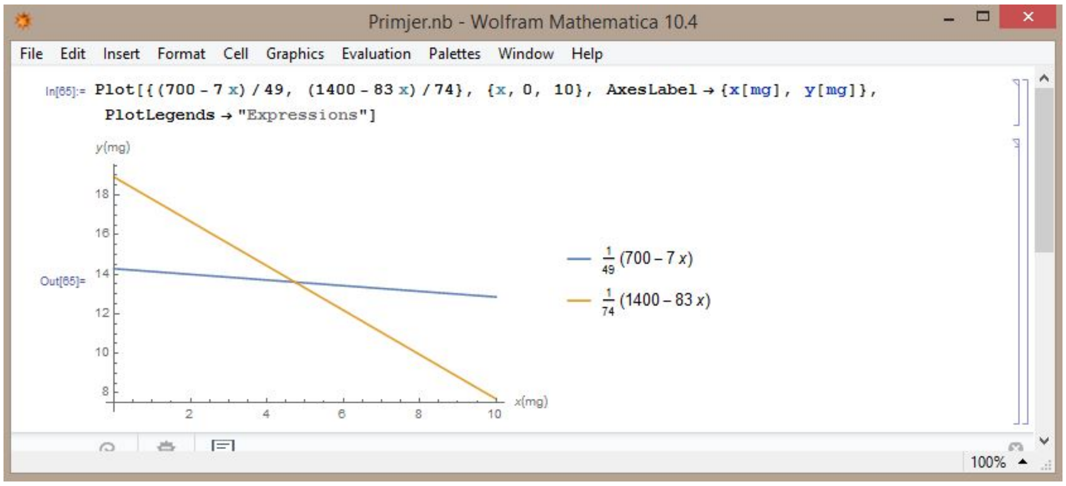
$x + 7y = 100$
$83x + 74y = 1400$

$x = 100 - 7y$
$83(100 - 7y) + 74y = 1400$
$8300 - 581y + 74y = 1400$

$507y = 6900$

$y = 13.61$ dl
$x = 4.73$ dl

2. *Graf funkcije*



Primjer 2.6 *Pacijent dnevno mora dobiti najmanje 74 jedinice lijeka A i 123 jedinice lijeka B. Gram supstance C sadrži 20 jedinica lijeka A i 9 jedinica lijeka B, a gram supstance D sadrži 4 jedinice lijeka A i 11 jedinica lijeka B.*

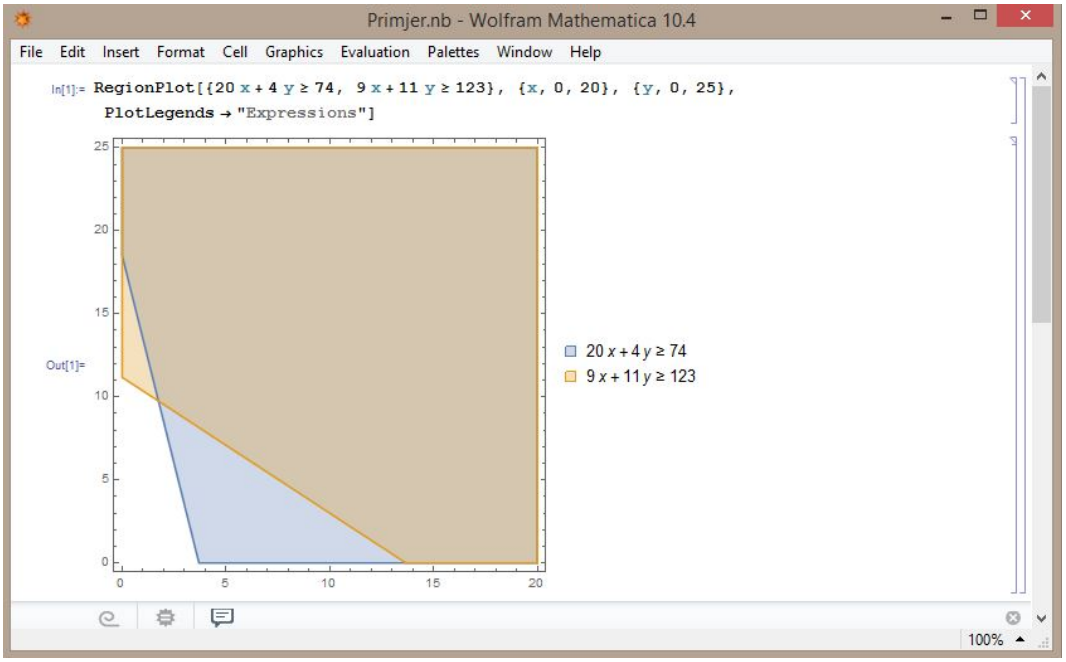
1. *Izračunajte koliko se grama supstanci C i D može pomiješati kako bi mješavina sadržavala minimalne dnevne doze obaju lijekova. Ako se prekorači doza lijeka, neće biti opasnosti za zdravlje pacijenta.*

2. *Grafički riješite dobiveni sustav nejednadžbi pomoću računala i komentirajte rezultat.*

Rješenje.

1. *Neka je x količina supstance C u gramima, a neka je y količina supstance D u gramima. Onda je*
$20x + 4y \geq 74$
$9x + 11y \geq 123$
$x, y \geq 0$

2. *Rješenje je presjek dviju poluravnina. Svaka točka (x, y) iz tog presjeka određuje količine supstanci C i D koje su dovoljne.*



Primjer 2.7 *Ivan slavi rođendan. U tu je svrhu unajmio prostor jednog kafića. Cijena najma je* 800 *kn za prostor i još* 40 *kn po gostu.*

1. *Koliko će Ivan platiti najam ukoliko pozove na proslavu* 15 *osoba?*
2. *Kafić inače iznajmljuje svoj prostor za proslave rođendana, te određuje cijenu najma na isti način. Izvedite model za određivanje cijene najma za bilo koji broj osoba.*
3. *Definirajte fiksni i varijabilni trošak.*
4. *Matematički interpretirajte koeficijent uz varijablu koja predstavlja broj osoba u modelu iz (2).*
5. *Ekonomski interpretirajte koeficijent uz varijablu koja predstavlja broj osoba u modelu iz (2).*
6. *Ispišite tablicu svih mogućih troškova ako je maksimalan broj osoba koji stane u kafić jednak* 20*, počevši od broja osoba jednakog* 1*. Komentirajte poraste ukupnog troška.*
7. *Za (6) napišite domenu i sliku funkcije.*

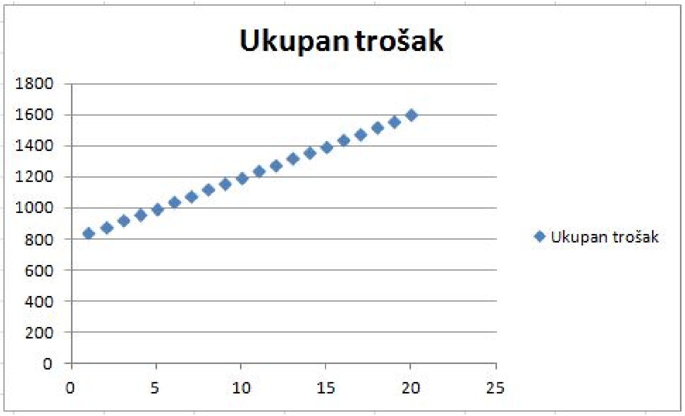
Rješenje.

1. *Ivan će platiti* 800 *kn za prostor i* 40 *kn po jednoj osobi. Budući da je broj osoba jednak* 15*, ukupan trošak je* $800 + 40 \cdot 15 = 800 + 600 = 1400$ *kn.*

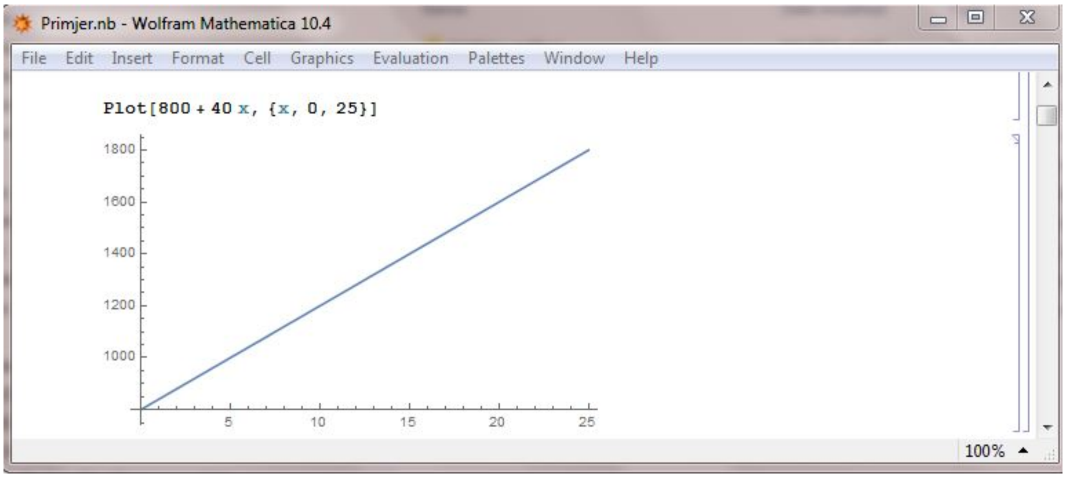
2. *Neka je x broj osoba. Tada je ukupan trošak najma jednak* $C(x) = 800 + 40 \cdot x$.

3. *Funkcija ukupnog troška je* $C(x) = 800 + 40 \cdot x$. *Fiksni trošak je trošak koji postoji i kad nema gostiju. Dakle, fiksni trošak je* $C(0) = 800 + 40 \cdot 0 = 800$. *Varijabilni trošak je ukupan trošak umanjen za fiksni trošak. Dakle, varijabilan trošak je* $VC(x) = C(x) - C(0) = 800 + 40 \cdot x - 800 = 40x$.

4. *Model iz (2) je* $C(x) = 800 + 40 \cdot x$. *Koeficijent uz varijablu x je* 40. *Graf ove funkcije je pravac, pa je* 40 *koeficijent smjera pravca. Budući da je on pozitivan, funkcija raste. Također, ukoliko se broj osoba poveća za* 1*, ukupan trošak će se povećati za* 40. *Napomena: x je broj osoba, pa je zapravo graf funkcije skup uređenih parova* $(x, C(x))$. *Na slici to izgleda ovako:*



Radi pojednostavljenja, graf možemo nacrtati i na način kako je to prikazano na sljedećoj slici imajući na umu da je x prirodan broj jer ta varijabla predstavlja broj osoba.



5. *Ekonomski, to je granični trošak (promjena ukupnog troška uslijed promjene varijable za* 1 *jedinicu).*

6. *Tablica troškova*

Broj osoba	*Ukupan trošak*
1	840
2	880
3	920
4	960
5	1000
6	1040
7	1080
8	1120
9	1160
10	1200
11	1240
12	1280
13	1320
14	1360
15	1400
16	1440
17	1480
18	1520
19	1560
20	1600

Primijetimo da je porast troška svaki put 40*, a to smo već komentirali pod (4) i (5).*

7. *Domena je* $D = \{1, 2, 3, ..., 19, 20\}$.
   Slika je $K = \{840, 880, 920, ..., 1560, 1600\}$

Primjer 2.8 *Kino dvorana ima* 200 *mjesta.*

1. *Ukoliko je predstava besplatna, popunjena je cijela dvorana. Ukoliko je cijena ulaznice* 20 *kuna, popunjenost dvorane je* 50%*. Izvedite linearni model za određivanje broja prodanih ulaznica u ovisnosti o cijeni.*
2. *Matematički interpretirajte koeficijent uz varijablu koja predstavlja broj prodanih ulaznica u modelu iz (1).*
3. *Ekonomski interpretirajte koeficijent uz varijablu koja predstavlja broj prodanih ulaznica u modelu iz (1).*
4. *Kolika mora biti cijena da bi se prodalo* 150 *ulaznica u skladu s modelom iz (1)?*

Rješenje.

1. *Linearni model ima opći oblik* $N(p) = a + b \cdot p$ *gdje je* p *cijena jedne ulaznice, a* $N(p)$ *broj prodanih ulaznica (broj posjetitelja). Trebamo odrediti parametre* a *i* b. *Ukoliko je predstava besplatna, popunjena je cijela dvorana. To znači da je cijena jednaka* 0, *a onda je broj posjetitelja jednak* $N(0) = 200$. *Slijedi da je* $N(0) = a + b \cdot 0 = a = 200$. *Nadalje, ako je cijena* 20 *onda je popunjenost* 50% *manja, tj., popunjenost je jednaka* $200 - \frac{50}{100} \cdot 200 = 200 - 100 = 100$. *Slijedi da je* $N(20) = a + b \cdot 20 = 200 + 20b = 100$. *Iz druge jednadžbe slijedi da je* $20b = -100$, *tj.,* $b = -5$. *Dakle, linearni model je* $N(p) = 200 - 5 \cdot p$.

2. *Graf funkcije* $N(p) = 200 - 5 \cdot p$ *je pravac, pa je* -5 *koeficijent smjera. Znači, ako se cijena poveća za* 1, *popunjenost će se smanjiti za* 5. *Napomena: graf funkcije je pravac, ali moramo imati na umu da je* $N(p)$ *broj osoba, dakle prirodan broj.*

3. *Koeficijent smjera možemo ekonomski interpretirati kao osjetljivost popunjenosti na promjenu cijene.*

4. *Želimo da je* $N(p) = 150$. *Matematički, moramo riješiti linearnu jednadžbu* $200 - 5 \cdot p = 150$. *Slijedi da je* $5 \cdot p = 50$, *tj.,* $p = 10$.

Primjer 2.9 *Poduzeće MXY proizvodi i prodaje jedan model tenisica čija je prodajna cijena* 300 *kuna po jednom paru. Da bi se tenisice proizvele, poduzeće ima i trošak proizvodnje koji je dan modelom* $C(x) = 10000 + 60x$, *gdje je* x *količina pari tenisica, a* $C(x)$ *ukupan trošak za tu količinu proizvodnje.*

1. *Modelirajte ukupan prihod poduzeća kao linearnu funkciju količine.*

2. *Modelirajte dobit poduzeća kao linearnu funkciju količine.*

3. *Izračunajte točku pokrića. Točka pokrića je količina proizvodnje uz koju je prihod jednak ukupnim troškovima, tj. količina proizvodnje uz koju je dobit jednaka nuli.*

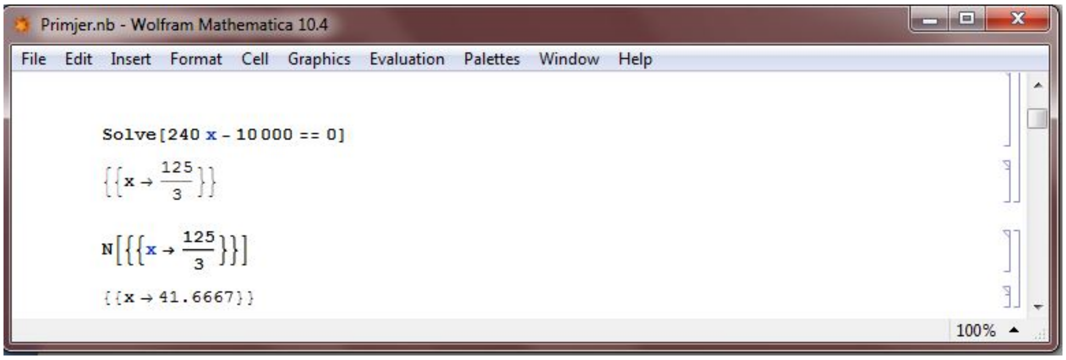
4. *Grafički prikažite funkciju dobiti, te interpretirajte koeficijent smjera pravca.*

Rješenje.

1. *Ukupan prihod je umnožak jedinične cijene i broja prodanih pari tenisica. Dakle, uz pretpostavku da poduzeće proda sve što je proizvelo, ukupan prihod je modeliran linearnom funkcijom* $R(x) = 300x$, *gdje je* x *broj prodanih pari, a* $R(x)$ *ukupan prihod.*

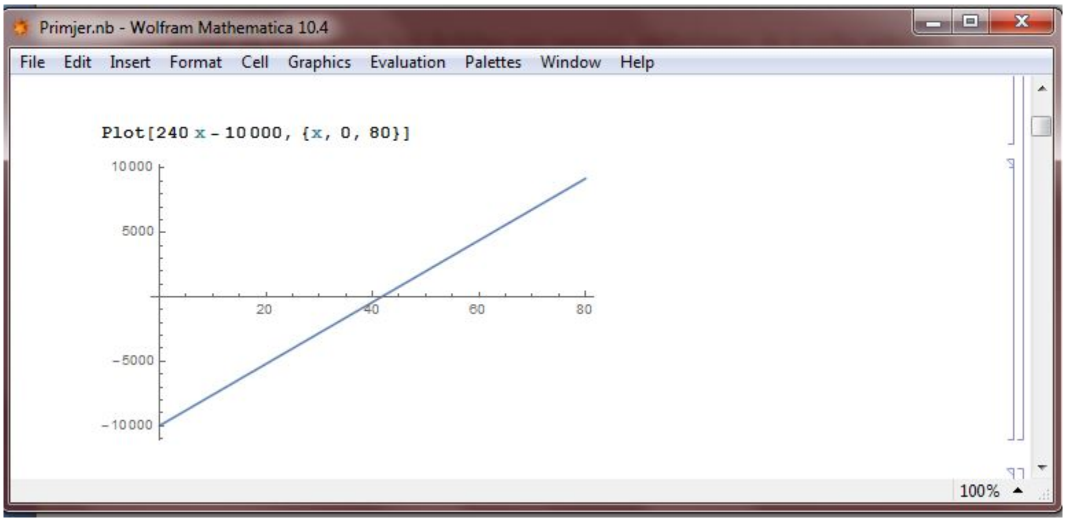
2. *Dobit je jednaka razlici ukupnog prihoda i ukupnog troška. U našem je slučaju to jednako* $P(x) = R(x) - C(x) = 300x - 10000 - 60x = 240x - 10000$, *tj.,* $P(x) = 240x - 10000$.

3. *Da bismo izračunali točku pokrića, računamo* x *za koji je* $R(x) = C(x)$ *ili* $P(x) = 0$. *Slijedi da je*
   $240x - 10000 = 0$
   $240x = 10000$
   $x = \frac{10000}{240} = 41.67$



Budući da je x prirodan broj (broj pari tenisica), zaključujemo da je točka pokrića 42 para tenisica. Dakle, da bi poduzeće bilo profitabilno, mora proizvoditi 42 ili više pari tenisica. Ukoliko proizvodi 41 par i manje, poduzeće neće ostvarivati dobit, tj., dobit će biti negativna (ukupan prihod će biti manji od ukupnog troška).

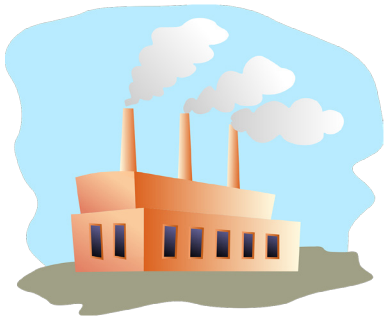
4. *Graf funkcije*



Primijetimo da presjek pravca s osi apscisa zapravo određuje točku pokrića. Koeficijent smjera pravca je 240 što znači da dobit raste. Također, svako povećanje proizvodnje od jednog para tenisica donosi poduzeću dodatnu dobit od 240 kuna. Napomenimo da je dobit jedna od rijetkih ekonomskih varijabli koja može biti negativna. Naravno, to nije poželjno jer to znači da poduzeće posluje s gubitkom.

Primjer 2.10 *Poduzeće treba donijeti odluku o lokaciji gradnje tvornice. Godišnji fiksni troškovi (najam, porezi, osiguranje, oprema i sl.) i varijabilni troškovi (troškovi rada, materijala, transporta) razlikuju se po jedinici proizvoda ovisno o lokaciji, te su dani u sljedećoj tablici:*

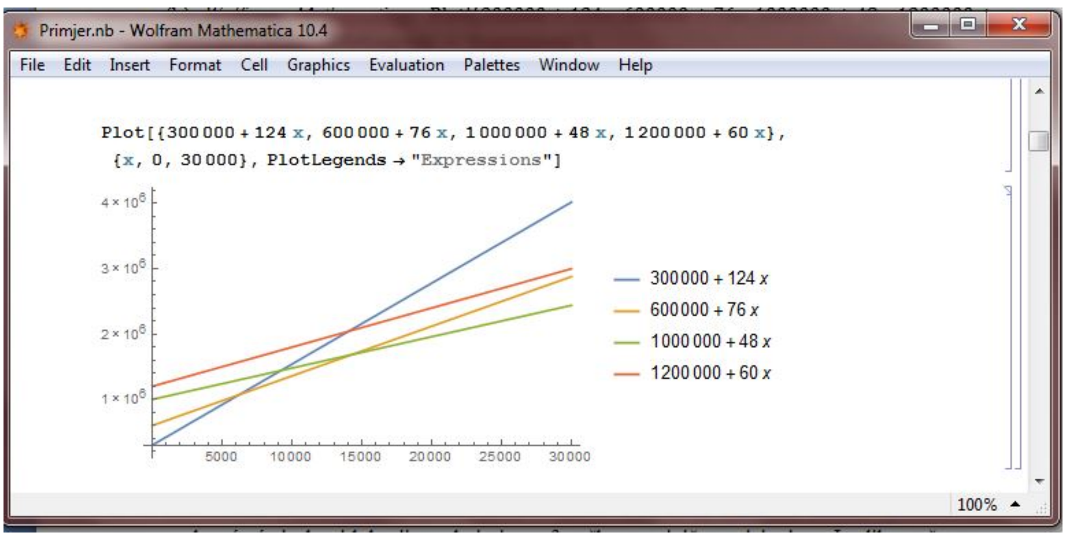
Lokacija	*Fiksni troškovi (kn)*	*Varijabilni troškovi (tisuća kn)*
A	300	124
B	600	76
C	1000	48
D	1200	60



1. *Modelirajte ukupne troškove poduzeća u ovisnosti o količini proizvodnje za svaku lokaciju posebno koristeći linearne funkcije.*
2. *Na istoj slici, grafički prikažite sve funkcije ukupnih troškova u ovisnosti o količini proizvodnje.*
3. *Iz slike pod (2) zaključite koja lokacija ne dolazi u obzir za gradnju tvornice, te argumentirajte.*
4. *Analizirajte koju će lokaciju poduzeće izabrati u ovisnosti o količini proizvodnje.*

Rješenje.

1. *Neka je x količina proizvodnje. Troškovi po lokacijama su redom:*
   $A(x) = 300000 + 124x$
   $B(x) = 600000 + 76x$
   $C(x) = 1000000 + 48x$
   $D(x) = 1200000 + 60x$
2. *Graf funkcije*



3. *Poduzeću je u interesu minimizirati troškove. Dakle, za određene količine proizvodnje, poduzeće će izabrati lokaciju za koju je graf troškova najniže pozicioniran. Iz slike uočavamo da graf funkcije $D(x) = 1200000 + 60x$ nikad neće biti najniže pozicioniran, pa zaključujemo da ta lokacija neće biti izabrana ni za koju količinu proizvodnje.*

4. *Iz slike je vidljivo da će za količine od* 0 *do određene vrijednosti poduzeće izabrati lokaciju A. Nakon toga, izabrat će lokaciju B i nakon određene količine, lokaciju C. Trebamo izračunati količine proizvodnja u kojima dolazi do promjene lokacije. Prebacivanje s lokacije A na lokaciju B dogodit će se za količine nakon što troškovi lokacija A i B postanu jednaki. Matematički, rješavamo jednadžbu:*
$A(x) = B(x)$
$300000 + 124x = 600000 + 76x$
$48x = 300000$
$x = 6250$
Dakle, ukoliko poduzeće planira proizvoditi količine iz intervala $\langle 0,\ 6250]$ *izabrat će lokaciju A. Za količine iznad* 6250 *izabrat će lokaciju B, ali samo do planirane količine za koju će troškovi lokacija B i C postati jednaki. Matematički,*
$B(x) = C(x)$
$600000 + 76x = 1000000 + 48x$
$28x = 400000$
$x = 14285.71$
Dakle, ukoliko poduzeće planira proizvoditi količine iz intervala ⟨6250, 14285.71] izabrat će lokaciju B. Za količine iznad 14285.71 *izabrat će lokaciju C. Napomena: Treba imati na umu da se u praksi te vrijednosti uzimaju aproksimativno.*
Dakle, prilikom donošenja odluke o lokaciji, poduzeće može zaključiti da će npr. za količinu 6000 *ipak izabrati lokaciju B jer planira nakon određenog vremena povećavati proizvodnju i na taj način ući u interval iznad* 6250.

Primjer 2.11 *Banka u svojoj ponudi nudi razne varijante ukamaćivanja. Za iznose do* 50000 *kn nudi godišnju kamatu od* 2%. *Za iznose od* 50000 *do* 200000 *nudi* 2.2% *godišnje kamate na cijeli uloženi iznos i za iznose iznad* 200000, 2.5% *godišnjih kamata na cijeli uloženi iznos.*

1. *Modelirajte glavnicu nakon godinu dana u ovisnosti o uloženoj svoti po dijelovima linearnom funkcijom.*

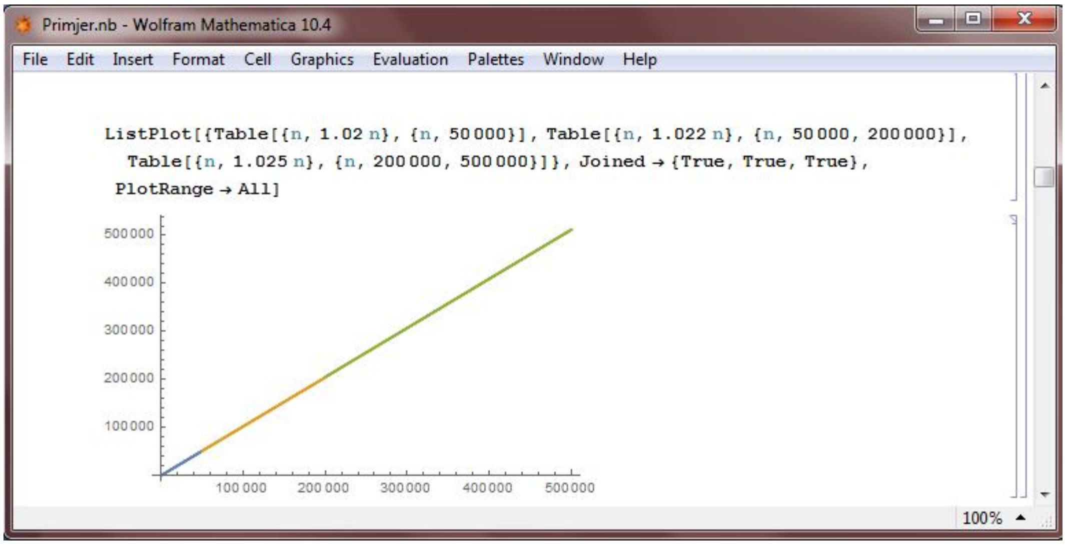
2. *Nacrtajte graf funkcije.*

Rješenje.

1. *Općenito, ukoliko banka nudi p% godišnjih kamata, glavnica na kraju godine je* $V(x) = x + \frac{p}{100}x = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot x$, *gdje je x uloženi iznos. Dakle, uz* 2% *godišnjih kamata, glavnica na kraju godine je* $1.02x$, *uz* 2.2% *godišnjih kamata, glavnica na kraju godine je* $1.022x$, *te uz* 2.5% *godišnjih kamata, glavnica na kraju godine je* $1.025x$. *Po dijelovima linearna funkcija kojom se modelira vrijednost glavnice na kraju godine je:*

$$V(x) = \begin{cases} 1.02x, & 0 < x \leq 50000 \\ 1.022x, & 50000 < x \leq 200000 \\ 1.025x, & 200000 < x \end{cases}$$

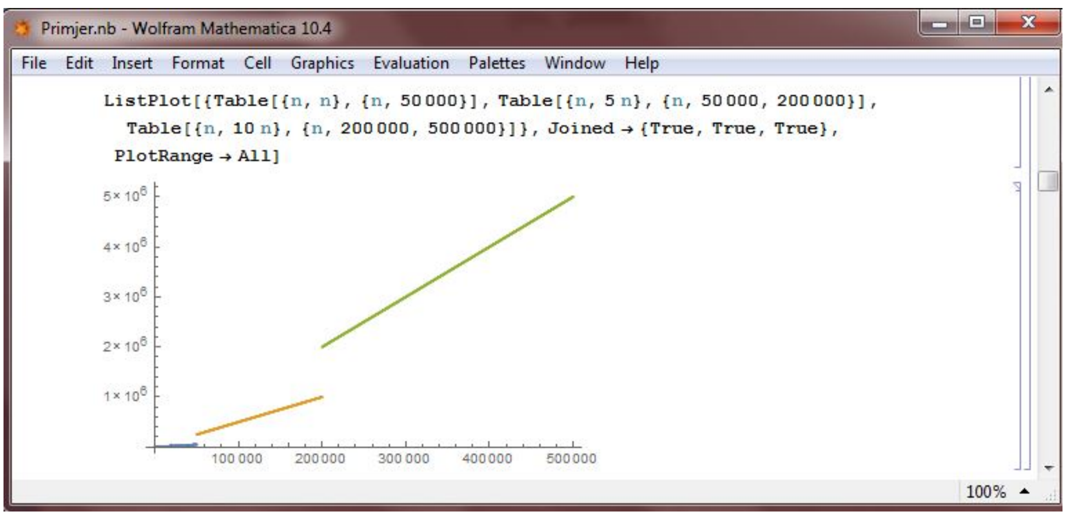
2. *Graf funkcije*



Napomena: zbog malih promjena u kamatnim stopama u odnosu na iznose uplata, skokovi se ne vide dobro na slici. Kad bismo npr., crtali funkciju

$$V(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 50000 \\ 5x, & 50000 < x \leq 200000 \\ 10x, & 200000 < x \end{cases}$$

graf bi bio sljedeći (uočite skokove funkcije):



Primjer 2.12 *U modelu tržišta s jednim proizvodom količina ponude iznosi $S(p) = -100 + 2p$, a količina potražnje $D(p) = 300 - 2p$, pri čemu je p jedinična cijena tog proizvoda.*

1. *Za koje cijene ovaj model tržišta ima ekonomskog smisla?*
2. *Komentirajte monotonost funkcija ponude i potražnje.*
3. *Odredite ravnotežnu cijenu i količinu proizvoda.*
4. *U istom koordinatnom sustavu grafički prikažite funkcije ponude i potražnje. Odredite ravnotežnu cijenu i količinu na tom tržištu. (Napomena: pri grafičkom prikazivanju funkcija pazite na interval smislenih cijena.)*
5. *Definirajte funkciju zaliha kod proizvođača. Zalihe se definiraju kao razlika ponude i potražnje. Ekonomski komentirajte u ovisnosti o ravnotežnoj cijeni.*

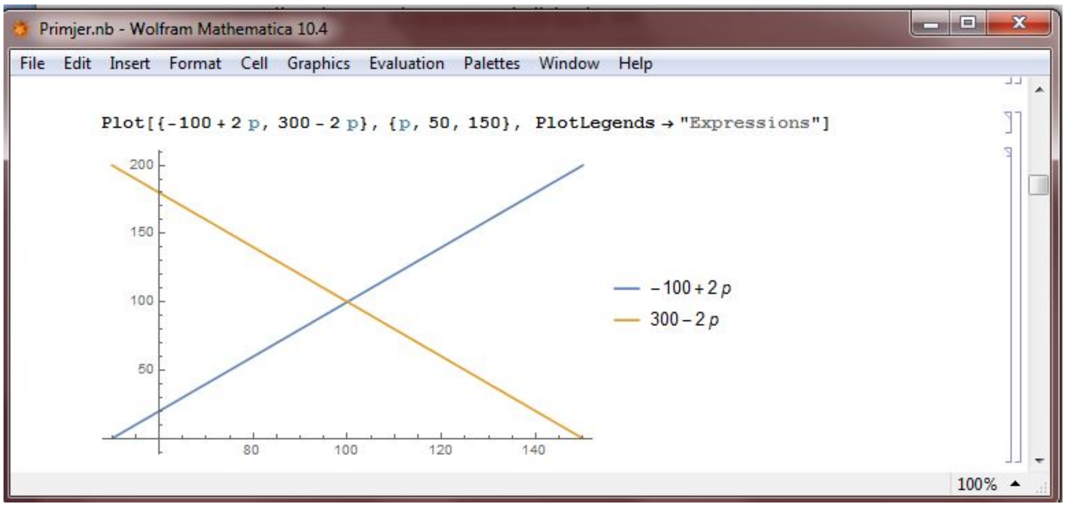
Rješenje.

1. *Model ima ekonomskog smisla za cijene za koje je* $S(p) \geq 0$ *i* $D(p) \geq 0$, *s tim da moramo uzeti u obzir i činjenicu da je cijena nenegativna, tj.,* $p \geq 0$. *Matematički, moramo riješiti sustav nejednadžbi:*
   $-100 + 2p \geq 0$
   $300 - 2p \geq 0$
   $p \geq 0$
   Iz prve nejednadžbe slijedi da je $2p \geq 100$, *tj.,* $p \geq 50$. *Budući da se kod prve nejednadžbe radi o funkciji ponude, zaključujemo da se proizvod neće nuditi po cijeni manjoj od* 50. *Iz druge nejednadžbe slijedi da je* $300 \geq 2p$, *tj.,* $p \leq 150$. *U drugoj nejednadžbi radi se o funkciji potražnje, pa zaključujemo da je najveća moguća cijena za koju su kupci spremni kupovati jednaka* 150. *Presjek skupova* $p \geq 50$, $p \leq 150$ *i* $p \geq 0$ *je interval* $[50, 150]$.

2. *Funkcija ponude* $S(p) = -100 + 2p$ *raste s porastom cijene. Zaključujemo da će s porastom cijene kupci manje kupovati, pa će proizvođač više nuditi i na taj način stvarati svoje zalihe. Funkcija potražnje* $D(p) = 300 - 2p$ *pada s porastom cijene jer kupci manje kupuju.*
3. *Ravnotežna cijena i količina određuju se iz uvjeta čišćenja tržišta. Dakle, iz uvjeta da je* $S(p) = D(p)$. *Slijedi da je ravnotežna cijena:*
   $-100 + 2p = 300 - 2p$

$4p = 400$
$p = 100$
Ravnotežna količina je $S(100)$ *ili* $D(100)$. *Neka je* $S(100) = -100 + 2 \cdot 100 = 100$. *Dakle, ravnotežna cijena je* 100, *a i ravnotežna količina je* 100.

4. *Graf funkcije*



Uređeni par $(100, 100)$ *predstavlja ravnotežu.*

5. *Zalihe se definiraju kao razlika ponude i potražnje, tj., zalihe su jednake* $S(p) - D(p)$. *U našem je slučaju:*
$S(p) - D(p) = -100 + 2p - (300 - 2p) = 4p - 400$
Kod ravnotežne cijene $p = 100$, *zalihe su jednake* 0. *Ukoliko je cijena manja od svoje ravnotežne vrijednosti, zalihe su negativne što znači da na tržištu postoji višak potražnje za proizvodom. Ukoliko je cijena veća od svoje ravnotežne vrijednosti, zalihe su pozitivne što znači da proizvođač ne može prodati sve što proizvede.*

Primjer 2.13 *Ivan je krenuo automobilom prema Slavonskom Brodu brzinom* 80 km/h. *Nakon prijeđenog puta od* 20 *kilometara automobil je ostao bez benzina. Do benzinske stanice udaljene* 2 *kilometara pješačio je* 30 *minuta. Pretpostavimo da se cijelim putem gibao pravocrtno u smjeru* x *osi. Odredite:*

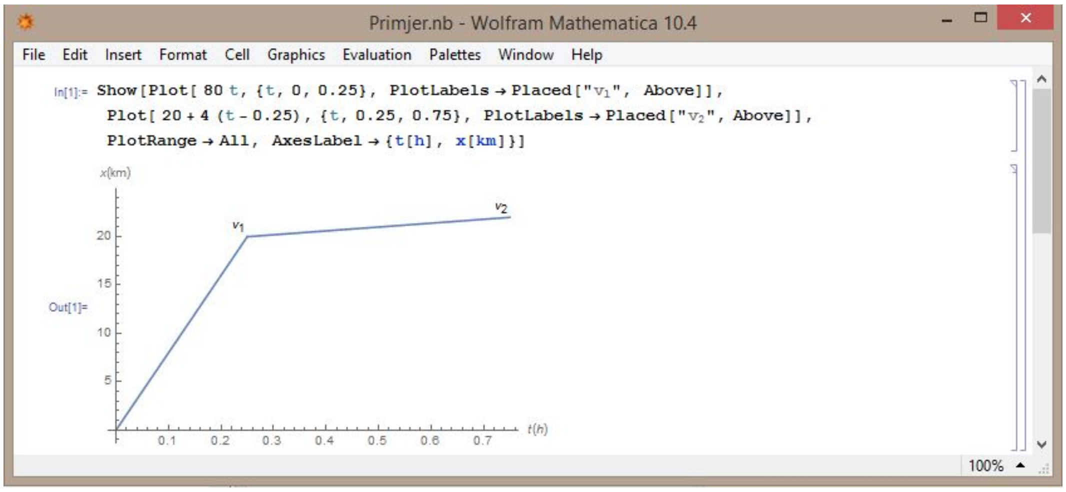
1. *ovisnost prijeđenog puta o vremenu* $x(t)$
2. *ukupno vrijeme gibanja*
3. *srednju brzinu gibanja.*

Rješenje.

1. *Ovisnost puta o vremenu:*
   1. *Gibanje automobila:*
   $x_1(t) = v_1 t$
   $v_1 = 80 \text{ km/h}$
   $t_1 = \frac{20 \text{ km}}{80 \text{ km/h}} = 0.25 \text{ h}$
   2. *Gibanje pješaka:*

$x_2(t) = v_2 t$
$v_2 = \frac{2 \text{ km}}{0.5 \text{ h}} = 4 \text{ km/h}$
Za grafički prikaz pomak pješaka je:
$x_2(t) = 20 + v_2(t - 0.25)$

$t(h)$	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75
$x(t)$	8.0	16.0	20.0	20.2	20.6	21.0	21.4	21.8	22.0

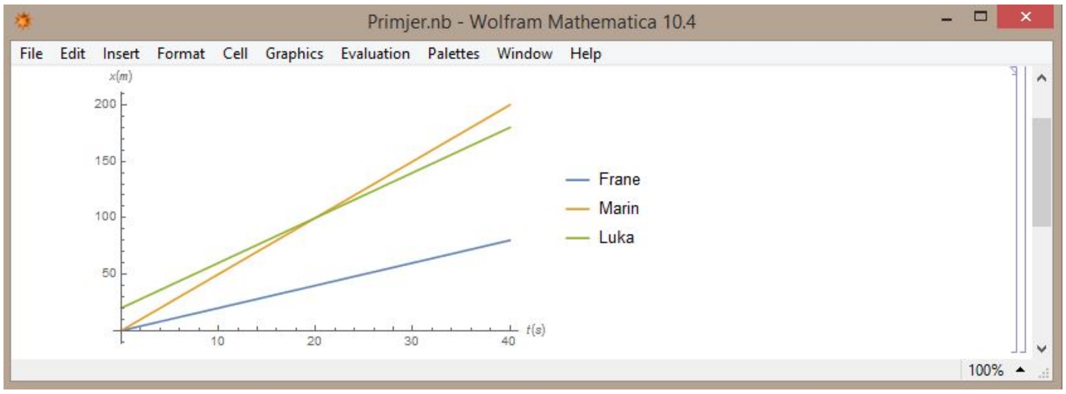


2. *Ukupno vrijeme gibanja je* 0.75 *sati.*

3. *Srednja brzina gibanja je omjer ukupnog puta i pripadnog vremena:* $v_s = \frac{22 \text{ km}}{0.75 \text{ h}} = 29.3 \text{ km/h}.$

Primjer 2.14 *Marin i Frane su krenuli biciklima na izlet. Luka ih nije htio čekati pa je krenuo nešto ranije.*

Grafički prikaz njihovog puta u ovisnosti o vremenu prikazan je na slici:



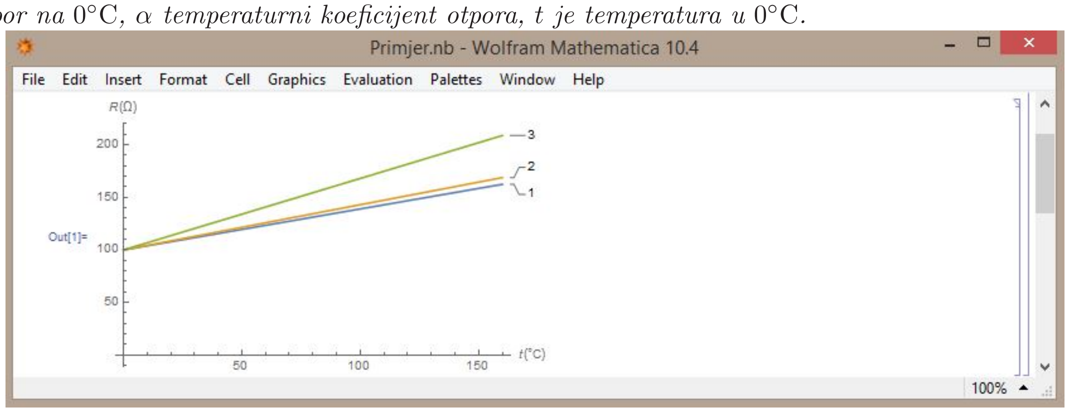
Iz grafa odredite:

1. *način gibanja svakog od dječaka*
2. *koji od njih vozi bicikl najvećom brzinom, a koji najmanjom*
3. *koliki je put prešao Luka u trenutku kada su Marin i Frane tek krenuli*
4. *u kojem trenutku će put koji su prošli Luka i Marin biti jednak.*

Rješenje.

1. *iz grafa je vidljivo da je put linearno ovisan o vremenu pa se može napisati kao:* $x(t) = vt$*, gibanje je jednoliko, nagib pravca jednak je brzini gibanja* v.
2. *Iz nagiba pravca se vidi da Marin vozi najvećom brzinom, a Frane najmanjom.*
3. *Luka je prešao* 20 *metara u trenutku kad su Marin i Frane tek krenuli.*
4. *Nakon* 20 *sekundi vožnje Luka i Marin su prošli jednaki put od* 100 *metara.*

Primjer 2.15 *Otpor metalnog vodiča mijenja se s temperaturom kao* $R(t) = R_0(1 + \alpha t)$*, gdje je* R_0 *otpor na* $0°\mathrm{C}$, α *temperaturni koeficijent otpora,* t *je temperatura u* $0°\mathrm{C}$.



Iz grafičke ovisnosti $R(t)$ *za tri materijala* 1, 2 *i* 3 *odredite:*

1. *koji materijal ima najveći temperaturni koeficijent otpora*
2. *otpor na* $0°\mathrm{C}$ *za sva tri materijala*

3. *temperaturni koeficijent otpora ako je otpor na* $100°C$*:* $139\ \Omega$ *(za materijal* 1*),* $143\ \Omega$ *(za materijal* 2*) i* $168\ \Omega$ *(za materijal* 3*)*

4. *potražite na internetu o kojim se materijalima radi.*

Rješenje.

1. *Nagib pravca je jednak* $R_0\alpha$*. Najveći je nagib pravca za materijal* 3 *pa taj materijal ima najveći temperaturni koeficijent otpora (*R_0 *je jednak za sva tri materijala).*

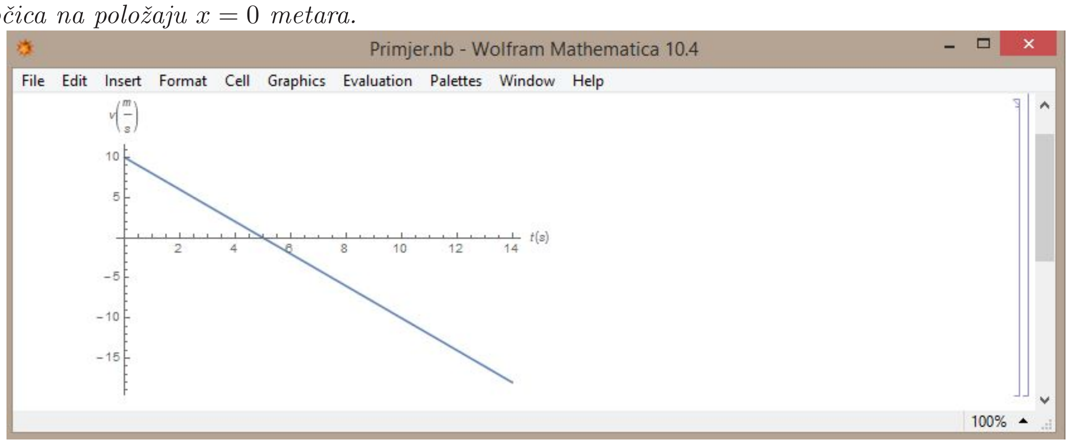
2. *Iz grafa možemo očitati da je otpor na* $0°C$ *za sva tri materijala jednak* $100\ \Omega$*.*

3. *Temperaturni koeficijent otpora možemo izračunati iz relacije:* $\alpha = \frac{1}{t}(\frac{R}{R_0} - 1)$*.*
Izračunate vrijednosti su: za materijal 1*:* $\alpha = 0.0039/°C$*, za materijal* 2*:* $\alpha = 0.0043/°C$ *i za materijal* 3*:* $\alpha = 0.0068/°C$*.*

4. *Materijal* 1 *je platina, materijal* 2 *bakar i materijal* 3 *je nikal.*

Primjer 2.16 *Hokejska pločica kliže po ledu u horizontalnom smjeru. Istovremeno prema pločici puše jak vjetar.*

Na slici je prikazana ovisnost brzine pločice o vremenu. Pretpostavimo da je u trenutku $t = 0$ *sekundi pločica na položaju* $x = 0$ *metara.*



Odredite:

1. *način gibanja pločice*

2. *udaljenost pločice od početnog položaja nakon* 5 *sekundi te nakon* 14 *sekundi gibanja.*

Rješenje.

1. *Iz $v(t)$ grafa se vidi da brzina gibanja pločice opada s vremenom, dakle gibanje je usporeno. S obzirom na to da je opadanje brzine s vremenom prikazano linearnom funkcijom znači da se radi o jednoliko usporenom gibanju pa se ovisnost brzine o vremenu može napisati kao: $v(t) = v_0 - at$, ubrzanje a jednako je nagibu pravca. Iz grafa se može očitati da je $v_0 = 10$ m/s. Nakon 5 sekundi brzina je 0 m/s, nakon 10 sekundi brzina je -10 m/s itd. Srednje ubrzanje je $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ promjena brzine u vremenu. Uvrštavanje gornjih vrijednosti daje $a = -2$ m/s^2. Očito je da jak vjetar usporava gibanje pločice.*

2. *Udaljenost se može prikazati izrazom: $x(t) = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$. Nakon 5 sekundi udaljenost je $x(5) = 25$ metara, a nakon 14 sekundi je $x(14) = -56$ metara, što znači da je pločica otišla na drugu stranu.*

Primjer 2.17 *Marko je odlučio za obitelj sagraditi kuću. Da bi troškovi grijanja bili što manji odlučio je pri gradnji zidova kuće odabrati materijale tako da toplinski gubitci (gustoća toplinskog toka) budu što manji.*

Odredite kako toplinski gubitci ovise o vrsti materijala i debljini zida. Grafički prikažite ovisnost toplinskih gubitaka u ovisnosti o vanjskoj temperaturi ako je temperatura prostorije $T_1 = 20°C$ za zid sagrađen od cigle. Pomozite Marku i izračunajte toplinske gubitke za $S = 1$ m^2 površine zida i vanjsku temperaturu $T_2 = -10°C$ ako je:

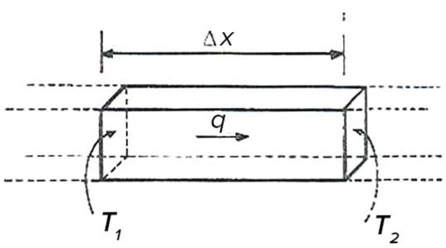
1. *zid od cigle debljine 25 cm nije ožbukan s vanjske strane (koeficijent toplinske vodljivosti $\lambda = 0.7$ W/mK)*

2. *zid ožbukan cementnom žbukom ($\lambda = 0.8$ W/mK) debljine 3 cm*

3. *na cementnu žbuku dodana toplinska žbuka ($\lambda = 0.11$ W/mK) debljine 3 cm*

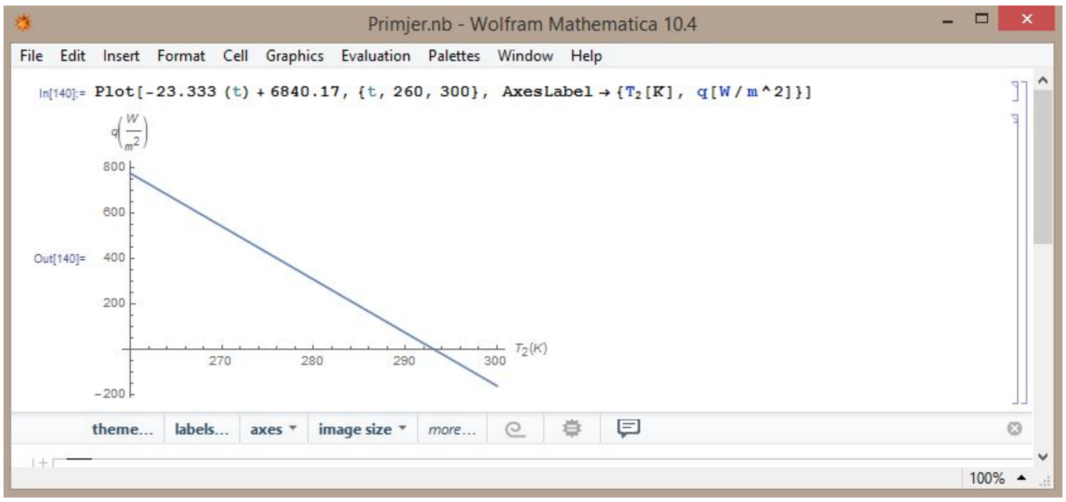
4. *na ciglu postavljen sloj staklene vune debljine 10 cm ($\lambda = 0.035$ W/mK) i navučena toplinska žbuka debljine 2 cm.*

Rješenje.



Vođenje topline može se prikazati Fourierovim zakonom vođenja topline: $Q = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} St$ gdje predznak (-) označava gubitak topline, λ je koeficijent toplinske vodljivosti koji ovisi o materijalu, $\Delta T = T_2 - T_1$ je razlika temperatura na krajevima sloja debljine Δx, S površina poprečnog presjeka, t vrijeme. Toplinski *tok je* $\Phi = \frac{Q}{t}$*, a gustoća toplinskog toka* $q = \frac{Q}{S}$*. Toplinski otpor se definira kao:* $R = \frac{\Delta T}{\Phi} = \frac{\Delta x}{\lambda S}$*, pa je* $q = \frac{\Delta T}{RS}$*. Gustoća toplinskog toka je linearno ovisna o* λ*, a obrnuto je proporcionalna debljini sloja materijala* Δx*. Što je* λ *manji materijal je bolji toplinski izolator. Grafička ovisnost iznosi* $q(T_2)$ *za slučaj da se vanjska temperatura mijenja od* $-10°\mathrm{C}$ *do* $20°\mathrm{C}$*. Gustoća toplinskog toka je*

$$q(T_2) = \Big(-23.333 \big(273.15 + t(°\mathrm{C}) \big) + 6840.17 \Big) \mathrm{W/m^2}, (T \text{ je u } K).$$



Iz grafa $q(T_2)$ *vidimo da gubici topline linearno opadaju s porastom vanjske temperature. Kada se vanjska i unutarnja temperatura prostorije izjednače nema gubitaka. S daljnjim porastom vanjske temperature tok topline bi promijenio smjer i temperatura u prostoriji bi se povećavala.*

1. *za zid od cigle:* $\lambda_1 = 0.7$ W/mK, $\Delta x_1 = 25$ cm, $\Delta T = 30$ K*. Toplinski otpor je:* $R_1 = \frac{\Delta T}{\Phi} = \frac{\Delta x_1}{\lambda_1 S}$,
   $R_1 = \frac{0.25}{0.7 \cdot 1} = 0.357$ K/W;
   gustoća toplinskog toka: $q = \frac{\Delta T}{R_1 S} = \frac{30 \text{ K}}{0.357 \text{ K/W} \cdot 1 \mathrm{m}^2} = 84.0 \text{ W/m}^2$

2. *Toplinski otpor je analogan električnom otporu, pa u ovom slučaju kada na zid od cigle dodajemo slojeve različitog materijala toplinski se otpori zbrajaju serijski:*
   $R = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots$
   Za cementnu žbuku $\lambda_2 = 0.8$ W/mK, $\Delta x_2 = 3$ cm, $R_2 = \frac{0.03}{0.8 \cdot 1} = 0.395$ K/W.
   Ukupni toplinski otpor je $R = R_1 + R_2 = 0.752$ K/W, $q = \frac{\Delta T}{RS} = \frac{30}{0.752 \cdot 1} = 39.9$ W/m^2*. Vidimo da cementna žbuka značajno smanjuje toplinske gubitke.*

3. *Ako se na cementnu žbuku doda sloj toplinske žbuke:* $\lambda_3 = 0.11$ W/mK, $\Delta x_2 = 3$ cm, $R_3 = \frac{0.03}{0.11 \cdot 1} = 0.272$ K/W.
   Ukupan otpor je $R = R_1 + R_2 + R_3 = 1.024$ K/W.
   $q = \frac{\Delta T}{RS} = \frac{30}{1.024 \cdot 1} = 29.3$ W/m^2

4. *Ako se na zid od cigle nalijepe ploče od staklene vune debljine* $\Delta x_3 = 10$ cm ($\lambda_3 = 0.035$ W/mK) *toplinski otpor tog sloja je* $R_4 = \frac{0.10}{0.035 \cdot 1} = 2.857$ K/W.
   Ukupan toplinski otpor za zid od cigle, staklene vune i toplinske žbuke je $R = R_1 + R_3 + R_4 = 3.486$ K/W*, a toplinski gubitak* $q = \frac{\Delta T}{RS} = \frac{30}{2.857 \cdot 1} = 10.5$ W/m^2.

   Da bi toplinski gubitci bili što manji Marko će morati staviti izolaciju od staklene vune i na nju toplinsku žbuku!

2.2 Modeliranje kvadratnom funkcijom i korijenom

Primjer 2.18 *Atletska disciplina bacanje kugle može se modelirati jednadžbom*

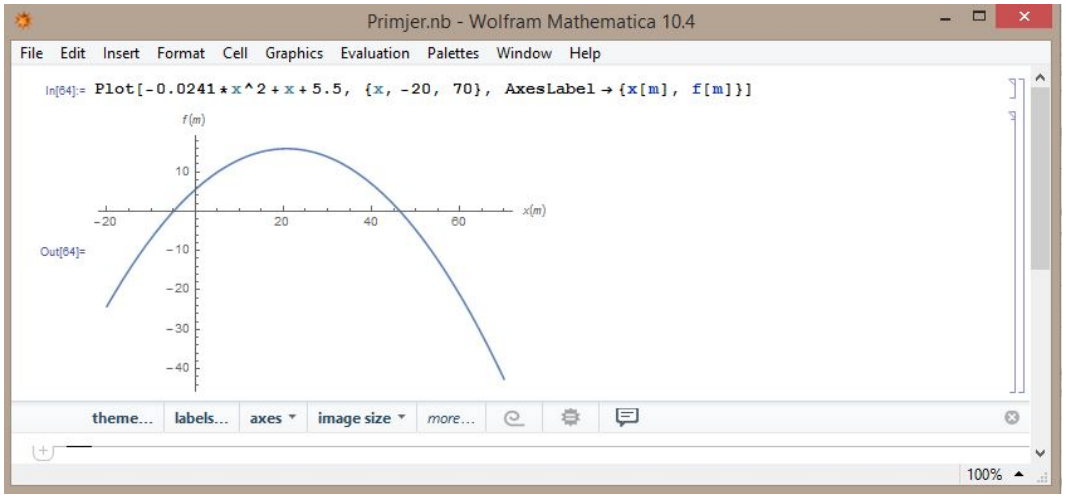
$$f(x) = -0.0241x^2 + x + 5.5$$

gdje x označava udaljenost u metrima, a $f(x)$ je visina u metrima. Za početni i konačni položaj kugle visina je jednaka nuli.

1. *Izračunajte koliko daleko je bacač bacio kuglu? Komentirajte rješenja jednadžbe.*
2. *Nacrtajte graf zadane jednadžbe, komentirajte i odredite domenu i sliku funkcije.*
3. *Izračunajte u kojoj je točki kugla najviša od razine zemlje?*

Rješenje.

1. *Bacač baci kuglu, pa ona padne na zemlju na visini nula.*
   $0 = -0.0241\text{x}^2 + \text{x} + 5.5$
   Rješavanjem kvadratne jednadžbe dobivamo njena rješenja: $x_1 = 46.411$ i $x_2 = -4.917$. Konačno rješenje je udaljenost između nultočaka parabole $d = 51.328$ metara.
2. *Graf funkcije je parabola, domena je $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, a slika su svi brojevi manji od 15.87. Parabola je okrenuta prema dolje i ima maksimum u tjemenu s koordinatama $(20.75, 15.87)$ u metrima, pa je zato slika $\mathcal{R} = (-\infty, 15.87]$*



3. *Spomenuli smo već da maksimum funkcije iznosi* 15.87 m *u točki* $x = 20.75$ m.

Primjer 2.19 *Iako se čini da je nogomentno igralište s umjetnom travom ravnina, ono je lagano zakrivljeno zbog otjecanja viška vode prema rubovima igrališta. Površina igrališta je zapravo oblikovana kao parabolički valjak, što znači da je vertikalni presjek parabola. Neka parabola koju dobivamo kad igralište presječemo ravninom* $\langle x, y\rangle$ *ima jednadžbu*

$$f(x) = -0.000234(x-80)^2 + 1.5,$$

gdje x *označava udaljenost u metrima, a* $y = f(x)$ *je visina terena u metrima.*

1. *Izračunajte kolika je širina cijelog stadiona ako mjerimo duž osi* x.

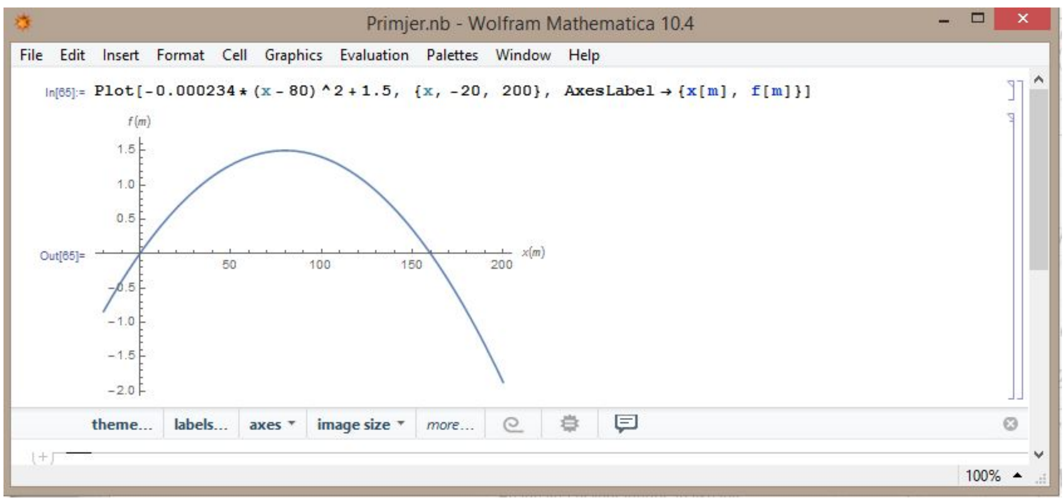
2. *Nacrtajte graf zadane jednadžbe, komentirajte i odredite domenu i sliku funkcije.*

3. *Izračunajte kolika je najviša točka parabole?*

Rješenje.

1. *Zadana jednadžba izjednačava se s nulom:* $0 = -0.000234(x-80)^2+1.5$.
   Rješavanjem kvadratne jednadžbe dobivamo njena rješenja: $x_1 = -0.064$ *i* $x_2 = 160.064$. *Konačno rješenje je suma rješenja* $d = 160$ *metara. Sumu rješenja smo mogli pročitati iz kvadratne jednadžbe pomoću Vieteovih formula.*

2. *Graf funkcije je parabola, domena je* $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, *a slika funkcije* $\mathcal{R} = \{y \in \mathbb{R} : y \leq 1.5\}$.



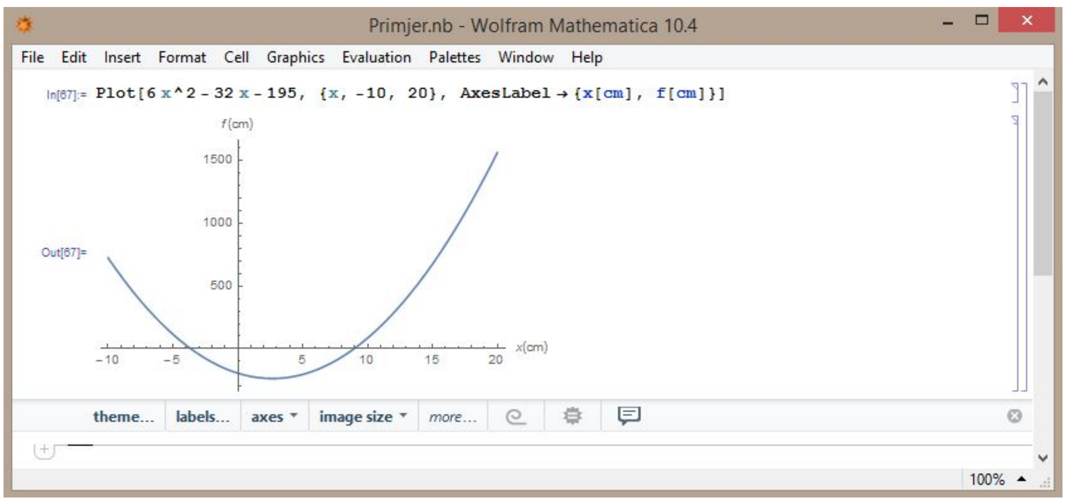
3. *Globalni maksimum funkcije iznosi* 1.5 m *u točki* $x = 80$ m.

Primjer 2.20 *Urednik izdavačke kuće odlučio se za nove dimenzije časopisa koji je u pripremi za narednu godinu. Margine na vrhu i dnu stranice trebaju biti* 2 *centimetra široke, a sa svake strane po* 1 *centimetar. Duljina stranice treba biti* 1.2 *puta širina stranice, a veličina pisanog dijela površine* 47 cm^2.

1. *Izračunajte kolika je dimenzija stranice časopisa.*
2. *Nacrtajte graf zadane jednadžbe, komentirajte i odredite domenu i sliku funkcije.*
3. *Izračunajte kolika je najviša/najniža točka parabole?*

Rješenje.

1. *Potrebno je postaviti kvadratnu jednadžbu gdje x označava širinu stranice*
   $\left(\frac{6}{5}x - 4\right)(x-2) = 47$
   $\frac{6}{5}x^2 - \frac{12}{5}x - 4x + 8 = 47$
   $\frac{6}{5}x^2 - \frac{32}{5}x - 39 = 0$
   $6x^2 - 32x - 195 = 0$
   $x = \frac{8}{3} + \frac{\sqrt{\frac{713}{2}}}{3} = 8.96.$
   Duljina stranice je $\frac{6}{5}x = 10.75$ cm.
2. *Graf funkcije je parabola, domena je* $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, *a slika* $\mathcal{R} = \{y \in \mathbb{R} : y \geq -\frac{713}{3}\}$.



3. *Minimum funkcije iznosi* $-\frac{713}{3}$ *u točki* $x = 8.96$ cm.

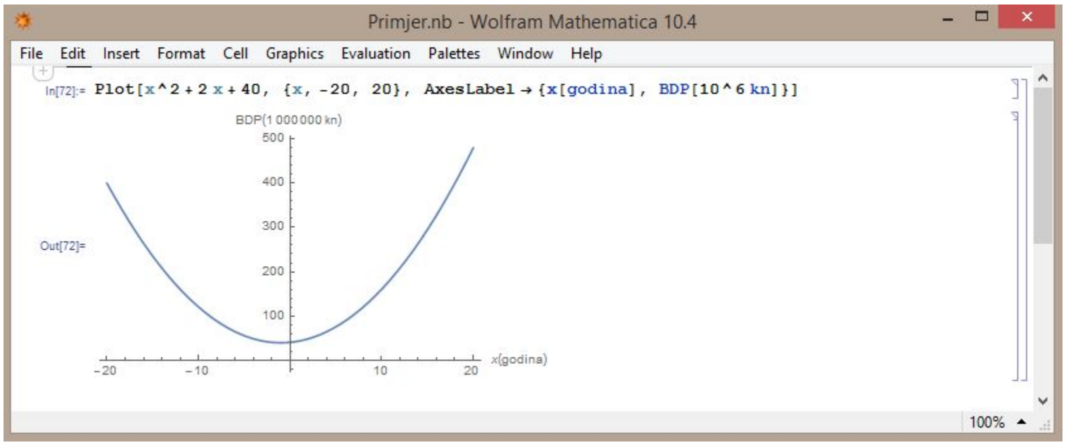
Primjer 2.21 *Predviđa se da će bruto domaći proizvod (BDP) Republike Hrvatske iznositi* $x^2+2x+40$ *milijuna kuna* x *godina od danas.*

1. *Nacrtajte graf zadane jednadžbe i komentirajte ga.*

2. *Izračunajte vrijeme x potrebno da BDP Republike Hrvatske bude jednak ili veći 47 milijuna kuna.*

Rješenje.

1. *Graf funkcije treba gledati samo za* $x \geq 0$



2. $x^2 + 2x + 40 \geq 47$.
   Tražmo pozitivna rješenja od $x^2 + 2x - 7 = 0$
   i dobivamo $x \geq 2\sqrt{2} - 1 \geq 1.83$.

Primjer 2.22 *Analitičar financijskog odjela tvrtke koja proizvodi stalak za mobitele modelirao je sustav cijene i potražnje za navedeni proizvod*

$$c(x) = 87.4 - 7x,$$

gdje je c veleprodajna cijena stalka, a x milijun stalaka prodano uz $1 \leq x \leq 20$.

1. *Odredite funkciju prihoda.*

2. *Izračunajte vrijednost x koja će dati maksimalni prihod. Izračunajte maksimalni prihod.*

3. *Izračunajte veleprodajnu cijenu stalka koja generira maksimalni prihod.*

4. *Nacrtajte graf prihoda i veleprodajne cijene.*

5. *Ako je funkcija troška $T(x) = 147 + 17.4x$, nađite točku pokrića gdje u proizvodnji neće biti ni dobitka niti gubitka. Nacrtajte graf funkcije troška i prihoda.*

6. *Do gubitka dolazi ako je $P(x) < T(x)$, a do dobiti ako je $P(x) > T(x)$. Za koje vrijednost x će doći do gubitka, a za koje do dobiti?*

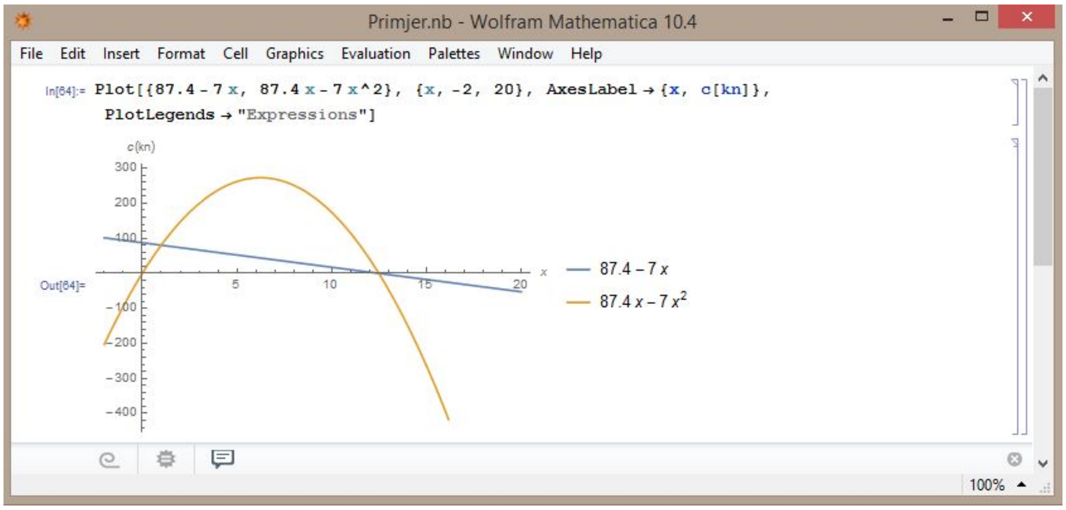
Rješenje.

1. $P(x) = xc(x) = x(87.4 - 7x)$, *domena* $1 \leq x \leq 20$.

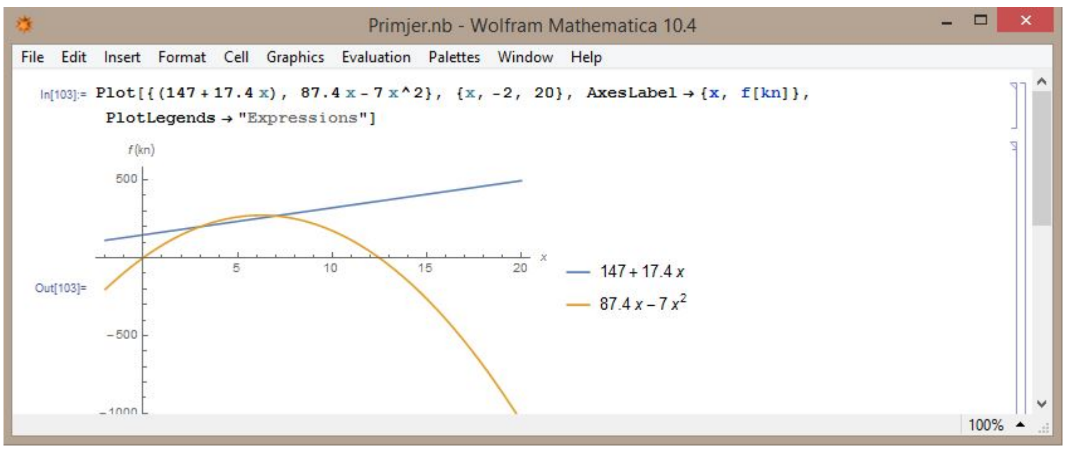
2. $P(x) = x(87.4 - 7x) = -7x^2 + 87.4x = -7\left(x^2 - 12.49x\right) =$
   $-7\left(x^2 - 12.49x + 39.000025\right) + 273.000175 =$
   $-7(x - 6.245)^2 + 273.000175$
   Maksimalni prihod od 273.000175 *milijuna kuna se dobiva kada je* $x = 6.245$ *milijuna.*

3. $c\,(x) = 87.4 - 7x$
$c\,(6.245) = 87.4 - 7 \cdot 6.245 = 43.685$ *kuna*

4. *Graf funkcije*



5. $P\,(x) = T\,(x)$
$-7x^2 + 87.4x = 147 + 17.4x$
$x_1 = 3,\ \ x_2 = 7$
Tvrtka je u ravnoteži kada je $x = 3$ milijuna stalaka i $x = 7$ milijuna stalaka.



6. *Gubitak kada je $1 \leq x < 3$ ili $7 < x \leq 20$, a dobitak $3 < x < 7$.*

Primjer 2.23 *Poduzeće XYZ proizvodi odjeću. U svom poslovanju zainteresirano je modelirati potražnju za svojim proizvodom u ovisnosti o cijeni tog proizvoda. Time se bavi odjel marketinga, te je na temelju istraživanja tržišta došao do zaključka da se potražnja za pamučnim majicama u ovisnosti o cijeni majice ponaša u skladu s modelom $D(p) = 12000 - 50p$, gdje je p cijena jedne majice, a $D(p)$ količina prodanih majica.*

1. *Za koje cijene ovaj model ima ekonomskog smisla?*
2. *Kolika će biti potražnja za majicama ako je cijena* 100 *kuna?*
3. *Kolika će biti potražnja za majicama ako je cijena* 120 *kuna?*
4. *Za koliko se posto promijenila potražnja kad se cijena sa* 100 *kuna povećala na* 120 *kuna?*
5. *Modelirajte prihod kao umnožak jedinične cijene i količine potražnje u ovisnosti o cijeni.*
6. *Nacrtajte graf funkcije iz (5) koji vizualizira prihod.*
7. *Za koju je cijenu prihod maksimalan i koliko iznosi?*

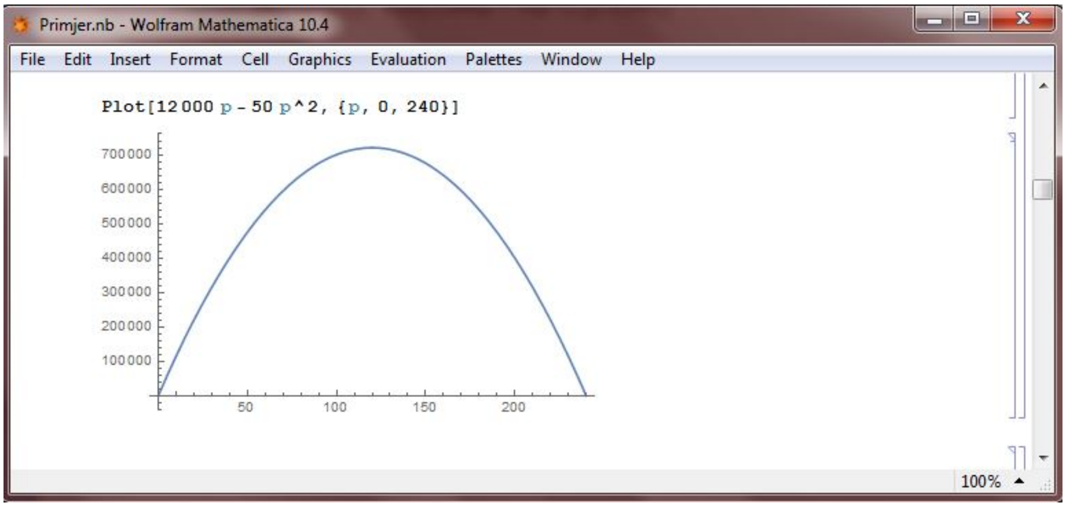
Rješenje.

1. *Ovdje moramo uzeti u obzir da je cijena pozitivan broj (ili nula!), a isto vrijedi i za količinu potražnje (količinu majica). Matematički, moramo riješiti sustav nejednadžbi*

$$\begin{aligned} p &\geq 0 \\ 12000 - 50p &\geq 0. \end{aligned}$$

   Rješenje je interval $[0, 240]$. *Znači, radi se o proizvodu čija je ekonomska cijena između* 0 *kuna i* 240 *kuna. U poslovnoj praksi cijena nije baš jednaka nuli, ali to može biti blizu nule i jer je majica na velikom popustu.*

2. $D(100) = 12000 - 50 \cdot 100 = 7000$
3. $D(120) = 12000 - 50 \cdot 120 = 6000$
4. *U postocima, potražnja se promijenila za* $\frac{6000-7000}{7000} = -0.1429$ *što daje* -14.29%, *tj., smanjila se za* 14.29%.
5. *Prihod* $R(p) = p \cdot D(p) = p \cdot (12000 - 50p) = 12000p - 50p^2$
6. *Graf funkcije je parabola okrenuta prema dolje, a s obzirom na domenu, graf crtamo na intervalu* $[0, 240]$.



7. *Matematički, treba izračunati koordinate tjemena. Prva koordinata je* $\frac{0+240}{2} = 120$*, a druga* $R(120) = 12000 \cdot 120 - 50 \cdot 120^2 = 720000$*. Dakle, za cijenu* 120 *kuna ostvaruje se maksimalan prihod* 720000.

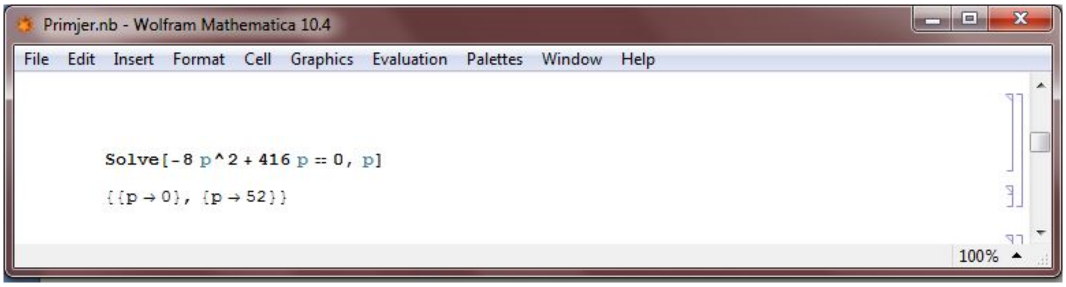
Primjer 2.24 *Promatramo monopolsko poduzeće koje proizvodi kekse. Funkcija potražnje je zadana kao* $Q(p) = -8p + 416$*, gdje je* Q *količina potražnje, a* p *jedinična cijena.*

1. *Izrazite funkciju ukupnog prihoda u ovisnosti o cijeni. Što je graf te funkcije?*
2. *Izračunajte nul-točke funkcije i komentirajte.*
3. *Izračunajte cijenu uz koju se ostvaruje maksimalan prihod.*
4. *Izrazite funkciju ukupnog prihoda u ovisnosti o količini proizvoda. Što je graf te funkcije?*
5. *Izračunajte nul-točke te funkcije i komentirajte.*
6. *Izračunajte količinu uz koju se ostvaruje maksimalan prihod i komentirajte u vezi s rezultatom iz zadatka (3).*

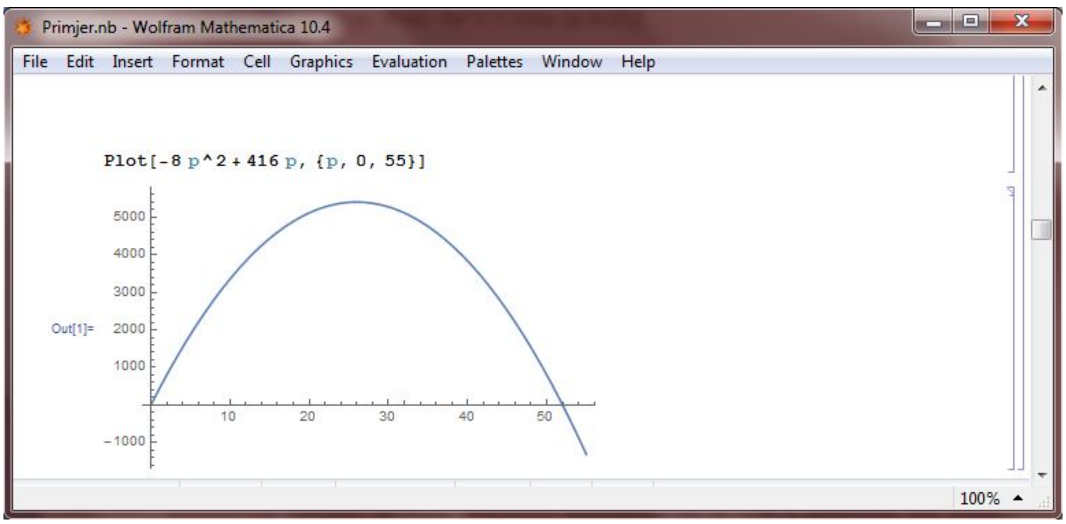
Rješenje.

1. *Ukupan prihod je jednak umnošku jedinične cijene i količine potražnje. Označimo li ukupan prihod s* R*, tada je funkcija ukupnog prihoda u ovisnosti o cijeni dana izrazom:*
   $R(p) = p \cdot Q(p) = p \cdot (-8p + 416) = -8p^2 + 416p$.
   Primijetimo da se radi o kvadratnoj funkciji. Skiciramo li je grafički (uzimajući u obzir da je cijena $p \geq 0$ *i* $R(0) = 0$*) u koordinatnom sustavu* (p, R)*, dobit ćemo parabolu okrenutu prema dolje. Trebamo izračunati koordinate nul-točaka i vrha parabole.*

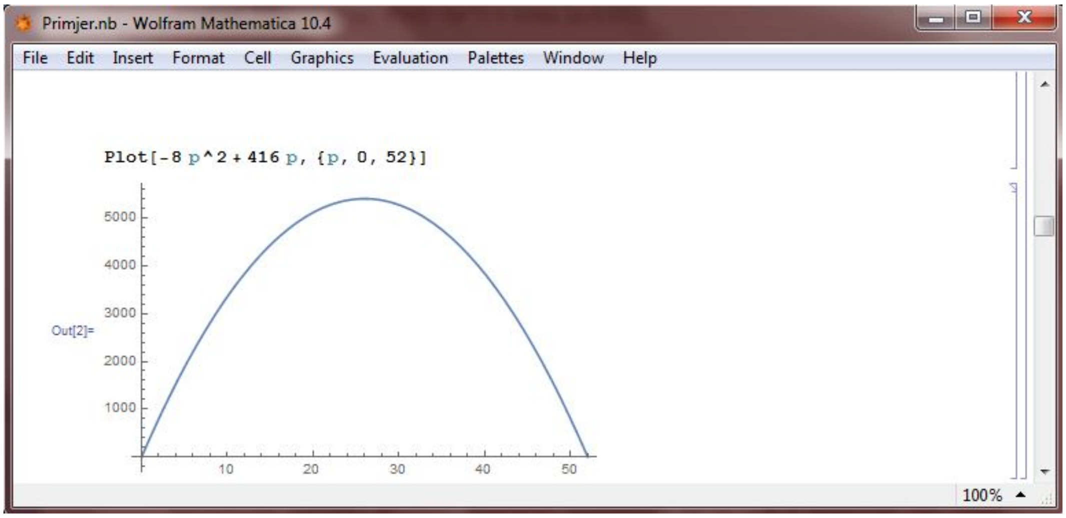
2. *Nul-točke dobijemo iz jednadžbe* $R(p) = -8p^2 + 416p = 0$. *Riješimo li tu jednadžbu, slijedi da je prihod jednak nuli ako je:*
   $-8p^2 + 416p = 0$
   $8p \cdot (-p + 52) = 0$
   $\Rightarrow p_1 = 0, p_2 = 52.$
   Točke $(0,0)$ *i* $(52,0)$ *su nul-točke parabole, tj., točke u kojima parabola siječe os apscisa.*



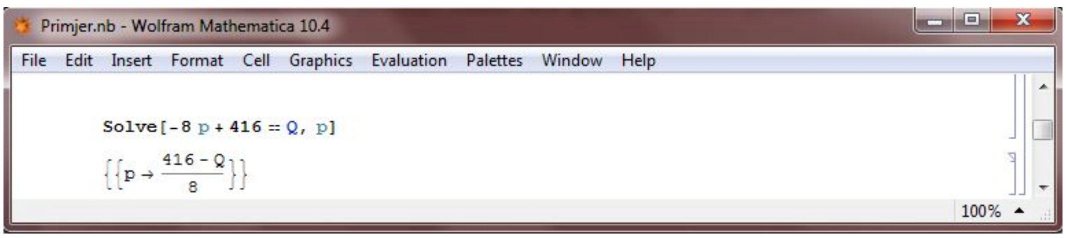
3. *Budući da je graf funkcije parabola okrenuta prema dolje, uočavamo da najprije s porastom cijene, prihod raste, ostvaruje neku svoju maksimalnu vrijednost i nakon toga, s porastom cijene pada. Općenito, neka je kvadratna funkcija zadana izrazom* $f(x) = ax^2 + bx + c$. *Za* $a < 0$, *graf funkcije je parabola okrenuta prema dolje i maksimalna se vrijednost ostvaruje za* $x = -\frac{b}{2a}$. *Za* $a > 0$, *graf funkcije je parabola okrenuta prema gore i minimalna se vrijednost ostvaruje za* $x = -\frac{b}{2a}$. *Dakle, u našem se slučaju radi o paraboli okrenutoj prema dolje, maksimalna se vrijednost prihoda ostvaruje za cijenu* $p = -\frac{416}{2\cdot(-8)} = 26$ *i iznosi* $R(26) = -8(26)^2 + 416 \cdot 26 = 5408$. *Graf funkcije je sada:*



Točke $(0,0)$ *i* $(52,0)$ *su nul-točke parabole, tj., točke u kojima parabola siječe os apscisa. Budući da je prihod veličina koja je uvijek veća ili jednaka od nule (kažemo da je prihod nenegativna veličina), možemo ekonomski komentirati da se radi o proizvodu čija cijena pripada intervalu* $[0, 52]$. *Znači, graf zapravo treba crtati na intervalu od nule do 52.*



4. *Kao što smo već rekli, ukupan je prihod jednak umnošku jedinične cijene i količine potražnje. Budući da sad ukupan prihod moramo izraziti kao funkciju količine proizvoda koja se potražuje, pišemo:* $R(Q) = p \cdot Q$.
Iz izraza na desnoj strani moramo eliminirati varijablu p*. To ćemo učiniti tako da je izrazimo u ovisnosti o količini potražnje. Znamo da je* $Q(p) = -8p + 416$*, pa slijedi:*
$Q = -8p + 416$
$-8p = Q - 416$
$p = -\frac{1}{8}Q + 52$

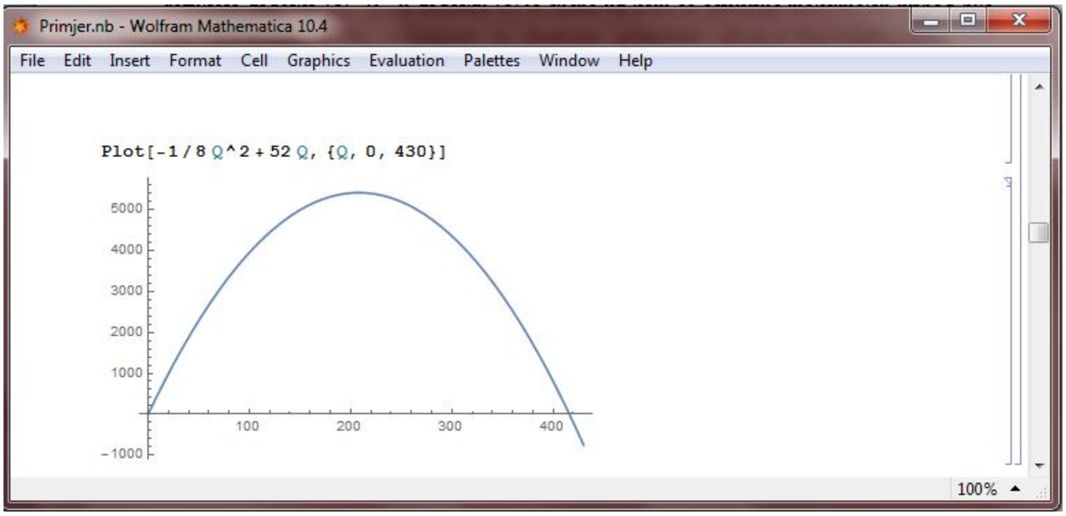


Sad je ukupan prihod jednak $R(Q) = p \cdot Q = \left(-\frac{1}{8}Q + 52\right) \cdot Q = -\frac{1}{8}Q^2 + 52Q$.
Dakle, ukupan prihod u ovisnosti o količini proizvoda koji se potražuje je dan izrazom: $R(Q) = -\frac{1}{8}Q^2 + 52Q$.
Primijetimo da je to kvadratna funkcija čiji je graf parabola okrenuta prema dolje (jer je $-\frac{1}{8} < 0$*). Trebamo izračunati koordinate nul-točaka i vrha parabole.*

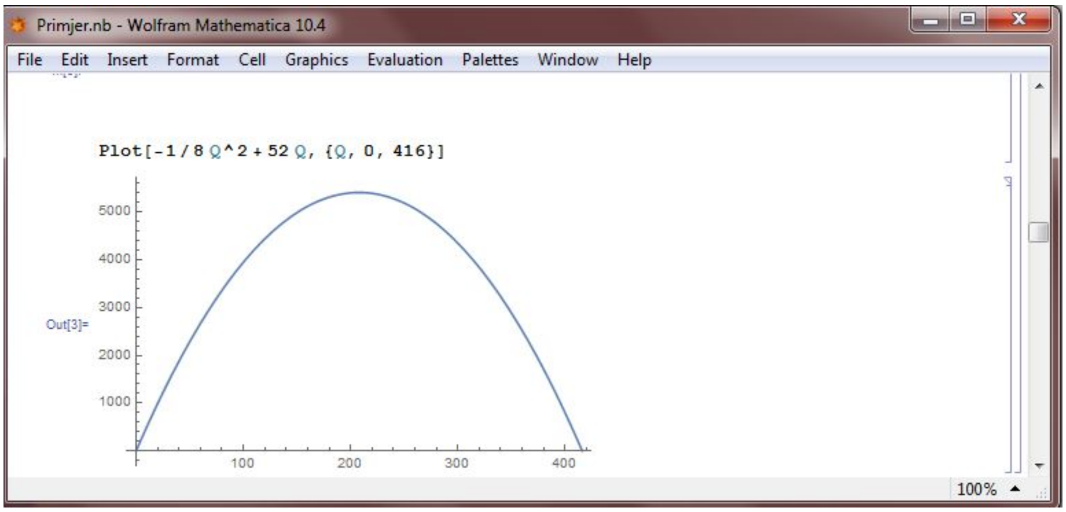
5. *Nul-točke dobijemo iz jednadžbe* $R(Q) = -\frac{1}{8}Q^2 + 52Q = 0$*. Riješimo li tu jednadžbu, slijedi da je prihod jednak nuli ako je:*
$-\frac{1}{8}Q^2 + 52Q = 0$
$Q \cdot \left(-\frac{1}{8}Q + 52\right) = 0$
$\Rightarrow Q_1 = 0, Q_2 = 416$
Točke $(0,0)$ *i* $(416,0)$ *su nul-točke parabole, tj., točke u kojima parabola siječe os apscisa.*

6. *U našem se slučaju radi o paraboli okrenutoj prema dolje, pa se maksimalna vrijednost prihoda ostvaruje za količinu* $Q = -\frac{52}{2\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)} = 208$ *i iznosi* $R(208) = -\frac{1}{8}(208)^2 + 52 \cdot 208 = 5408$.

Usporedimo li ovaj rezultat s rezultatom zadatka (3), primjećujemo da smo dobili istu vrijednost. Dakle, zadatak (6) smo mogli riješiti pomoću rezultata zadatka (3). U zadatku (3) je cijena uz koju se ostvaruje maksimalan prihod bila 26*. Uvrstimo li tu vrijednost u funkciju potražnje* $Q(p) = -8p + 416$*, dobivamo* $Q(26) = -8 \cdot 26 + 416 = 208$*. Znači, količina proizvoda uz koju se ostvaruje maksimalan prihod je* 208*. U koordinatnom sustavu* (Q, R) *grafički prikaz izgleda ovako:*



Točke $(0, 0)$ *i* $(416, 0)$ *su nul-točke parabole, tj., točke u kojima parabola siječe os apscisa. Budući da je prihod nenegativna veličina, možemo ekonomski komentirati da se radi o tržištu gdje se količina promatrane potražnje kreće u granicama intervala* $[0, 416]$*. Znači, graf zapravo treba crtati na intervalu od nule do* 416*.*



Primjer 2.25 *Za jedno je poduzeće zadana funkcija ukupnog prihoda* $R(Q) = 1200Q - 10Q^2$ *i funkcija ukupnih troškova* $C(Q) = 200Q + 21000$*, gdje je* Q *količina proizvodnje.*

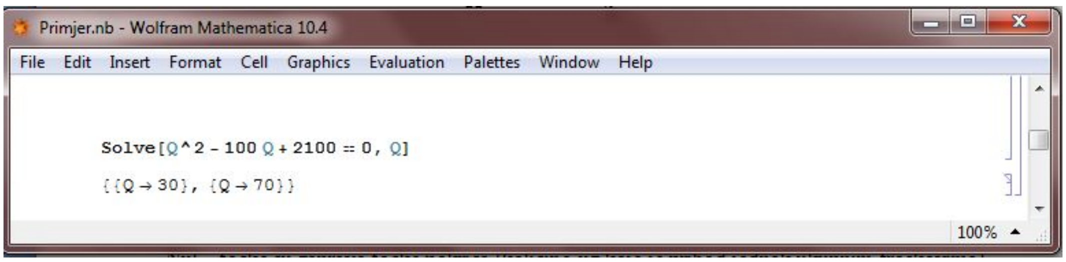
1. *Izrazite funkciju dobiti* $D(Q)$ *za to poduzeće.*

2. *Izračunajte nul-točke funkcije dobiti i komentirajte.*

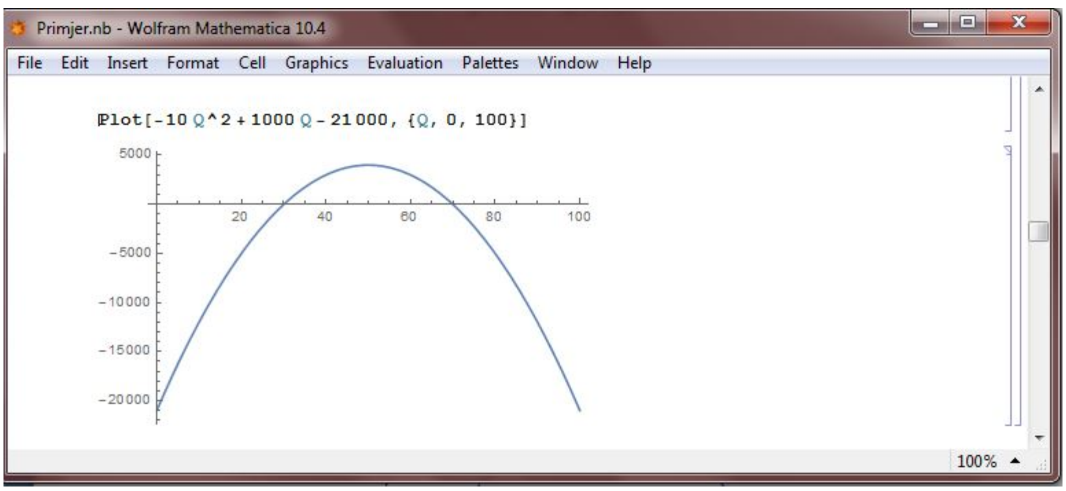
3. *Izračunajte uz koju se količinu proizvodnje ostvaruje maksimalna dobit i koliko ona iznosi.*
4. *Grafički prikažite funkciju dobiti u koordinatnom sustavu* (Q, D).

Rješenje.

1. *Općenito, dobit je jednaka razlici ukupnog prihoda i ukupnih troškova. Matematički,* $D(Q) = R(Q) - C(Q)$. *Dakle,* $D(Q) = R(Q) - C(Q) = 1200Q - 10Q^2 - (200Q + 21000) = -10Q^2 + 1000Q - 21000$
   tj., funkcija dobiti je $D(Q) = -10Q^2 + 1000Q - 21000$.
   Graf funkcije je parabola okrenuta prema dolje. Trebamo izračunati koordinate nul-točaka i vrha parabole.
2. *Nul-točke dobijemo kao rješenja kvadratne jednadžbe* $D(Q) = -10Q^2 + 1000Q - 21000 = 0$. *Nakon dijeljenja s* (-10), *slijedi da je:* $Q^2 - 100Q + 2100 = 0$
   $Q_{1,2} = \frac{100 \pm \sqrt{100^2 - 4 \cdot 2100}}{2}$
   $Q_1 = 70, Q_2 = 30$



   Nultočke su zapravo točke pokrića (količine uz koje je prihod jednak ukupnim troškovima).
3. *U našem se slučaju radi o paraboli okrenutoj prema dolje, pa se maksimalna vrijednost dobiti ostvaruje za količinu* $Q = -\frac{1000}{2 \cdot (-10)} = 50$ *i iznosi* $R(50) = -10 \cdot 50^2 + 1000 \cdot 50 - 21000 = 4000$.
4. *Graf funkcije*



   Dakle, za $Q \in [0, 30)$ *i za* $Q \in (70, \infty)$, *dobit je negativna, dok je za* $Q \in (30, 70)$ *dobit pozitivna. Za* $Q = 30$ *i za* $Q = 70$, *dobit je jednaka nuli što znači da je za te vrijednosti proizvodnje ukupan prihod jednak ukupnim troškovima (točke pokrića).*

Kad je dobit negativna, poduzeće posluje neprofitabilno (ukupan je prihod manji od ukupnih troškova), a kad je dobit pozitivna, poduzeće posluje profitabilno (ukupan je prihod veći od ukupnih troškova). Također, kad kažemo da je $Q \in (70, \infty)$ ne znači da je proizvodnja beskonačno velika već ta definicija velike proizvodnje ovisi o ekonomskom kontekstu. Na primjer, ako je u pitanju brodogradilište, proizvodnja od tisuću brodova godišnje je vjerojatno vrlo velika proizvodnja. No, ako je u pitanju tvornica pića, proizvodnja od tisuću litara godišnje vjerojatno nije velika proizvodnja.

Primjer 2.26 *U modelu tržišta s jednim proizvodom količina ponude iznosi $S(p) = -100 + 2p^2$, a količina potražnje $D(p) = 300 - 2p^2$, pri čemu je p jedinična cijena tog proizvoda.*

1. *Za koje cijene ovaj model tržišta ima ekonomskog smisla?*

2. *Komentirajte monotonost funkcija ponude i potražnje.*

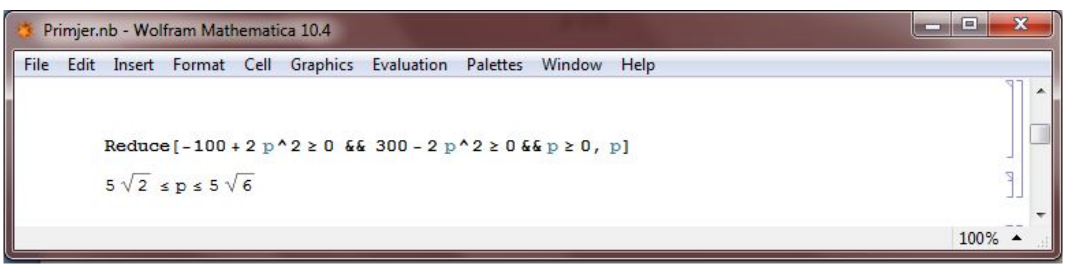
3. *Odredite ravnotežnu cijenu i količinu proizvoda.*

4. *U istom koordinatnom sustavu grafički prikažite funkcije ponude i potražnje. Odredite ravnotežnu cijenu i količinu na tom tržištu. (Napomena: pri grafičkom prikazivanju funkcija pazite na interval smislenih cijena.)*

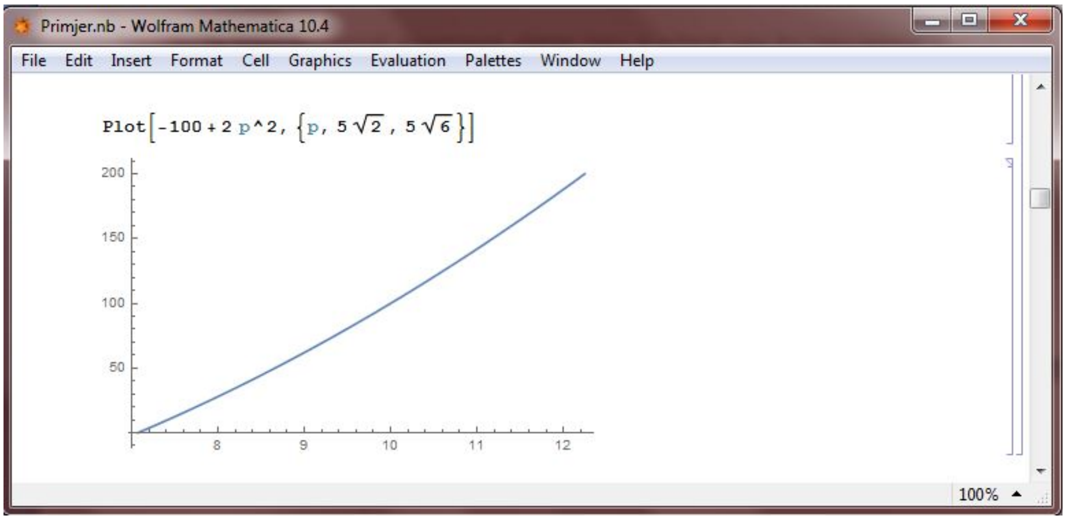
5. *Definirajte funkciju zaliha kod proizvođača. Ekonomski komentirajte u ovisnosti o ravnotežnoj cijeni.*

Rješenje.

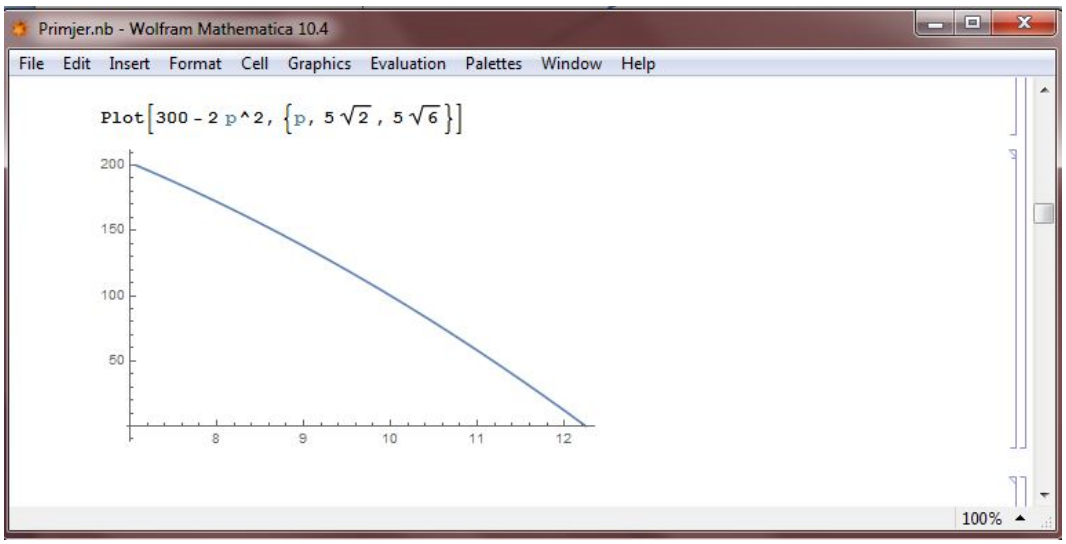
1. *Model ima ekonomskog smisla za cijene za koje je $S(p) \geq 0$ i $D(p) \geq 0$, s tim da moramo uzeti u obzir i činjenicu da je cijena nenegativna, tj., $p \geq 0$. Matematički, moramo riješiti sustav nejednadžbi:*
   $-100 + 2p^2 \geq 0$
   $300 - 2p^2 \geq 0$
   $p \geq 0$
   Iz prve nejednadžbe slijedi da je $2p^2 \geq 100$, tj. $p^2 \geq 50$. Matematički, rješenje ove nejednadžbe je skup $\{p \in R : p \leq -\sqrt{50} \text{ ili } p \geq \sqrt{50}\}$.
   Također, iz druge nejednadžbe dobivamo $300 \geq 2p^2$, tj., $p^2 \leq 150$. Matematički, rješenje ove nejednadžbe je skup $\{p \in R : -\sqrt{150} \leq p \leq \sqrt{150}\}$. Presjek ovih skupova zajedno s uvjetom da je $p \geq 0$ jednak je skupu $\{p \in R : \sqrt{50} \leq p \leq \sqrt{150}\}$. Dakle, model je definiran za cijene iz intervala $[7.07, 12.25]$.

2. *Da bismo komentirali monotonost, olakšat ćemo si zadatak tako što ćemo nacrtati grafove ovih funkcija za cijene iz intervala* $[7.07, 12.25]$. *Ponuda je* $S(p) = -100 + 2p^2$.



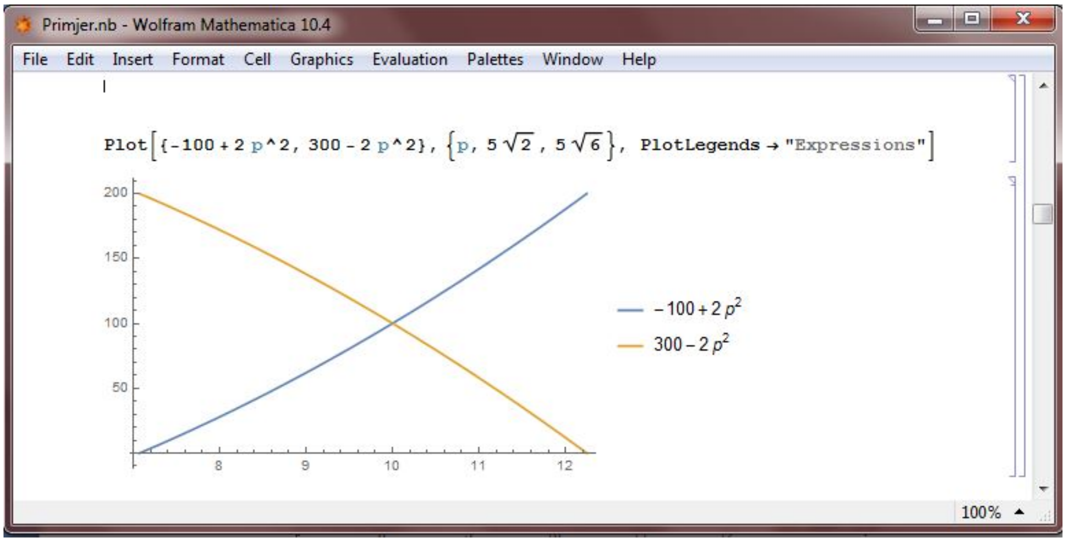
Funkcija ponude raste s porastom cijene na intervalu za koji je model ekonomski definiran. Potražnja je $D(p) = 300 - 2p^2$.



Funkcija potražnje pada s porastom cijene na intervalu za koji je model ekonomski definiran.

3. *Ravnotežna cijena i količina određuju se iz uvjeta čišćenja tržišta. Dakle, iz uvjeta da je* $S(p) = D(p)$. *Slijedi da je ravnotežna cijena:*
   $-100 + 2p^2 = 300 - 2p^2$
   $4p^2 = 400$
   $p^2 = 100$
   $p = 10$
   Ravnotežna količina je $S(10)$ *ili* $D(10)$. *Neka je* $S(10) = -100 + 2 \cdot 10^2 = 100$. *Dakle, ravnotežna cijena je* 10, *a ravnotežna količina je* 100.

4. *Graf funkcija*



Ravnoteža je uređeni par $(10, 100)$.

5. *Zalihe se definiraju kao razlika ponude i potražnje, tj., zalihe su jednake* $S(p) - D(p)$. *U našem je slučaju:*
   $S(p) - D(p) = -100 + 2p^2 - (300 - 2p^2) = 4p^2 - 400$
   Kod ravnotežne cijene $p = 10$, *zalihe su jednake* 0. *Ukoliko je cijena manja od svoje ravnotežne vrijednosti, zalihe su negativne što znači da na tržištu postoji višak potražnje za proizvodom. Ukoliko je cijena veća od svoje ravnotežne vrijednosti, zalihe su pozitivne što znači da proizvođač ne može prodati sve što proizvede.*

Primjer 2.27 *Zadana je funkcija ukupnih troškova jednog poduzeća u ovisnosti o količini proizvodnje* $C(Q) = Q^3 - 2Q^2 + 2Q$ *gdje je* Q *količina proizvodnje, a* $C(Q)$ *ukupni troškovi da bi se ta količina proizvela.*

1. *Izračunajte fiksne troškove.*
2. *Izračunajte varijabilne troškove.*
3. *Izvedite funkciju prosječnih troškova.*
4. *Grafički prikažite funkciju prosječnih troškova.*
5. *Koliko poduzeće treba proizvoditi da bi prosječni troškovi proizvodnje bili minimalni? Koliki su ti minimalni prosječni troškovi?*

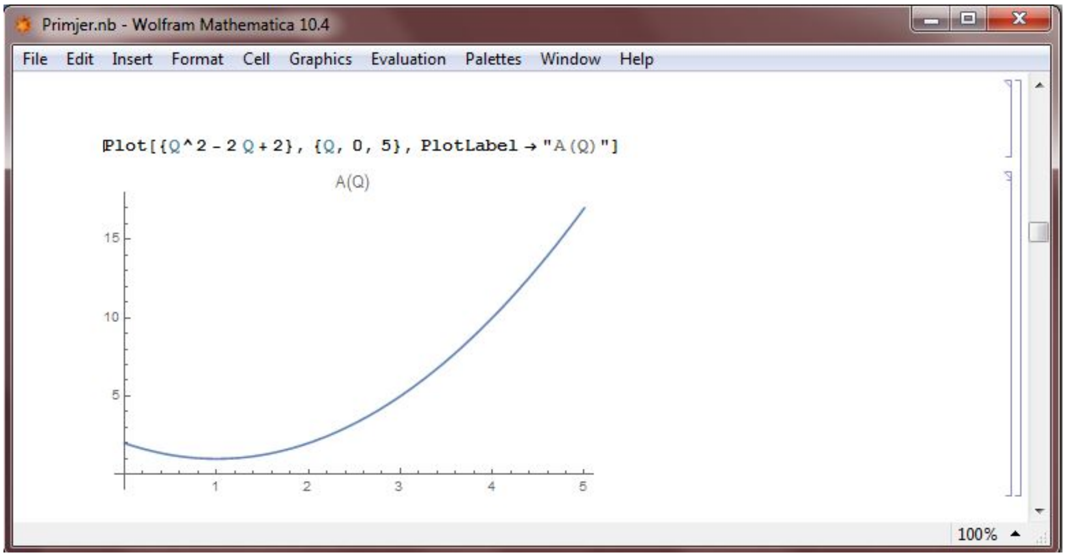
Rješenje.

1. *Fiksni troškovi su troškovi koji postoje i kad nema proizvodnje. Matematički, fiksni troškovi su jednaki* $C(0)$. *U našem slučaju,* $C(0) = 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 = 0$. *Zaključujemo da fiksnih troškova nema. Ili, u praksi to može značiti da su fiksni troškovi toliko mali da ih možemo zanemariti. Također, troškovi proizvodnje mogu biti kratkoročni i dugoročni. Kratkoročni troškovi uključuju varijabilne i fiksne troškove, dok dugoročni troškovi uključuju samo varijabilne troškove.*

2. *Varijabilni troškovi su jednaki razlici ukupnih i fiksnih troškova. Matematički, varijabilni troškovi su jednaki* $C(Q) - C(0) = (Q^3 - 2Q^2 + 2Q) - 0 = Q^3 - 2Q^2 + 2Q$.

3. *Prosječni troškovi se dobiju tako da se ukupni troškovi podijele s količinom proizvodnje. Dakle, prosječni troškovi su jednaki:* $AC(Q) = \frac{C(Q)}{Q} = \frac{Q^3-2Q^2+2Q}{Q} = \frac{Q(Q^2-2Q+2)}{Q} = Q^2 - 2Q + 2$

4. *Graf crtamo u Wolframovoj Mathematici uzimajući u obzir činjenicu da je količina proizvodnje* Q *nenegativna (veća ili jednaka od nule) veličina.*



5. *Matematički, trebamo odrediti količinu proizvodnje uz koju se ostvaruje minimalna vrijednost kvadratne funkcije. Dakle, treba odrediti koordinate tjemena parabole, a tjeme je točka* $T(1,1)$*. Prva koordinata predstavlja količinu proizvodnje uz koju se ostvaruju minimalni prosječni troškovi, a druga koordinata predstavlja te minimalne prosječne troškove.*

Primjer 2.28 *Lopta je bačena sa zemlje* ($y = 0$) m *vertikalno prema gore početnom brzinom* 10 m/s *(zanemarite silu otpora,* $g = 10$ m/s^2*). Odredite:*

1. *grafičku ovisnost brzine* $v(t)$ *i položaja* $y(t)$ *lopte o vremenu* t

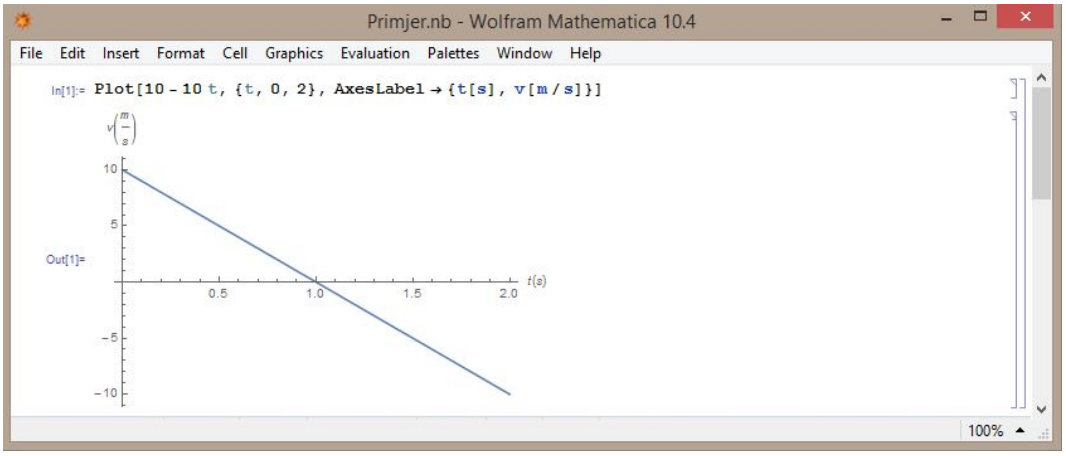
2. *najveću visinu koju će lopta doseći*

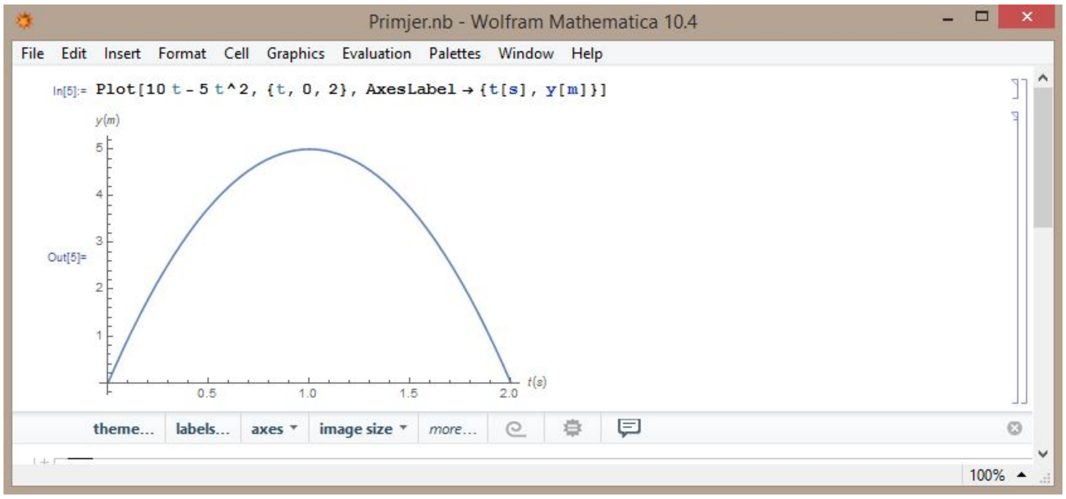
3. *nakon koliko će vremena lopta pasti na zemlju.*

Rješenje.

Vertikalni hitac prema gore je složeno gibanje koje se sastoji od jednolikog gibanja po pravcu i istovremenog slobodnog padanja lopte. Brzina gibanja je :$v(t) = v_0 - gt$*, a položaj tijela:* $y(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$.

1. *Ovisnost brzine o vremenu je linearna funkcija, koeficijent smjera pravca je* $-g$*, dok je ovisnost položaja lopte o vremenu parabola* ($v_0 = 10$ m/s).





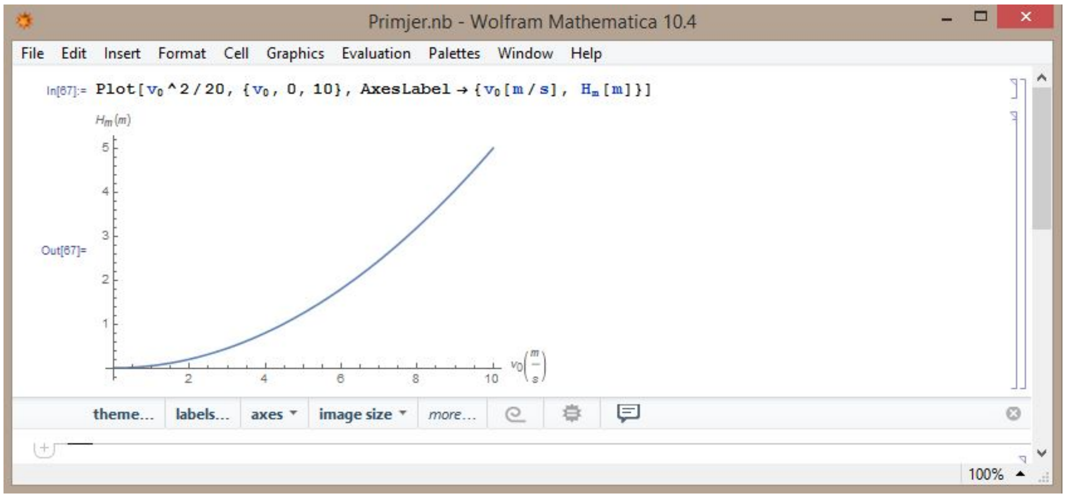
2. *Najveću visinu* $H_m = 5$ m *lopta će doseći nakon* 1 *sekunde (tjeme parabole).*

3. *Iz grafičkog prikaza* $y(t)$ *se vidi da će lopta pasti na zemlju nakon* 2 *sekunde.*

Primjer 2.29 *Odredite grafičku ovisnost* $H_m(v_0)$ *najveće visine koju može doseći lopta bačena vertikalno uvis o početnoj brzini lopte* v_0. *Pretpostavite da se početna brzina mijenja u intervalu* $(0-10)$ m/s *(zanemarite silu otpora,* $g = 10$ m/s^2*).*

Rješenje.

Brzina gibanja lopte je $v(t) = v_0 - gt$, *a položaj:* $y(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$. *U trenutku* t_m *kada dosegne najveću visinu brzina lopte je nula, nakon toga lopta slobodno pada prema zemlji. Brzina lopte je* $v(t_m) = v_0 - gt_m = 0$ *pa je vrijeme potrebno da se dosegne najveća visina* $t_m = \frac{v_0}{g}$. *U tom trenutku* $y(t_m) = H_m = v_0 t_m - \frac{1}{2}gt_m^2 = \frac{v_0^2}{2g}$. *Grafički prikaz funkcije* $H_m(v_0) = \frac{v_0^2}{2g}$ *je parabola.*



Primjer 2.30 *Čestica se giba u horizontalnoj ravnini $\langle xy \rangle$. U trenutku $t = 0$ sekundi nalazi se u točki $(0, 0)$ i ima početnu brzinu 12 cm/s u smjeru x osi. Istovremeno na česticu djeluje ubrzanje u y smjeru od 3 cm/s^2. Odredite:*

1. *putanju čestice u $\langle xy \rangle$ ravnini u prvih 10 sekundi gibanja*

2. *pomak čestice od ishodišta nakon 10 sekundi*

3. *iznos i smjer brzine čestice nakon 10 sekundi*

Rješenje.

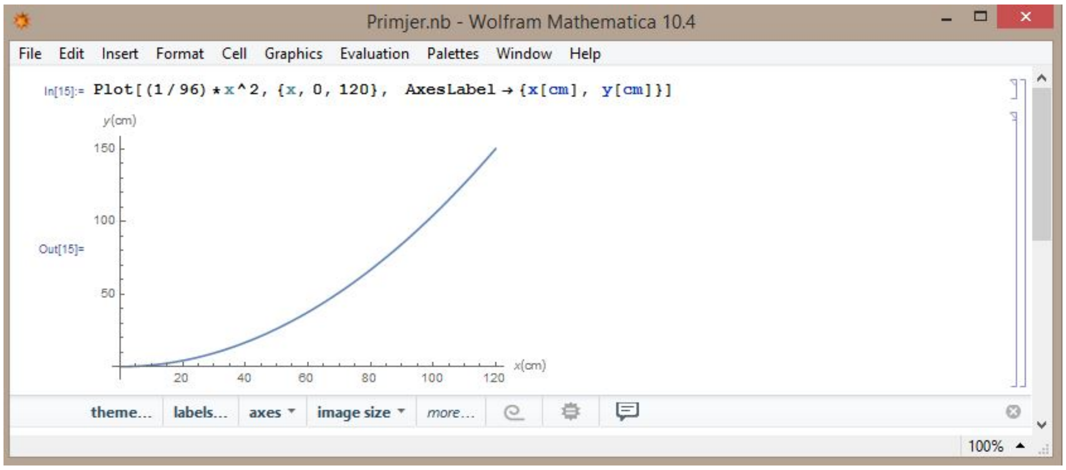
1. *Gibanje čestice je jednoliko ubrzano pa za gibanje u smjeru x osi vrijedi*

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2,$$

a za gibanje u smjeru y osi vrijedi

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2.$$

Uvrštavanjem zadanih vrijednosti: $x_0 = 0$ cm, $v_{0x} = 12$ cm/s, $a_x = 0$ cm/s^2, $y_0 = 0$, $v_{0y} = 0$ cm/s, $a_y = 3$ cm/s^2 *dobijemo relacije:* $x = v_{0x}t = 12t$ cm/s *i* $y = \frac{3}{2}t^2$ cm/s^2, *što je parametarski zadana funkcija. Eliminiramo* t, $y = \frac{3}{2}t^2 = \frac{3}{2}\left(\frac{x}{12}\right)^2 = \frac{x^2}{96}$ *i crtamo grafički prikaz putanje čestice.*



2. *Pomak čestice od ishodišta nakon* 10 *sekundi određen je s* $\sqrt{x(10)^2 + y(10)^2} = \sqrt{120^2 + 150^2} =$ 192 cm.

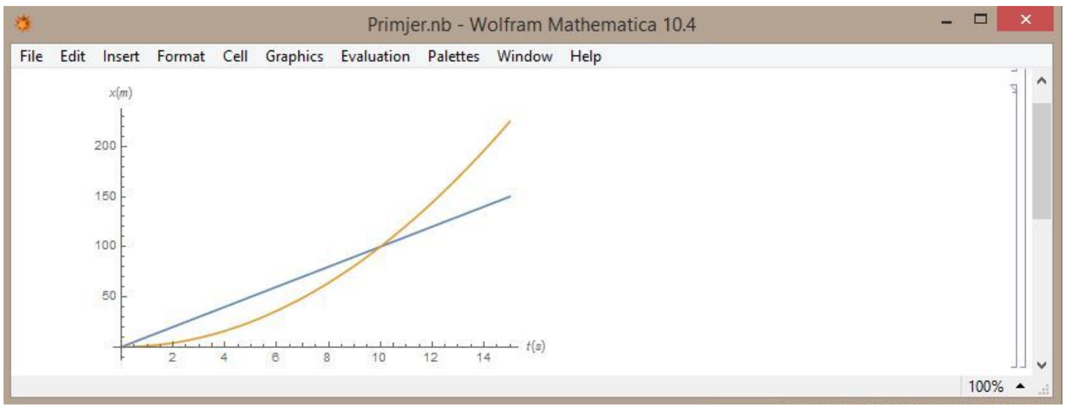
3. *Komponente brzine čestice su :* $v_x = v_{0x}$ *i* $v_y = a_y t$.
Nakon 10 *sekundi gibanja* $v_x = 12$ cm/s *i* $v_y = 30$ cm/s.
Iznos brzine je $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{12^2 + 30^2} = 32.3$ cm/s.
Smjer brzine određen je kutom između vektora brzine i x *osi:*
$\tan\vartheta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{30}{12} = 2.5$, $\vartheta = 68.2°$.

Napomena. Ovaj primjer se može ostaviti i za poglavlje o vektorima.

Primjer 2.31 *Motor je krenuo iz mirovanja stalnim ubrzanjem* 2 m/s^2. *U istom trenutku krenuo je i kamion stalnom brzinom od* 10 m/s. *Iz grafa odredite:*

1. *na kojoj će udaljenosti motor preteći kamion, u kojem trenutku će se to desiti*

2. *koliko će tada iznositi brzina motora?*

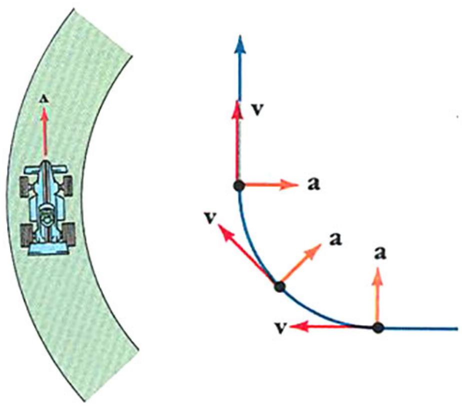


Rješenje.

1. *Iz grafičke ovisnosti puta o vremenu može se očitati da će motor stići kamion* 10 *sekundi nakon početka gibanja na udaljenosti* 100 *metara od početnog položaja.*

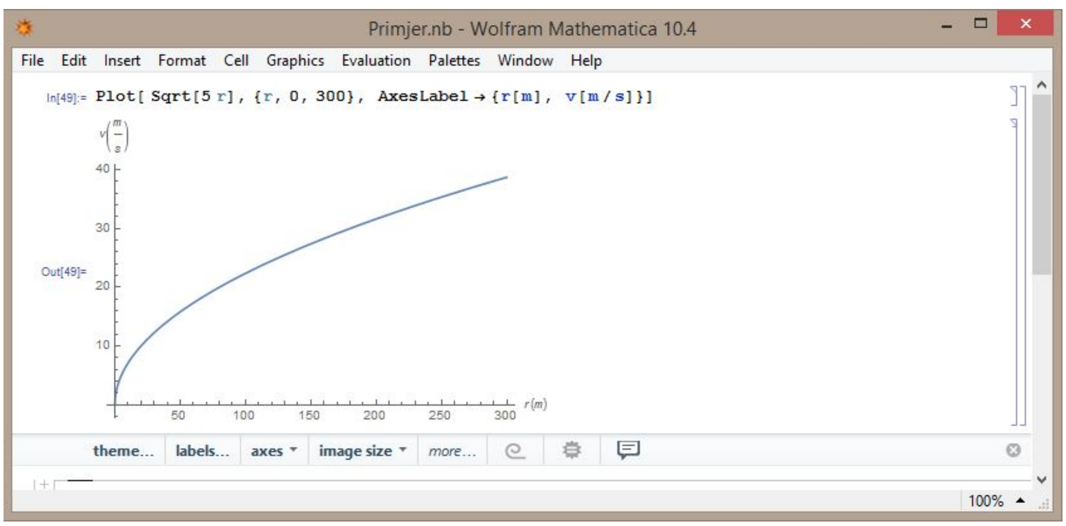
2. brzina $v = at$, $v = 20$ m/s.

Primjer 2.32 *Marko je vozio automobil velikom brzinom, no da bi savladao zavoj morao je usporiti. Automobil će savladati zavoj ako je centripetalna sila jednaka sili trenja:* $\frac{mv^2}{r} = \mu mg$*. Grafički prikažite ovisnost najveće brzine kojom Marko može voziti automobil u zavoju u ovisnosti o polumjeru zavoja ako je koeficijent trenja između kotača i ceste* 0.5*. Polumjer zavoja može se mijenjati od* 100 *metara do* 300 *metara,* $g = 10$ m/s.

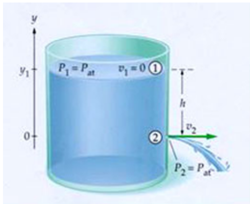


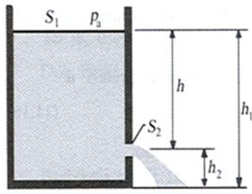
Rješenje.

Ako je centripetalna sila jednaka sili trenja $\frac{mv^2}{r} = \mu mg$ *ovisnost brzine o polumjeru zavoja je* $v = \sqrt{\mu g r}$, $v_2 = \sqrt{5r}$.



Primjer 2.33 *Otvoreni spremnik s vodom napunjen je do visine* $h_1 = 5$ *metara. Na stijenci spremnika se na visini* h_2 *od dna spremnika nalazi mali otvor.*





Primjenom Bernoullijeve jednadžbe za presjeke S_1 i S_2 odredite:

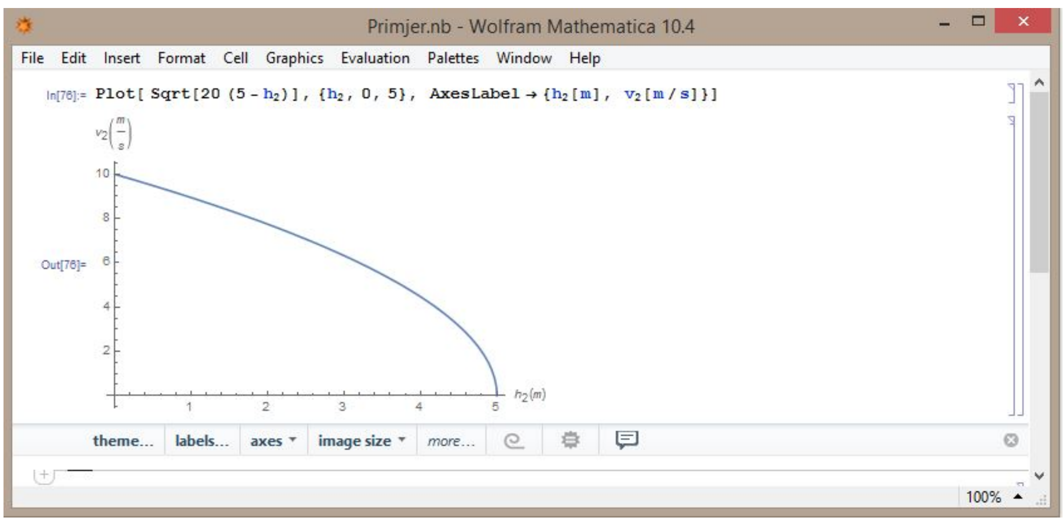
1. *ovisnost brzine istjecanja tekućine kroz otvor na stijenci o visini otvora h_2 (nacrtajte graf)*

2. *ovisnost horizontalnog dometa vode D o visini otvora h_2 (nacrtajte graf)*

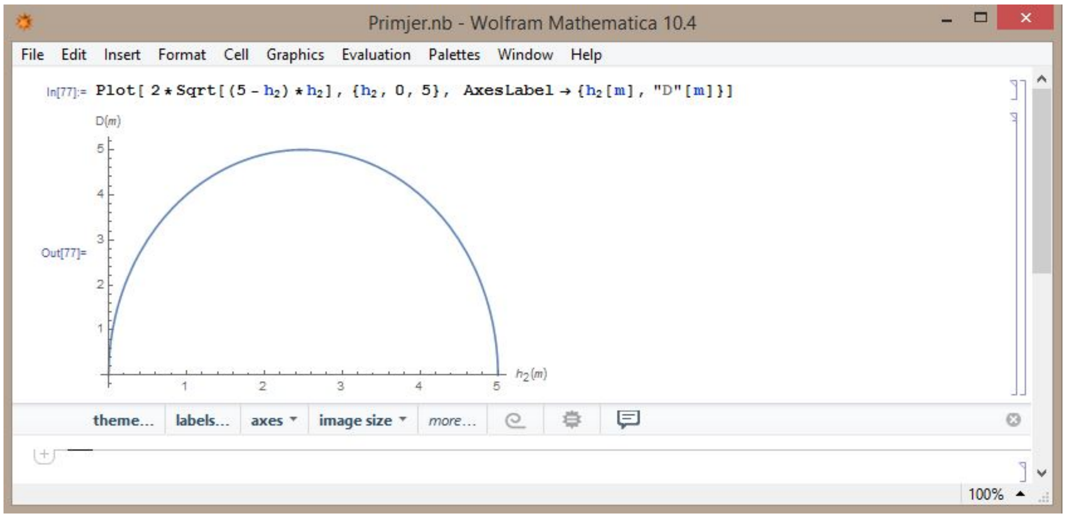
3. *za koju vrijednost h_2 će domet biti najveći.*

Uputa.
Za protjecanje tekućine vrijedi Bernoullijeva jednadžba: $p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$ *, gdje je p statički tlak, $\rho g h$ hidrostatski, a $\frac{1}{2}\rho v^2$ dinamički tlak. Na presjeku S_1 tlak p_1 je atmosferski, a brzina v_1 je zanemariva, a na presjeku S_2 tlak p_2 je također atmosferski, a brzina istjecanja v_2.*
Rješenje.

1. *Brzina istjecanja* $v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$, *uzmimo* $g = 10 \text{ m/s}^2$, $v_2 = \sqrt{20(5 - h_2)}$



2. *Horizontalni domet je horizontalna udaljenost od spremnika do mjesta na kojem voda pada na zemlju* $D = v_2 \cdot t$, *t je vrijeme potrebno vodi da padne s visine* $t = \sqrt{\frac{2h_2}{g}}$.
$D = 2\sqrt{(h_1 - h_2) \cdot h_2}$
$D = 2\sqrt{(5 - h_2) \cdot h_2}$



3. *Iz grafa se vidi da je najveći domet za* $h_2 = \frac{h_1}{2} = 2.5$ m.

2.3 Modeliranje eksponencijalnom funkcijom

Primjer 2.34 *Dogodilo se ubojstvo i na teren je izašla policijska ekipa za očevid. Temperatura tijela ubijenog tada je iznosila* 26.5°C. *Dva sata poslije temperatura tijela žrtve iznosila je* 24.5°C. *U sobi je temperatura konstantna i iznosi* 20°C.

1. *Odredite jednadžbu za hlađenje tijela nakon smrti u obliku* $T(t) = T_{okoline} + (T_{početna} - T_{okoline}) \cdot e^{-k \cdot t}$.

2. *Uz pretpostavku da je temperatura tijela prije smrti bila* 36.5°C, *odredite vrijeme smrti.*

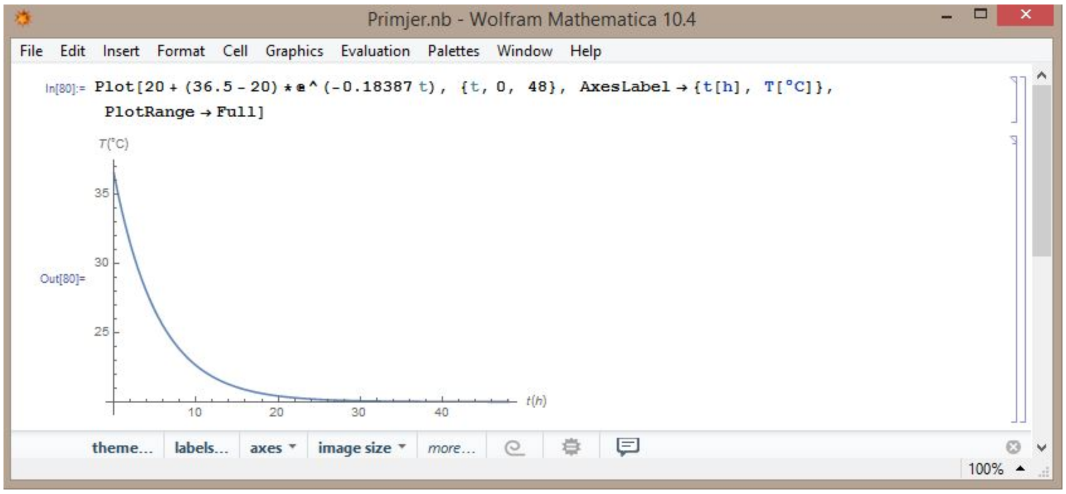
3. *Nacrtajte graf funkcije i odredite domenu i sliku funkcije. Komentirajte rast/pad funkcije i presjek grafa s osi ordinata.*

Rješenje.

1. *Uvrštavanjem u jednadžbu* $T(t) = T_{okoline} + (T_{početna} - T_{okoline}) \cdot e^{-k \cdot t}$ *dobivamo*
   $24.5 = 20 + (26.5 - 20) \cdot e^{-k \cdot 2}$.
   $0.6923 = e^{-k \cdot 2}$
   $\ln 0.6923 = -2k$
   $k = 0.18387 \text{ h}^{-1}$
   Dakle hlađenje pri tim uvjetima slijedi zakonitost:
   $T(t) = 20 + (36.5 - 20) \cdot e^{-0.18387 \cdot t}$.

2. *Slijedi postupak određivanja vremena smrti.*
   $24.5 = 20 + (36.5 - 20) \cdot e^{-0.18387 \cdot t}$
   $4.5 = 16.5 \cdot e^{-0.18387 \cdot t}$
   $0.2727 = e^{-0.18387 \cdot t}$
   $\ln 0.2727 = -0.18387 \cdot t$
   $t = 7.07$ h
   Ubojstvo se dogodilo oko 7 sati prije nego što su pronašli tijelo.

3. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, *slika* $\mathcal{R} = \{T \in \mathbb{R} : T > 20\}$.



Primjer 2.35 *Uložili ste* 500 *kuna u banci koja nudi* 5% *kamatne stope godišnje.*

1. *Odredite godišnji faktor rasta investicije. Faktor rasta je broj s kojim se množi početna suma da se dobije suma nakon godine dana.*

2. *Odredite jednadžbu modela rasta investicije.*

3. *Izračunajte koliko treba godina proći da bi se početna investicija udvostručila.*

4. *Nacrtajte graf funkcije i odredite domenu i sliku funkcije. Komentirajte rast/pad funkcije.*

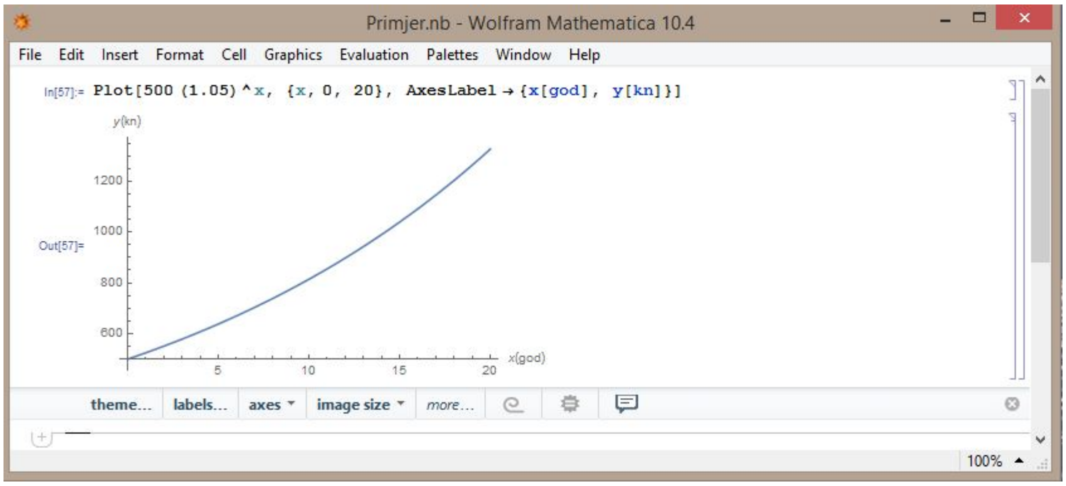
Rješenje.

1. *Faktor rasta iznosi* 1.05.

2. *Jednadžba glasi* $y = ab^x = 500(1.05)^x$.

3. $2 \cdot 500 = 500 \cdot (1.05)^x$
   $2 = 1.05^x$
   $\log 2 \ = \log(1.05)^x$
   $\log 2 \ = \text{x}\log 1.05$
   $\frac{\log 2}{\log 1.05} = x$
   $x = 14.2$
   Nakon otprilike 14 *godina bi se početna investicija udvostručila.*

4. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, *slika je* $\mathbb{R}^+$.



U prvom poglavlju je bio primjer s kamatama, pa smo vidjeli kako se računa ukamaćivanje nakon nekoliko razdoblja. Ako imamo godišnju kamatnu stopu r, nakon n razdoblja početna suma P postaje

$$P(1+r)^n.$$

Kad bi se u kraćim vremenskim razdobljima pripisivala kamata po istoj kamatnoj stopi, nakon godine dana bismo imali veću sumu nego kad se pripisuje samo jednom. Ako pripisujemo kamatu t puta tada je kamatna stopa $\frac{r}{n}$, a ne pripisuje se više n puta, nego $t \cdot n$ puta. Imamo formulu

$$P(1+\frac{r}{n})^{nt}.$$

Primjer 2.36 *Većina banaka obračunava kamate više od jednom godišnje. Kada se kamate obračunavaju n puta godišnje za t godina s kamatnom stopom r, glavnica P raste do iznosa A, što je prikazano sljedećom formulom:*

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

1. *Ako se radi o kontinuiranoj kamati, bez prekida, koristeći računalo odredite provjerite da je novi izraz gornje formule $A = Pe^{rt}$.*

2. *Ako uložite 5000 kuna u banci koja nudi 10% kamate koja se obračunava kvartalno, izračunajte ukupan iznos na kraju desete godine.*

3. *Ako uložite 5000 kuna u banci koja nudi 10% kamate kontinuirano, izračunajte ukupan iznos na kraju desete godine.*

4. *Izračunajte nakon koliko ćete vremena udvostručiti ulog u slučaju da uložite u banku 5000 kuna, ako se kamata pripisuje neprekinuto. Banka daje godišnju kamatu od 10%.*

5. *Nacrtajte na računalu funkcije u podzadacima (3) i (4) i usporedite dobivene grafove.*

Rješenje.

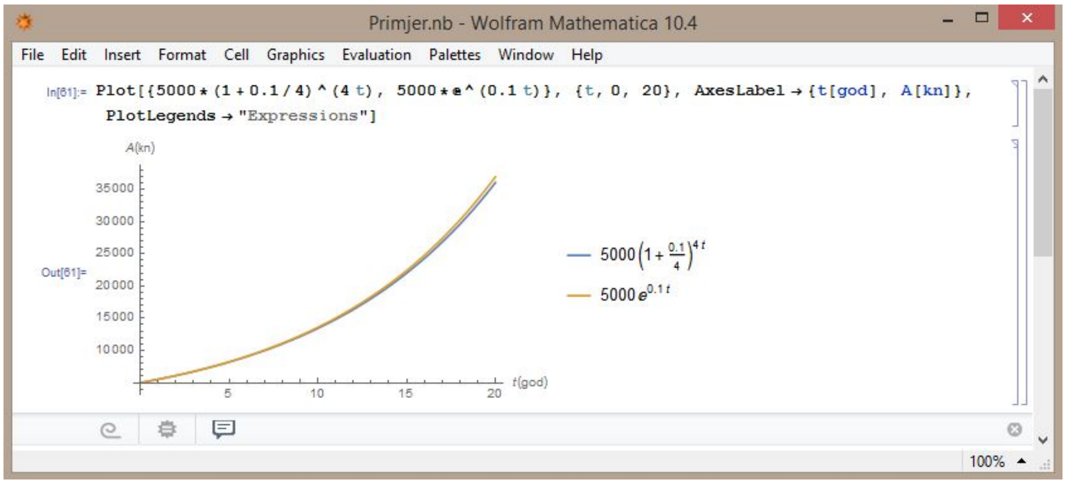
1. *Uvrstite velike n i $P = r = t = 1$, pa provjerite da dobivate približno $A \approx e \approx 2.7$.*

2. $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$
   $A = 5000\left(1 + \frac{0.1}{4}\right)^{4 \cdot 10}$
   $A = 13425.32$ *kuna*

3. $A = Pe^{rt}$
   $A = 5000e^{0.1 \cdot 10}$
   $A = 13591.41$ *kuna*

4. $2P = Pe^{0.1t}$
   $\ln 2 \ = 0.1t$
   $t = 6.93$ *godina*

5. *Graf funkcija*



Primjer 2.37 *Određena vrsta bakterije koja raste na kuhinjskoj radnoj plohi udvostručuje se svakih* 5 *minuta.*

1. *Odredite jednadžbu modela rasta bakterija.*

2. *Uz pretpostavku da razmnožavanje počinje od jedne bakterije, odredite iznos parametra k iz jednadžbe.*

3. *Izračunajte koliko bakterija će biti prisutno nakon* 74 *minute.*

4. *Nacrtajte graf funkcije i odredite domenu i sliku funkcije. Komentirajte rast/pad funkcije.*

Rješenje.

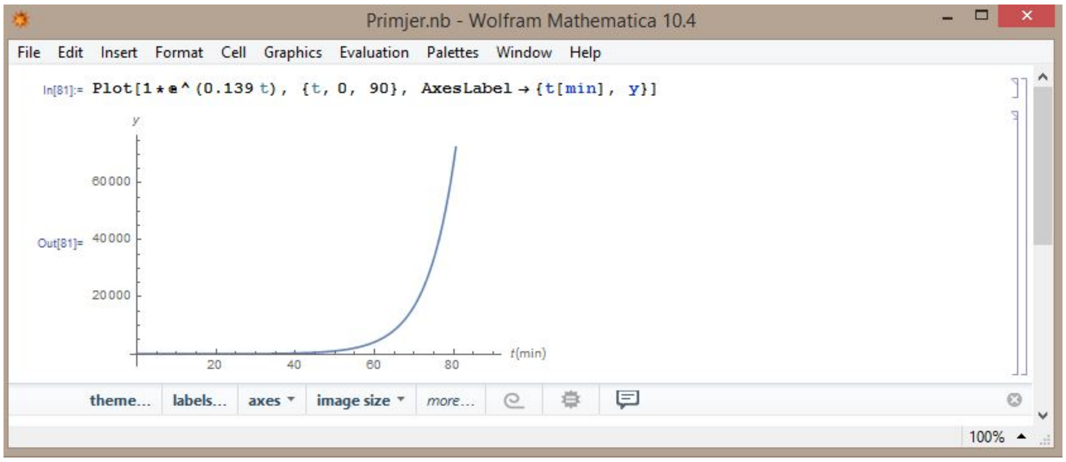
1. *Model je $y = y_0 e^{kt}$, gdje je y_0 broj bakterija u trenutku $t = 0$.*

2. $2 = 1 \cdot e^{k \cdot 5}$
   $\ln 2 \ = \ln e^{5k}$
   $\ln 2 \ = 5\mathrm{k} \cdot \ln e$
   $k = \frac{\ln 2}{5}$ min^{-1}

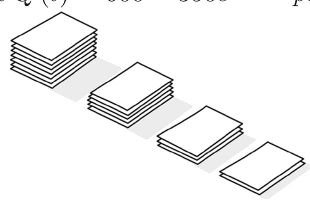
3. $y = 1 \cdot e^{\frac{\ln 2}{5} \cdot 74}$

4. $y = 2^{\frac{74}{5}}$
   $y = 28\ 526.2$ *bakterija.*

5. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, *slika* $\mathcal{R} = \{y \in \mathbb{R} : y > 0\}$.



Primjer 2.38 *Graf funkcije u formi* $Q(t) = B - Ae^{-kt}$ *gdje su* A, B *i* k *pozitivne konstante, često se naziva krivulja učenja. Psiholozi su otkrili da za* $t \geq 0$ *funkcije ovog oblika često realno modeliraju odnos između efikasnosti s kojom pojedinac izvršava zadatak i količinom vremena za učenje ili iskustva koju pojedinac ima. Pretpostavimo da je poštar u velikom gradu procijenio da nakon* t *mjeseci na radnom mjestu, prosječni službenik može sortirati* $Q(t) = 600 - 350e^{-0.7t}$ *pošiljaka na sat.*



1. *Izračunajte koliko pošiljaka može sortirati novi službenik?*

2. *Izračunajte koliko pošiljaka može sortirati službenik koji radi* 6 *mjeseci?*

3. *Izračunajte koliko će približno pošiljaka sortirati prosječni službenik po satu?*

4. *Nacrtajte krivulju učenja i komentirajte graf.*

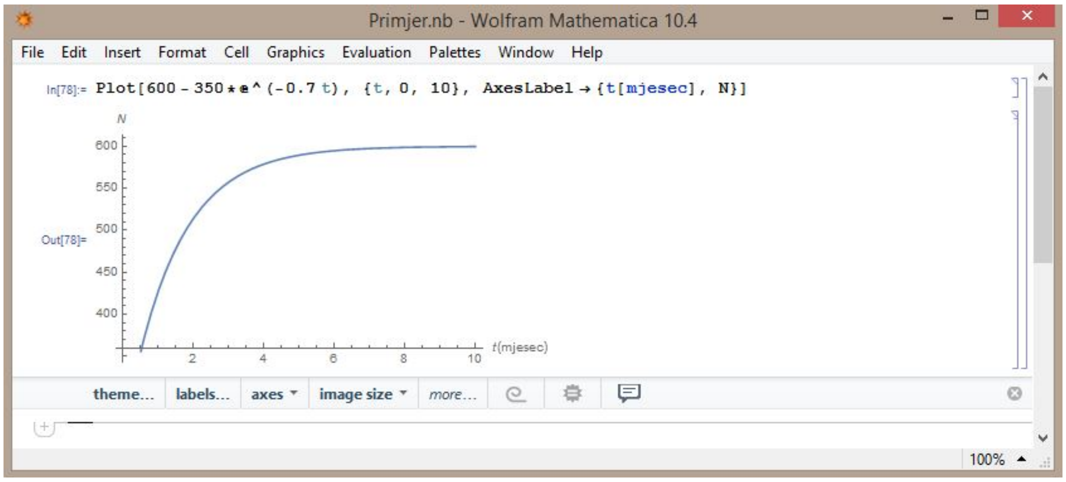
Rješenje.

1. $Q(0) = 600 - 350e^{-0.7 \cdot 0} = 600 - 350 = 250$

2. $Q(6) = 600 - 350e^{-0.7 \cdot 6} = 594.75 \approx 594$

3. *Kako se vrijeme povećava, prosječni službenik može sortirati približno* 600 *pošiljaka po satu.*

4. *Graf funkcije*



Primjer 2.39 *Širenje epidemije može se modelirati logističkom jednadžbom:*

$$N(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-kt}}$$

gdje je t vrijeme u tjednima, K nosivi kapacitet sustava, a parametar A se računa kao razlika maksimalnog kapaciteta K i početne populacije N_0, podijeljena s N_0. Epidemija se širi gradom čija rizična populacija broji oko 60000 osoba. U početnoj fazi je 50 zaraženih osoba, a nakon 4 tjedana broj zaraženih popeo se na 400.

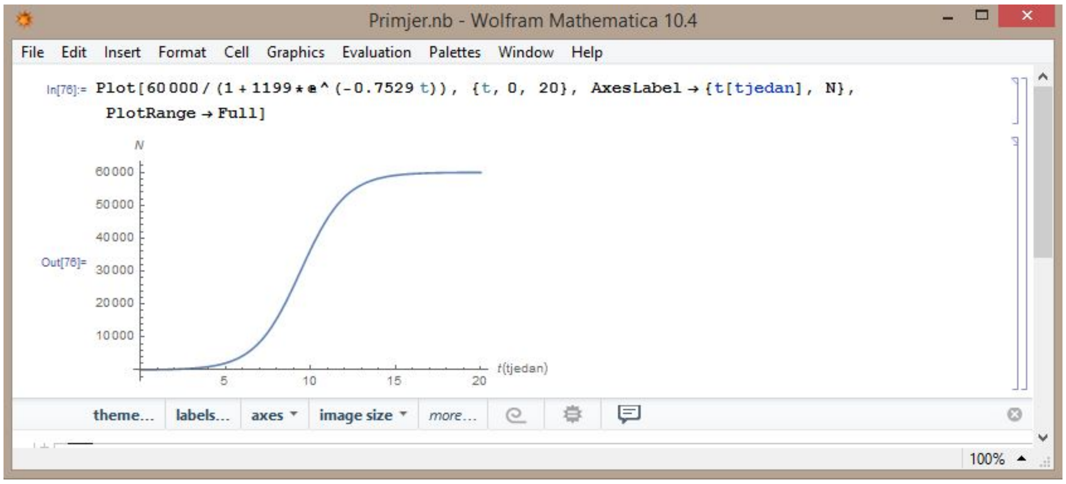
1. *Izračunajte nakon koliko će vremena biti zaražena polovica rizične skupine.*

2. *Nacrtajte graf funkcije i komentirajte rast/pad funkcije.*

Rješenje.

1. $A = \frac{K-N_0}{N_0} = \frac{60000-50}{50} = 1199$
   $N(t_1) = \frac{K}{1+Ae^{-kt}}$
   $1000 = \frac{60000}{1+1199e^{-4k}}$
   $1 + 1199e^{-4k} = 60$
   $e^{-4k} = \frac{59}{1199}$
   $-4k = \ln\frac{59}{1199}$
   $k = 0.7529$
   $N(t) = \frac{K}{1+Ae^{-kt}}$
   $30000 = \frac{60000}{1+1199e^{-0.7529t}}$
   $1 + 1199e^{-0.7529t} = 2$
   $e^{-0.7529t} = \frac{1}{1199}$
   $-0.7529t = -\ln 1199$
   $t = 9.4$ *tjedana.*

2. *Funkcija je rastuća.*



Primjer 2.40 *Stanovništvo jedne države raste u skladu s modelom* $N(t) = 18e^{0.005t}$ *gdje je* t *vrijeme u godinama, a* $N(t)$ *broj stanovnika u milijunima.*

1. *Ako sa* $t = 0$ *označimo početni trenutak mjerenja (današnji trenutak), izračunajte početnu vrijednost broja stanovnika.*

2. *Koliko će stanovnika ta država imati za tri godine?*

3. *Za koliko će se godina stanovništvo te države udvostručiti? Koliki je to porast u postocima?*

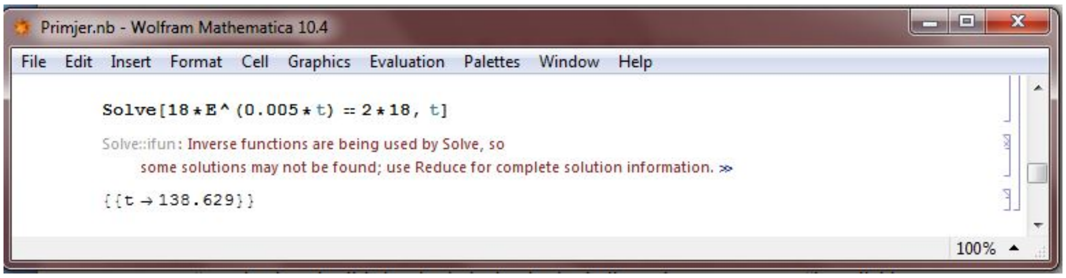
4. *U Wolframovoj Mathematici nacrtajte graf funkcije. Komentirajte rast funkcije i presjek grafa s osi ordinata.*

Rješenje.

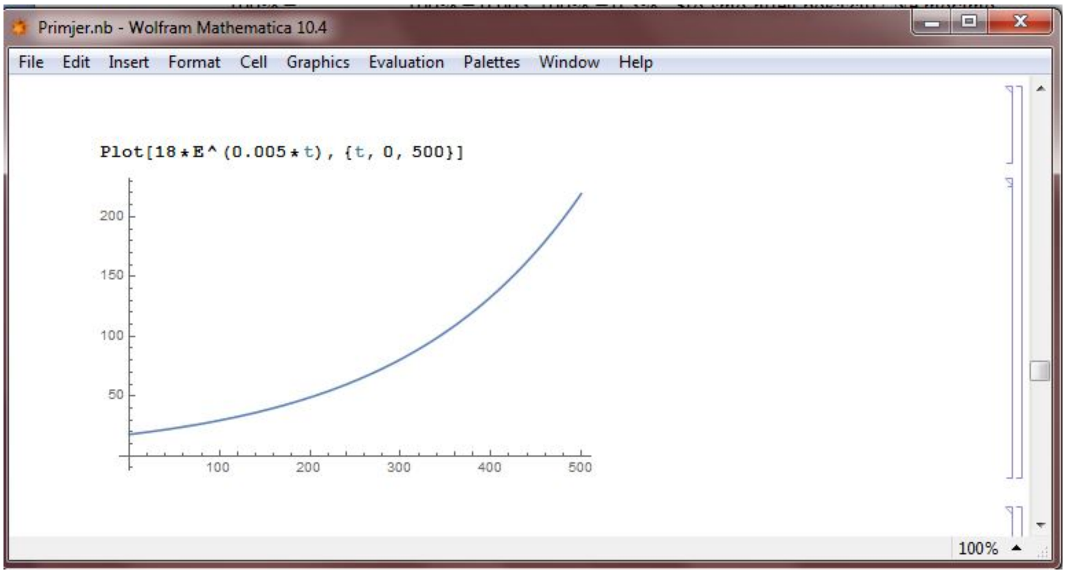
1. $N(0) = 18e^{0.005 \cdot 0} = 18e^0 = 18 \cdot 1 = 18$ *milijuna*

2. $N(3) = 18e^{0.005 \cdot 3} = 18.27$ *milijuna*

3. $N(t) = 18e^{0.0005t} = 2 \cdot 18$. *Dakle, rješavamo eksponencijalnu jednadžbu* $18e^{0.005t} = 2 \cdot 18$
   $e^{0.005t} = 2$
   $\ln e^{0.005t} = \ln 2$
   $0.005t = \ln 2$
   $t = \frac{\ln 2}{0.005} = 138.63$ *godina*



4. *Graf funkcije*



Funkcija raste na cijeloj svojoj domeni. Presjek grafa s osi ordinata je zapravo točka $(0, 18)$*, tj., u početnom trenutku* $t = 0$*, broj stanovnika je* 18 *milijuna.*

Primjer 2.41 *Prodaja nekog proizvoda opisana je logističkom funkcijom* $Y(t) = \frac{100}{1+49e^{-0.4t}}$*, gdje je* Y *količina prodaje, a* t *vrijeme u tjednima.*

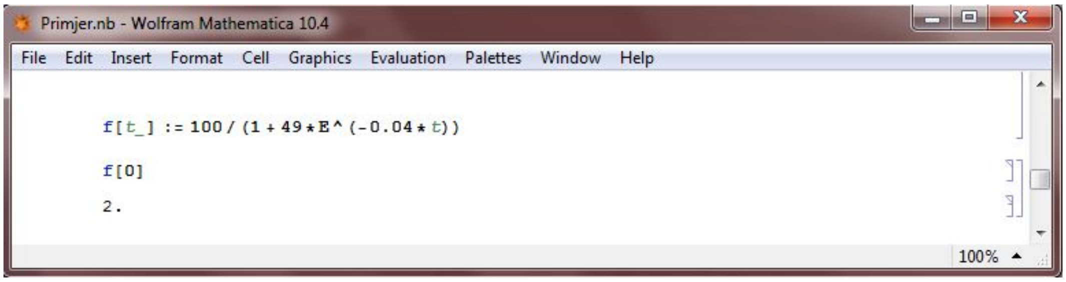
1. *Ako s* $t = 0$ *označimo početni trenutak mjerenja (današnji trenutak), izračunajte početnu vrijednost prodaje.*

2. *Kolika će prodaja biti za tri tjedna? Izračunajte to povećanje u odnosu na trenutak* $t = 0$ *u postocima.*

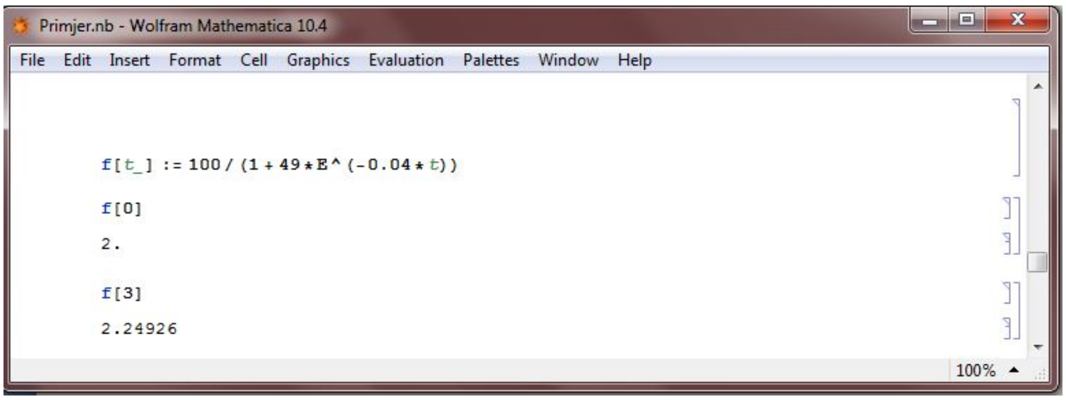
3. *Nacrtajte graf funkcije i komentirajte.*

Rješenje.

1. $Y(0) = \frac{100}{1+49e^{-0.4\cdot 0}} = \frac{100}{1+49\cdot 1} = \frac{100}{50} = 2$

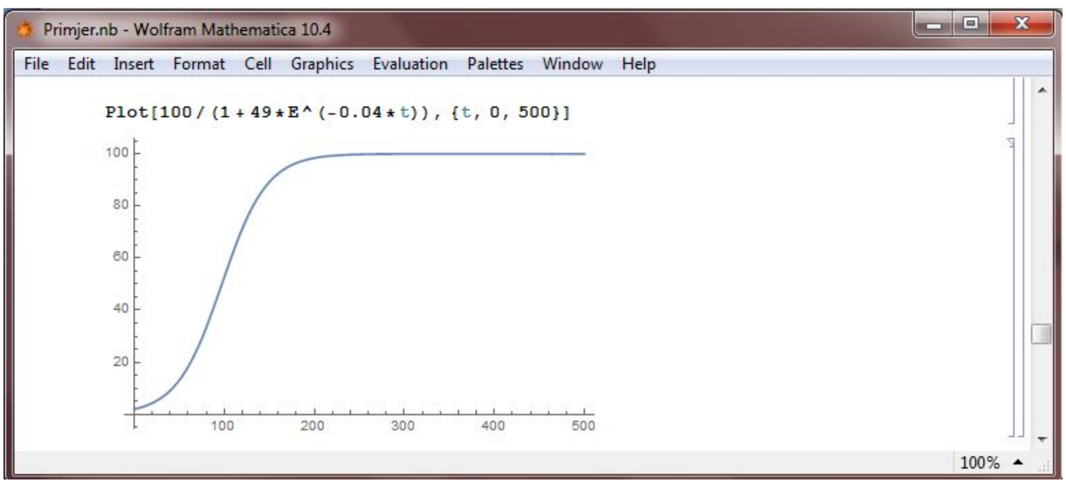


2. *Vrijednost funkcije*



Dakle, $Y(3) = \frac{100}{1+49e^{-0.4\cdot 3}} = 2.24926$. *Promjena u postocima je* $\frac{Y(3)-Y(0)}{Y(0)} \cdot 100\% = \frac{2.24926-2}{2} \cdot 100\% = 12.4629\%$.

3. *Graf funkcije*



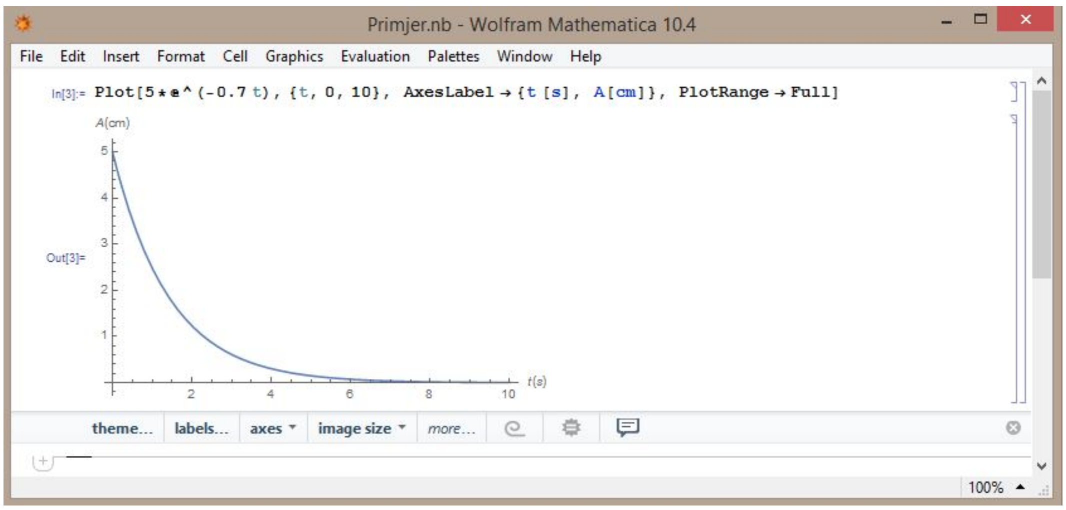
Karakteristično za logističku funkciju je da ona najprije strmo raste, a od određenog trenutka sve sporije i sporije. Kažemo da model ispočetka pokazuje rastuće, a onda opadajuće prinose.

Primjer 2.42 *Uteg obješen na oprugu titra pod utjecajem elastične sile. Početna amplituda titranja je 5 centimetra, period titranja 2 sekunde. Zbog djelovanja sile otpora zraka uteg će se nakon nekog vremena zaustaviti. Ako je sila otpora proporcionalna brzini gibanja utega za slučaj slabog prigušenja odredite:*

1. *vremensku promjenu amplitude titranja za faktor prigušenja* $\delta = 0.7\ \mathrm{s}^{-1}$ *(prikažite grafički).*
2. *nakon koliko vremena će amplituda pasti na* $1/3$ *početne vrijednosti*
3. *odredite omjer dviju susjednih amplituda koje se vremenski razlikuju za period titranja, te logaritamski dekrement prigušenja.*

Rješenje.

1. *Rješenje jednadžbe prigušenog titranja za slučaj slabog prigušenja pokazuje da je amplituda titranja:* $A(t) = A_0 e^{-\delta \cdot t} = 5e^{-0.7 \cdot t}$.
   Grafički prikaz je:



2. *Vrijeme titranja:* $e^{-\delta \cdot t} = \frac{A(t)}{A_0}$, $t = -\frac{1}{\delta} \cdot \ln \frac{A(t)}{A_0}$. *Amplituda će pasti na* $1/3$ *početne vrijednosti nakon* $t = 1.57$ *sekundi.*
3. *Omjer dviju susjednih amplituda koje se vremenski razlikuju za period titranja* T: $\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\delta \cdot T} = 4.06$.
   Umnožak $\delta \cdot T = \lambda$ *naziva se logaritamski dekrement prigušenja. Vrijedi relacija:* $\lambda = \delta \cdot T = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)}$. *U ovom slučaju* $\lambda = 1.4$.

Primjer 2.43 *Atmosferski tlak se mijenja s nadmorskom visinom. Za izotermnu atmosferu tlak* p *je funkcija nadmorske visine* h *i može se pokazati da je (uz pretpostavku da se* g *ne mijenja):*

$$p(h) = p_0 \cdot e^{\frac{-\rho_0}{p_0} \cdot gh}.$$

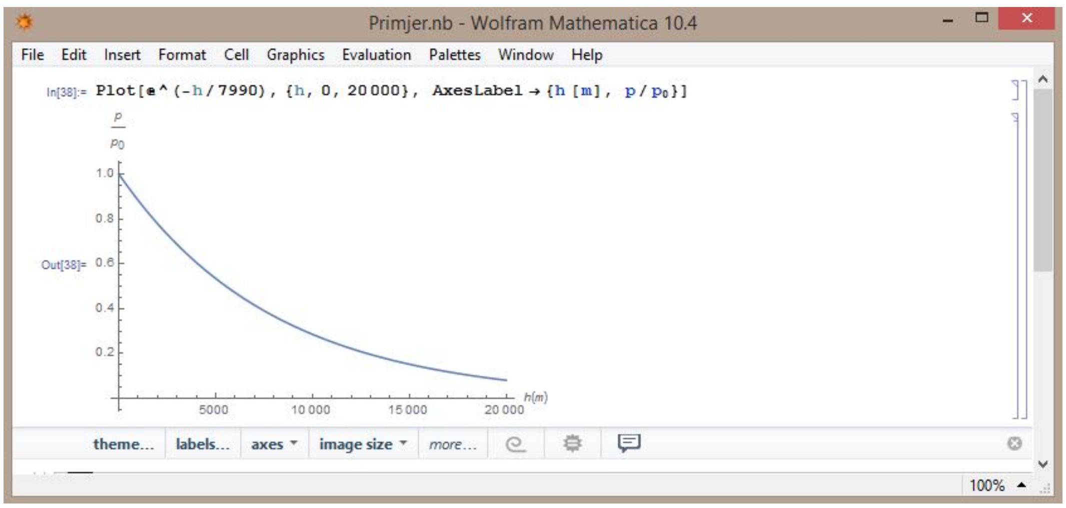
Uz pretpostavku da je temperatura atmosfere stalna (izotermna atmosfera) odredite:

1. *ovisnost atmosferskog tlaka o nadmorskoj visini*

2. *visinu na kojoj je atmosferski tlak* $0.5p_0$.

Rješenje.

1. *Za izotermnu atmosferu tlak* p *je funkcija nadmorske visine* h
   $p(h) = p_0 \cdot e^{\frac{-\rho_0}{p_0} \cdot gh}$.
   Pri normiranoj temperaturi i tlaku $(0°C,\ p_0 = 101325\ \mathrm{Pa})$ *gustoća zraka je* $\rho = 1.293\ \mathrm{kg/m^3}$.
   Uvrštavanjem numeričkih vrijednosti $p(h)$ *se može napisati kao:* $p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{7990}}$.
   Grafička ovisnost $p(h)/p_0$:

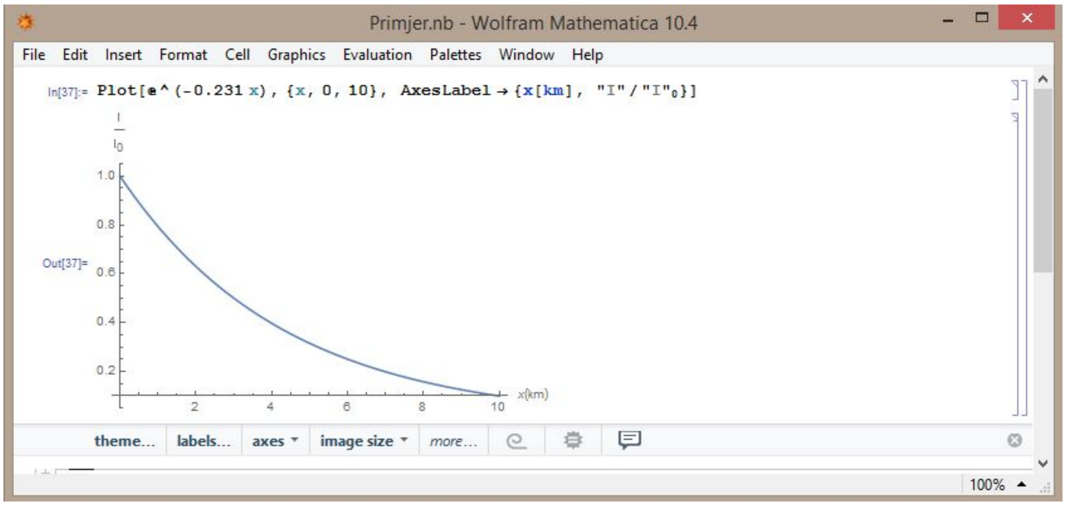


2. *Visinu na kojoj je tlak jednak* $0.5p_0$ *odredit ćemo iz ovisnosti* $p(h)$: $0.5p_0 = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{7990}}$, $h = -7990 \cdot ln(0.5) = 5538$ *metara.*

Primjer 2.44 *Intenzitet svjetlosti u staklenom optičkom vlaknu opada s udaljenosti kao* $I(x) = I_0 e^{-\alpha x}$. I_0 *je intenzitet na ulazu u vlakno* $(x = 0)$, α *je koeficijent apsorpcije. Odredite ovisnost intenziteta* $\frac{I}{I_0}$ *svjetlosti o udaljenosti za optičko vlakno u kojem intenzitet na udaljenosti 3 kilometara opadne za 50%.*

Rješenje.

Potrebno je prvo odrediti koeficijent apsorpcije α. *Na udaljenosti 3 kilometara intenzitet je* $0.5I_0$ *pa je:* $0.5I_0 = I_0 e^{-\alpha x}$, $\alpha = \frac{0.693}{3\ \mathrm{km}} = 0.231\ \mathrm{km}^{-1}$.
$\frac{I(x)}{I_0} = e^{-0.231x}$.

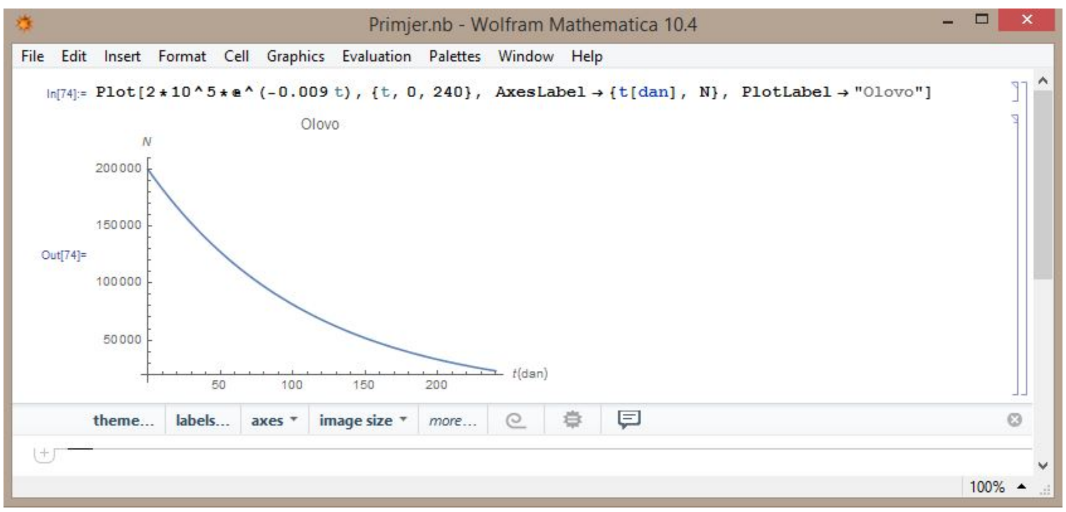


Primjer 2.45 *Izotop olova* ^{209}Pb *raspada se* β*-raspadom u izotop bizmuta* ^{209}Bi *koji je stabilan. Vrijeme poluraspada olova je* 3.253 *dana, a početni broj jezgara je* $2 \cdot 10^5$.

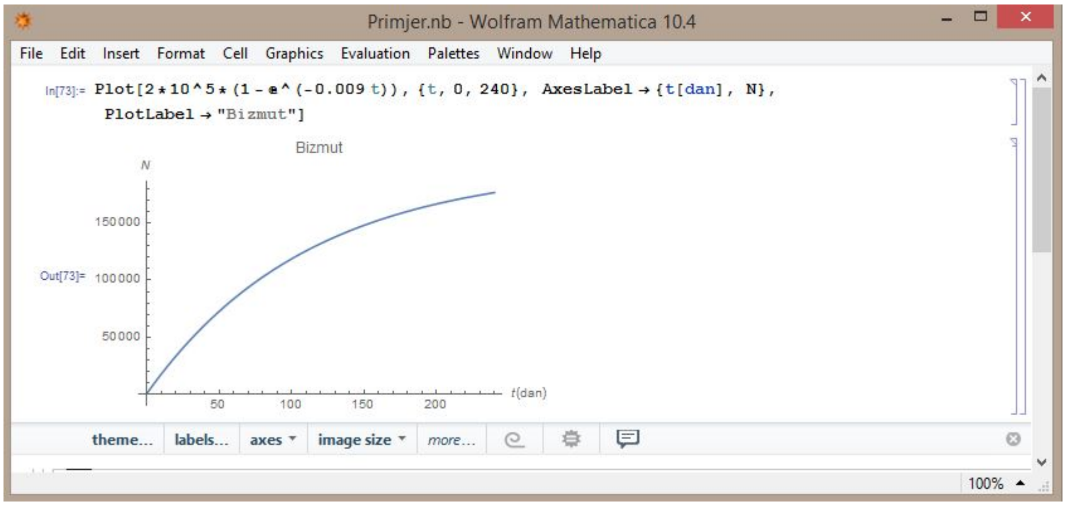
1. *Odredite ovisnost broja jezgara* ^{209}Pb *i* ^{209}Bi *o vremenu.*
2. *Koliki će biti udio atoma* ^{209}Bi *nakon* 12 *dana ako je u početnom trenutku uzorak sadržavao samo olovo?*

Rješenje.

1. *Zakon radioaktivnog raspada daje ovisnost broja radioaktivnih jezgri o vremenu:* $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, N_0 *je broj radioaktivnih jezgara u početnom vremenu* $t = 0$, λ *je konstanta radioaktivnog raspada. Vrijeme nakon kojeg broj radioaktivnih jezgri padne na pola od početne vrijednosti naziva se vrijeme poluraspada* $T_{1/2}$. *Konstanta raspada ovisi o vremenu* $T_{1/2}$:
   $\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda t}$ *pa je* $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$.
   Broj aktivnih jezgri ^{209}Pb *je* $N(t) = N_0 e^{-\lambda t} = 2 \cdot 10^5 e^{-0.009t}$.



Broj jezgri ^{209}Bi *je* $N_0 - N(t) = N_0(1 - e^{-\lambda t}) = 2 \cdot 10^5 \left(1 - e^{-0.009 \cdot t}\right)$.



2. *Konstanta raspada je* $\lambda = 0.009/h$ *pa će nakon* 12 *sati broj atoma* ^{209}Bi *biti:* $N = 2 \cdot 10^5 \left(1 - e^{-0.009 \cdot 12}\right) = 0.2 \cdot 10^5$.

Primjer 2.46 *Intenzitet gama* (γ) *zračenja pri prolazu kroz materijale se smanjuje kao:* $I(x) = I_0 e^{-\mu x}$, *gdje je* I_0 *intenzitet na ulazu u materijal* $(x = 0)$, μ *je linearni koeficijent prigušenja. Vrijednosti linearnog koeficijenta prigušenja za zrak, vodu i olovo u ovisnosti o energiji* γ *zračenja dane su u tablici:*

Energija	100 keV	200 keV	500 keV
Zrak	0.0002 cm^{-1}	0.00016 cm^{-1}	0.0001 cm^{-1}
Voda	0.167 cm^{-1}	0.136 cm^{-1}	0.097 cm^{-1}
Olovo	59.7 cm^{-1}	10.15 cm^{-1}	1.64 cm^{-1}

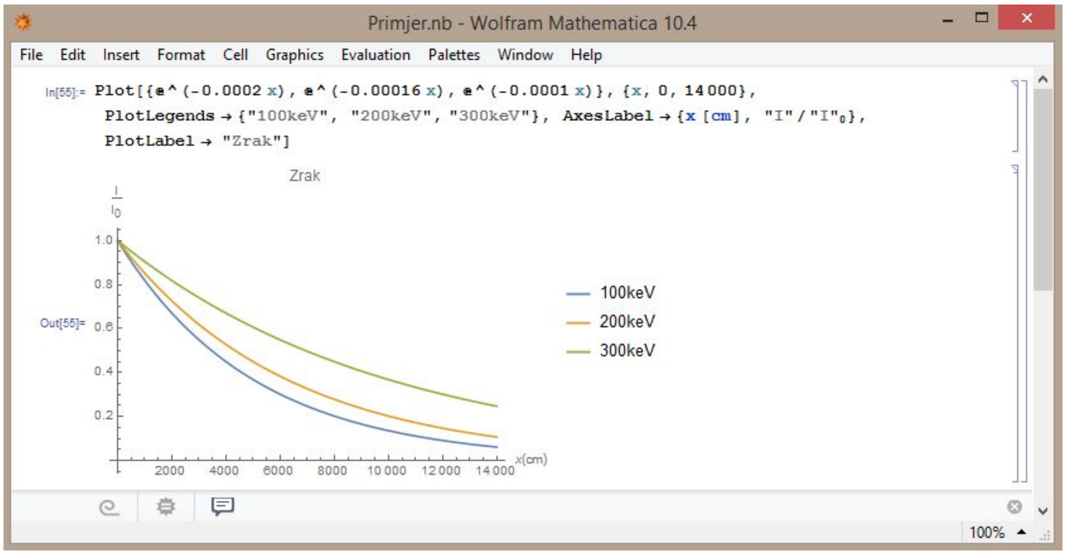
Odredite:

1. I/I_0 *u ovisnosti o debljini sloja materijala kroz koje je prošlo* γ *zračenje za različite vrijednosti energija (grafički prikažite).*

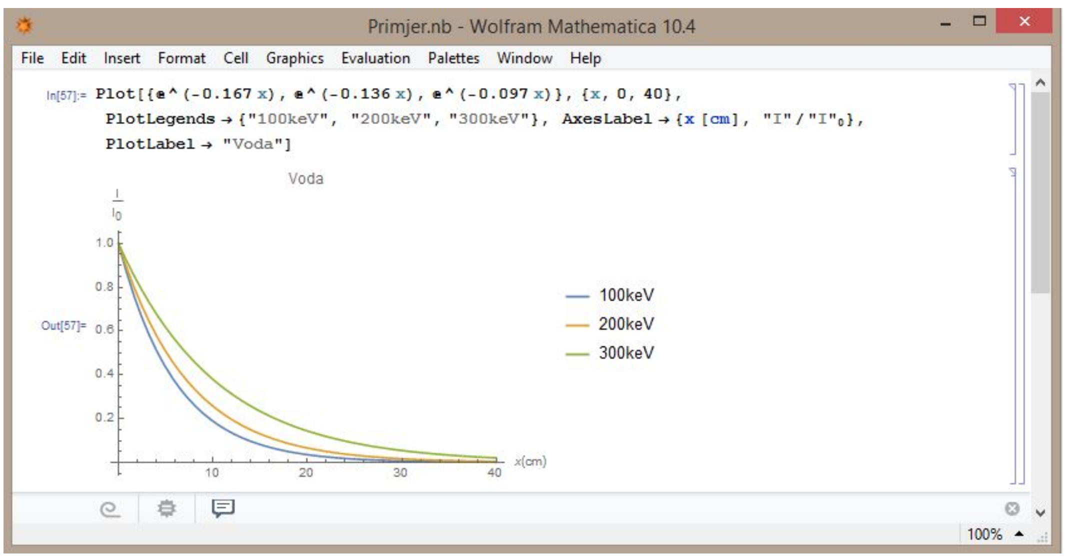
2. *debljinu poluapsorpcije za sve slučajeve iz tablice. Debljina poluapsorpcije je udaljenost* $d_{1/2}$ *na kojoj intenzitet padne na* $0.5I_0$.

Rješenje.

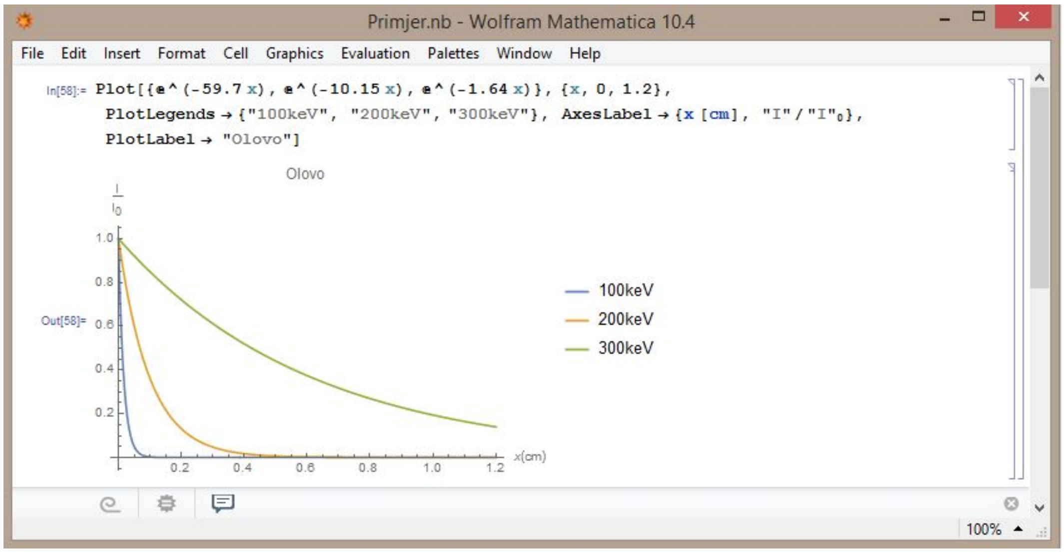
1. $\frac{I(x)}{I_0} = e^{-\mu x}$
   Zrak: $\frac{I(x)}{I_0} = e^{-0.0002x}$, $\frac{I(x)}{I_0} = e^{-0.00016x}$, $\frac{I(x)}{I_0} = e^{-0.0001x}$



Voda: $\frac{I(x)}{I_0} = e^{-0.167x}$, $\frac{I(x)}{I_0} = e^{-0.136x}$, $\frac{I(x)}{I_0} = e^{-0.097x}$



Olovo: $\frac{I(x)}{I_0} = e^{-59.7x}$, $\frac{I(x)}{I_0} = e^{-10.15x}$, $\frac{I(x)}{I_0} = e^{-1.64x}$



2. *Debljina poluapsorpcije je udaljenost* $d_{1/2}$ *za koju vrijedi:* $I(x) = \frac{I_0}{2} = I_0 e^{-\mu x}$, $x = d_{1/2} = ln2/\mu$.

	100 keV	200 keV	500 keV
Zrak	3466 cm	4332 cm	6931 cm
Voda	4.15 cm	5.10 *cm*	7.15 cm
Olovo	0.012 cm	0.068 *cm*	0.42 cm

Iz grafičkog prikaza ovisnosti intenziteta γ *zračenja o debljini sloja materijala kroz koje je zračenje prošlo vidimo da intenzitet značajno ovisi o energiji izvora. Dubina prodiranja zračenja raste s energijom. Analiza rezultata pokazuje da zrak slabo prigušuje zračenje dok je voda daleko bolji apsorber. Olovo ima veliki koeficijent apsorpcije i zbog toga služi kao štit oko radioaktivnih izvora.*

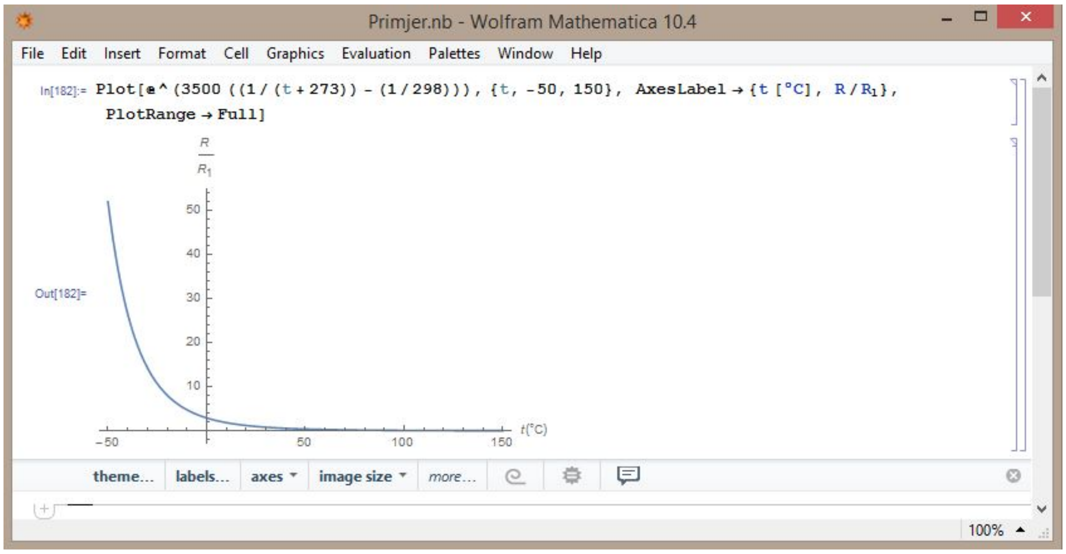
Primjer 2.47 *Termistori su otpornici napravljeni od poluvodiča ili metalnih oksida, kojima se otpor značajno mijenja s temperaturom, pa su pogodni za mjerenja i zaštitu elektroničkih sklopova. Jednoj vrsti termistora NTC (negative temperature coefficient) otpor pada s porastom temperature po formuli* $R(T) = A \cdot e^{\frac{B}{T}}$. *Otpor termistora na temperaturi* 25°C *je* $R_1 = 2000\ \Omega$, *a konstanta* $B = 3500$ K *(uzmite da je temperatura* $T(K) = 273 + t$°C*). Odredite:*

1. *grafički prikaz funkcije* $\frac{R(T)}{R_1}$ *za područje temperature od* -50 *do* 150°C

2. *pomoću grafa izračunajte vrijednosti otpora kod* 50°C, 100°C *i* 150°C.

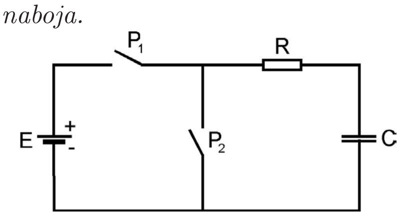
Rješenje.

1. $\frac{R(T)}{R_1} = e^{3500(\frac{1}{T} - \frac{1}{298})} = e^{3500(\frac{1}{t+273} - \frac{1}{298})}$
Grafički prikaz funkcije:



2. *Očitane vrijednosti otpora su:* $\frac{R(50°\mathrm{C})}{R_1} = 0.402$ *pa je* $R(50°\mathrm{C}) = 804\ \Omega$; $\frac{R(100°\mathrm{C})}{R_1} = 0.094$ *pa je* $R(100°\mathrm{C}) = 188\ \Omega$; $\frac{R(150°\mathrm{C})}{R_1} = 0.031$ *pa je* $R(150°\mathrm{C}) = 62\ \Omega$.

Primjer 2.48 *RC krug se sastoji od baterije napona* $V_0 = 3$ V *serijski vezane s otpornikom otpora* $R = 5\ \Omega$ *i kondenzatorom kapaciteta* $C = 300\ \mu$F *(slika). U početnom trenutku* $t = 0$ *prekidači* P_1 *i* P_2 *su otvoreni i na kondenzatoru nema naboja.*



Odredite:

1. *ovisnost naboja o vremenu pri nabijanju i izbijanju kondenzatora, ovisnost prikažite grafički*

2. *ovisnost napona na kondenzatoru o vremenu pri nabijanju i izbijanju kondenzatora, ovisnost prikažite grafički*

3. *ovisnost struje o vremenu pri nabijanju i izbijanju kondenzatora, ovisnost prikažite grafički.*

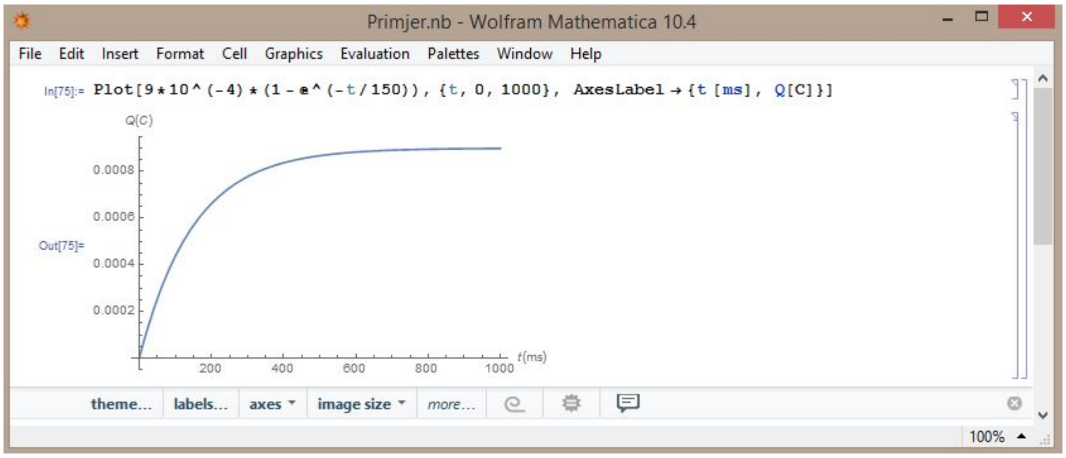
Rješenje.

Ako zatvorimo prekidač P_1 *(prekidač* P_2 *je otvoren), kondenzator se nabija do maksimalnog napona koji je dan elektromotornom silom* $E = V_0$. *Prema drugom Kirchhoffovu zakonu u svakome trenutku vrijedi:*
$V_0 - IR - \frac{Q}{C} = 0$, *gdje je* I *trenutačna jakost struje, a* Q *trenutačni naboj na kondenzatoru. U gornju jednadžbu uvrstimo izraz za struju* $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$:
$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\frac{1}{RC}(Q - V_0 C)$.
Rješenje ove jednadžbe je:

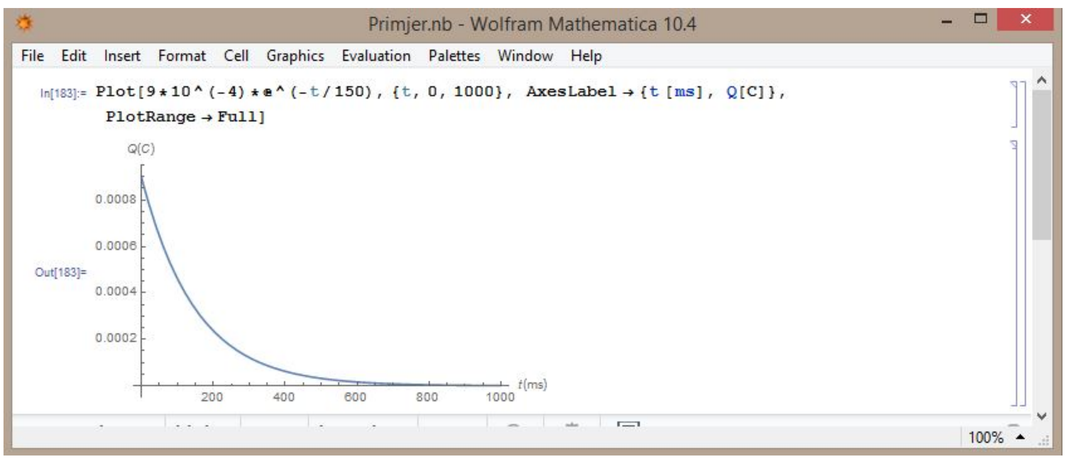
$$Q(t) = V_0 C(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = V_0 C + Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Ako nakon nabijanja kondenzatora otvorimo prekidač P_1 *i zatvorimo* P_2*, dolazi do izbijanja kondenzatora. Drugi Kirchhoffov zakon za novonastalu petlju glasi:* $IR + \frac{Q}{C} = 0$*, uvrstimo li izraz za struju jednadžba glasi:* $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\frac{Q}{RC}$*.*
Rješenje ove jednadžbe je eksponencijalna ovisnost količine naboja o vremenu: $Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$*. Vremenska konstanta za dani* RC *sklop je* $\tau = RC$*.*

1. *Grafički prikaz vremenske ovisnosti i količine naboja na kondenzatoru:*
   Pri nabijanju kondenzatora: $Q(t) = V_0 C(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = 3 \cdot 300(1 - e^{-\frac{t}{5 \cdot 300}})$.
   Vremenska konstanta u ovom slučaju u milisekundama iznosi $\tau = RC = 5{\cdot}300{\cdot}10^{-6} = 15{\cdot}10^{-4}$ s $=$ 150 ms. *Vidimo da je za grafički prikaz pogodno odabrati vrijeme u milisekundama ms.*
   $Q(t) = 9 \cdot 10^{-4} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{150}})$.
   Za prikaz ovisnosti naboja u vremenu odabrali smo vrijeme u intervalu $(0 - 1000)$ ms.

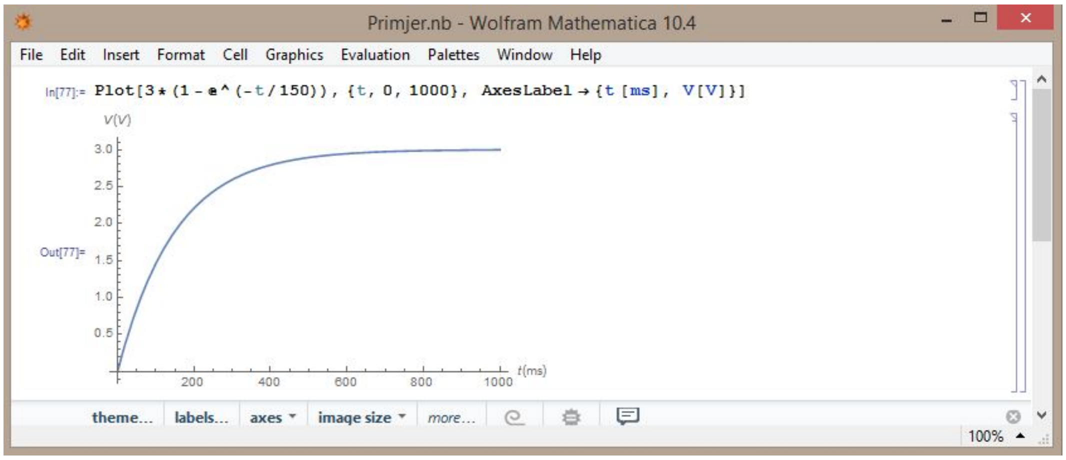


   Pri izbijanju kondenzatora: $Q(t) = V_0 C \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = 3 \cdot 300 \cdot e^{-\frac{t}{5 \cdot 300}}) = 9 \cdot 10^{-4} \cdot e^{-\frac{t}{150}}$

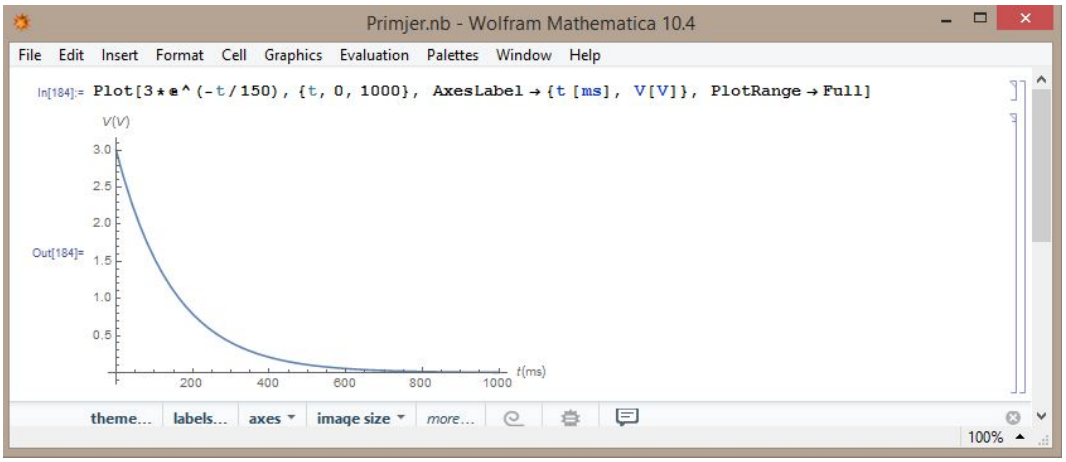


2. *Ovisnost napona na kondenzatoru o vremenu pri nabijanju i izbijanju kondenzatora:*

   Pri nabijanju kondenzatora: $V(t) = \frac{Q(t)}{C} = V_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$, $V(t) = 3 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{150}})$ V

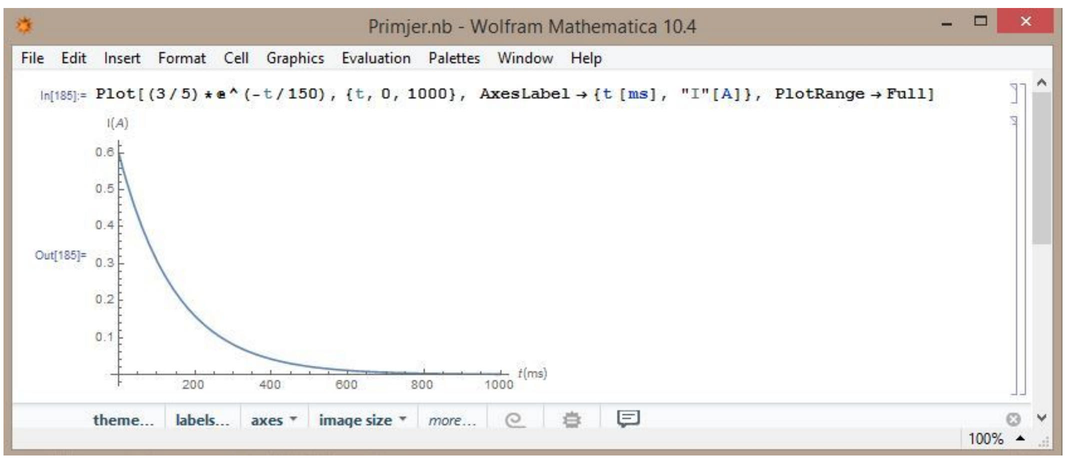


Pri izbijanju kondenzatora: $V(t) = V_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}, V(t) = 3 \cdot e^{-\frac{t}{150}}$ V



3. *Ovisnost struje o vremenu pri nabijanju i izbijanju kondenzatora*

Pri nabijanju kondenzatora: $I(t) = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\frac{1}{RC}(Q - V_0 C) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$, $I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{3}{5} e^{-\frac{t}{150}}$.



Pri izbijanju kondenzatora struja ima istu ovisnost kao kod nabijanja kondenzatora: $I(t) = \frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{3}{5}e^{-\frac{t}{150}}$.

2.4 Modeliranje logaritamskom funkcijom

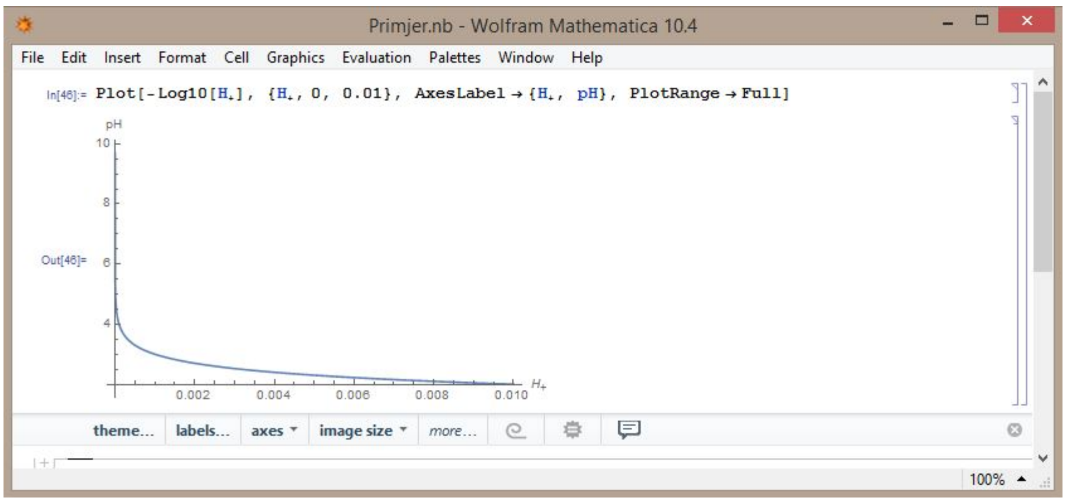
Primjer 2.49 *Zadana je funkcija za određivanje pH vrijednosti materije koja se temelji na koncentraciji vodikovih iona H+ :*

$$pH = -\log{(H+)}$$

1. *Izračunajte kolika će biti pH vrijednosti materije ako je koncentracija vodikovih iona* 0.001*?*
2. *Nacrtajte graf funkcije uz pomoć računala te komentirajte njezin rast/pad i presjek grafa s osi ordinata. Odredite domenu i sliku funkcije, te komentirajte, ako znate da je pH vrijednosti materije iz intervala* $[0, 14]$.
3. *Odredite pravac kojem se graf funkcije približava za velike vrijednosti funkcije. Taj pravac nazivamo asimptotom funkcije.*

Rješenje.

1. $pH = -\log{(H+)} = -\log{[0,001]} = -(-3) = 3$
2. *Funkcija pada povećavanjem broja vodikovih iona.*
3. *Matematički domena logaritamske funkcije je* $\mathbb{R}^+$. *Slika funkcije mora biti* $\mathcal{R} = \{y \in \mathbb{R} | 0 < y \leq 14\}$ *zbog smislenih vrijednosti pH. Prema tome domena je onda interval* $[10^{-14}, 1]$.



4. *Asimptota je* $x = 0$.

Primjer 2.50 *Prikazana je formula za izračun magnitude potresa:*

$$M = \log{\frac{I}{S}}$$

gdje je I intenzitet potresa dobiven seizmografom koji mjeri pomak tla odnosno amplitudu udaljenu 100 *kilometara od epicentra potresa, te je S intenzitet "'standardnog potresa"' čija je amplituda* $1\mu m = 10^{-6}$

metara. Omjeri jačine potresa u Richterovoj ljestvici nisu usporedni s brojčanim iznosom ljestvice već povećanje broja indicira 10 *puta jači intenzitet.*

1. *Izračunajte magnitudu standardnog potresa i komentirajte rezultat.*
2. *Na početku stoljeća u San Franciscu je zabilježen potres od* 8.3 *prema Richterovoj skali. U istoj godini u Južnoj Americi je zabilježen potres koji je bio četiri puta jači. Izračunajte magnitudu potresa u Južnoj Americi.*
3. *Nedavno je u San Franciscu zabilježen potres od* 7.1 *Richtera. Izračunajte koliko je jači bio potres u San Franciscu iz podzadatka (2).*
4. *Seizmički val iz podzadatka (3) imao je period* 3.6 *sekundi. Ako je izmjereno slabljenje valova do* 6.5 *Richtera, koliko je iznosila amplituda vala? Problem možemo modelirati sljedećom jednadžbom:*

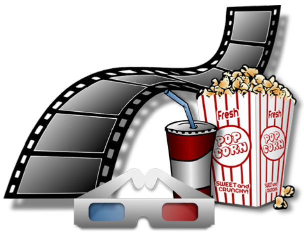
$$M = \log\frac{A}{T} + S$$

gdje je M magnituda, A amplituda vala, T period vala, a S iznos slabljenja vala.

Rješenje.

1. $M = \log\frac{I}{S} = \log\frac{S}{S} = \log 1 \ = 0$
2. $M_{SF} = \log\frac{I_{SF}}{S} = 8.3$
   $I_{JA} = 4I_{SF}$
   $M_{JA} = \log\frac{I_{JA}}{S} = \log\frac{4I_{SF}}{S} = \log 4I_{SF} - \log S = \log 4 + \log I_{SF} - \log S$
   $M_{JA} = \log 4 + \log\frac{I_{SF}}{S} = \log 4 + 8.3 = 8.9$
3. $8.3 = \log\frac{I_1}{S}$, $7.1 = \log\frac{I_2}{S}$
   $\log\frac{I_1}{S} - \log\frac{I_2}{S} = 8.3 - 7.1$
   $\log I_1 - \log S - \log I_2 + \log S = 1.2$
   $\log\frac{I_1}{I_2} = 1.2$
   $\frac{I_1}{I_2} = 10^{1.2} = 15.8489 \approx 16$
4. $M = \log\frac{A}{T} + S$
   $7.1 = \log\frac{A}{3.6} + 6.5$
   $\log\frac{A}{3.6} = 0.6$
   $\frac{A}{3.6} = 10^{0.6}$
   $A = 14.33\ \mu\text{m} = 0.001433\ \text{cm}$

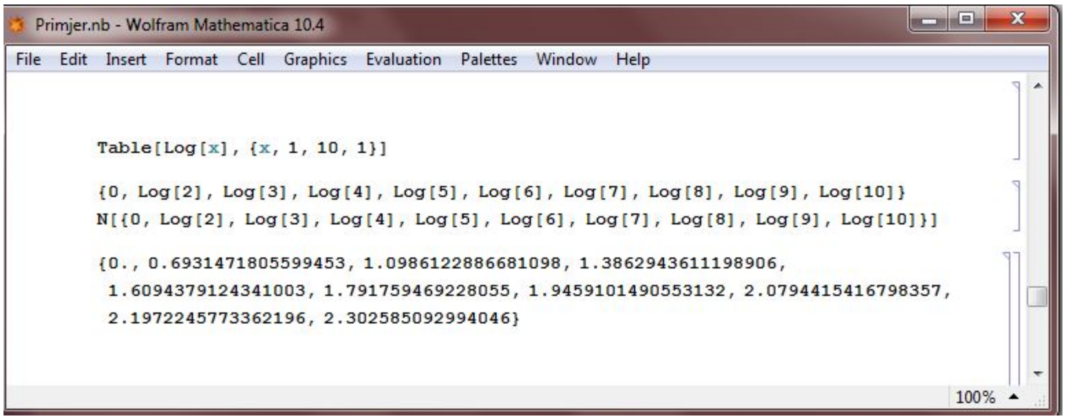
Primjer 2.51 *Kad potrošač kupuje određeni proizvod onda osjeća određeno zadovoljstvo. To se zadovoljstvo mjeri funkcijom korisnosti koja ovisi o količini kupljenog proizvoda. Jedan od načina modeliranja korisnosti je i logaritamska funkcija. Pretpostavimo da je zadovoljstvo kupca uslijed posjeta kinu modelirano funkcijom $u(x) = \ln x$, gdje je x broj posjeta kinu, $\ln$ prirodni logaritam, a u oznaka za korisnost.*



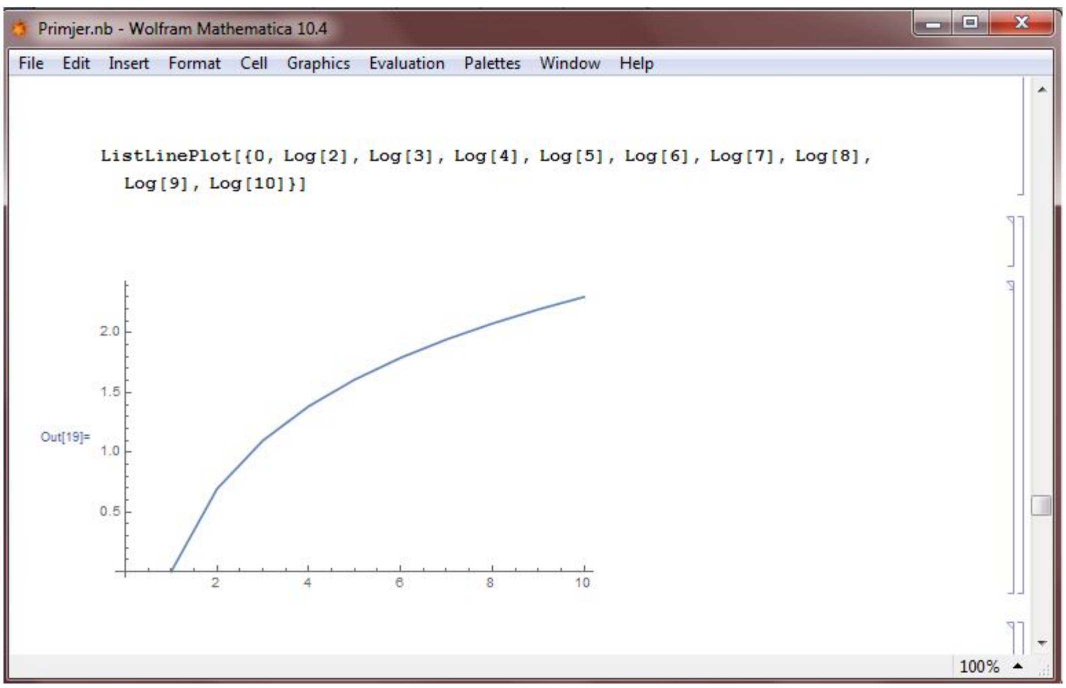
1. *Izračunajte korisnost kupca ako je broj posjeta kinu jednak* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 *i* 10.
2. *Za svako povećanje broja posjeta kinu, izračunajte povećanje korisnosti kupca. Što primjećujete? Ekonomski komentirajte.*
3. *Nacrtajte graf funkcije korisnosti i komentirajte graf nastavno na zaključak iz (2).*
4. *Koliko puta kupac treba otići u kino da bi korisnost bila veća od* 5*?*
5. *Prikažite broj posjeta kinu kao funkciju korisnosti.*

Rješenje.

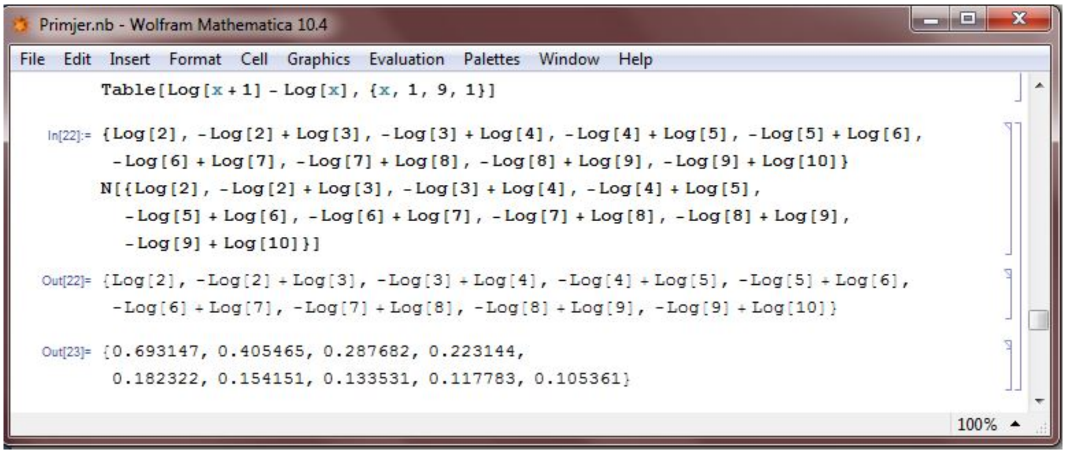
1. *Računamo* $u(1) = \ln 1 = 0$, $u(2) = \ln 2 = 0.6931$, $\ldots$, $u(10) = \ln 10 = 2.3026$.



Koristeći naredbu ListLinePlot, u Wolframovoj Mathematici možemo spojiti te točke s po dijelovima linearnom funkcijom:

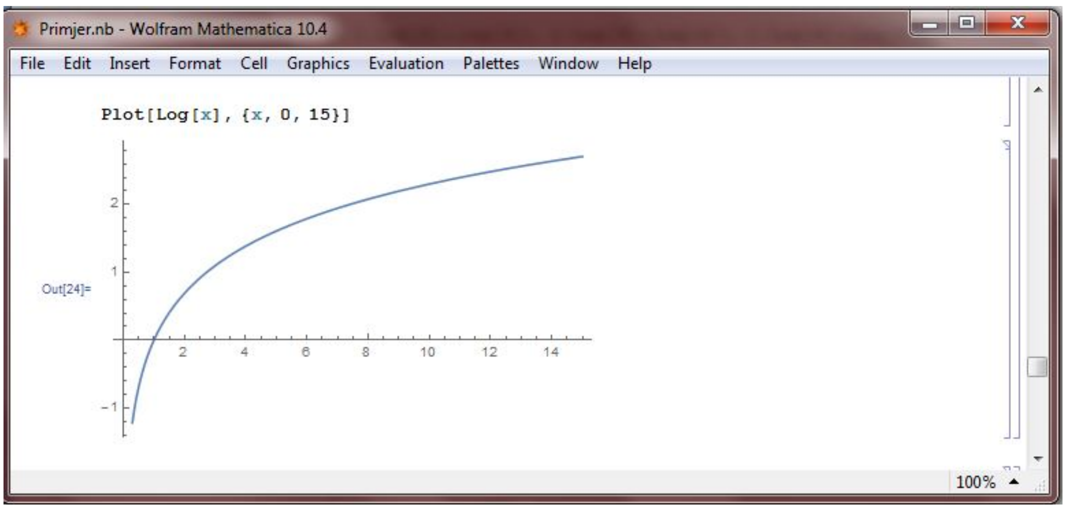


2. *Već iz grafa pod (1) možemo zaključiti kako korisnost raste, ali sve sporije i sporije. Da bismo se u to uvjerili, računamo* $u(2) - u(1)$, $u(3) - u(2)$, $\ldots$, $u(10) - u(9)$.



Možemo primijetiti da su porasti funkcije korisnosti sve manji i manji. Tu pojavu zovemo opadajućim prinosima u ekonomiji. Dakle, kad je broj posjeta kinu mali, svaki novi odlazak povećava značajno korisnost kupca. No, za veliki broj posjeta kinu, svaki novi posjet povećava korisnost, ali ne u mjeri kako je to bilo na početku kad je broj posjeta kinu bio mali.

3. *Graf funkcije*



Ukoliko je broj posjeta kinu 0, *korisnost je jako niska (teži u* $-\infty$*). Za jedan posjet kinu, korisnost je* 0. *Za svaki sljedeći posjet kinu, korisnost raste, ali sve sporije i sporije (krivulja je polegnutija). Iz (2) znamo da se ta pojava zove opadajući prinosi.*

4. *Matematički, treba riješiti nejednadžbu* $u(x) > 5$, *tj.*, $\ln x > 5$. *Iz* $\ln x = 5$ *slijedi da je* $x = e^5 = 148.41$, *pa iz činjenice da je logaritamska funkcija rastuća na cijeloj svojoj domeni, zaključujemo da je korisnost veća od* 5 *ukoliko je broj odlazaka u kino veći ili jednak od* 149.

5. *Matematički, moramo pronaći inverz funkcije* $u(x) = \ln x$. *Slijedi da je* $x = e^{u(x)}$. *Zadatak (4) možemo riješiti koristeći inverznu funkciju tako što ćemo računati* $x = e^{u(x)}$ *za* $u(x) = 5$, *tj.*,

$x = e^5 = 148.41.$

Primjer 2.52 *Funkcija korisnosti odlazaka u kino za Ivana je* $u(x) = 10\ln(x+1)$, *a za Anu* $u(x) = x$, *gdje je* x *broj odlazaka u kino.*

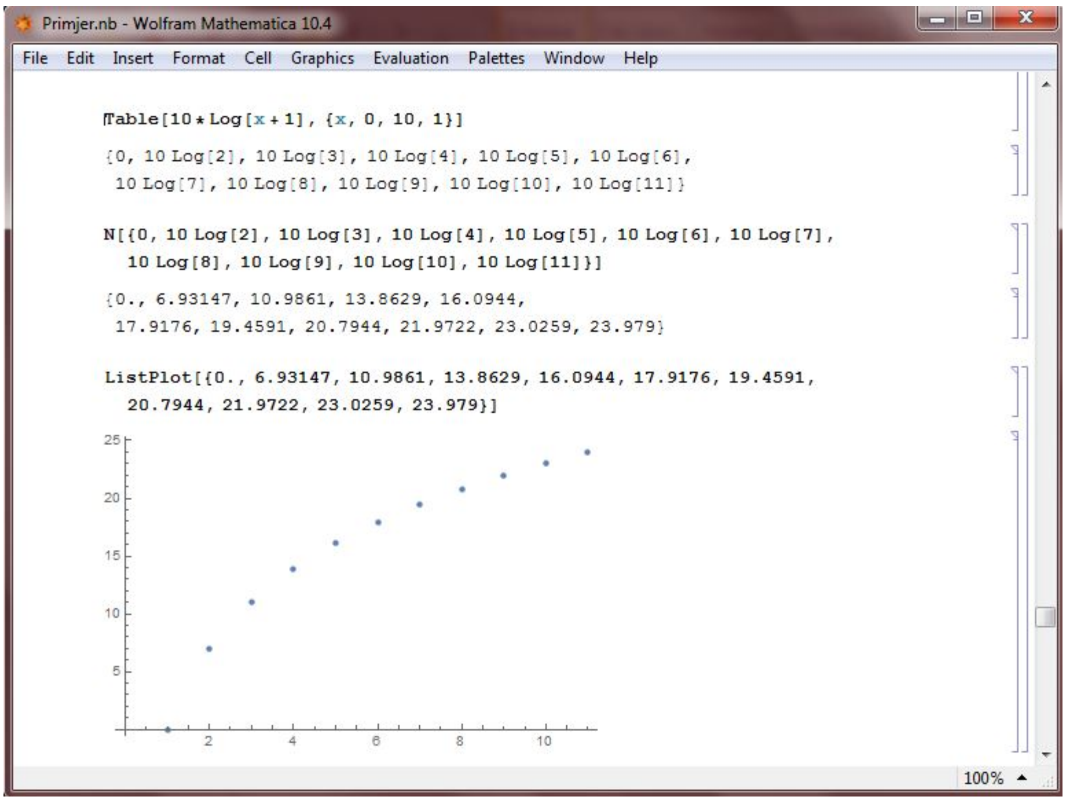
1. *Komentirajte prinose za obje funkcije korisnosti.*

2. *Grafički prikažite obje funkcije korisnosti na istoj slici.*

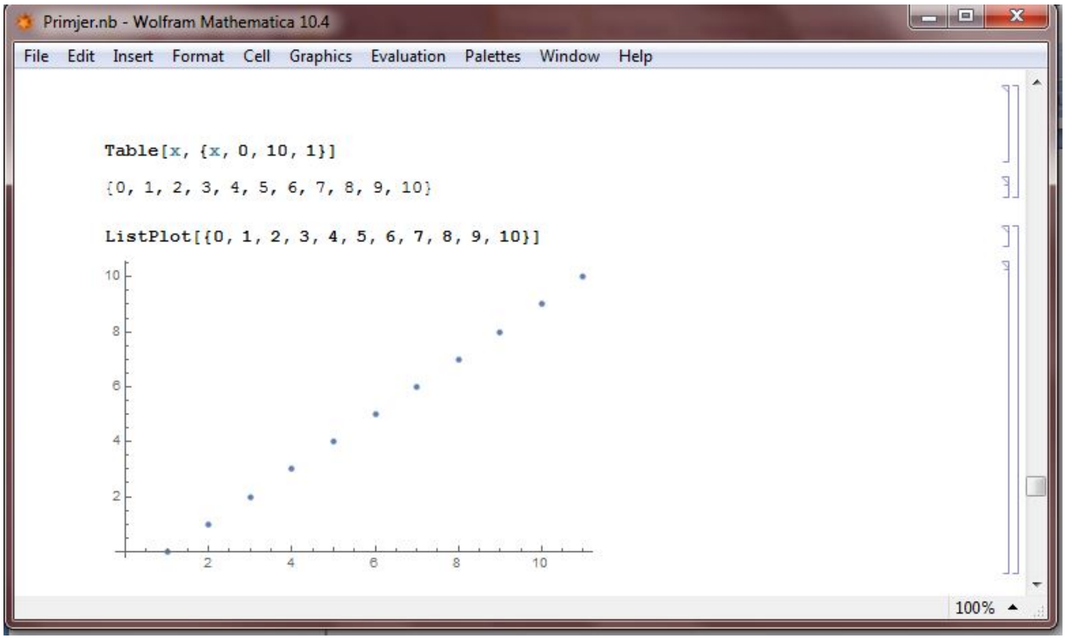
3. *Za koje je brojeve posjeta kinu zadovoljniji Ivan, a za koje Ana?*

Rješenje.

1. *Da bismo komentirali prinose, potrebno je izračunati porast korisnosti za jediničnu promjenu varijable* x. *Za Ivana to izgleda ovako:*

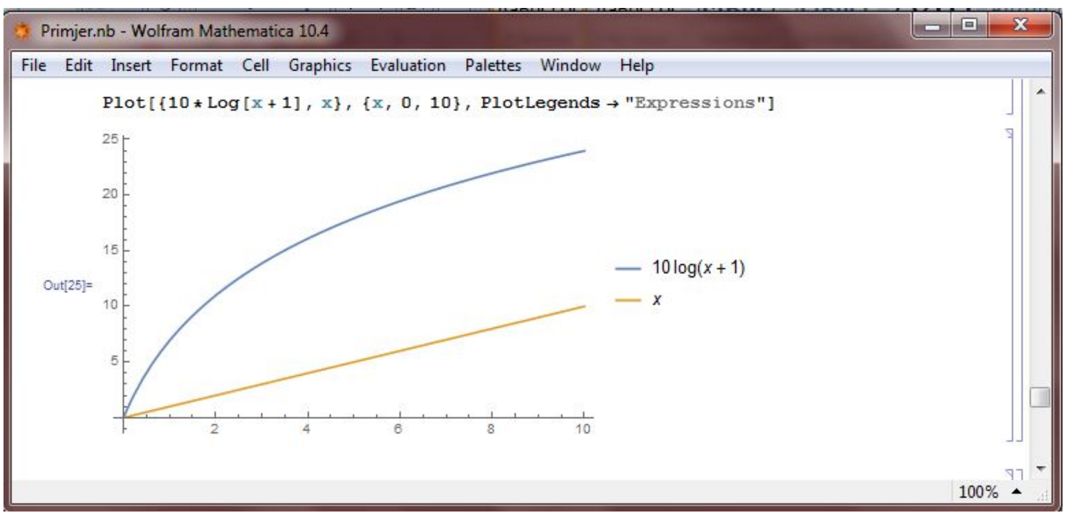


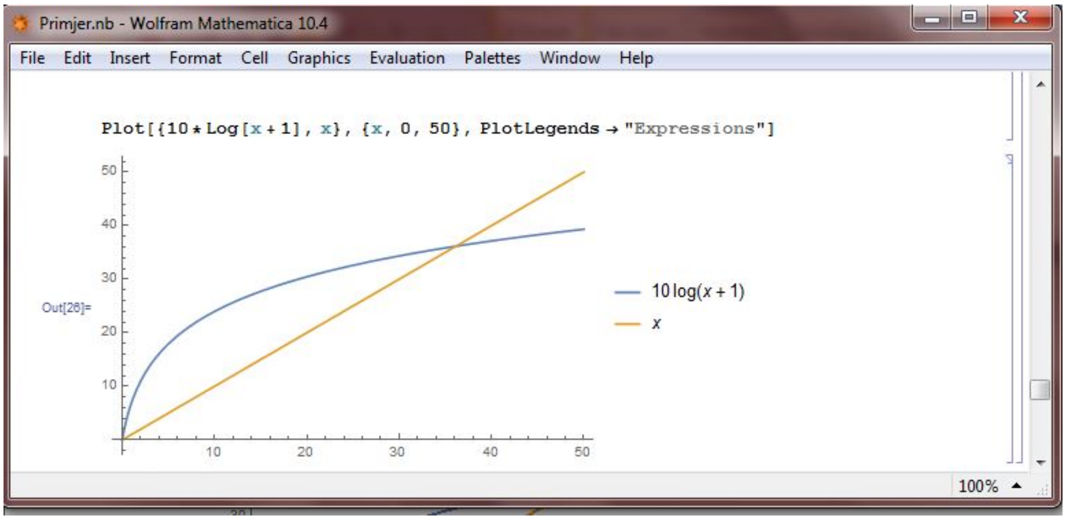
Iz numeričkih vrijednosti, ali i iz grafa, zaključujemo da Ivanova korist raste s porastom broja posjeta kinu, ali sve sporije i sporije. Korisnost pokazuje opadajuće prinose.
Za Anu, to izgleda ovako:



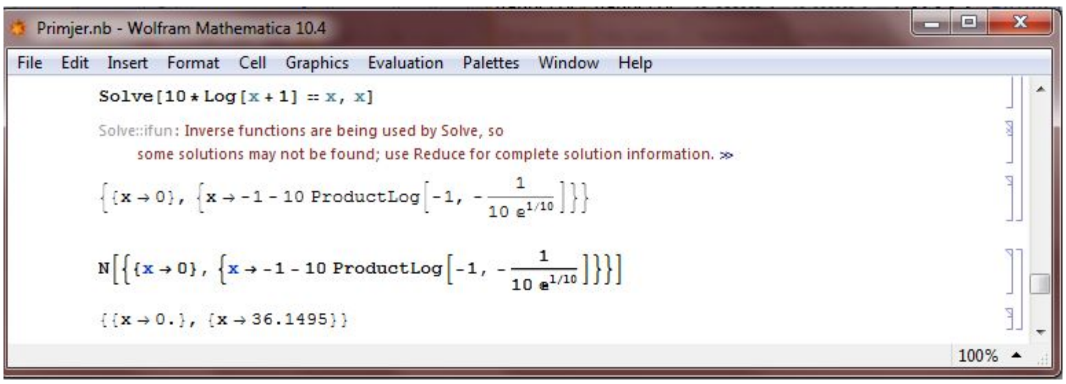
Iz numeričkih vrijednosti, ali i iz grafa, zaključujemo da Anina korist raste s porastom broja posjeta kinu i to linearno. Tj., za svaki novi posjet kinu korisnost poraste za 1*. Korisnost pokazuje konstantne prinose.*

2. *Nacrtat ćemo grafove za različite intervale varijable* x*.*





3. *Iz gornjeg grafa je vidljivo da su korisnosti jednake u ishodištu, dakle za $x = 0$, te iznose 0. Računamo koordinate drugog sjecišta ovih dviju krivulja. U tu svrhu, potrebno je riješiti sljedeću jednadžbu:* $10 \ln(x+1) = x$.



Dakle, za broj posjeta od 1 *do* 36*, Ivanovo zadovoljstvo je veće jer je graf njegove funkcije korisnosti iznad grafa Anine korisnosti. Od* 37*. posjeta nadalje, Anino zadovoljstvo je veće.*

Primjer 2.53 *Zadana je količina proizvodnje jednog poduzeća na sljedeći način:*

$$Q(K) = \ln K$$

gdje je Q *količina proizvodnje, a* K *je količina kapitala.*

1. *Za koje je količine kapitala ova funkcija proizvodnje definirana?*

2. *Izračunajte proizvedenu količinu na razini kapitala* $K = 5$.

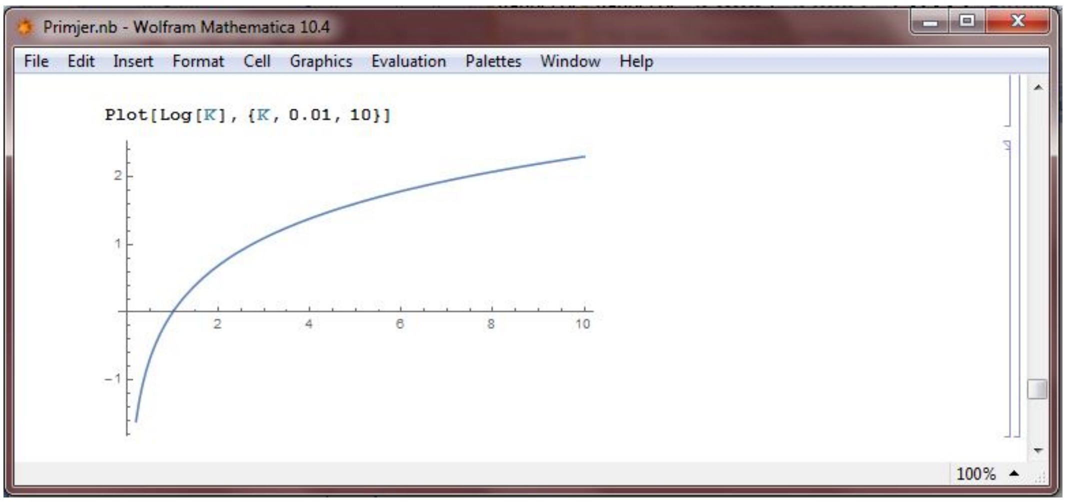
3. *Grafički prikažite funkciju količine proizvodnje. Komentirajte prinose.*

4. *Ukoliko je jedinična prodajna cijena proizvoda* 100, *a jedinični trošak kapitala* 25, *izvedite funkciju dobiti kao funkciju količine kapitala. Grafički je prikažite.*

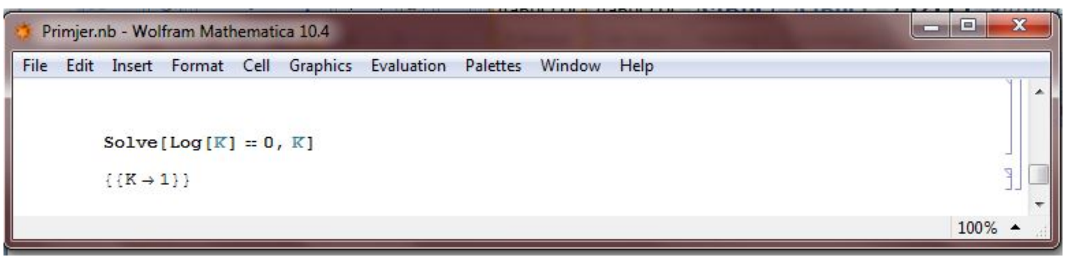
5. *Izračunajte točku pokrića i komentirajte.*

Rješenje.

1. *Kao prvo, argument logaritma mora biti pozitivan. Dakle,* $K > 0$. *Također, količina proizvodnje je nenegativna veličina, pa matematički rješavamo jednadžbu* $Q(K) \geq 0$, *tj.* $\ln K \geq 0$. *Pomoći ćemo se ukoliko funkciju prikažemo grafički.*

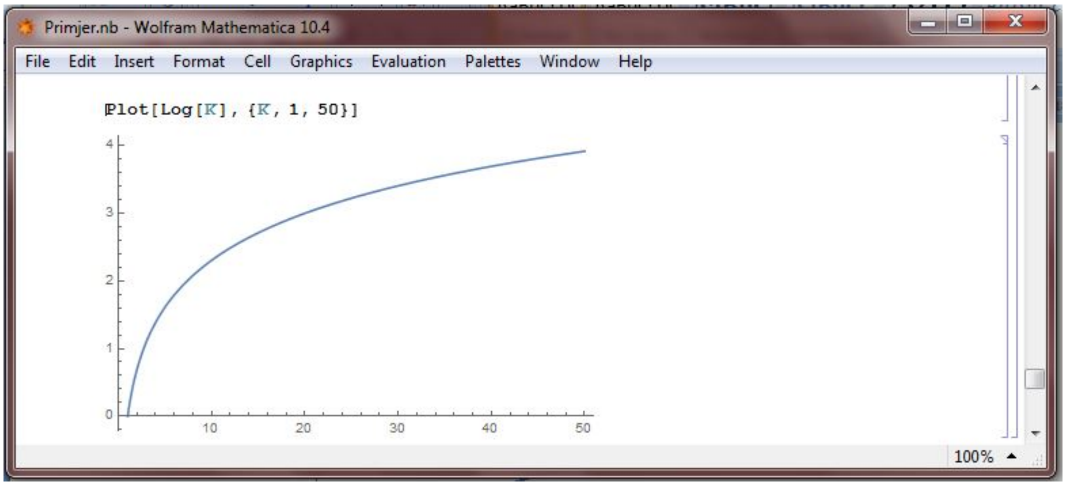


Da bismo riješili nejednadžbu $\ln K \geq 0$, *rješavamo jednadžbu* $\ln K = 0$. *Slijedi da je* $K = 1$. *Zaključujemo da je* $\ln K \geq 0$ *za* $K \geq 1$. *Dakle, ova funkcija proizvodnje je definirana za* $K \geq 1$.

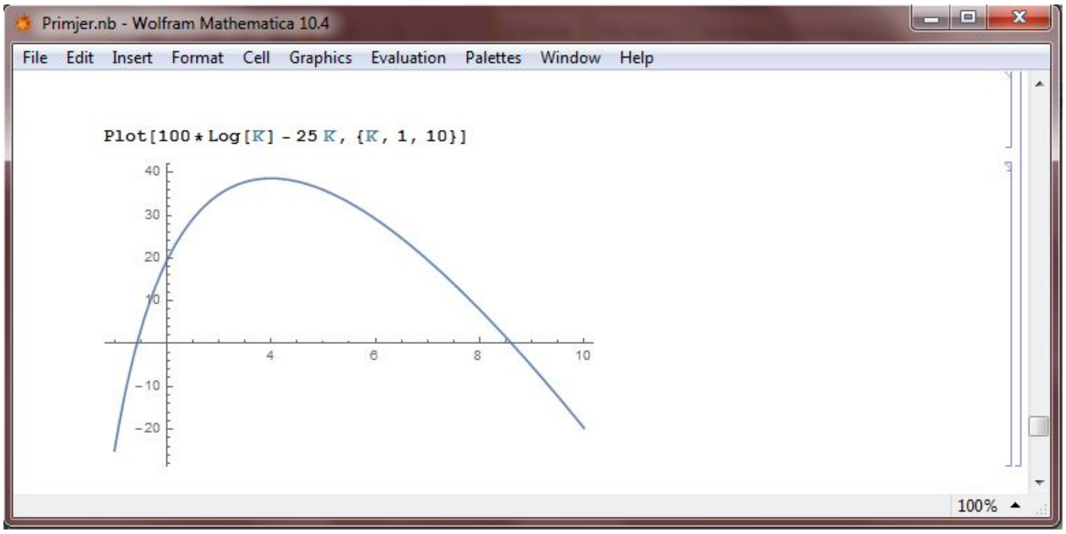


2. $Q(5) = \ln 5 = 1.6094$

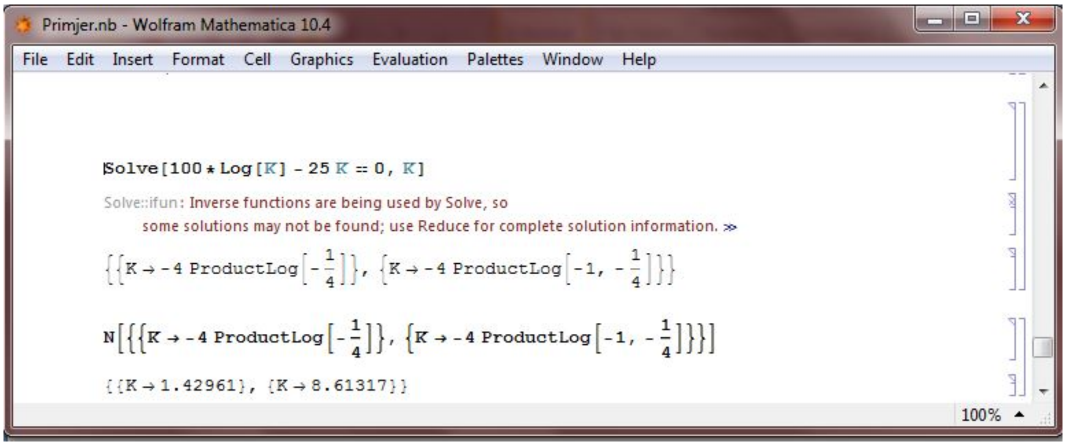
3. *Funkcija pokazuje opadajuće prinose.*



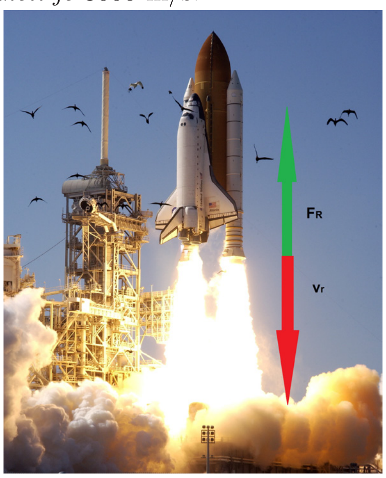
4. *Dobit je jednaka razlici ukupnog prihoda i ukupnih troškova. Prihod je jednak umnošku jedinične cijene i količine proizvoda, a trošak je jednak umnošku jediničnog troška i količine kapitala. Dakle, dobit kao funkcija količine kapitala je:* $D(K) = 100 \cdot Q(K) - 25K = 100 \ln K - 25K$.



5. *Poduzeće je profitabilno kad je dobit pozitivna. Dobit je pozitivna između dvije nul-točke koje predstavljaju točke pokrića. Da bismo izračunali točke pokrića, rješavamo jednadžbu:* $100 \ln K - 25K = 0$.



Primjer 2.54 *Raketa početne mase* 3000 *kilograma lansirana je iz mirovanja vertikalno uvis. Brzina izbacivanja plinova u odnosu prema raketi je* 3000 m/s.



Odredite:

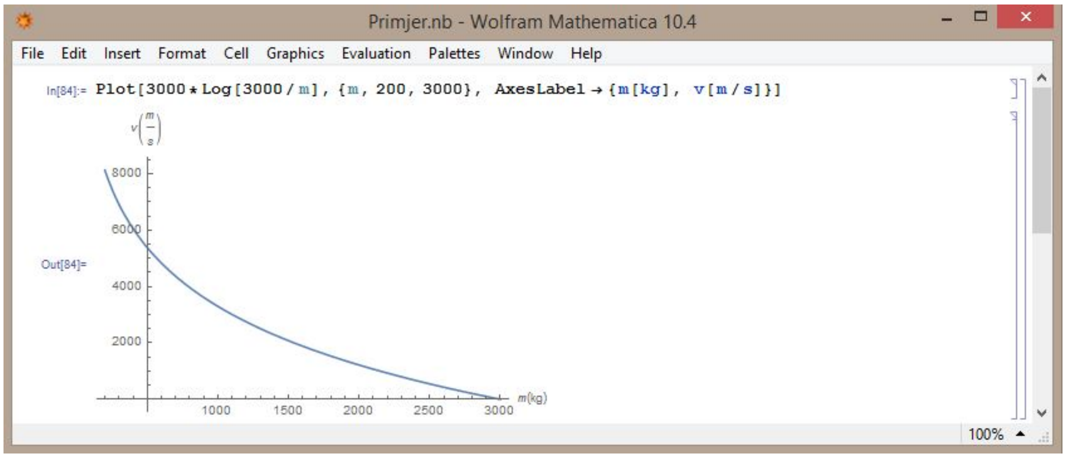
1. *ovisnost brzine rakete o masi rakete* $v(m)$ *ako se zanemari gravitacijska sila, grafički prikažite ovisnost (masa rakete bez goriva* $m_r = 200$ kg*)*

2. *za koliko će se smanjiti masa rakete u trenutku kada dosiže prvu kozmičku brzinu (*$v = 7.9$ km/s*)*

3. *kolika će biti brzina rakete u trenutku kada potroši svo gorivo.*

Rješenje.

1. *Raketa se giba tako da se izgaranjem goriva razvijaju plinovi koji izlaze kroz mlaznice rakete velikom brzinom. Iz jednadžbe gibanja rakete može se izvesti izraz za brzinu (ako se zanemari gravitacijska sila npr. u svemiru):* $v(m) = v_0 + v_p \ln \frac{m_0}{m}$*,* v_0 *je početna brzina rakete,* v_p *je brzina plinova,* m_0 *je početna masa rakete.*
   Tijekom gibanja masa rakete se mijenja od početne $m_0 = 3000$ kg *do konačne* $m_r = 200$ kg *(raketa bez goriva). Početna brzina rakete je* $v_0 = 0$ m/s.
   Grafička ovisnost $v(m) = 3000 \cdot \ln \frac{3000}{m}$ *dana je na slici:*



2. *Masa rakete u trenutku kada dostiže prvu kozmičku brzinu* $v = 7.9$ km/s *je:* $m = m_0 e^{\frac{-v}{v_p}} = 215.5$ kg.

3. *U trenutku kada je raketa potrošila svo gorivo njezina brzina je* 8124.15 m/s.

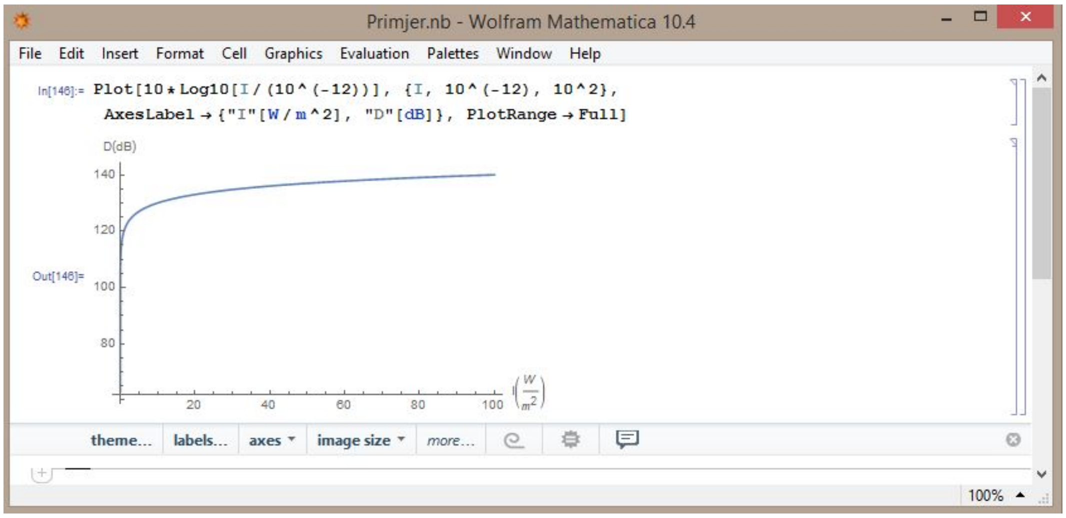
Primjer 2.55 *Valovi zvuka su longitudinalni valovi koji se šire u sredstvu. U plinovima su povezani s periodičnim promjenama tlaka pri čemu se amplituda tlaka može izraziti kao* $\Delta p_m = v\rho\omega A$ *(*v *je brzina širenja zvuka,* ρ *je gustoća sredstva,* $\omega = 2\pi f$*,* f *kružna frekvencija,* A *amplituda pomaka čestica zraka). Intenzitet zvučnog vala (snaga/površina) je* $I = \frac{1}{2}v\rho\omega^2 A^2$*. Uobičajeno je uvesti logaritamsku skalu za izražavanje intenziteta koju izražavamo kao razinu buke:* $D = 10\log\frac{I}{I_0}$ *(*I_0 *je intenzitet na pragu čujnosti). Odredite:*

1. *grafički prikaz ovisnost razine buke* D *o intenzitetu* I *za* $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 *(granica čujnosti za zvuk frekvencije* $f = 1$ kHZ*). Za* I *uzmite vrijednosti (*10^{-12}, 10^{-11}, 10^{-10}, 10^{-9}, 10^{-8}, 10^{-7}, 10^{-6}, 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 1, 10^2*)* W/m^2*. Potražite na internetu izvore koji daju takvu razinu buke.*

2. *kolikom amplitudom titra zvučni val s intenzitetom na pragu čujnosti (*$I_0 = 10^{-12}$ W/m^2*, frekvencija* $f = 1$ kHz*, gustoća zraka* $\rho = 1.2$ kg/m^3*, brzina zvuka* $v = 343$ m/s*)*

Rješenje.

1. *Graf funkcije*



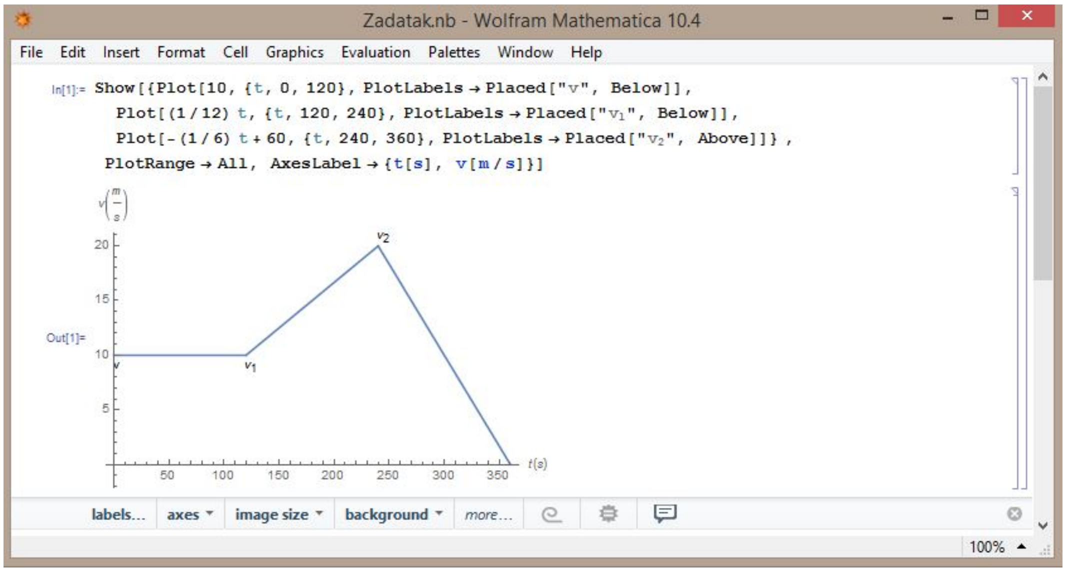
Intenzitet I(W/m^2)	Razina buke D(dB)	Izvor buke
10^{-12}	0	*prag čujnosti*
10^{-11}	10	*treperenje lišća*
10^{-10}	20	*šapat*
10^{-9}	30	*žamor*
10^{-8}	40	*radio*
10^{-7}	50	*razgovor*
10^{-6}	60	*glasniji razgovor*
10^{-5}	70	*buka u prometu*
10^{-4}	80	*usisavač za prašinu*
10^{-3}	90	*buka teškog kamiona*
10^{-2}	100	*sirena*
10^{-1}	110	*motorna pila*
1	120	*rock koncert*
10^{2}	140	*avion*

2. Iz izraza $I = \frac{1}{2}v\rho\omega^2 A^2$ *dobijemo da je* $A = 10^{-11}$ *metara. Vidimo da je uho izvanredno osjetljivo na male pomake zrake tj. vrlo je dobar instrument za detekciju valova zvuka.*

2.5 Zadaci za vježbu

Zadatak 2.1 *Petar je motociklom krenuo u grad. Prve* 2 *minute vozio je stalnom brzinom od* 10 m/s*, nakon toga je ubrzao stalnim ubrzanjem i nakon sljedeće* 2 *minute je dosegao brzinu od* 20 m/s*. U sljedeće* 2 *minute je naglo kočio i stao. Grafički prikažite ovisnost brzine o vremenu.*

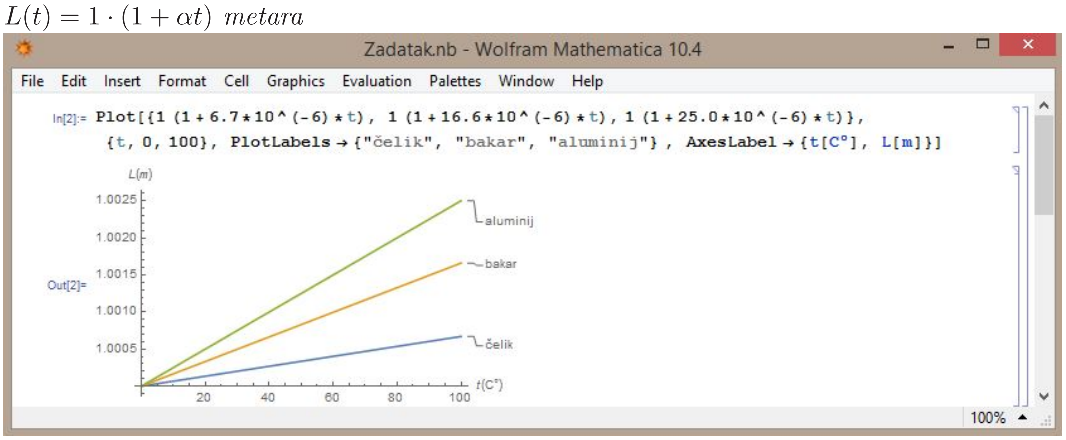
Rješenje.



Prve 2 minute brzina gibanja je bila stalna i iznosila je 10 m/s. *U sljedeće 2 minute gibanje je bilo jednoliko ubrzano s ubrzanjem* $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10 \text{ m/s}}{120 \text{ s}} = 0.083 \text{ ms}^{-2}$ *pa je brzina* $v = at$.
Brzina na kraju ubrzavanja iznosila je $v_1 = v_0 + a_1 t = 20$ m/s. *Kočenje je trajalo 2 minute pa je usporavanje iznosilo* $a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10 \text{ m/s}}{120 \text{ s}} = 0.083 \text{ m/s}^2$. *Brzina pri usporenom gibanju je* $v_2 = v_1 - a_2 t$, $a_2 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{20 \text{ m/s}}{120 \text{ s}} = 0.17 \text{ m/s}^2$ *(zaokruženo s 0.16).*

Zadatak 2.2 *Na temperaturi* 0°C *duljina šipki napravljenih od različitih materijala je jednaka* 1 *metar. Grafički prikažite ovisnost duljine šipki o temperaturi u intervalu* $(0 - 100)$°C *ako su zadani koeficijenti linearnog rastezanja materijala za čelik* $(6.7 \cdot 10^{-6}/°\text{C})$, *bakar* $(16.6 \cdot 10^{-6}/°\text{C})$ *i aluminij* $(25.0 \cdot 10^{-6}/°\text{C})$. *Uputa: promjena duljine s temperaturom dana je izrazom* $L(t) = L_0\,(1 + \alpha t)$; L_0 *je duljina na* 0°C, α *je koeficijent linearnog rastezanja,* t *je temperatura u* 0°C.
Rješenje.

$L(t) = 1 \cdot (1 + \alpha t)$ *metara*



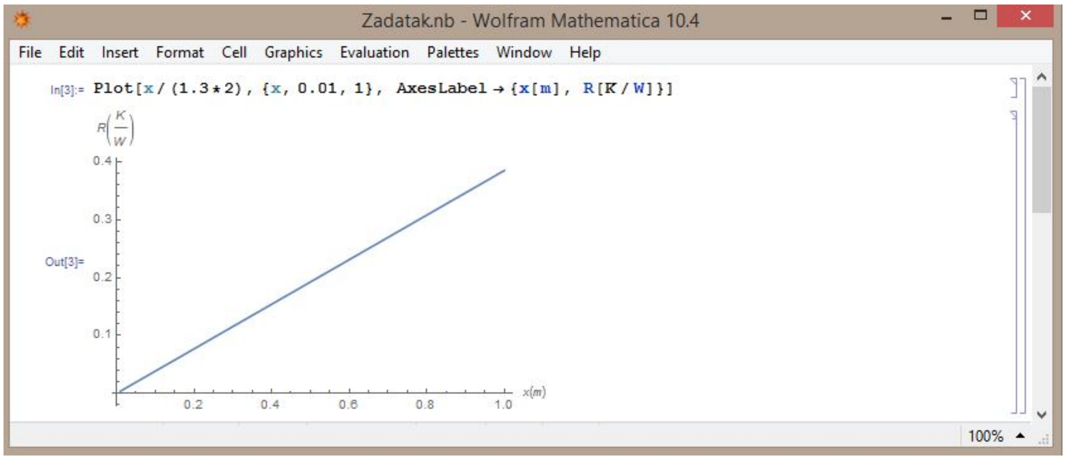
Zadatak 2.3 *Toplinska vodljivost betona je* 1.3 W/mK. *Odredite:*

1. *ovisnost toplinskog otpora o debljini betonskog zida ako se debljina zida može mijenjati od* 1 *centimetra do* 1 *metra za površinu veličine* 2 m^2, *prikažite grafički.*

2. *za koliko će se promijeniti toplinski gubitak ako se s unutrašnje strane zida debljine* 30 *centimetra stavi cementna žbuka debljine* 4 *centimetra* ($\lambda = 0.8$ W/mK)*? Temperatura u prostoriji je* 22°C*, a vanjska temperatura* 0°C.

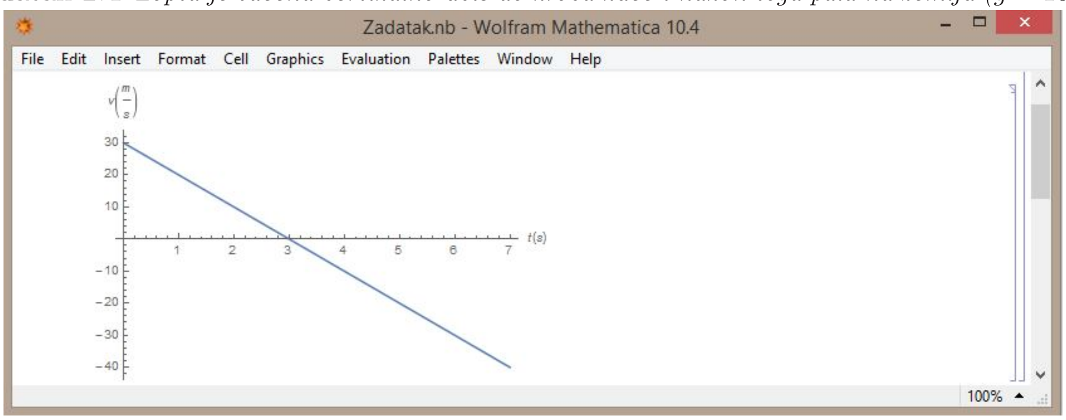
Rješenje.

1. $R = \frac{\Delta x}{1.3 \cdot 2}$ *; za* Δx *uzeti* (0.01 − 1) *metara*



2. $R_1 = \frac{0.3}{1.3 \cdot 2} = 0.115$ K/W, $R_2 = \frac{0.04}{0.8 \cdot 2} = 0.025$ K/W, $R = R_1 + R_2 = 0.14$ K/W
Toplinski gubitci: $q_1 = \frac{\Delta T}{R_1 S} = \frac{22}{0.115 \cdot 2} = 95.65$ W/m^2, $q = \frac{\Delta T}{RS} = \frac{22}{0.14 \cdot 2} = 78.57$ W/m^2
Toplinski gubitci će biti manji za 17 W/m^2.

Zadatak 2.4 *Lopta je bačena vertikalno uvis do krova kuće i nakon toga pala na zemlju* ($g = 10$ m/s^2).



Iz ovisnosti vertikalne komponente brzine o vremenu odredite:

1. *brzinu kojom je lopta bačena*
2. *vrijeme uspinjanja lopte*
3. *visinu krova.*

Rješenje.

1. $v_0 = 30$ m/s

2. $t = 3$ *sekunde*

3. *Vrijeme uspinjanja je jednako vremenu slobodnog pada* (3 s $+ 3$ s)*, pa je* $h = \frac{1}{2}gt^2 = 45$ m.

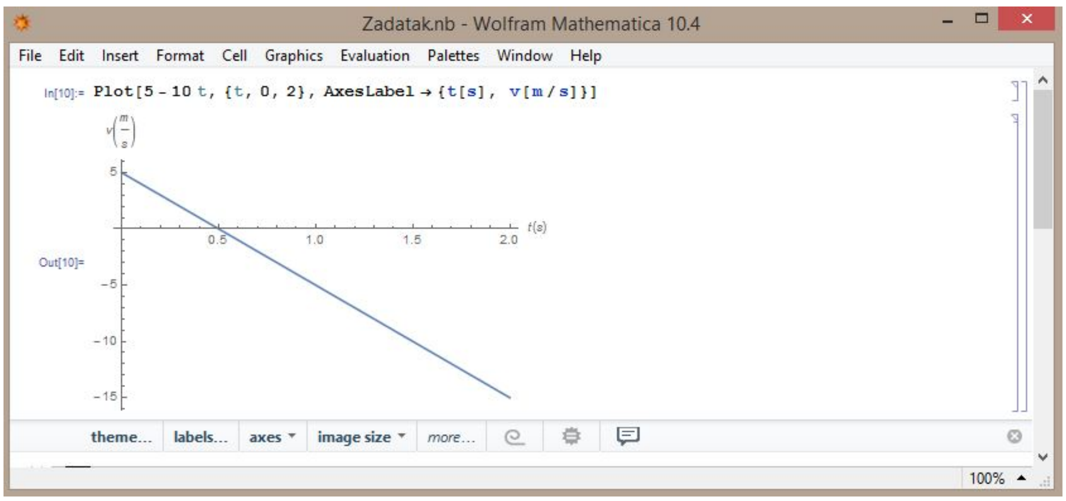
Zadatak 2.5 *Kamen bačen početnom brzinom* v_0 *vertikalno uvis padne na zemlju nakon* 1 *sekunde (zanemarite silu otpora,* $g = 10$ m/s^2*). Odredite:*

1. ovisnost brzine o vremenu (prikažite grafički)

2. do koje visine će se kamen popeti.

Rješenje.

1. $v(t) = v_0 - gt$, *za* $t = 0.5$ *sekundi,* $v_0 = 5$ m/s, $v(t) = 5 - 10t$



2. $H_m = \frac{v_0^2}{2g}$, $H_m = 1.25$ m

Zadatak 2.6 *Čestica se giba u horizontalnoj ravnini* $\langle xy \rangle$*. U trenutku* $t = 0$ *sekundi nalazi se u točki* $(0, 0)$ *i ima početnu brzinu* 20 cm/s *u smjeru* x *osi. Istovremeno na česticu djeluje ubrzanje u* y *smjeru od* 5 cm/s^2*. Odredite:*

1. putanju čestice u $\langle xy \rangle$ *ravnini u prvih* 15 *sekundi gibanja*

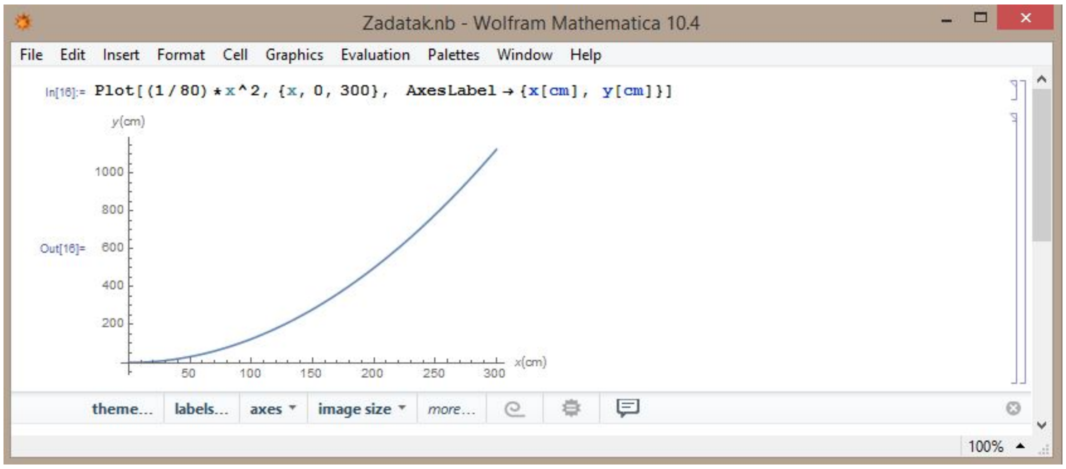
2. pomak čestice od ishodišta nakon 15 *sekundi*

3. iznos i smjer brzine čestice nakon 15 *sekundi.*

Rješenje.

1. $x = v_{0x}t = 20 \cdot t$ cm ; $y = \frac{1}{2}5 \cdot t^2$ cm

$y = \frac{1}{2}5 \cdot t^2 = \frac{5}{2}\left(\frac{x}{20}\right)^2 = \frac{x^2}{80}$



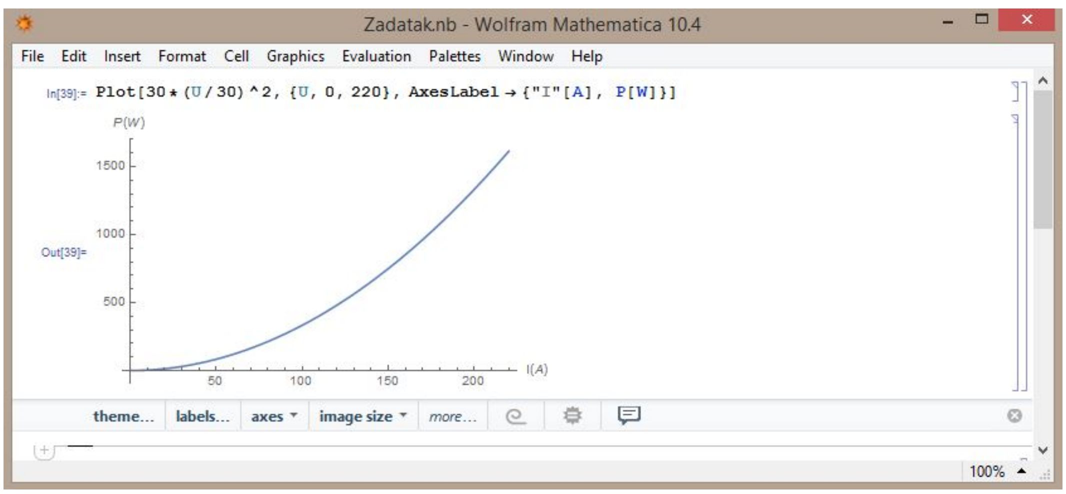
2. $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 29.4$ cm

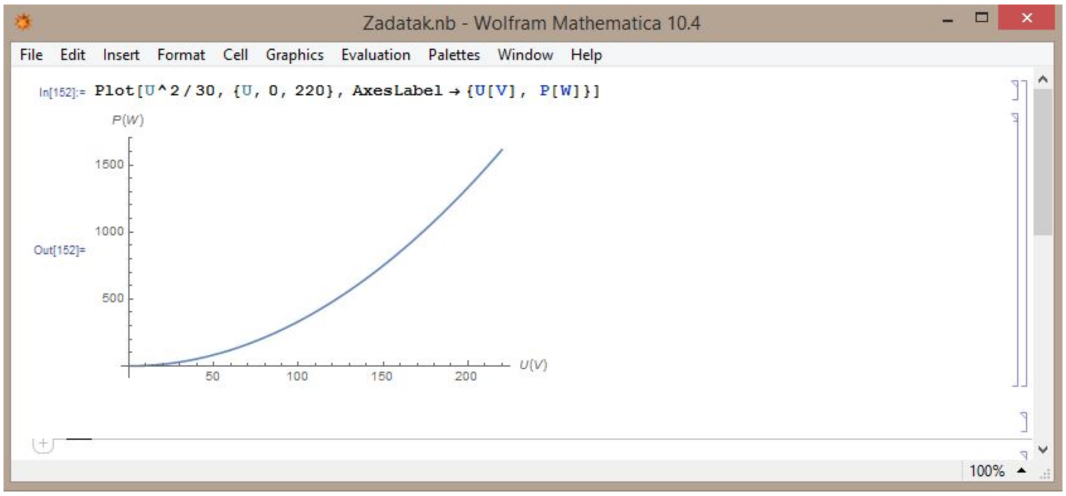
3. $tg\vartheta = \frac{v_y}{v_x} = 3.75$, $\vartheta = 75°$.

Zadatak 2.7 *Otpornik električnog otpora* 30 Ω *spojen je na izvor napona. Napon izvora se može mijenjati od* 10 *do* 220 V*. Grafički prikažite ovisnost snage električne struje o naponu izvora i jakosti struje. Snaga je* $P = RI^2$*, Ohmov zakon:* $U = RI$.

Rješenje.

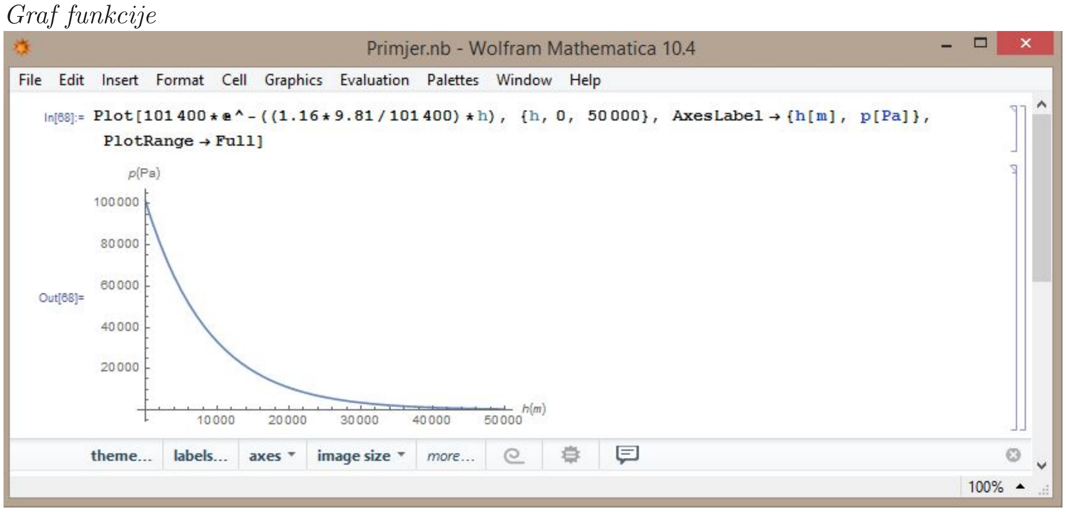
Grafički treba prikazati ovisnosti: $P = RI^2$ *i* $P = \frac{U^2}{R}$.





Zadatak 2.8 *Izračunajte tlak na vrhu Marjana ($h = 178$ metara) ako znamo da je u njegovom podnožju tlak $p_0 = 101400$ Pa, a $\rho_0 = 1.16$ kg/m^3.*
Nacrtajte na računalu funkciju sa zadanim vrijednostima i komentirajte dobiveni graf. Povećajte vrijednosti na osi apscisa kako biste dobili precizniji graf.
Uputa: vidite primjer 2.43.

Rješenje. $p\,(h) = 101400e^{-\frac{1.16\cdot 9.81}{101400}\cdot 178} = 83039.23$ Pa
Graf funkcije



Zadatak 2.9 *Arheolog je pronašao fosil nepoznate starosti. Za određivanje starosti ostataka živih organizama koristi se metoda određivanja sadržaja radioaktivnog izotopa ^{14}C, koji ima vrijeme poluraspada 5730 godina. Izotop se nalazi u Zemljinoj atmosferi. Kada organizam umre, prestane uzimati ^{14}C, pa znajući količinu ^{14}C u trenutku smrti i trenutačno izmjerenu aktivnost možemo odrediti koliko je vremena prošlo od smrti do trenutka mjerenja.*

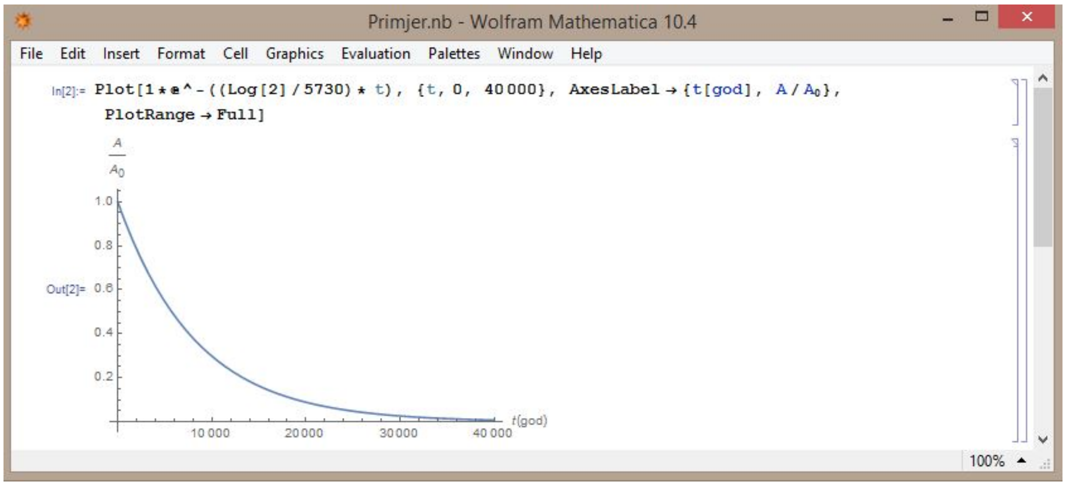
1. *Odredite starost fosila ako je aktivnost u trenutku mjerenja 5 puta manja od početne u trenutku $t = 0$. Aktivnost je dana izrazom $A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$, gdje je A_0 početna aktivnost, t vrijeme, a konstanta $\lambda = \frac{\ln 2}{5730}$.*

2. *Nacrtajte promjenu aktivnosti $\frac{A}{A_0}$ s vremenom.*

Rješenje.

1. $R\,(t) = \frac{1}{5}A_0 = A_0 e^{-\lambda t}$
   $\ln\frac{1}{5} = -\lambda t$
   $t = \frac{-\ln\frac{1}{5}}{\lambda} = \frac{\ln 5}{\lambda} = \frac{\ln 5}{\frac{\ln 2}{h}} = \frac{5730 \cdot \ln 5}{\ln 2} = 13304.65$

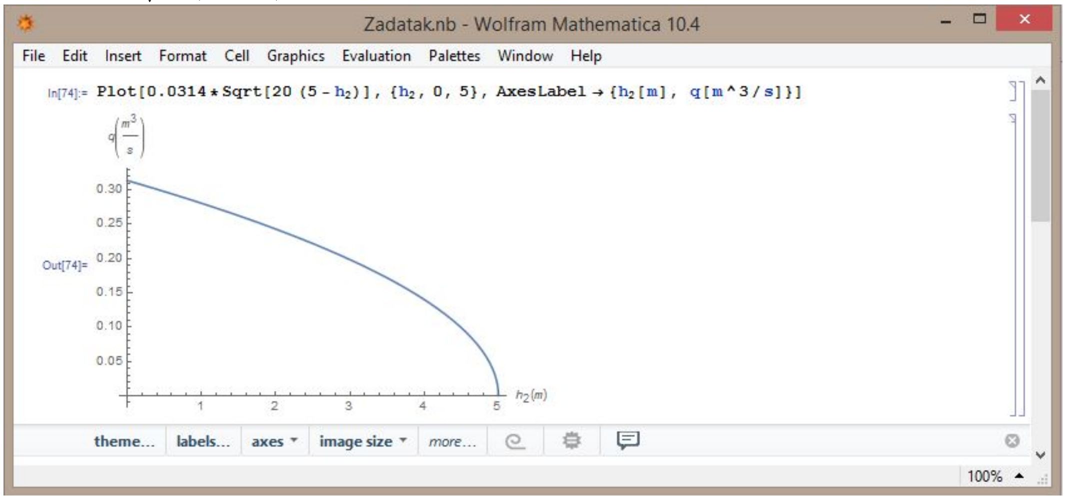
2. *Graf funkcije*



Zadatak 2.10 *Otvoreni spremnik s vodom napunjen je do visine $h_1 = 5$ m. Na stijenci spremnika se na visini h_2 od dna spremnika nalazi mali otvor. Primjenom Bernoullijeve jednadžbe za presjeke S_1 i S_2 (slika) odredite ovisnost protoka kroz otvor na stijenci o visini otvora h_2 ako je otvor kružnog presjeka polumjera $r_2 = 0.1$ m (nacrtajte graf). Protok $q = S_2 \cdot v_2 = r_2^2 \cdot \pi\sqrt{2g(h_1 - h_2)}$.*

Rješenje.

$v_2 = 0.0314\sqrt{20(5-h_2)}$



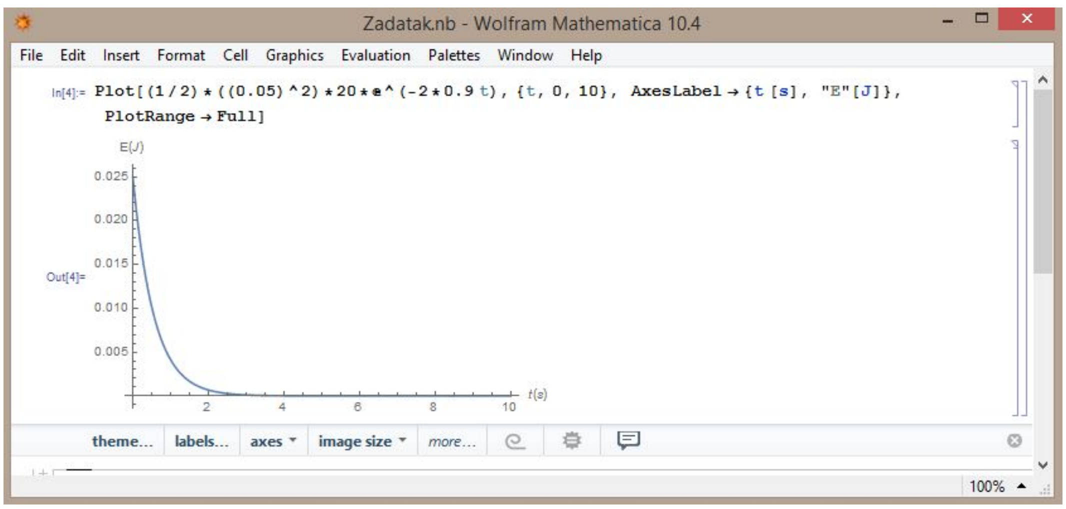
Zadatak 2.11 *Uteg obješen je na oprugu titra pod utjecajem elastične sile. Početna amplituda titranja je* 5 *centimetra, konstanta elastičnosti* 10 N/m. *Zbog djelovanja sile otpora zraka uteg će se nakon nekog vremena zaustaviti. Ako je sila otpora proporcionalna brzini gibanja utega za slučaj slabog prigušenja odredite:*

1. *vremensku promjenu energije titranja za faktor prigušenja* $\delta = 0.9\ \mathrm{s}^{-1}$ *(prikažite grafički). Energija titranja je:* $E(t) = \frac{1}{2}A_0^2 k \cdot e^{-2\cdot\delta\cdot t}$

2. *nakon koliko vremena će energija pasti za faktor prigušenja.*

Rješenje.

1. $E(t) = \frac{1}{2}(0.05)^2 \cdot 20 \cdot e^{-2\cdot 0.9\cdot t}$, *za* t *uzeti* $(0, 10)$ *sekundi.*



2. $E(t) = \frac{1}{2}A_0^2 k \cdot e^{-2\cdot\delta\cdot t} = \frac{1}{2}A_0^2 k \cdot \frac{1}{e}$, $t = \frac{1}{2\delta} = 0.56$ s

Zadatak 2.12 *Linearni koeficijent prigušenja olova za γ zrake energije* 1 MeV *je* 0.8 cm^{-1}.

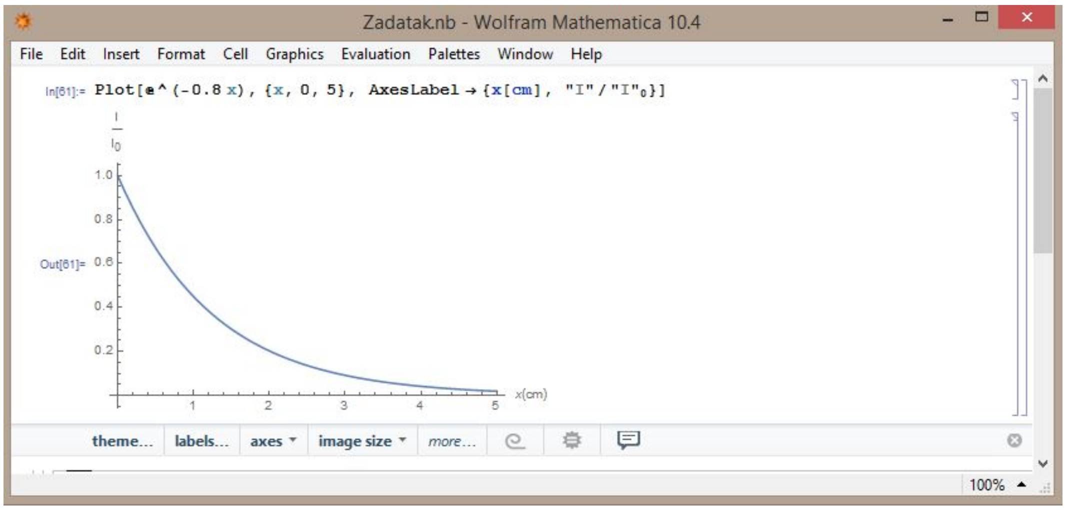
1. *Odredite debljinu sloja betona potrebnu da bi se intenzitet kolimiranog snopa γ-zraka energije* 1 MeV *smanjio za faktor* 10^3.

2. *Grafički prikažite ovisnost I/I_0 u ovisnosti o debljini sloja materijala kroz koje je prošlo γ zračenje.*

Rješenje.

1. $\frac{I(x)}{I_0} = 10^{-3}e^{-0.8x}$, $x = \frac{10^{-3}}{0.8} = 1.25$ cm

2. *Graf funkcije*



Zadatak 2.13 *Linearni koeficijent apsorpcije biološkog tkiva za γ zrake energije* 1 MeV *jest* 7 m^{-1}.

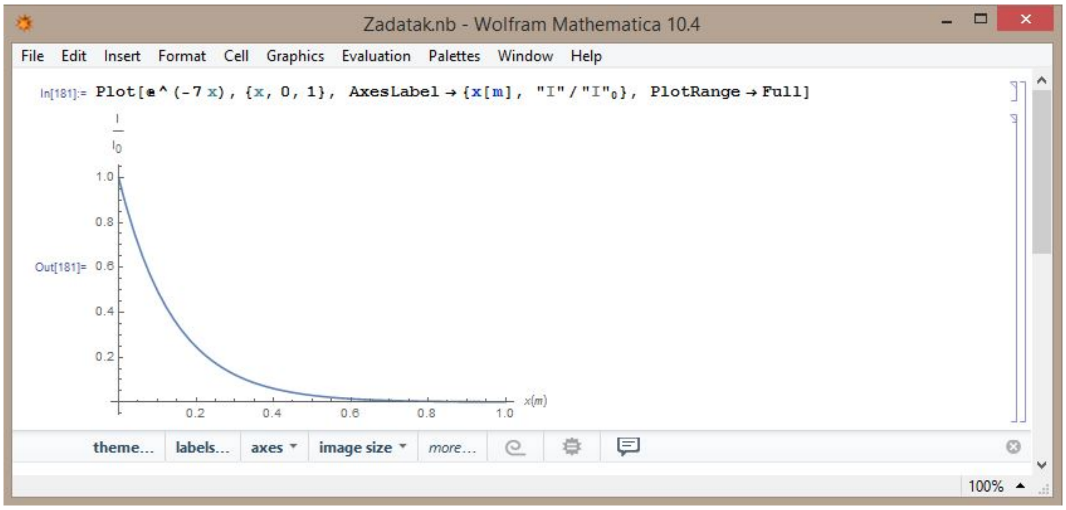
1. *Odredite debljinu tkiva koja smanjuje intenzitet upadnih zraka na polovicu.*

2. *Grafički prikažite ovisnost I/I_0 u ovisnosti o debljini tkiva kroz koje je prošlo γ zračenje.*

Rješenje.

1. $d_{1/2} = \ln 2/\mu = 0.1$ m
   $\frac{I(x)}{I_0} = e^{-7x}$

2. *Graf funkcije*



Zadatak 2.14 *Vodena pumpa dok je u pogonu ima razinu buke od* 47 *decibela, dok perilica posuđa ima razinu buke od* 59 *decibela. Razina buke je*

$$D = 10\log\frac{I}{I_0}$$

gdje je I intenzitet zvuka te je I_0 najslabiji zvuk koje ljudsko uho može čuti. Koliko je intenzivniji zvuk perilice posuđa od vodene pumpe?
Rješenje.
$D = 10\log\frac{I}{I_0}$
$47 = 10\log\frac{I_{VP}}{I_0}$, $59 = 10\log\frac{I_{PP}}{I_0}$
$\frac{I_{PP}}{I_{VP}} = \frac{10^{5.9}I_0}{10^{4.7}I_0} = 10^{1.2} = 15.85$

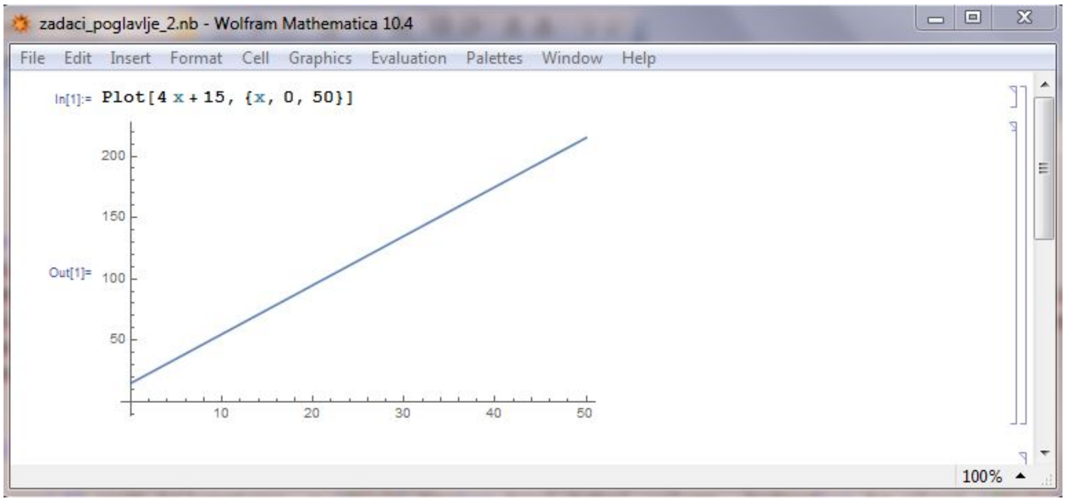
Zadatak 2.15 *Za vrijeme rock koncerta na pozornici na je izmjerena razina buke od $D_2 = 120$ dB. Odredite omjer intenziteta zvuka I_2 rok sastava u odnosu na intenzitet I_1 pneumatskog čekića koji proizvodi buku razine* 90 dB. *Udaljenosti od točke mjerenja razine buke do izvora su jednake u oba slučaja.*
Rješenje.
$D_2 - D_1 = 10\log\frac{I_2}{I_1}$, $\frac{I_2}{I_1} = \log^{-1}(\frac{D_2-D_1}{10}) = 10^3$

Zadatak 2.16 *Taksi služba naplaćuje* 15 *kuna početak usluge, a zatim svaki kilometar* 4 *kune.*

1. *Odredite jednadžbu taksi usluge i imenujte je.*
2. *Nacrtajte graf usluge prijevoza putnika i komentirajte graf.*
3. *Interpretirajte matematički koeficijent uz varijablu koja predstavlja broj kilometara u modelu podzadatka (1).*
4. *Ispišite tablicu svih mogućih troškova ako je maksimalan broj kilometara koji taksist može proći jednak* 50*, počevši od broja kilometara jednakog* 1 *s intervalom* 5*. Komentirajte porast ukupnog troška.*
5. *Povežite podzadatak (4) s domenom i slikom funkcije.*

Rješenje.

1. *Neka je x broj pređenih kilometara, a $f(x)$ troškovi taksi usluge. Jednadžba glasi $f(x) = 4x + 15$.*
2. *Graf je pravac.*



3. *Koeficijent smjera je 4. Za svaki prijeđeni kilometar, troškovi se povećavaju za 4.*
4. *Tablica:*

Broj kilometara	*Ukupan trošak*
1	19
5	35
10	55
15	75
20	95
25	115
30	135
35	155
40	175
45	195
50	215

   Na svakih 5 kilometara, ukupan trošak raste za 20.

5. *Domena je $\mathcal{D} = [0, 50]$.*
   Slika funkcije je $\mathcal{R} = [15, 215]$.

Zadatak 2.17 *Po cijeni od 120 kuna po kutiji banana, u ponudi je 240000 kutija, a potražnja je 60000 kutija. Po cijeni od 60 kuna po kutiji banana, u ponudi je 60000 kutija, a potražnja je 360000 kutija.*

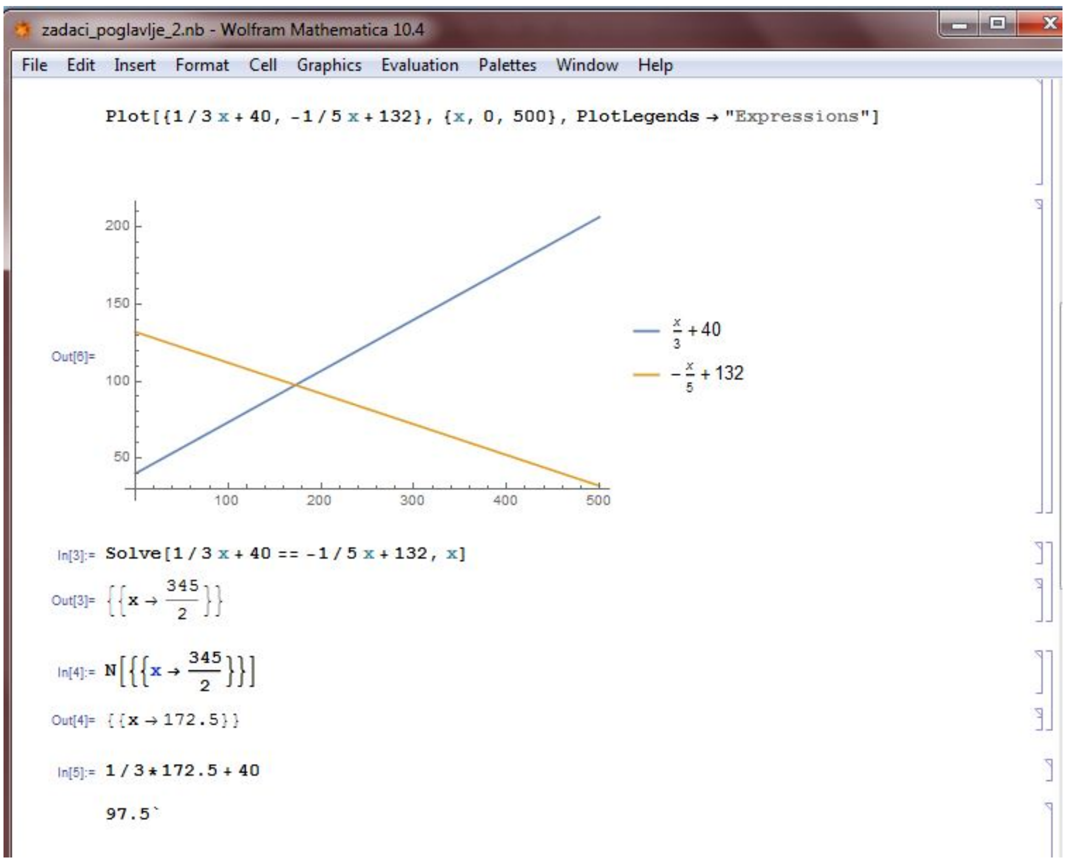
1. *Odredite jednadžbu cijene i ponude u obliku $p = mx+b$, gdje je p cijena u kunama i x odgovarajuća ponuda u količini 1000 kutija.*

2. *Odredite jednadžbu cijene i potražnje u obliku $p = mx + b$, gdje je p cijena u kunama i x odgovarajuća potražnja u količini 1000 kutija.*

3. *Nacrtajte grafove cijena-ponuda i cijena-potražnja u istom koordinatnom sustavu i nađite točku sjecišta pravaca.*

Rješenje.

1. $p(x) = \frac{1}{3}x + 40$
2. $p(x) = -\frac{1}{5}x + 132$
3. *Grafovi:*



Zadatak 2.18 *Prikazana je jednadžba linearnog regresijskog modela visine drveta jele*

$$h = 4.2r + 15.25$$

gdje je r izražen u Dbh (prsni promjer debla u centimetrima) i h je visina u metrima.

1. *Odredite koeficijent smjera pravca, odredite što se dogodi ako nastane porast za* 1 *centimetar u promjeru te nacrtajte graf.*

2. *Odredite visinu jele ako je promjer* 10 *centimetra.*

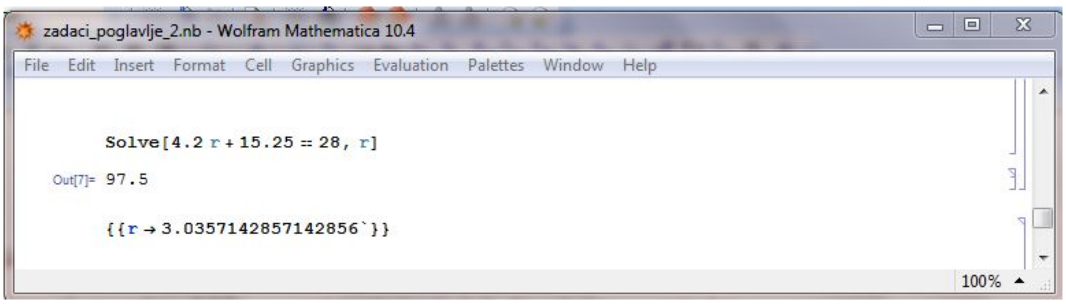
3. *Odredite promjer jele koja je visoka* 28 *metara.*

Rješenje.

1. *Koeficijent smjera pravca je* 4.2. *Ako se promjer poveća za* 1 *cm, visina će se povećati za* 4.2 *metra.*

2. $h = 4.2 \cdot 10 + 15.25 = 57.25$

3. *Rješavamo jednadžbu:*



Zadatak 2.19 *Privatna tvrtka radi izvještaj za mjesečni trošak prirodnog plina za pojedine kupce. Za prvih* 20 m^3 *cijena iznosi* 3.5 *kune po kubiku, za sljedećih* 30 m^3 *cijena iznosi* 3 *kune po* m^3*, a iznad* 50 m^3 *cijena iznosi* 2.8 *kuna po* m^3.

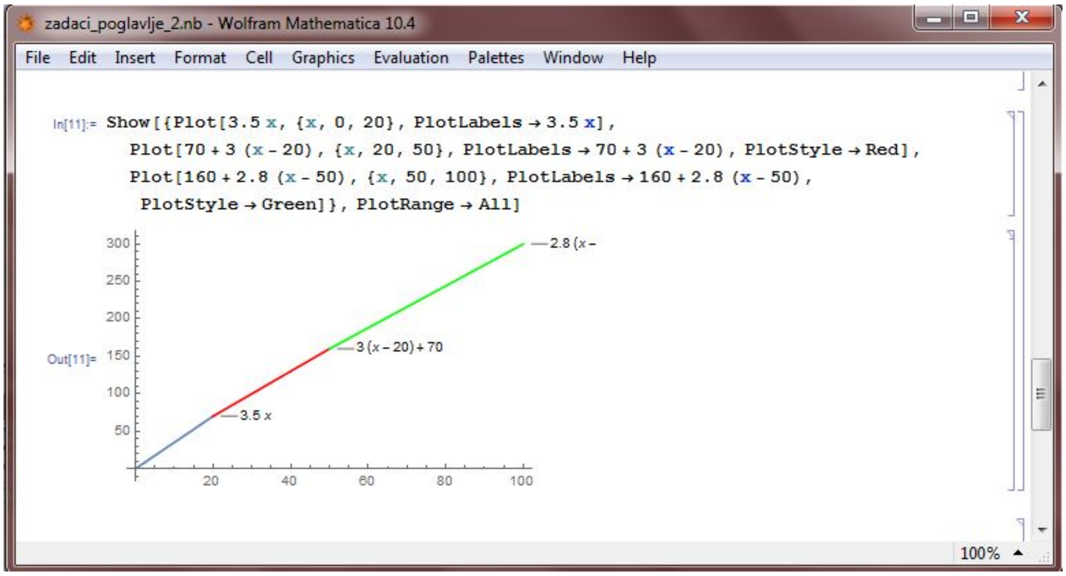
1. *Odredite funkciju troška plina.*

2. *Nacrtajte graf funkcije.*

Rješenje. Neka je x broj m^3 *plina, onda je trošak*

1. $T(x) = \begin{cases} 3.5x & 0 \le x \le 20 \\ 70 + 3(x-20) & 20 < x \le 50 \\ 160 + 2.8(x-50) & x > 50 \end{cases}$

2. *Graf funkcije*



Zadatak 2.20 *Sportaš želi povećati dnevni unos vitamina C i kalcija stoga će u prehrani povećati unos limuna i mlijeka. Jedan decilitar cijeđenog limuna sadrži* 78 *miligrama vitamina C i* 8 *miligrama kalcija. Jedan decilitar mlijeka sadrži* 68 *miligrama vitamina C i* 52 *miligrama kalcija.*

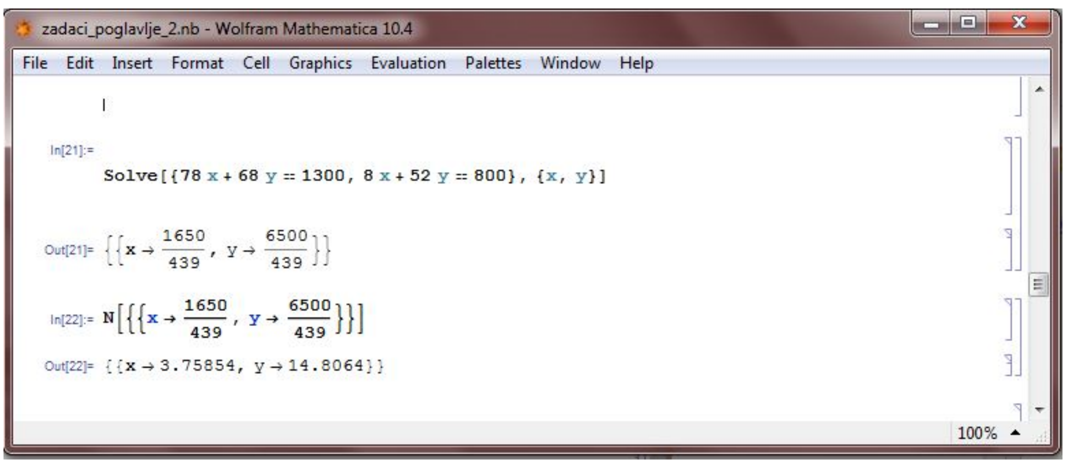
1. *Izračunajte koliko ocijeđenog limuna i koliko decilitara mlijeka bi sportaš trebao dnevno piti da organizmu osigura* 1300 *miligrama vitamina C i* 800 *miligrama kalcija?*

2. *Nacrtajte grafove pravaca određenih dobivenim jednadžbama i komentirajte njihov presjek.*

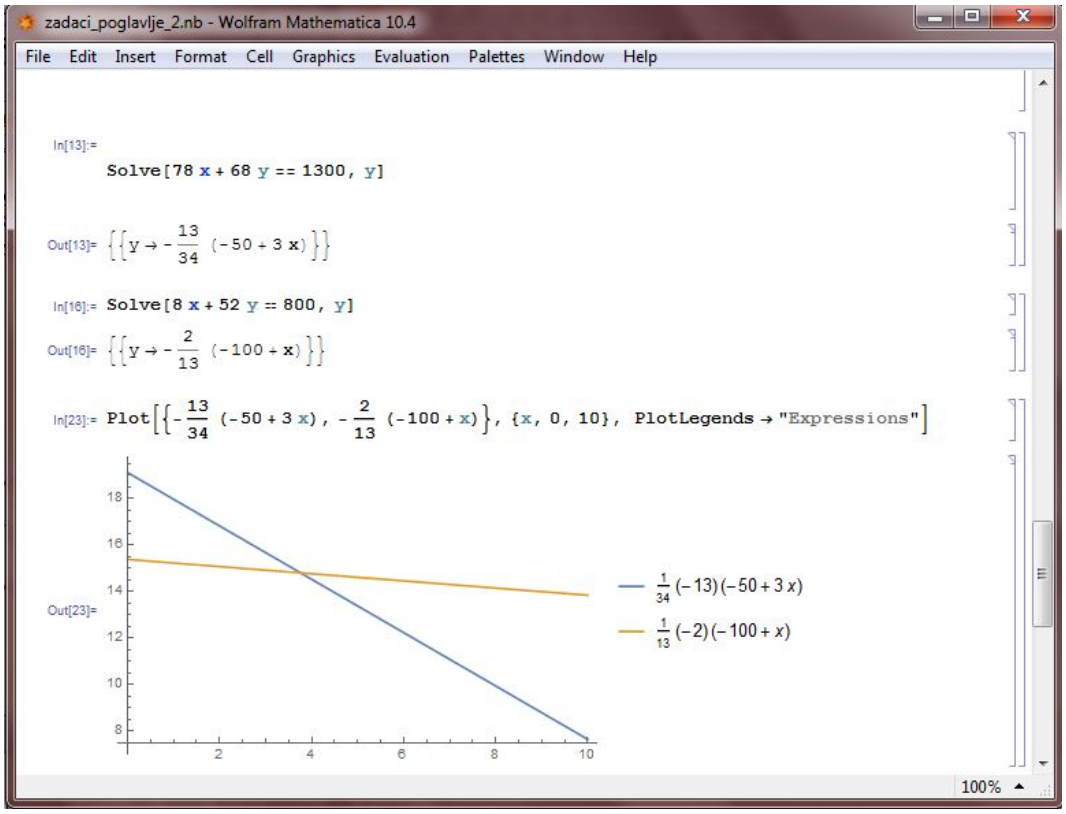
Rješenje.

x *- količina limuna u dcl*
y *- količina mlijeka u dcl*

1. *Rješenje sustava*



2. *Presjek pravaca je rješenje gornjeg sustava.*



Zadatak 2.21 *Pacijent dnevno mora dobiti najmanje* 80 *jedinice lijeka A i* 110 *jedinice lijeka B. Gram supstance C sadrži* 18 *jedinica lijeka A i* 12 *jedinica lijeka B, a gram supstance D sadrži* 6 *jedinice lijeka A i* 14 *jedinica lijeka B.*

1. *Izračunajte koliko se grama supstanci C i D može pomiješati kako bi mješavina sadržavala minimalne dnevne doze obaju lijekova. Ako se prekorači doza lijeka, neće biti opasnosti za zdravlje pacijenta.*

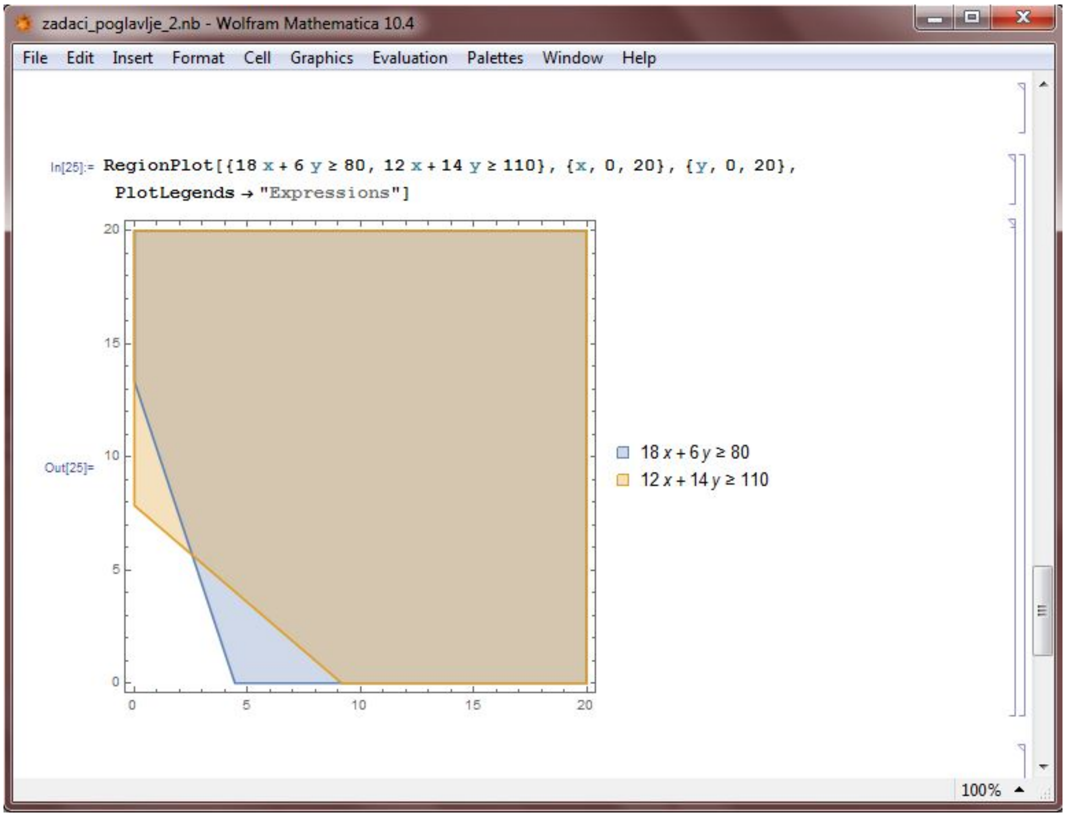
2. *Grafički prikažite skup mogućih rješenja dobivenog sustava nejednadžbi na računalu i komentirajte rezultat.*

Rješenje. Neka je x količina supstance C u gramima, a neka je y količina supstance D u gramima.

1. *Onda je skup mogućih rješenja zadan sustavom nejednadžbi*

   $18x + 6y \geq 80$
   $12x + 14y \geq 110$
   $x, y \geq 0$

2. *Rješenje je presjek dviju poluravnina. Svaka točka* (x, y) *iz tog presjeka određuje količine supstanci* C *i* D *koje su dovoljne.*



Zadatak 2.22 *Ivan slavi rođendan. U tu je svrhu unajmio prostor jednog kafića. Cijena najma je* 1000 *kuna za prostor i još* 30 *kuna po gostu.*

1. *Koliko će Ivan platiti najam ukoliko pozove na proslavu* 20 *osoba?*
2. *Kafić inače iznajmljuje svoj prostor za proslave rođendana, te određuje cijenu najma na isti način. Izvedite model za određivanje cijene najma za bilo koji broj osoba.*
3. *Definirajte fiksni i varijabilni trošak.*
4. *Interpretirajte matematički koeficijent uz varijablu koja predstavlja broj osoba u modelu iz (2).*
5. *Interpretirajte ekonomski koeficijent uz varijablu koja predstavlja broj osoba u modelu iz (2).*
6. *Ispišite tablicu svih mogućih troškova ako je maksimalan broj osoba koji stane u kafić jednak* 25*, počevši od broja osoba jednakog* 1*. Komentirajte poraste ukupnog troška.*
7. *Povežite (6) s domenom i slikom funkcije.*

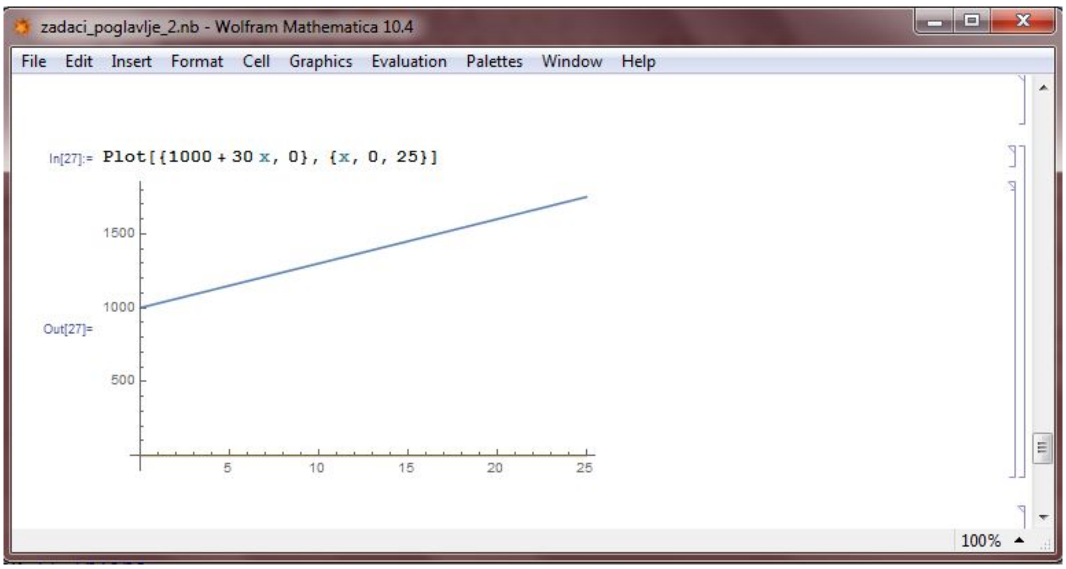
Rješenje.

1. *Ivan će platiti* 1000 *kn za prostor i* 30 *kn po jednoj osobi. Budući da je broj osoba jednak* 20*, ukupan trošak je* $1000 + 30 \cdot 20 = 1000 + 600 = 1600$ *kn.*

2. *Neka je* x *broj osoba. Tada je ukupan trošak najma jednak* $C(x) = 1000 + 30 \cdot x$*.*

3. *Funkcija ukupnog troška je* $C(x) = 1000 + 30 \cdot x$*. Fiksni trošak je trošak koji postoji i kad nema gostiju. Dakle, fiksni trošak je* $C(0) = 1000 + 30 \cdot 0 = 1000$*. Varijabilni trošak je ukupan trošak umanjen za fiksni trošak. Dakle, varijabilan trošak je* $VC(x) = C(x) - C(0) = 1000 + 30 \cdot x - 1000 = 30x$*.*

4. *Model iz (2) je* $C(x) = 1000 + 30 \cdot x$*. Koeficijent uz varijablu* x *je* 30*. Graf ove funkcije je pravac, pa je* 30 *koeficijent smjera pravca. Budući da je on pozitivan, funkcija raste. Također, ukoliko se broj osoba poveća za* 1*, ukupan trošak će se povećati za* 30*. Napomena:* x *je broj osoba, pa je zapravo graf funkcije skup uređenih parova (x,C(x)). Radi pojednostavljenja, graf možemo nacrtati i na način kako je to prikazano na sljedećoj slici imajući na umu da je* x *prirodan broj jer ta varijabla predstavlja broj osoba.*



5. *Ekonomski, to je granični trošak (promjena ukupnog troška uslijed promjene varijable za* 1 *jedinicu).*

6. *Tablica troškova*

Broj osoba	*Ukupan trošak*
1	1030
2	1060
3	1090
4	1120
5	1150
6	1180
7	1210
8	1240
9	1270
10	1300
11	1330
12	1360
13	1390
14	1420
15	1450
16	1480
17	1510
18	1540
19	1570
20	1600
21	1630
22	1660
23	1690
24	1720
25	1750

Primijetimo da je porast troška svaki put 30, *a to smo već komentirali pod (4) i (5).*

7. *Domena je* $\mathcal{D} = \{1, 2, 3, ..., 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25\}$.
   Slika je $\mathcal{R} = \{1030, 1060, ..., 1720, 1750\}$

Zadatak 2.23 *Kino dvorana ima* 120 *mjesta.*

1. *Ukoliko je predstava besplatna, popunjenost dvorane je* 90%. *Ukoliko je cijena ulaznice* 20 *kuna, popunjenost dvorane je* 40%. *Izvedite linearni model za određivanje broja prodanih ulaznica u ovisnosti o cijeni.*
2. *Interpretirajte matematički koeficijent uz varijablu koja predstavlja broj prodanih ulaznica u modelu iz (1).*
3. *Interpretirajte ekonomski koeficijent uz varijablu koja predstavlja broj prodanih ulaznica u modelu iz (1).*
4. *Kolika mora biti cijena da bi se prodalo* 100 *ulaznica u skladu s modelom iz (1)?*

Rješenje.

1. *Linearni model ima opći oblik* $N(p) = a + b \cdot p$ *gdje je* p *cijena jedne ulaznice, a* $N(p)$ *broj prodanih ulaznica (broj posjetitelja). Trebamo odrediti parametre* a *i* b. *Ukoliko je predstava*

besplatna, popunjeno je 90% *dvorane. To znači da je cijena jednaka* 0*, a onda je broj posjetitelja jednak* $N(0) = 0.9 \cdot 120 = 108$*. Slijedi da je* $N(0) = a + b \cdot 0 = a = 108$*. Nadalje, ako je cijena 20 onda je popunjenost* 40% *dvorane, tj., popunjenost je jednaka* $0.4 \cdot 120 = 48$*. Slijedi da je* $N(20) = a + b \cdot 20 = 108 + 20b = 48$*. Iz druge jednadžbe slijedi da je* $20b = -60$*, tj.,* $b = -3$*. Dakle, linearni model je* $N(p) = 108 - 3 \cdot p$*.*

2. *Graf funkcije* $N(p) = 108 - 3 \cdot p$ *je pravac, pa je* -3 *koeficijent smjera. Znači, ako se cijena poveća za 1, popunjenost će se smanjiti za* 3*. Napomena: graf funkcije je pravac, ali moramo imati na umu da je* $N(p)$ *broj osoba, dakle prirodan broj.*

3. *Koeficijent smjera možemo ekonomski interpretirati kao osjetljivost popunjenosti na promjenu cijene.*

4. *Želimo da je* $N(p) = 100$*. Matematički, moramo riješiti linearnu jednadžbu* $108 - 3 \cdot p = 100$*. Slijedi da je* $3 \cdot p = 8$*, tj.,* $p = \frac{8}{3} = 2.67$*.*

Zadatak 2.24 *Poduzeće MXY proizvodi i prodaje jedan model tenisica čija je prodajna cijena* 380 *kuna po jednom paru. Da bi se tenisice proizvele, poduzeće ima i trošak proizvodnje koji je dan modelom* $C(x) = 9000 + 80x$*, gdje je* x *količina pari tenisica, a* $C(x)$ *ukupan trošak za tu količinu proizvodnje.*

1. *Modelirajte ukupan prihod poduzeća kao linearnu funkciju količine.*

2. *Modelirajte dobit poduzeća kao linearnu funkciju količine.*

3. *Izračunajte točku pokrića. Ekonomski interpretirajte.*

4. *Grafički prikažite funkciju dobiti, te interpretirajte koeficijent smjera pravca i nul-točku funkcije.*

5. *Na istoj slici, grafički prikažite funkciju prihoda i funkciju troškova, te komentirajte u kontekstu točke pokrića.*

Rješenje.

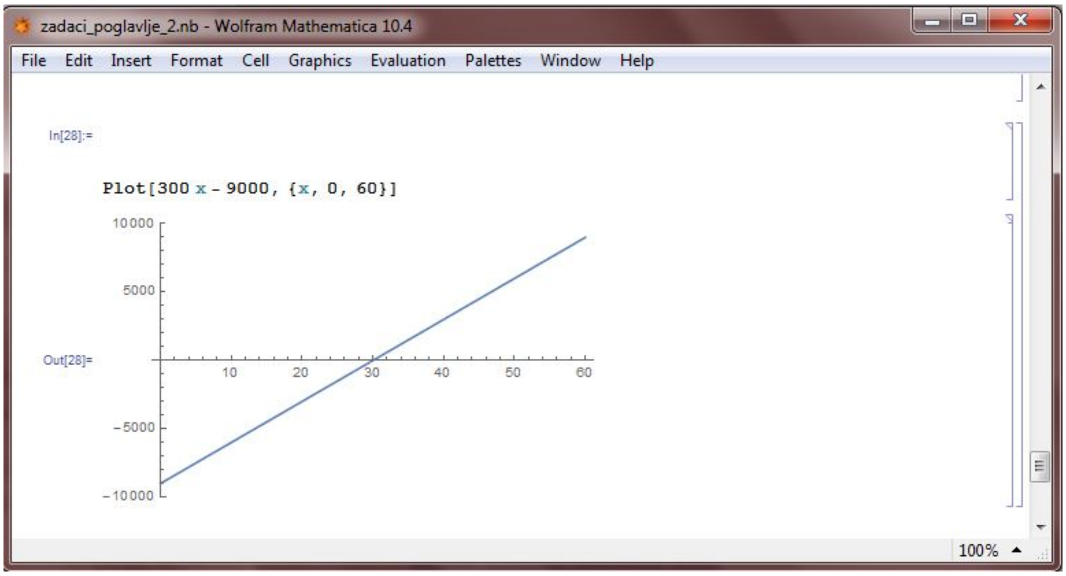
1. *Ukupan prihod je umnožak jedinične cijene i prodane količine pari tenisica. Dakle, uz pretpostavku da poduzeće proda sve što je proizvelo, ukupan prihod je modeliran linearnom funkcijom* $R(x) = 380x$*, gdje je* x *prodana količina, a R(x) ukupan prihod.*

2. *Dobit je jednaka razlici ukupnog prihoda i ukupnog troška. U našem je slučaju to jednako* $P(x) = R(x) - C(x) = 380x - 9000 - 80x = 300x - 9000$*, tj.,* $P(x) = 300x - 9000$*.*

3. *Da bismo izračunali točku pokrića, računamo* x *za koji je* $R(x) = C(x)$ *ili* $P(x) = 0$*. Slijedi da je*
   $300x - 9000 = 0$
   $300x = 9000$
   $x = \frac{9000}{300} = 30$

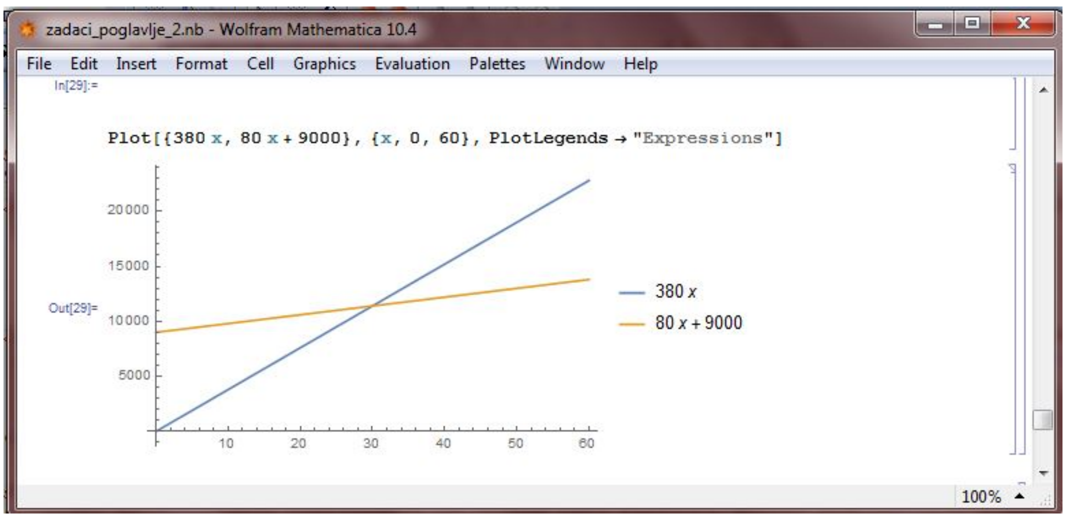
   Da bi poduzeće bilo profitabilno, mora proizvoditi 31 *ili više pari tenisica. Ukoliko proizvodi* 30 *pari i manje, poduzeće neće ostvarivati dobit, tj., dobit će biti nula ili negativna (ukupan prihod će biti manji od ukupnog troška).*

4. *Graf funkcije*



Primijetimo da presjek pravca s osi apscisa zapravo određuje točku pokrića. Koeficijent smjera pravca je 300 *što znači da dobit raste. Također, svako povećanje proizvodnje od jednog para tenisica donosi poduzeću dodatnu dobit od* 3000 *kn.*

5. *Grafovi prihoda i troškova*



U točki pokrića, graf funkcije prihoda i graf funkcije troškova se sijeku.

Zadatak 2.25 *Poduzeće treba izabrati najpovoljniji način nabave dijelova koje će ugraditi u finalni proizvod u sljedećoj godini. Poduzeće može kupiti dijelove po jediničnoj cijeni od* 400 *kuna. Druga opcija je kupiti tokaliricu od* 160000 *kuna, te proizvoditi dijelove uz trošak od* 150 *kuna po jedinici.*

Treća opcija je unajmiti prostor u strojnom centru po godišnjoj cijeni od 400000 *kuna i proizvoditi dijelove po jediničnoj cijeni od* 30 *kuna.*

1. *Modelirajte ukupne troškove poduzeća u ovisnosti o količini proizvodnje za svaku opciju posebno koristeći linearne funkcije.*
2. *Na istoj slici, grafički prikažite sve funkcije ukupnih troškova u ovisnosti o količini proizvodnje.*
3. *Iz slike pod (2) zaključite koja opcija ne dolazi u obzir za gradnju tvornice, te argumentirajte.*
4. *Analizirajte koju će opciju poduzeće izabrati u ovisnosti o količini proizvodnje.*

Rješenje.

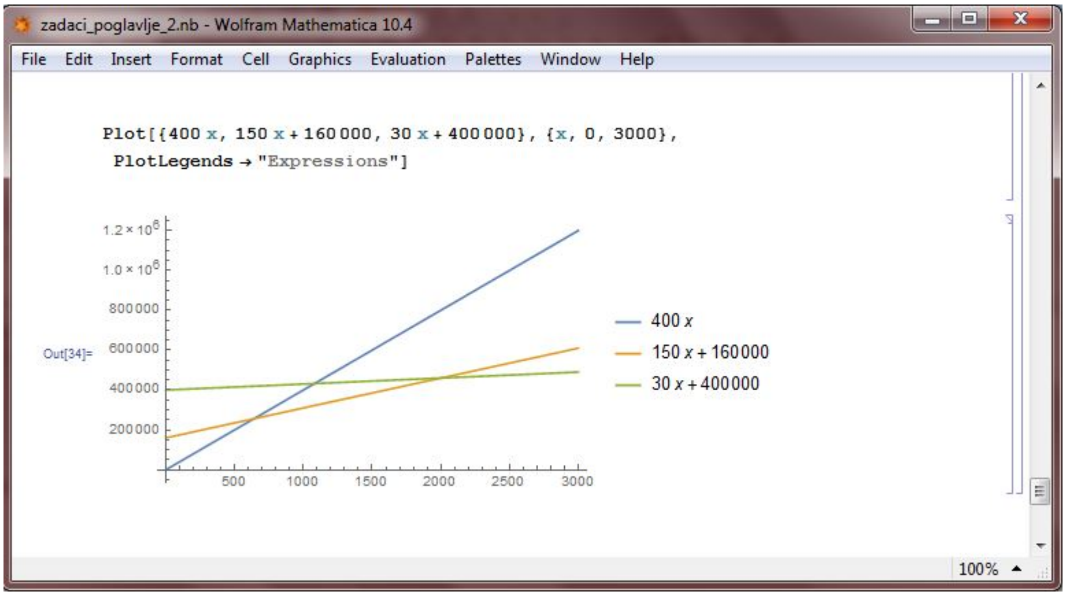
1. *Neka je x količina proizvodnje. Troškovi su:*

   $A(x) = 400x$

   $B(x) = 150x + 160000$

   $C(x) = 30x + 400000$

2. *Grafovi:*



3. *Ne postoji opcija koja ne dolazi u obzir. Sve opcije su u igri ovisno o količini.*
4. *Poduzeće izabire opciju s najnižim troškovima. Najprije prvu, pa drugu i onda treću opciju. Odgovarajuće količine nalazimo iz jednadžbi:*

   $400x = 150x + 160000,\ x = 640$

   $150x + 160000 = 30x + 400000,\ x = 2000$

Zadatak 2.26 *Na različite osnovice dohotka obračunava se drugačiji porez. Na osnovicu do* 2500 *kuna porez je* 30%. *Na osnovicu od* 2500 *kuna do* 10000 *kuna porez je* 40% *i na osnovice od* 10000 *kuna i više porez je* 45%.

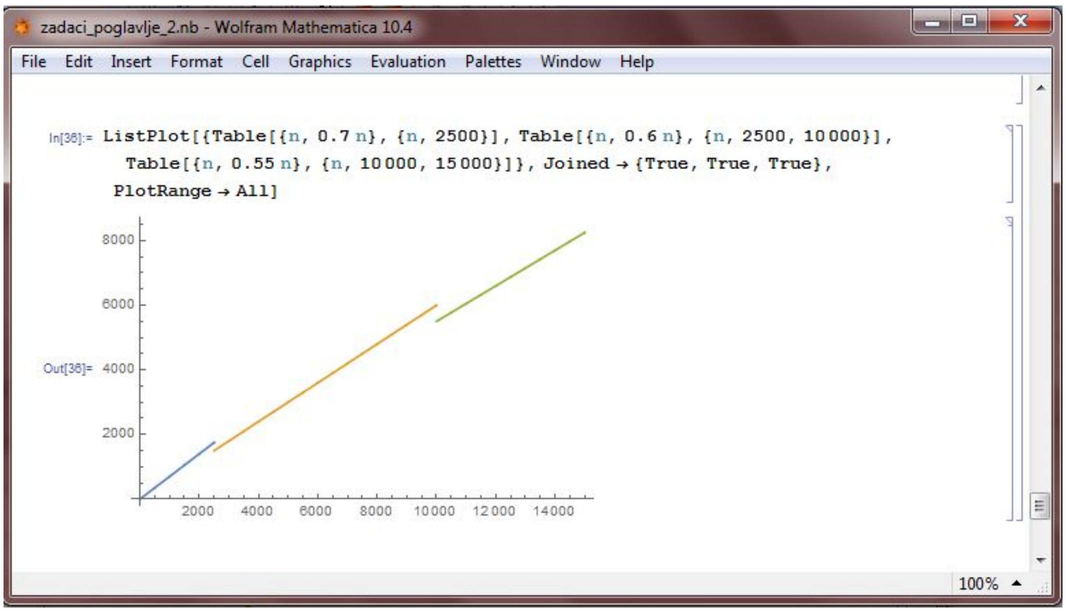
1. *Modelirajte neto iznos (iznos dohotka nakon oporezivanja) u ovisnosti o osnovici po dijelovima linearnom funkcijom.*

2. *Nacrtajte graf funkcije.*

Rješenje.

1.
$$V(x) = \begin{cases} 0.7x, & 0 < x \le 2500 \\ 0.6x, & 2500 < x \le 10000 \\ 0.55x, & 10000 < x \end{cases}$$

2. *Graf funkcije*



Zadatak 2.27 *U modelu tržišta s jednim proizvodom količina ponude iznosi $S(p) = -200 + 2p$, a količina potražnje $D(p) = 600 - 2p$, pri čemu je p jedinična cijena tog proizvoda.*

1. *Za koje cijene ovaj model tržišta ima ekonomskog smisla?*

2. *Komentirajte monotonost funkcija ponude i potražnje.*

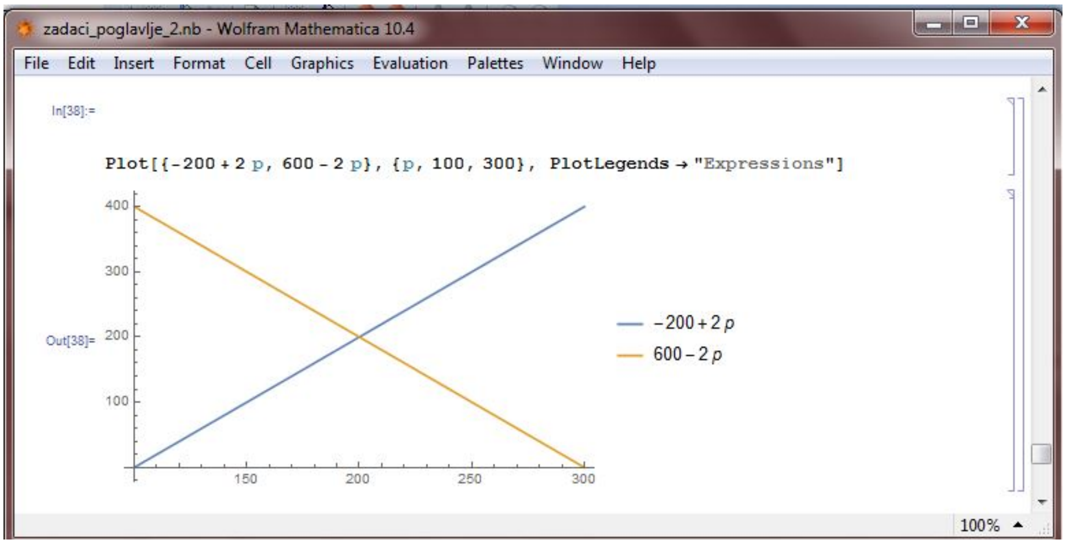
3. *Odredite ravnotežnu cijenu i količinu proizvoda.*

4. *U istom koordinatnom sustavu grafički prikažite funkcije ponude i potražnje. Odredite ravnotežnu cijenu i količinu na tom tržištu. (Napomena: pri grafičkom prikazivanju funkcija pazite na interval smislenih cijena.)*

5. *Definirajte funkciju zaliha kod proizvođača i grafički je prikažite. Ekonomski komentirajte u ovisnosti o nul-točki funkcije i ravnotežnoj cijeni.*

Rješenje.

1. *Za cijene iz intervala* $[100, 300]$.
2. *Ponuda raste, a potražnja pada s porastom cijene.*
3. *Ravnotežna cijena je* 200*, a ravnotežna količina također* 200.
4. *Ravnoteža je presjek pravaca.*



5. *Zalihe su* $4p - 800$*. Kod ravnotežne cijene* $p = 200$*, zalihe su jednake* 0*. Ukoliko je cijena manja od svoje ravnotežne vrijednosti, zalihe su negativne što znači da na tržištu postoji višak potražnje za proizvodom. Ukoliko je cijena veća od svoje ravnotežne vrijednosti, zalihe su pozitivne što znači da proizvođač ne može prodati sve što proizvede.*

Zadatak 2.28 *Atletska disciplina bacanje kugle može se modelirati funkcijom*

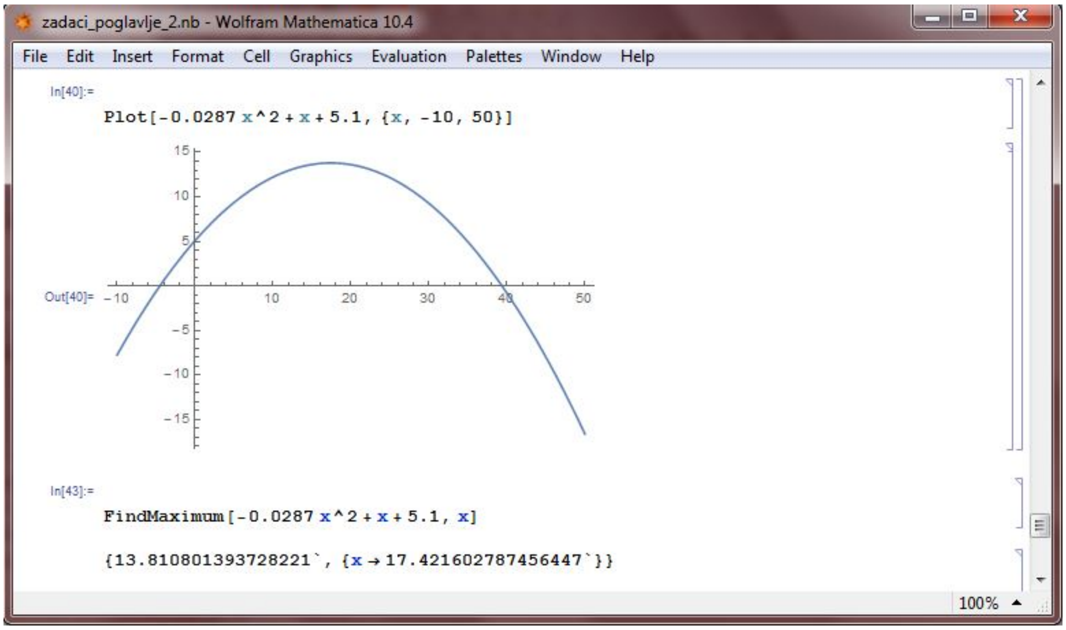
$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = -0.0287\mathrm{x}^2 + \mathrm{x} + 5.1$$

gdje x *označava udaljenost u metrima, a* $f(x)$ *je visina u metrima.*

1. *Izračunajte koliko daleko je bacač bacio kuglu. Komentirajte rješenja jednadžbe.*
2. *Nacrtajte graf zadane funkcije, komentirajte i odredite domenu i sliku funkcije.*
3. *Izračunajte u kojoj je točki kugla najviša od razine zemlje?*

Rješenje.

1. *Rješavanjem kvadratne jednadžbe dobivamo njena rješenja:* $x_1 = 39.3582$ *i* $x_2 = -4.51496$*. Konačno rješenje je* $x = 39.3582 + 4.51496 = 43.87316$.
2. *Graf funkcije je parabola, domena je* $\mathcal{D} = \mathbb{R}$*, a slika su svi brojevi manji od* 13.81*. Parabola je okrenuta prema dolje i ima maksimum u tjemenu s koordinatama* $(17.42, 13.81)$*, pa je zato slika* $\mathcal{R} = (-\infty, 13.81]$



3. *Spomenuli smo već da maksimum funkcije iznosi* 13.81 *u točki* $x = 17.42$.

Zadatak 2.29 *Urednik izdavačke kuće odlučio se za nove dimenzije časopisa koji je u pripremi za narednu godinu. Margine na vrhu i dnu stranice trebaju biti* 2 *centimetra, a sa svake strane* 1.5 *centimetra široke. Nadalje duljina stranice treba biti* 1.2 *puta širine stranice, a veličina pisanog dijela površine* 40 cm^2.

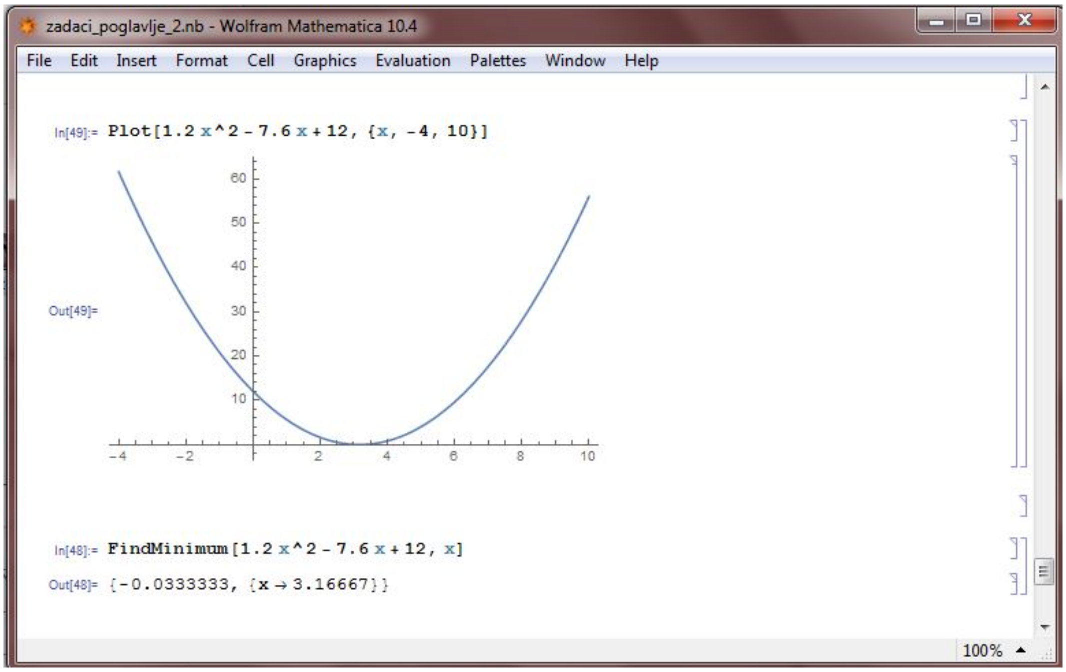
1. *Izračunajte širinu i duljinu stranice časopisa.*

2. *Nacrtajte graf funkcije koja predstavlja površinu u ovisnosti o širini stranici, komentirajte i odredite domenu i sliku funkcije.*

Rješenje.

1. *Širina je* 8.94, *a duljina* 10.73.

2. *Graf*



Domena je $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, a slika $\mathcal{R} = (-0.033, +\infty)$.

Zadatak 2.30 *Analitičar financijskog odjela tvrtke koja proizvodi podmetače za računalni miš modelirao je sustav cijene i potražnje za navedeni proizvod*

$$c\,(x) = 64.4 - 8x$$

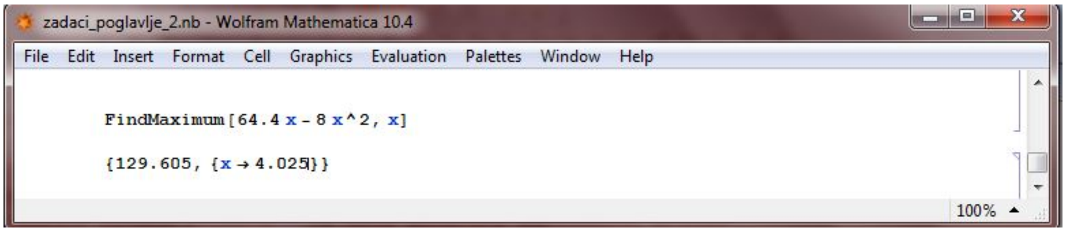
gdje je c veleprodajna cijena podmetača, a x milijuna podmetača je prodano, pri čemu je $1 \leq x \leq 15$.

1. *Odredite funkciju prihoda $P(x)$ i njenu domenu.*
2. *Izračunajte vrijednost x koja će generirati maksimalni prihod. Izračunajte maksimalni prihod.*
3. *Izračunajte veleprodajnu cijenu podmetaÄŤa koja generira maksimalni prihod.*
4. *Nacrtajte graf maksimalnog prihoda i veleprodajne cijene.*
5. *Ako je funkcija troška $T\,(x) = 135 + 14.6x$, pronađite ravnotežnu točku gdje u proizvodnji neće biti ni dobitka niti gubitka (točka pokrića). Nacrtajte graf funkcije troška i maksimalnog prihoda.*
6. *Do gubitka dolazi ako je $P\,(x) < T\,(x)$, a do dobiti ako je $P\,(x) > T\,(x)$. Za koje vrijednost x će doći do gubitka, a za koje do dobiti?*

Rješenje.

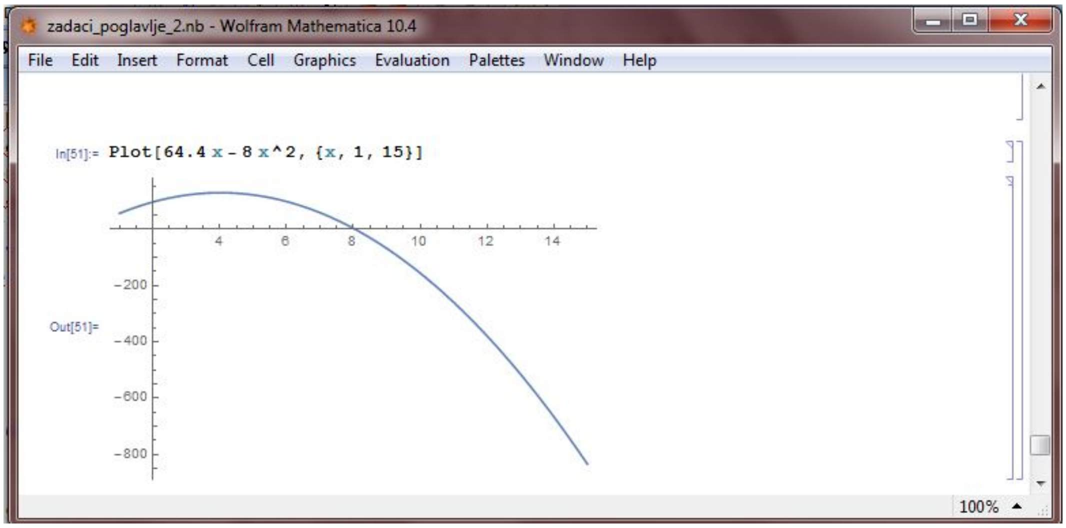
1. *$P(x) = x \cdot (64.4 - 8x) = 64.4x - 8x^2$. Matematički ova funkcija je definirana za svaki realan broj, ali domena koja ima smisla je $[1, 15]$, jer je zadano da je $1 \leq x \leq 15$.*

2. *Maksimalan prihod*

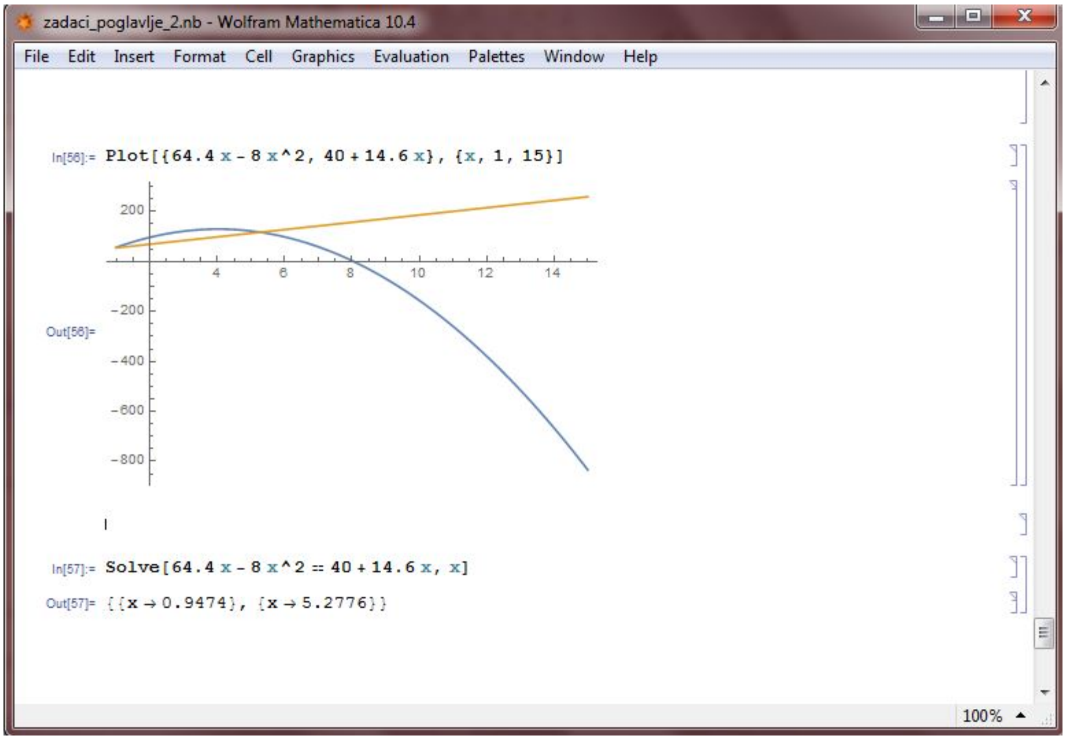


3. 32.2

4. *Graf*



5. *Točka pokrića:* $P(x) = T(x)$,



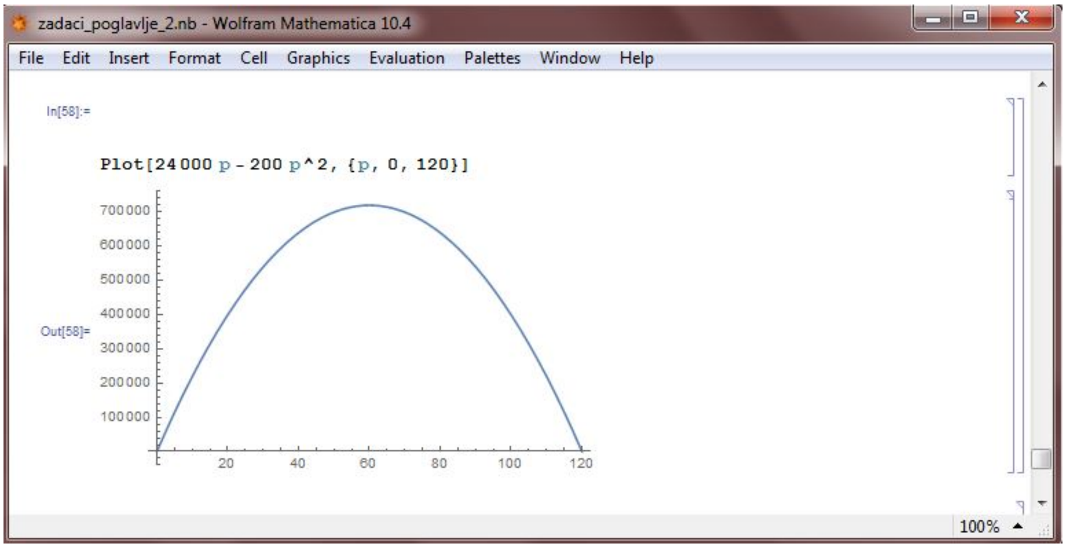
6. *Dobit se ostvaruje za x između* 0.9474 *i* 5.2776.

Zadatak 2.31 *Poduzeće XYZ proizvodi odjeću. U svom poslovanju zainteresirano je modelirati potražnju za svojim proizvodom u ovisnosti o cijeni tog proizvoda. Odjel za marketing je na temelju istraživanja tržišta došao do zaključka da se potražnja za pamučnim majicama u ovisnosti o cijeni majice ponaša u skladu s modelom $D(p) = 24000 - 200p$, gdje je p cijena jedne majice, a $D(p)$ količina prodanih majica.*

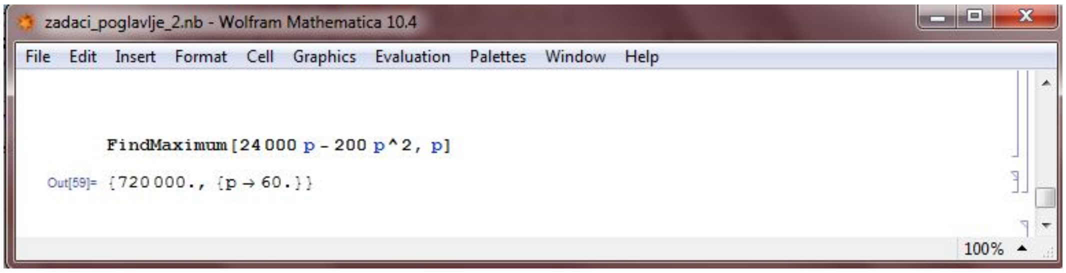
1. *Za koje cijene ovaj model ima ekonomskog smisla?*
2. *Kolika će biti potražnja za majicama ako je cijena* 90 *kuna?*
3. *Kolika će biti potražnja za majicama ako je cijena* 110 *kuna?*
4. *Za koliko se posto promijenila potražnja kad se cijena s* 90 *kuna povećala na* 110 *kuna?*
5. *Modelirajte prihod kao umnožak jedinične cijene i količine potražnje u ovisnosti o cijeni.*
6. *Nacrtajte graf funkcije iz (5) koji vizualizira prihod.*
7. *Za koju je cijenu prihod maksimalan i koliko iznosi?*
8. *Ukoliko je fiksni trošak proizvodnje zanemariv, a varijabilni je* 30 *kuna po majici, izvedite funkciju dobiti kao funkciju cijene, grafički je prikažite i komentirajte točku pokrića.*

Rješenje.

1. *Za cijene iz intervala* $[0, 120]$.
2. $D(90) = 6000$.
3. $D(110) = 2000$.
4. *Potražnja je pala za* 66.67%.
5. $R(p) = 24000p - 200p^2$.
6. *Graf funkcije prihoda.*

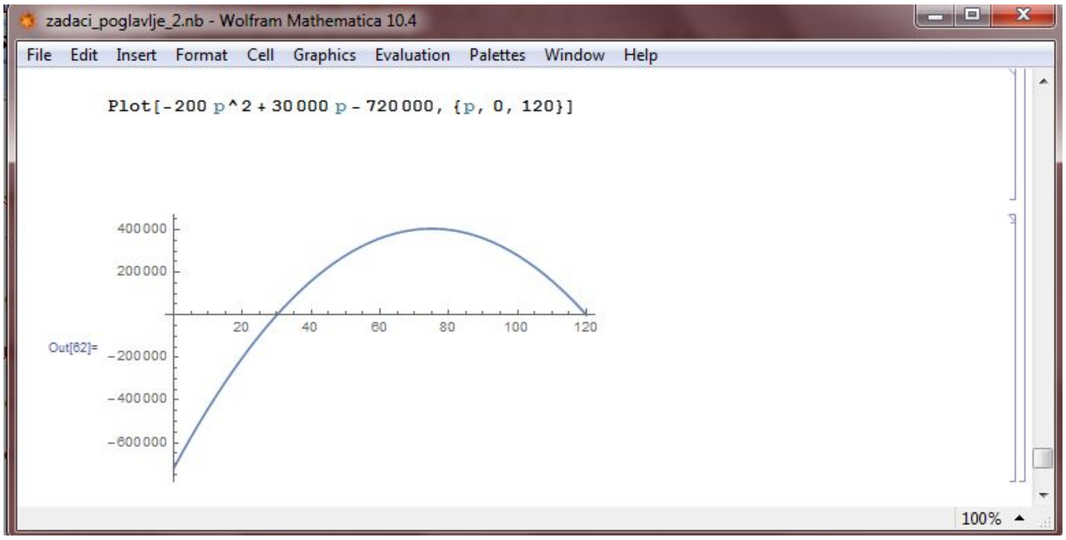


7. *Maksimalan prihod (tjeme parabole).*



8. *Trošak u ovisnosti o cijeni je* $C(p) = 720000 - 6000p$, *pa je dobit kao razlika prihoda i troška jednaka* $P(p) = -200p^2 + 30000p - 720000$.

Graf je:



Nul-točke dobiti su točke pokrića. Dakle, nul-točke su $p_1 = 30$ *i* $p_2 = 120$. *Za cijene iz intervala* $[0, 30]$, *dobit je negativna ili nula, a za cijene iz intervala* $[30, 120]$ *poduzeće je profitabilno ili na nuli. Napomena. U poslovnoj praksi ovisi o situaciji je li poduzeće profitabilno ukoliko mu je dobit jednaka nuli. Ponekad je poduzeću u interesu nulta dobit jer ne plaća porez na dobit. Postoje razne situacije.*

Zadatak 2.32 *Promatramo monopolsko poduzeće koje proizvodi sokove. Funkcija potražnje je zadana kao* $Q(p) = -12p + 540$, *gdje je* Q *količina potražnje, a* p *jedinična cijena.*

1. *Izrazite funkciju ukupnog prihoda u ovisnosti o cijeni. Što je graf te funkcije?*
2. *Izračunajte nul-točke funkcije i komentirajte.*
3. *Izračunajte cijenu uz koju se ostvaruje maksimalan prihod.*
4. *Izrazite funkciju ukupnog prihoda u ovisnosti o količini proizvoda. Što je graf te funkcije?*
5. *Izračunajte nul-točke te funkcije i komentirajte.*
6. *Izračunajte količinu uz koju se ostvaruje maksimalan prihod i komentirajte u vezi s rezultatom iz zadatka (3).*
7. *Ukoliko je fiksni trošak proizvodnje* 500, *a varijabilni* 10, *izvedite funkciju dobiti u ovisnosti o količini proizvodnje, grafički je prikažite i ekonomski komentirajte.*

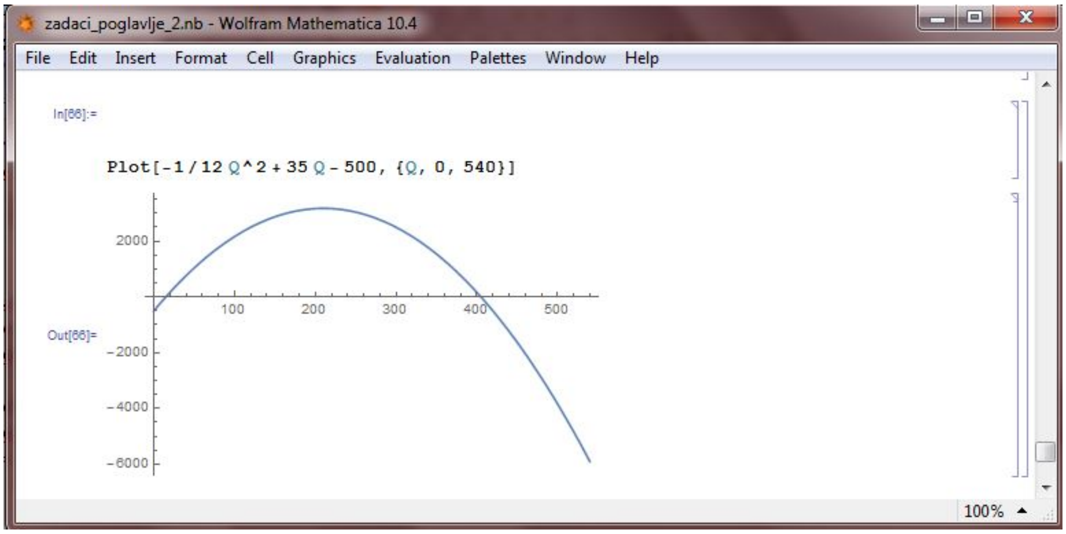
Rješenje.

1. $R(p) = -12p^2 + 540p$. *Graf je parabola okrenuta prema dolje.*
2. $p_1 = 0$, $p_2 = 45$. *Model ima smisla za cijene iz intervala* $[0, 45]$ *jer je prihod nenegativna veličina.*
3. *Tražimo tjeme parabole.* $(22.5, 6075)$.
4. $p = -\frac{1}{12}Q + 45$, $R(Q) = -\frac{1}{12}Q^2 + 45Q$.
5. $Q_1 = 0$, $Q_2 = 540$. *Model ima smisla za količine iz intervala* $[0, 540]$ *jer je prihod nenegativna veličina.*

6. *Tražimo tjeme parabole.* $(270, 6075)$. *Maksimalan prihod je isti kao i kod (3), a odgovarajuću količinu smo mogli izračunati uvrštavajući* $p = 22.5$ *u funkciju potražnje* $Q(p) = -12p + 540$.

7. $C(Q) = 10Q + 500,\ D(Q) = -\frac{1}{12}Q^2 + 35Q - 500.$

Graf je



Nul-točke su $Q_1 = 14.8078$ *i* $Q_2 = 405.192$, *pa je poduzeće profitabilno za količine iz intervala* $[14.8078, 405.192]$.

Zadatak 2.33 *Za jedno je poduzeće zadana funkcija ukupnog prihoda* $R(Q) = 1000Q - 5Q^2$ *i funkcija ukupnih troškova* $C(Q) = 150Q + 30000$, *gdje je* Q *količina proizvodnje.*

1. *Izrazite funkciju dobiti* $D(Q)$ *za to poduzeće.*

2. *Izračunajte nul-točke funkcije dobiti i komentirajte.*

3. *Izračunajte uz koju se količinu proizvodnje ostvaruje maksimalna dobit i koliko ona iznosi.*

4. *Grafički prikažite funkciju dobiti u koordinatnom sustavu* (Q, D).

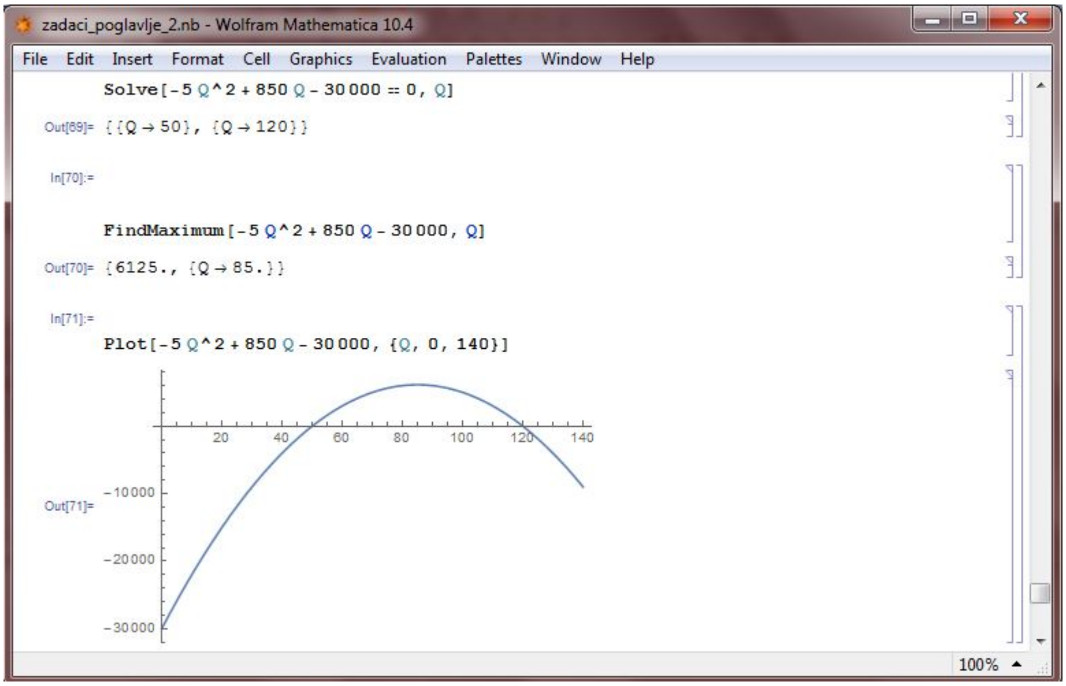
Rješenje.

1. $D(Q) = -5Q^2 + 850Q - 30000.$

2. *Nul-točke su* $Q_1 = 50$ *i* $Q_2 = 120$, *pa je poduzeće profitabilno za količine iz intervala* $[50, 120]$.

3. $Q = 85,\ D(85) = 6125.$

4. *Graf*



Zadatak 2.34 *U modelu tržišta s jednim proizvodom količina ponude iznosi* $S(p) = -144 + 4p^2$*, a količina potražnje* $D(p) = 162 - 2p^2$*, pri čemu je* p *jedinična cijena tog proizvoda.*

1. *Za koje cijene ovaj model tržišta ima ekonomskog smisla?*

2. *Komentirajte monotonost funkcija ponude i potražnje.*

3. *Odredite ravnotežnu cijenu i količinu proizvoda.*

4. *U istom koordinatnom sustavu grafički prikažite funkcije ponude i potražnje. Odredite ravnotežnu cijenu i količinu na tom tržištu. (Napomena: pri grafičkom prikazivanju funkcija pazite na interval smislenih cijena.)*

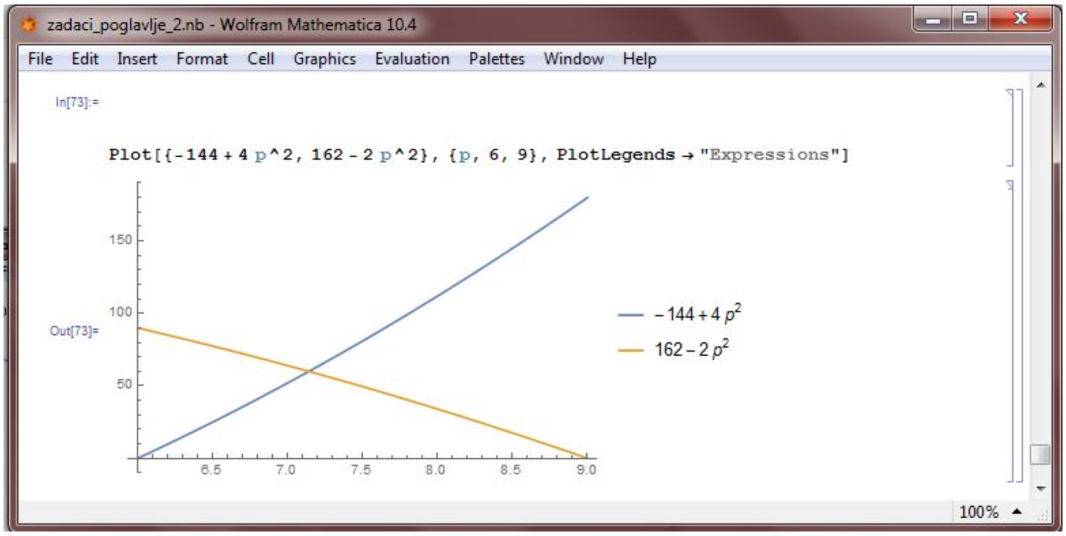
5. *Definirajte funkciju zaliha kod proizvođača. Ekonomski komentirajte u ovisnosti o ravnotežnoj cijeni.*

6. *Grafički prikažite funkciju zaliha. Ekonomski komentirajte u ovisnosti o nul-točki funkcije i ravnotežnoj cijeni.*

Rješenje.

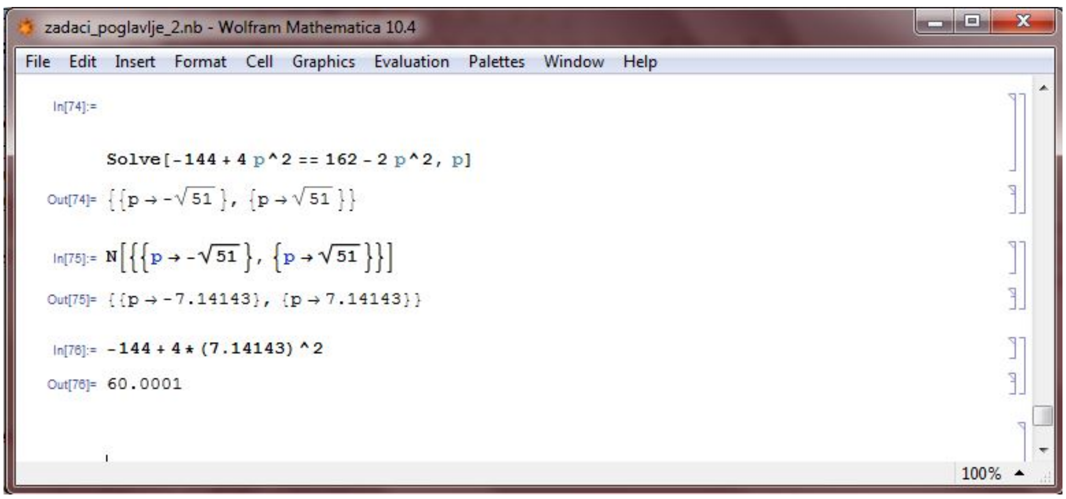
1. *Za cijene iz intervala* $[6, 9]$.

2. *Rast i pad ćemo komentirati iz grafa.*



Vidimo da ponuda raste, a potražnja pada s porastom cijene na intervalu $[6, 9]$.

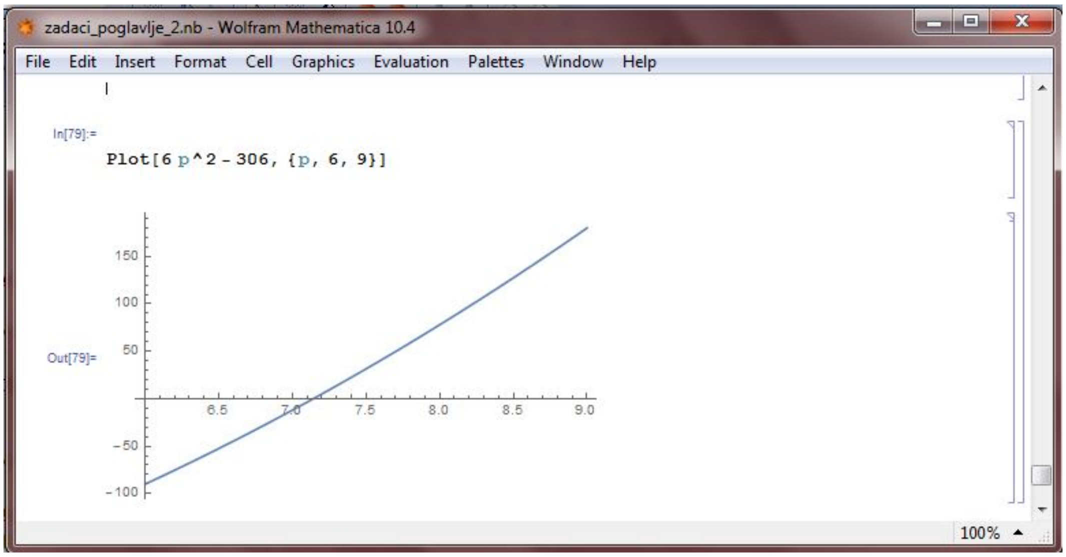
3. *Rješavamo sustav.*



4. *Ravnoteža se ostvaruje u presjeku tih dviju krivulja.*

5. *Zalihe su* $S(p) - D(p) = 6p^2 - 306$. *Za ravnotežnu cijenu, zalihe su jednake nuli.*

6. *Zalihe rastu s porastom cijene, te su jednake nuli za ravnotežnu cijenu. Graf:*

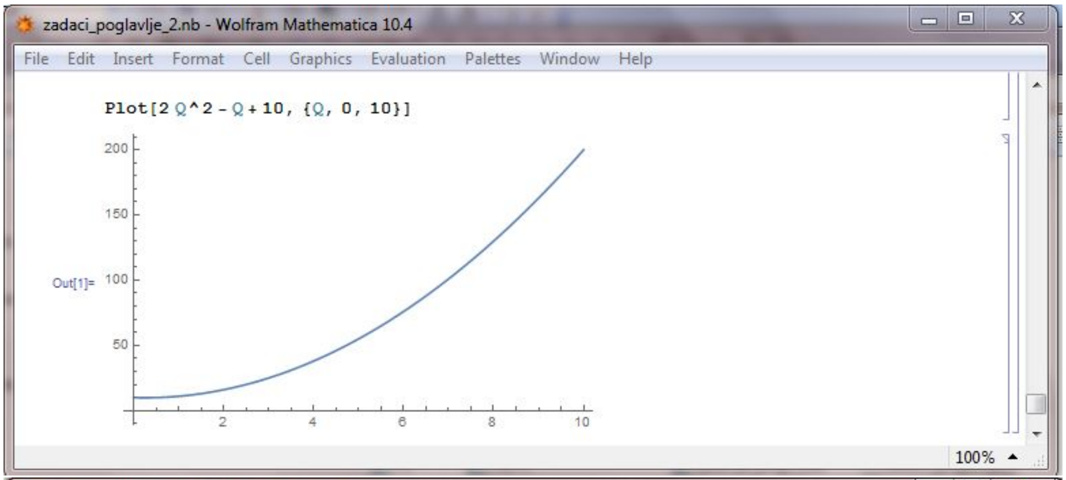


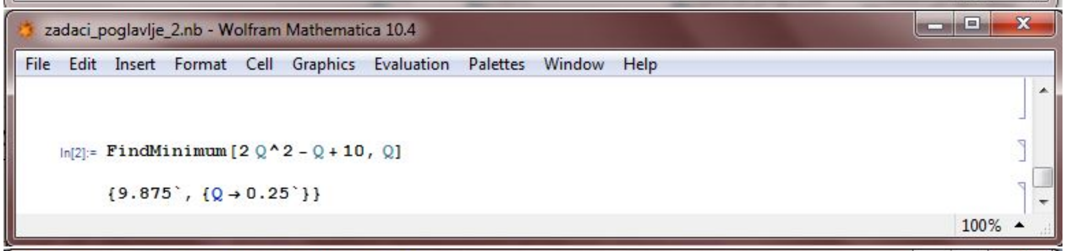
Zadatak 2.35 *Zadana je funkcija ukupnih troškova jednog poduzeća u ovisnosti o količini proizvodnje* $C(Q) = 2Q^3 - Q^2 + 10Q$ *gdje je* Q *količina proizvodnje, a* $C(Q)$ *ukupni troškovi da bi se ta količina proizvela.*

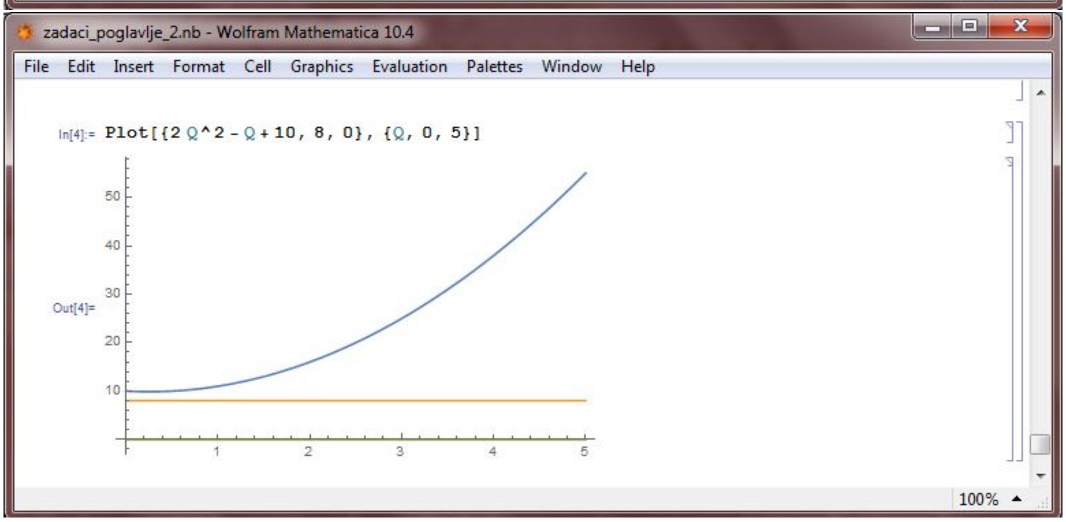
1. *Izračunajte fiksne troškove.*
2. *Izračunajte varijabilne troškove.*
3. *Izvedite funkciju prosječnih troškova.*
4. *Grafički prikažite funkciju prosječnih troškova.*
5. *Koliko poduzeće treba proizvoditi da bi prosječni troškovi proizvodnje bili minimalni? Koliki su ti minimalni prosječni troškovi?*
6. *Ukoliko je prodajna cijena jednog proizvoda 8, definirajte funkciju prihoda u ovisnosti o količini proizvodnje.*
7. *Na istoj slici grafički prikažite prosječni prihod (zapravo, jediničnu cijenu) i prosječne troškove. Je li poduzeće profitabilno? Komentirajte.*
   Uputa. Vidite primjer 2.27.

Rješenje.

1. *0*
2. $VC(Q) = C(Q) = 2Q^3 - Q^2 + 10Q$
3. $AC(Q) = 2Q^2 - Q + 10$
4. *Graf prosječnih troškova* $AC(Q) = 2Q^2 - Q + 10$ *je na slici.*
5. *Trebamo izračunati koordinate tjemena. Koristite naredbu FindMinimum.*


zadaci_poglavlje_2.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
Plot[2 Q^2 - Q + 10, {Q, 0, 10}]
Out[1]=
200
150
100
50
2
4
6
8
10
100%


zadaci_poglavlje_2.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[2]:= FindMinimum[2 Q^2 - Q + 10, Q]
{9.875`, {Q → 0.25`}}
100%


zadaci_poglavlje_2.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[4]:= Plot[{2 Q^2 - Q + 10, 8, 0}, {Q, 0, 5}]
Out[4]=
50
40
30
20
10
1
2
3
4
5
100%

6. $R(Q) = 8Q$

7. *Poduzeće nije profitabilno.*

Zadatak 2.36 *Dogodilo se ubojstvo i na teren je izašla policijska ekipa za očevid. Temperatura tijela ubijenog tada je iznosila* $25.9°C$. *Dva sata poslije temperatura tijela žrtve iznosila je* $24.3°C$. *U sobi je temperatura konstantna i iznosi* $21°C$.

1. *Izvedite model koji opisuje proces hlađenja tijela nakon smrti.*

2. *Uz pretpostavku da je temperatura tijela prije smrti bila prosječnih* $36.7°C$, *odredite vrijeme smrti.*

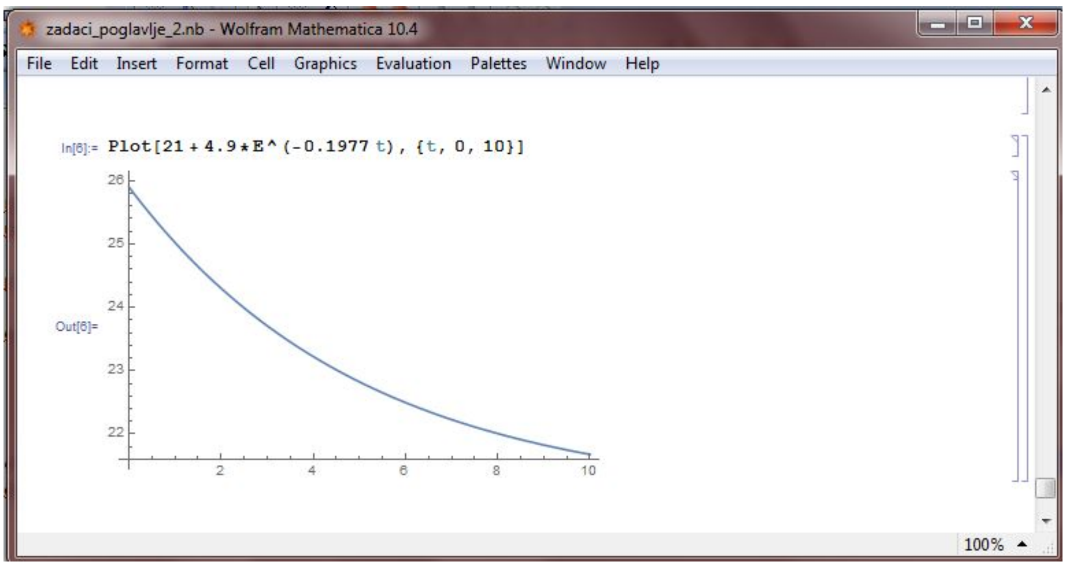
3. *Nacrtajte graf funkcije i odredite domenu i sliku funkcije. Komentirajte rast/pad funkcije i presjek grafa s osi ordinata.*

Rješenje.

1. $T(t) = 21 + (25.9 - 21) \cdot e^{-0.1977 \cdot t}$, *tj.*, $T(t) = 21 + 4.9e^{-0.1977 \cdot t}$.

2. $t = 7.89$. *Ubojstvo se dogodilo oko 8 sati prije nego što su pronašli tijelo.*

3. *Graf*



Matematički domena je skup svih realnih brojeva, ali ovdje je t vrijeme, pa ima smisla promatrati domenu $[0, +\infty)$. *Tada je slika funkcije* $\langle 0, 25.9]$. *Funkcija pada na cijeloj svojoj domeni, a presjek s osi ordinata predstavlja početnu vrijednost funkcije.*

Zadatak 2.37 *Uložili ste* 1000 *kuna u banku uz* 2% *godišnjih kamata.*

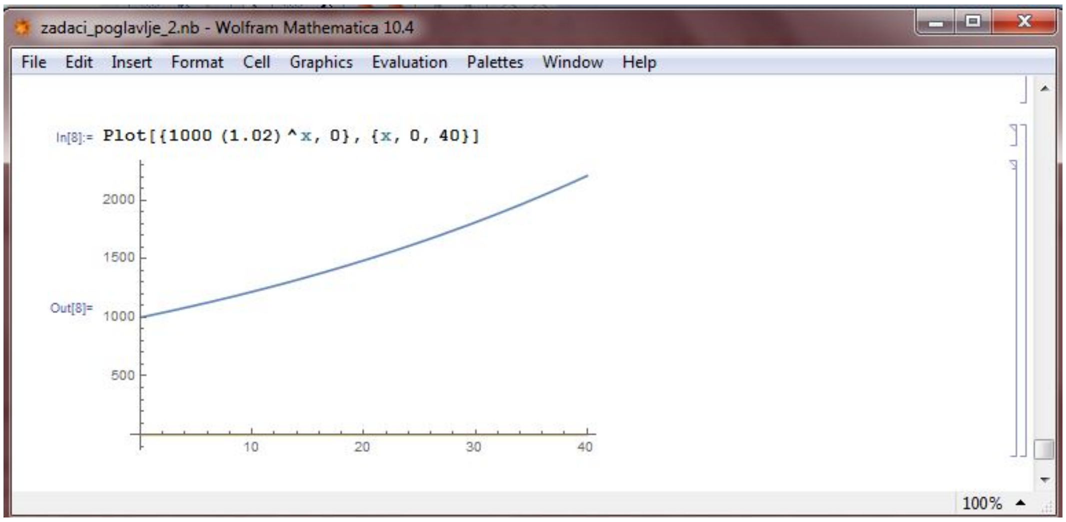
1. *Izvedite model koji opisuje rast glavnice u banci u obliku* $y = ab^x$ *gdje je* x *broj godina.*

2. *Izračunajte koliko treba godina proći da bi se početna investicija udvostručila.*

3. *Nacrtajte graf funkcije i odredite domenu i sliku funkcije. Komentirajte rast/pad funkcije.*

Rješenje.

1. $y(x) = 1000(1.02)^x$
2. $x = 35.003$
3. *Graf*



Matematički domena je skup svih realnih brojeva, ali ovdje je x vrijeme, pa ima smisla promatrati $[0, +\infty)$. Tada je slika funkcije $[1000, +\infty)$. Funkcija raste na cijeloj svojoj domeni.

Zadatak 2.38 *Ukoliko se kamata obračunava više od jednom godišnje, tj., ukoliko se kamata obračunava n puta godišnje za t godina s kamatnom stopom r, glavnica Praste do iznosa A, što je prikazano sljedećom formulom:*

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

1. *Ako se radi o neprekidnom ukamaćivanju, tj., n je jako veliki broj, odredite novi izraz gornje formule.*
2. *Ako uložite 2000 kuna u banku koja nudi 2% kamate koja se obračunava kvartalno, izračunajte iznos na kraju desete godine.*
3. *Ako uložite 2000 kuna u banku koja nudi 2% kamate kontinuirano, izračunajte iznos na kraju desete godine.*
4. *Izračunajte nakon koliko ćete vremena udvostručiti ulog u slučaju da uložite u banku 2000 kuna, ako se kamata pripisuje neprekidno. Banka daje godišnju kamatu od 2%.*
5. *Nacrtajte na računalu funkcije u podzadacima (3) i (4) i usporedite dobivene grafove.*

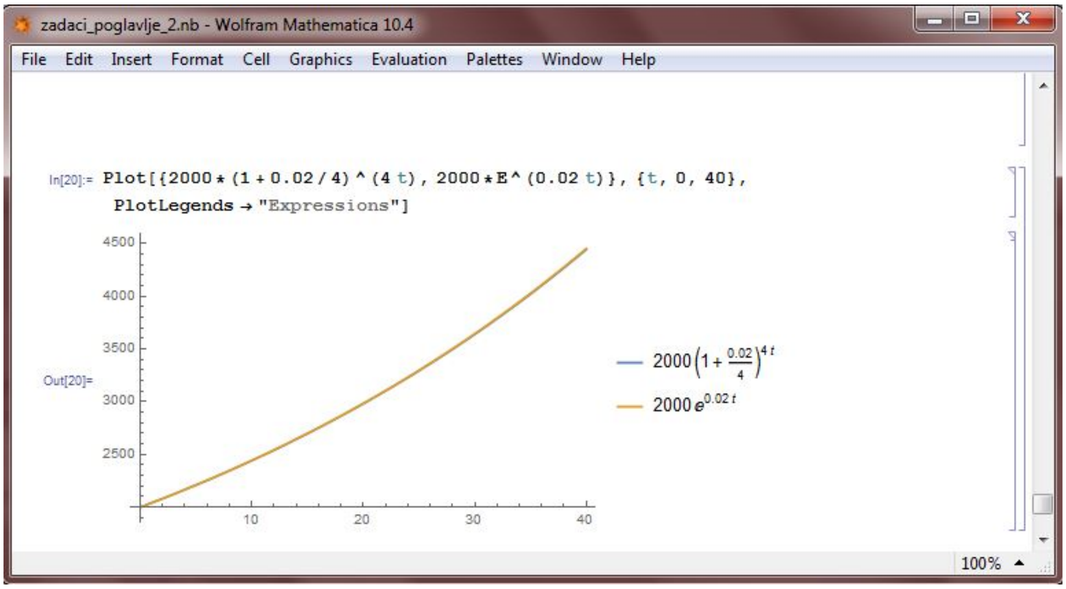
Rješenje.

1. $A(t) = Pe^{rt}$

2. $A(t) = 2000\left(1 + \frac{0.02}{4}\right)^{4t}$, $A(10) = 2441.59$.

3. $A(t) = 2000e^{0.02t}$, $A(10) = 2442.81$

4. *Graf*



Zadatak 2.39 *Određena vrsta bakterije utrostručuje se svakih* 10 *minuta.*

1. *Uz pretpostavku da razmnožavanje počinje od jedne bakterije, izvedite model rasta bakterija u skladu s funkcijom* $y = y_0e^{kt}$.

2. *Izračunajte koliko bakterija će biti prisutno nakon sat vremena.*

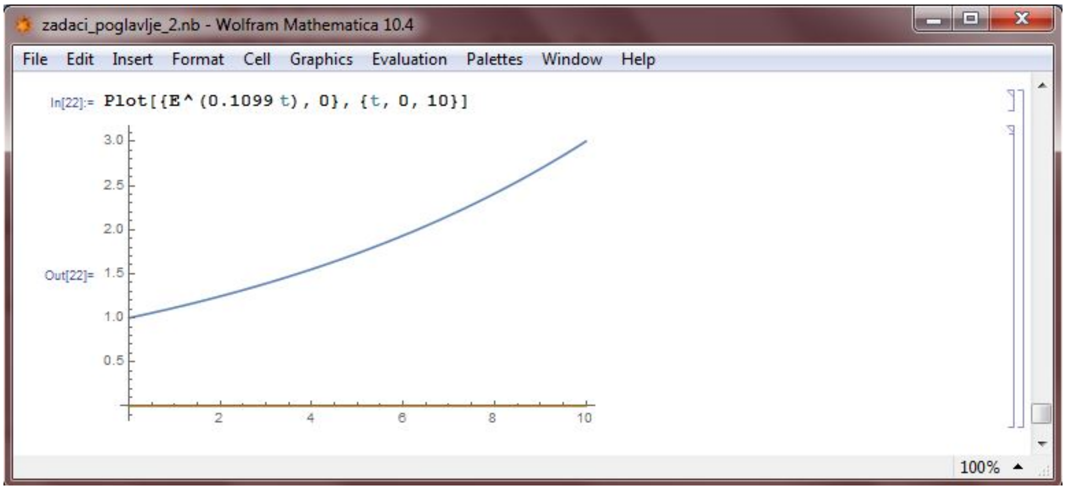
3. *Nacrtajte graf funkcije i odredite domenu i sliku funkcije. Komentirajte rast/pad funkcije.*

Rješenje.

1. $y(t) = e^{0.1099t}$ *gdje je* t *vrijeme u minutama.*

2. $y(60) = 730.698$

3. *Graf*



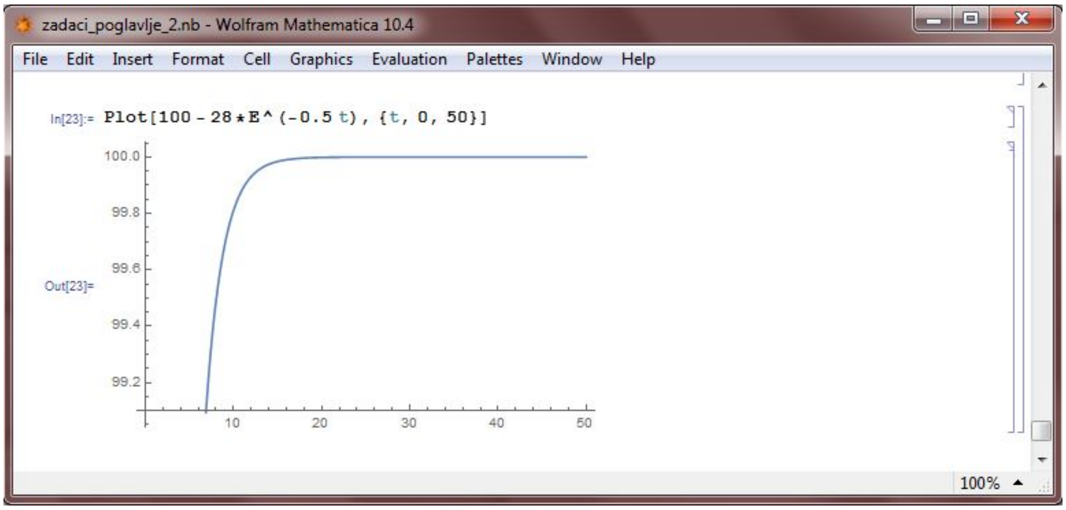
Matematički domena je skup svih realnih brojeva, ali ovdje je t vrijeme, pa ima smisla promatrati domenu $[0, +\infty)$. Slika funkcije je $[1, +\infty)$. Funkcija raste na cijeloj svojoj domeni.

Zadatak 2.40 *Pretpostavimo da je voditelj tvornice koja proizvodi dijelove za računalo procijenio da nakon t mjeseci na radnom mjestu, prosječni zaposlenik može proizvesti $Q(t) = 100 - 28e^{-0.5t}$ dijelova na sat.*

1. *Izračunajte koliko dijelova može proizvesti na sat novi zaposlenik?*
2. *Izračunajte koliko dijelova može proizvesti na sat zaposlenik koji radi mjesec dana?*
3. *Izračunajte koliko dijelova može proizvesti na sat zaposlenik koji radi duže vremena?*
4. *Nacrtajte krivulju učenja i komentirajte graf.*

Rješenje.

1. $Q(0) = 72$
2. $Q(1) \approx 83$
3. *Da bismo odgovorili na ovo pitanje, potrebno je izračunati limes funkcije kad t teži u $+\infty$. Ali to još ne znamo, pa ćemo prihvatiti da je gornja ograda na broj dijelova zapravo broj 100. Bolje ćemo zaključiti iz grafa.*
4. *Iz grafa nam je intuitivno jasno da je gornja ograda 100. Ispočetka, funkcija brzo raste, a onda sve sporije i sporije. Radi se o opadajućim prinosima.*



Zadatak 2.41 *Širenje epidemije može se modelirati logističkom funkcijom*

$$N(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-kt}}$$

gdje je K nosivi kapacitet sustava. Epidemija se širi gradom čija rizična populacija broji oko 120000 *osoba. U početnoj fazi je* 120 *zaraženih osoba, a nakon mjesec dana broj zaraženih popeo se na* 1000*.*

1. *Izračunajte konstantu A, te odredite logističku funkciju koja opisuje širenje epidemije za ovaj grad.*

2. *Izračunajte nakon koliko će vremena biti zaražena polovica rizične skupine.*

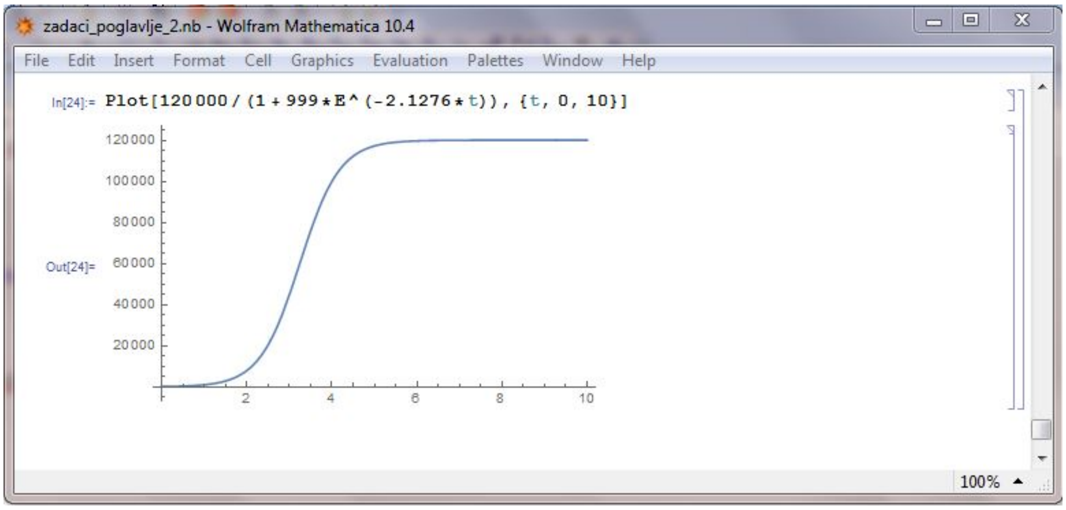
3. *Nacrtajte graf funkcije i odredite domenu i sliku funkcije. Komentirajte rast/pad funkcije.*

Rješenje.

1.
$$N(t) = \frac{120000}{1 + 999e^{-2.1276t}}$$

2. *Nakon* 3.2463 *mjeseca.*

3. *Graf funkcije*



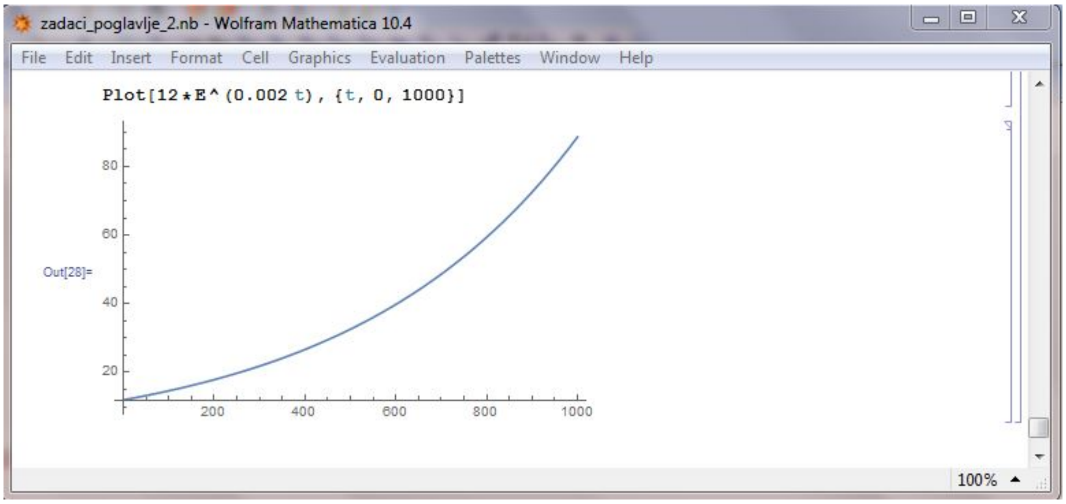
Budući da je varijabla vrijeme, domena je interval $[0, +\infty)$*, a slika* $[120, 120000)$*. Pravac* $y = 120000$ *je vodoravna asimptota. Funkcija ispočetka raste brzo, a onda sve sporije i sporije. Znači, ispočetka pokazuje rastuće, a nakon toga opadajuće prinose.*

Zadatak 2.42 *Stanovništvo jedne države raste u skladu s modelom* $N(t) = 12e^{0.002t}$ *gdje je* t *vrijeme u godinama, a* $N(t)$ *broj stanovnika u milijunima.*

1. *Ako s* $t = 0$ *označimo početni trenutak mjerenja, izračunajte početnu vrijednost broja stanovnika.*
2. *Koliko će stanovnika ta država imati za pet godina?*
3. *Za koliko će se godina stanovništvo te države udvostručiti?*
4. *Za koliko će se godina stanovništvo te države povećati za 50%?*
5. *U Wolframovoj Mathematici nacrtajte graf funkcije. Komentirajte rast funkcije i presjek grafa s osi ordinata.*

Rješenje.

1. 12
2. 12.1206
3. 346.57 *godina*
4. 202.73 *godine*
5. 0.002
6. *Graf funkcije*



Funkcija raste na cijeloj svojoj domeni. Presjek s osi ordinata je točka $(0, 12)$ *čija je druga koordinata početna vrijednost funkcije.*

Zadatak 2.43 *Prodaja nekog proizvoda opisana je logističkom funkcijom* $Y(t) = \frac{120}{1+59e^{-0.2t}}$, *gdje je* Y *količina prodaje, a* t *vrijeme u tjednima.*

1. *Ako s* $t = 0$ *označimo početni trenutak mjerenja (današnji trenutak), izračunajte početnu vrijednost prodaje.*

2. *Kolika će prodaja biti za pet tjedana? Izračunajte to povećanje u odnosu na trenutak* $t = 0$ *u postocima.*

3. *Nacrtajte graf funkcije i komentirajte.*

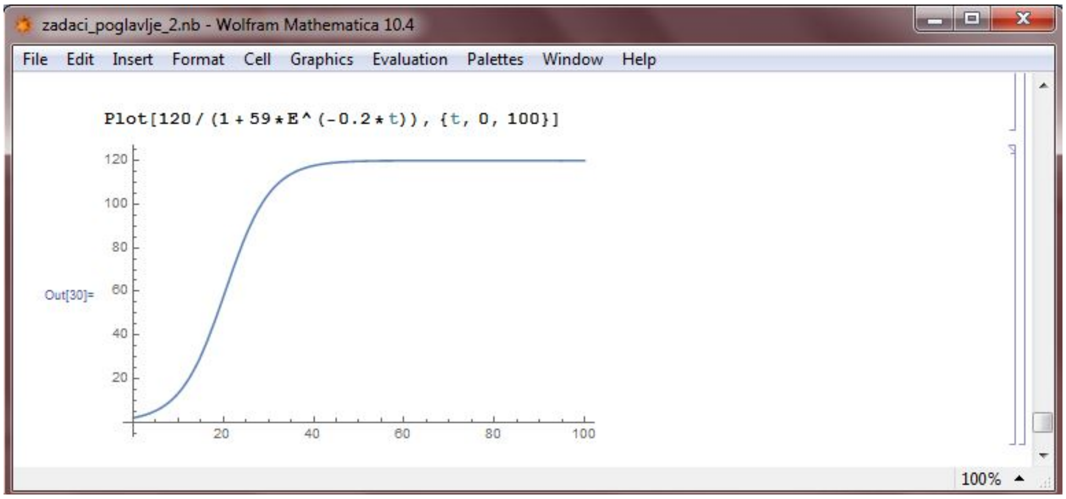
4. *Ukoliko je jedinična cijena proizvoda* 10, *definirajte funkciju prihoda kao funkciju vremena, grafički je prikažite i iz grafa intuitivno procijenite koliki je približan maksimalan prihod koji se može ostvariti. (Napomena. Maksimalan prihod se dobije iz limesa funkcije, ali to u ovom radu ne spominjemo, pa moramo govoriti o procjeni, intuiciji i približnom prihodu).*

Rješenje.

1. 2

2. 5.2852, 164.26%

3. *Graf funkcije*



Pravac $y = 120$ *je vodoravna asimptota. Funkcija ispočetka raste brzo, a onda sve sporije i sporije. Znači, ispočetka pokazuje rastuće, a nakon toga opadajuće prinose.*

4. *Funkcija prihoda je umnožak cijene i funkcije prodaje,* $Y(t) = \frac{1200}{1+59e^{-0.2t}}$. *Maksimalan prihod čitamo iz vodoravne asimptote funkcije,* 1200.

Zadatak 2.44 *Zadana je funkcija za određivanje pH vrijednosti materije koja se temelji na koncentraciji vodikovih iona H+:*

$$pH = -\log(H+).$$

1. *Izračunajte kolika će biti pH materije ako je koncentracija vodikovih iona* 0.004*?*

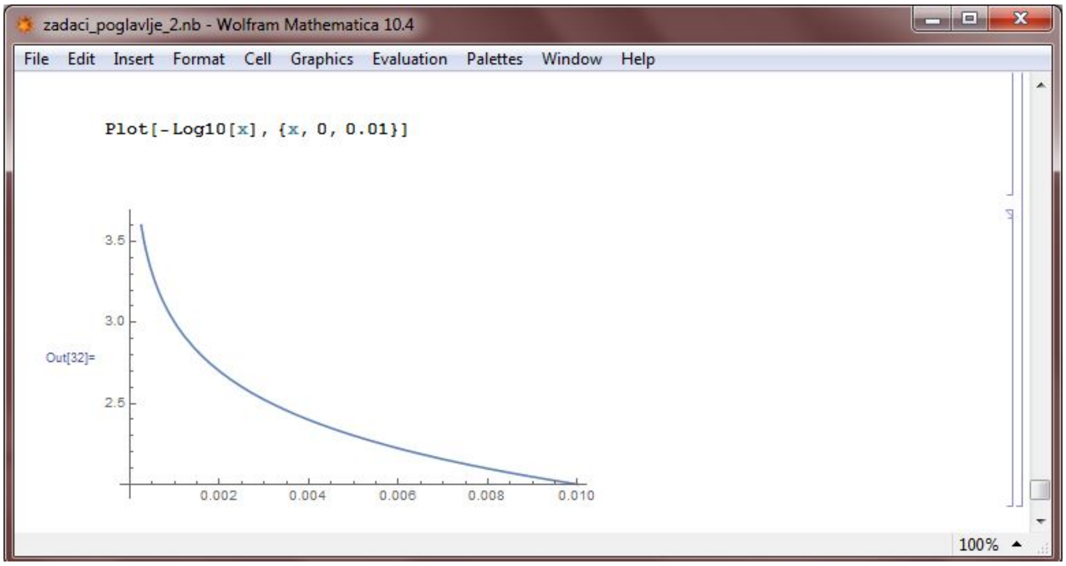
2. *Nacrtajte graf funkcije uz pomoć računala te komentirajte njezin rast/pad i presjek grafa s osi ordinata. Odredite domenu i sliku funkcije, te komentirajte, ako znate da je pH vrijednosti materije iz intervala* $[0, 14]$.

3. *Intuitivno ili uz pomoć raũnala odredite asimptotu funkcije.*

Rješenje.

1. 2.3979

2. *Funkcija pada na cijeloj svojoj domeni. Nema presjeka s osi ordinata. Budući da pH vrijednost poprima vrijednosti iz intervala* $[0, 14]$, *taj je interval slika. Matematički domena logaritamske funkcije je* $\mathbb{R}^+$, *ali ovdje imaju smisla samo oni* x *koji imaju svoj* y *iz intervala* $[0, 14]$. *Prema tome domena je interval* $[10^{-14}, 1]$.



3. $x = 0$.

Zadatak 2.45 *Koristeći formulu za izračun magnitude potresa, riješite sljedeće:*

1. *U kolovozu* 2016. *godine u Italiji je zabilježen potres od* 6.2 *prema Richterovoj skali. Par godina ranije, u Japanu je zabilježen potres koji je bio četiri puta slabiji. Izračunajte magnitudu potresa u Japanu.*
2. *Par godina ranije, u Italiji je zabilježen potres od* 4.3 *Richtera. Izračunajte koliko je jači bio potres u Italiji iz podzadatka (1).*

Rješenje.

1. 5.5979
2. 79.43 *puta*

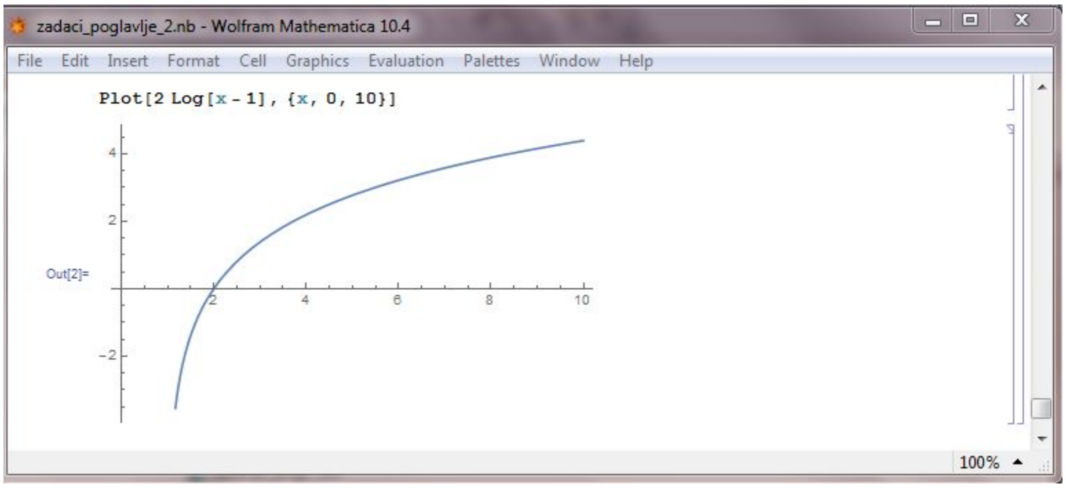
Zadatak 2.46 *Pretpostavimo da je korisnost investitora koji ulaže u novi start up modelirana funkcijom* $u(x) = 2\ln(x-1)$, *gdje je* x *ulaganje,* ln *je prirodni logaritam, a* u *oznaka za korisnost.*

1. *Odredite domenu funkcije i ekonomski interpretirajte.*
2. *Nacrtajte graf funkcije korisnosti i komentirajte graf u ovisnosti o prinosima.*
3. *Koliko novaca treba investitor uložiti da bi mu korisnost bila veća od* 4*?*
4. *Prikažite ulaganje kao funkciju korisnosti, te nacrtajte njezin graf. Kakvi su prinosi u pitanju?*

Rješenje.

1. *Matematički, domena je interval* $(1, +\infty)$. *Ekonomski, to znači da postoji pretpostavka da investitor ulaže više od* 1. *Također, da bi korisnost bila pozitivna, tj., da bi investitor uopće bio/la zadovoljan, ulaganje mora biti veće od* 2.

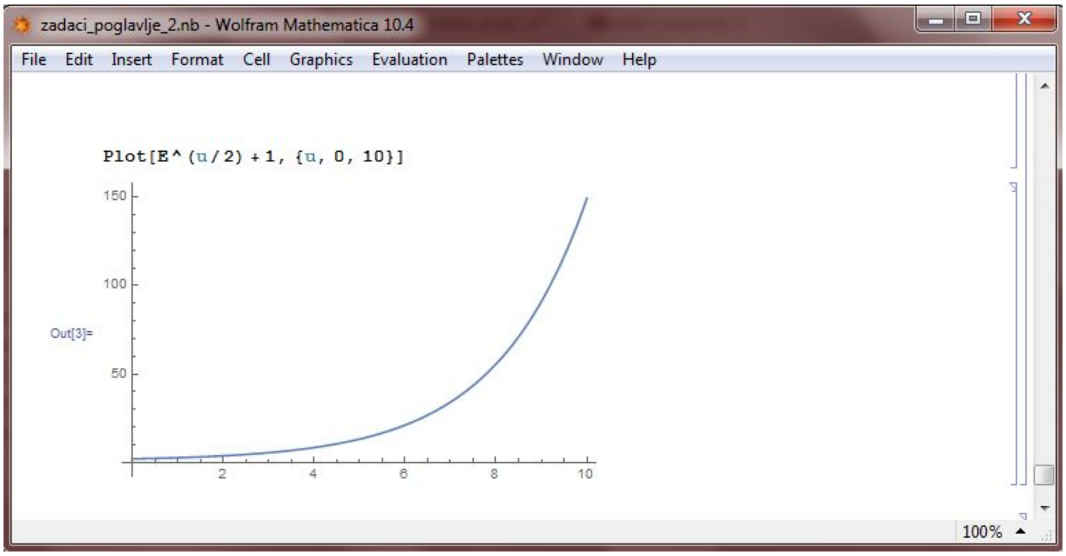
2. *Funkcija pokazuje opadajuće prinose.*



3. *Najmanje* 8.39.

4. $x = e^{\frac{u}{2}} + 1$

5. *Graf. U pitanju su rastući prinosi.*



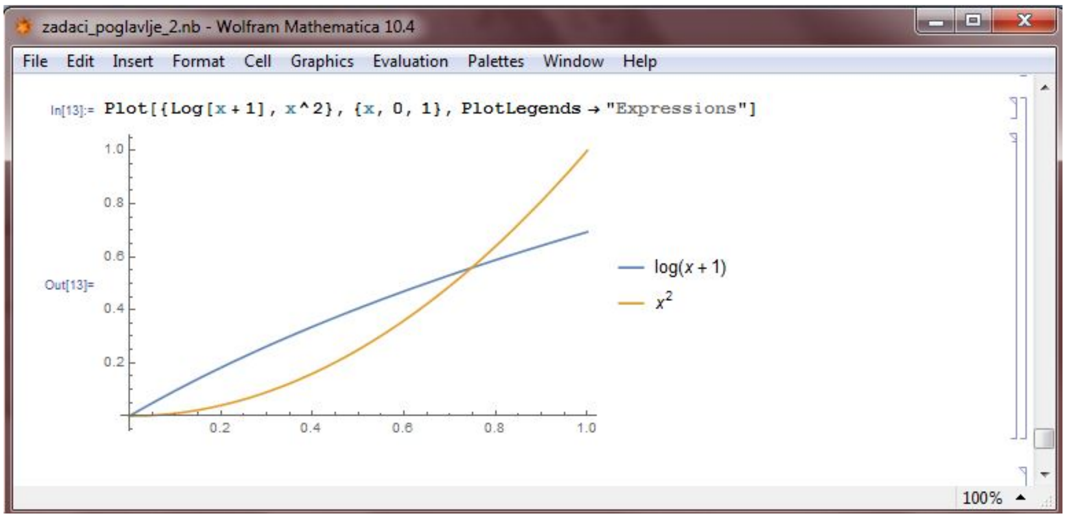
Zadatak 2.47 *Investitor ulaže u dva projekta. Funkcija korisnosti za prvi projekt je* $u(x) = \ln x$, *a za drugi projekt* $u(x) = x^2$, *gdje je* x *visina ulaganja.*

1. *Komentirajte prinose za obje funkcije korisnosti.*

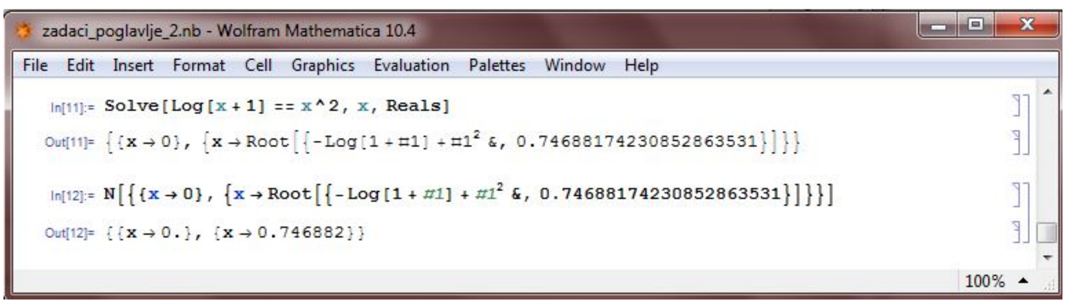
2. *Grafički prikažite obje funkcije korisnosti na istoj slici.*
3. *Za koje je iznose ulaganja investitor zadovoljniji s prvim, a za koje s drugim projektom?*

Rješenje.

1. *Funkcija korisnosti za prvi projekt pokazuje opadajuće prinose, a za drugi rastuće.*
2. *Grafovi*



3. *Rješavamo jednadžbu* $\ln x = x^2$*. Iz grafa zaključujemo da je investitor zadovoljniji s prvim prijektom za iznose do* 0.746882 *milijuna, a s drugim projektom za iznose iznad te vrijednosti.*



Zadatak 2.48 *Zadana je količina proizvodnje jednog poduzeća na sljedeći način:*

$$Q(L) = \ln(L^2 - 9)$$

gdje je Q količina proizvodnje, a L je količina rada.

1. *Za koje je količine rada ova funkcija proizvodnje definirana?*
2. *Izračunajte proizvedenu količinu na razini rada $L = 4$.*

3. *Grafički prikažite funkciju količine proizvodnje. Komentirajte prinose.*

4. *Ukoliko je jedinična prodajna cijena proizvoda* 120*, a jedinični trošak rada* 20*, izvedite funkciju dobiti kao funkciju količine rada. Grafički je prikažite.*

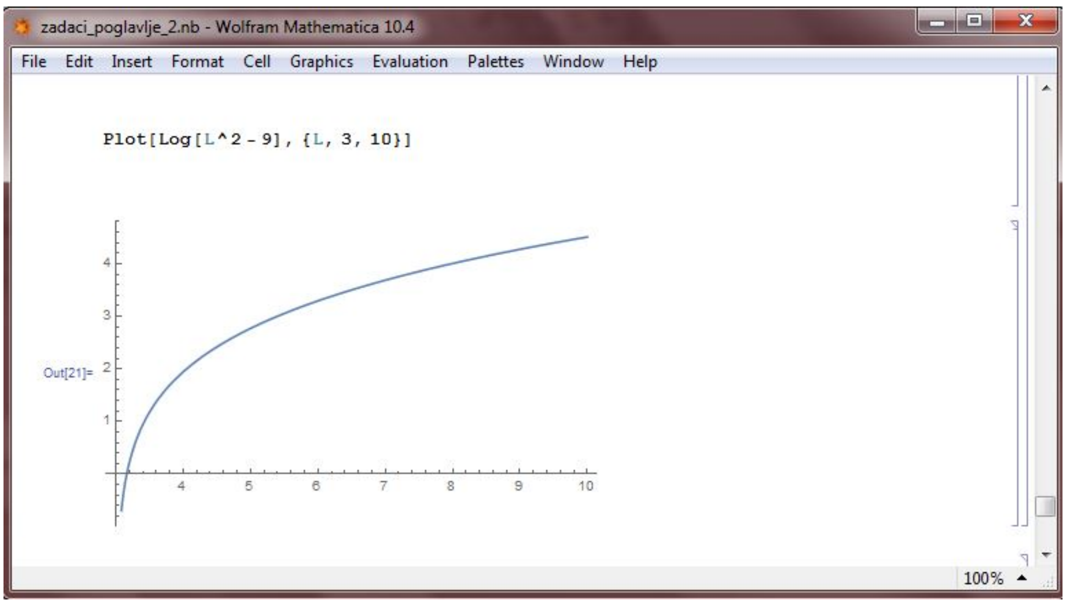
5. *Izračunajte točku pokrića i komentirajte.*

Rješenje.

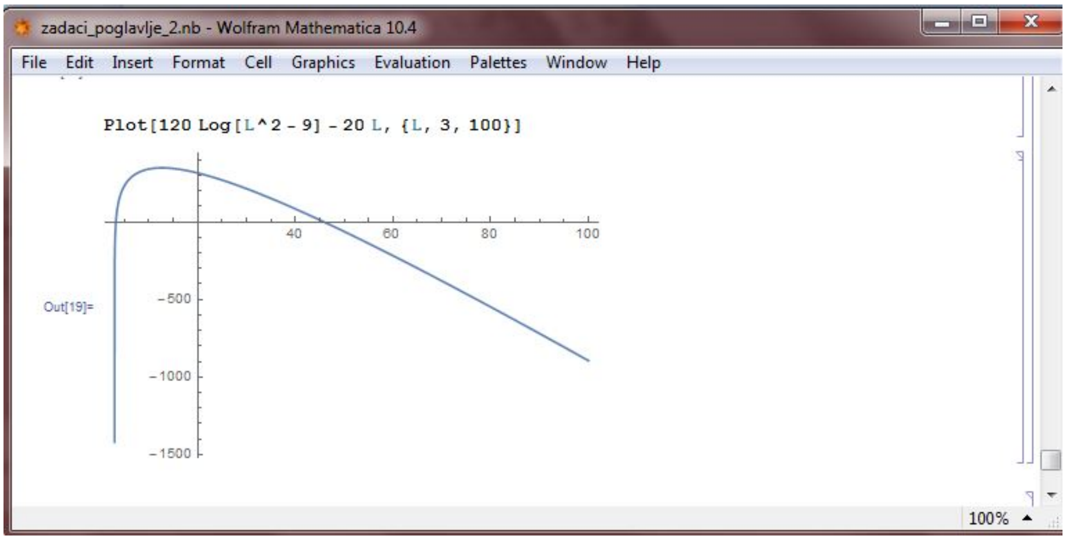
1. *Za količine rada iz intervala* $(3, +\infty)$

2. $Q(4) = 1.9459$

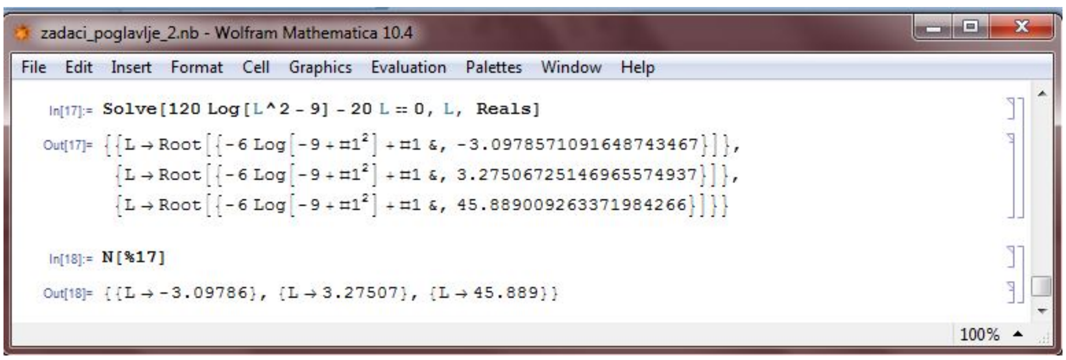
3. *Funkcija pokazuje opadajuće prinose*



4. $D(L) = 120 \ln(L^2 - 9) - 20L$



5. *Točka pokrića je količina rada uz koju je dobit jednaka nuli. Rješavamo jednadžbu* $120\ln(L^2 - 9) - 20L = 0$.



Poglavlje 3

Trigonometrijske i hiperboličke funkcije i njihove inverzne

3.1 Trigonometrijske funkcije-sinus, kosinus, tangens, kotangens

Trigonometrijskim funkcijama opisujemo periodične pojave vezane uz ponašanje fizikalnih, bioloških, kemijskih i ekonomskih sustava. Položaj kuglice koja titra na opruzi pod utjecajem elastične sile, gibanje njihala, širenje valova, variranje broja grabežljivaca i plijena koji žive na nekom teritoriju, titranje čestica nekog kristala, kretanje inflacije.

Svaku periodičnu funkciju (osim nekih posebno neobičnih funkcija) možemo zapisati kao sumu sinusa i kosinusa različitih amplituda i frekvencija. Suma može imati konačno ili beskonačno mnogo pribrojnika. Funkcija koja ima period $\frac{2\pi}{\omega}$ može se napisati kao suma

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega x + b_1 \sin \omega x + a_2 \cos 2\omega x + b_2 \sin 2\omega x + a_3 \cos 3\omega x + b_3 \sin 3\omega x + \dots \tag{3.1}$$

koju nazivamo Fourierovim redom. Ako uzmemo konačnu sumu, onda taj izraz nazivamo Fourierovim trigonometrijskim polinomom. Francuski matematičar Jean Baptiste Joseph Fourier (1768.− 1830.) u svojim je istraživanjima došao do ovakvih redova baveći se problemom provođenja topline i problemom širenja vibracija.

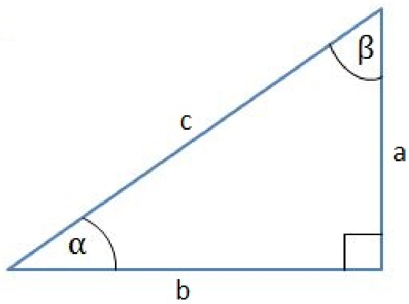
U svakoj analizi oscilacija nekog sustava javljaju se trigonometrijske funkcije, baš iz razloga što se periodične funkcije zapisuju pomoću sume sinusa i kosinusa u obliku formule (3.1). Val kod kojeg se iznos poremećaja mijenja prema trigonometrijskoj funkciji sinus naziva se harmonijski val. Svi drugi oblici valova se mogu prikazati kao zbroj harmonijskih valova različitih amplituda i frekvencija. Ti harmonijski valovi koje zbrajamo su upravo pribrojnici iz sume (3.1). Valovi imaju golemu primjenu u medicini, spomenimo ultrazvučne valove. Prigušene oscilacije nekog tijela ili nekog sustava opisujemo pomoću eksponencijalne i trigonometrijske funkcije, kao što ćemo vidjeti u poglavlju o modeliranju trigonometrijskim funkcijama. Iz Fourierove analize se u 20. stoljeću razvila obrada signala, interdisciplinarno područje kojim se bave matematičari razvijanjem teorije i algoritama, a inženjeri njihovom primjenom. Moderni algoritmi za kompresiju podataka temelje se na poopćenoj Fourierovoj analizi koja se naziva teorija valića.

Mi se ovdje nećemo i ne možemo baviti Fourierovim redovima, jer je matematički put do njih dug. Treba naučiti raditi s redovima, s trigonometrijskim funkcijama, isto tako s derivacijama i integralima jer se pomoću njih računaju amplitude pribrojnika iz sume (3.1). U ovom poglavlju naučit ćemo baratati s trigonometrijskim funkcijama tako da ih možemo primijeniti na različite probleme koji ne izlaze iz dosega srednjoškolske matematike. Upoznali ste trigonometrijske funkcije na pravokutnom trokutu ABC s pravim kutem pri vrhu C, definirane kao

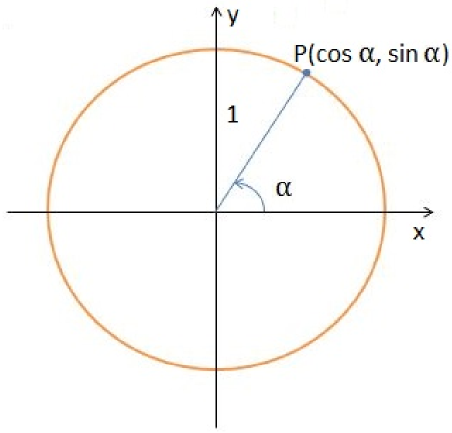
$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{a}{c} \\ \cos\alpha &= \frac{b}{c} \\ \operatorname{tg}\alpha &= \frac{a}{b} \\ \operatorname{ctg}\alpha &= \frac{b}{a} \end{aligned} \tag{3.2}$$

gdje su a i b duljine kateta nasuprot vrhovima s kutevima α i β, a c je hipotenuza, kao na slici 3.1. Direktno iz Pitagorinog poučka slijedi osnovna jednakost koja povezuje sinus i kosinus

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$



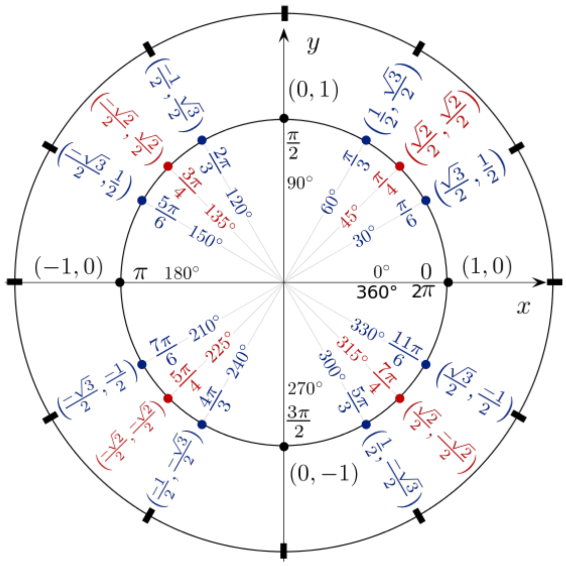
Ako kut α shvatimo kao varijablu koja se mijenja, onda nam je prikladan grafički prikaz pomoću jedinične kružnice sa središtem u ishodištu O koordinatnog sustava. Neka je točka P na kružnici, onda je hipotenuza OP radijus kružnice, prema formulama (3.2) vertikalna kateta ima duljinu $\sin\alpha$, a horizontalna $\cos\alpha$, kao na slici dolje s trigonometrijskom kružnicom.



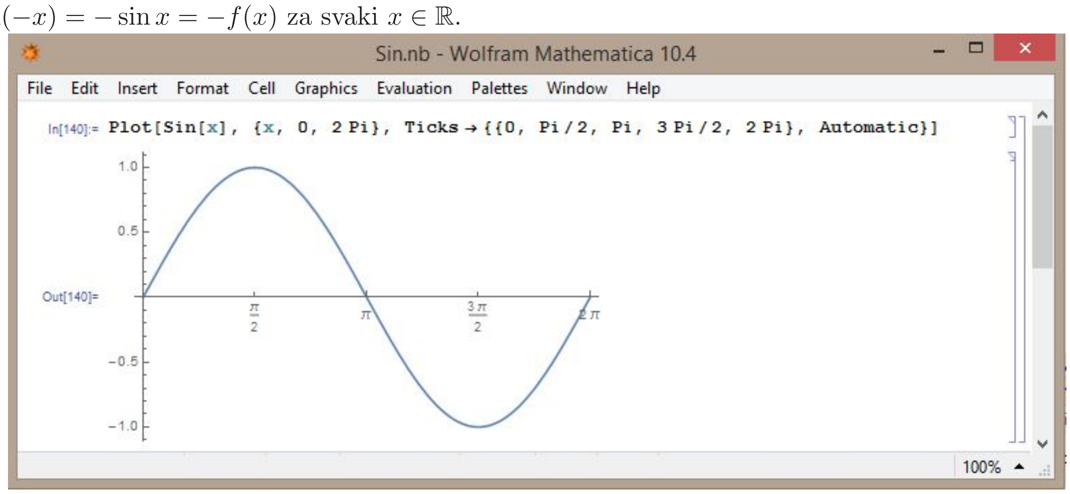
Promatrajmo kako se mijenja $\sin\alpha$ kad se mijenja α, što se postiže micanjem točke P po kružnici. Krenimo s malim kutem α kad je točka P sasvim blizu osi x. Vidimo da je vertikalna kateta male duljine, dakle $\sin\alpha$ je mali. Kad kut α raste, raste i $\sin\alpha$ do trenutka kad P dođe na os y. Tada je $\sin\alpha = 1$, a trokut se stanjio i nestao. Kad nastavimo dalje micati točku P po kružnici, vidimo da se trokut ponovo pojavljuje, a $\sin\alpha$ smanjuje. Kad točke P dođe na os x, trokut ponovo nestaje i $\sin\alpha = 0$. Nastavimo li putovanje točke P po kružnici, vidimo da je kateta $\sin\alpha$ sad ispod osi x, dakle, $\sin\alpha < 0$. Kad točka P stigne na os y, trokut se opet istanjio i nestao, a $\sin\alpha = -1$. Nastavimo li, dolaskom točke P na os x imamo $\sin\alpha = 0$. U ovom kruženju vidjeli smo da je

$$\begin{aligned}
\sin 0^\circ = \sin 0 &= 0 \\
\sin 90^\circ = \sin\frac{\pi}{2} &= 1 \\
\sin 180^\circ = \sin\pi &= 0 \\
\sin 270^\circ = \sin\frac{3\pi}{2} &= -1 \\
\sin 360^\circ = \sin 2\pi &= 0.
\end{aligned}$$

Ako točka P krene drugi put po kružnici, sve se ponavlja.



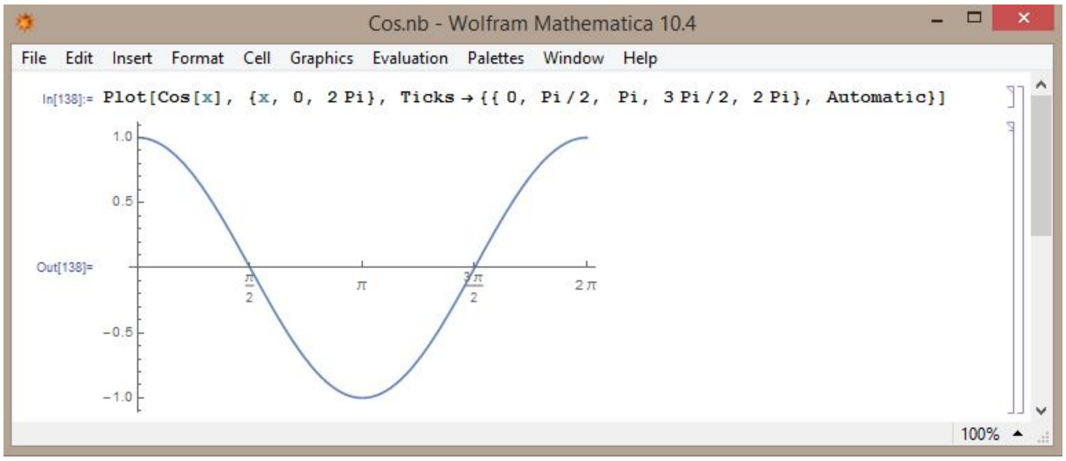
Funkcija $f(x) = \sin x$ je funkcija koja je definirana za sve $x \in \mathbb{R}$, a poprima vrijednosti iz intervala $[-1, 1]$. Periodična je s periodom 2π. Funkcija $f(x) = \sin x$ je neparna funkcija, vrijedi $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.



Mi smo promatrali vertikalnu katetu dok je točka P putovala po kružnici i time smo proučili ponašanje funkcije sinus. Promatranjem horizontalne katete, proučavamo funkciju kosinus. Za funkciju kosinus vrijedi

$$\begin{aligned}
\cos 0^\circ = \sin 0 &= 1 \\
\cos 90^\circ = \sin \frac{\pi}{2} &= 0 \\
\cos 180^\circ = \sin \pi &= -1 \\
\cos 270^\circ = \sin \frac{3\pi}{2} &= 0 \\
\cos 360^\circ = \sin 2\pi &= 1.
\end{aligned}$$

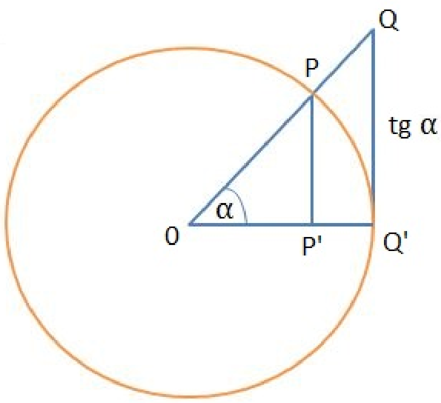
Funkcija $f(x) = \cos x$ je isto definirana za sve $x \in \mathbb{R}$, poprima vrijednosti iz intervala $[-1, 1]$i periodična je s periodom 2π. Funkcija $f(x) = \cos x$ je parna funkcija, vrijedi $f(x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.



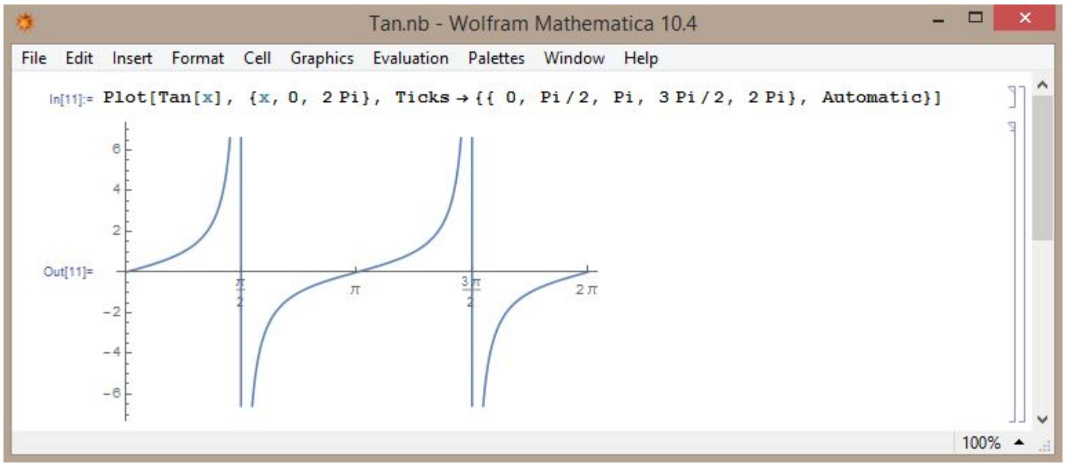
Smjer u kojem je točka P putovala po kružnici nazivamo pozitivnim. To je smjer suprotan kretanju kazaljke na satu. Kretanje u smjeru kazljke na satu nazivamo kretanjem u negativnom smjeru i tada kutevi postaju negativni, nakon 0, dolazi $-\frac{\pi}{2}, -\pi, \ldots$.

Promatrajmo drugi pravokutni trokut, trokut $OQ\prime Q$ kao na donjoj slici. Kateta $OQ\prime$ jednaka je radijusu jedinične kružnice, pa je $\operatorname{tg}\alpha$ duljina druge katete tog trokuta. Vrijedi

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{d(Q, Q\prime)}{d(O, Q\prime)}.$$



Funkcija $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ je funkcija koja je definirana za $x \in \mathbb{R}$ za koje je $\cos x \neq 0$, dakle $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ u svakom krugu, pa to pišemo $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, pri čemu k može biti pozitivan ili negativan cijeli broj ili nula. Na slici se vidi da tangens može biti velik, štoviše kad kut ide prema $\frac{\pi}{2}$, tangens postaje beskonačno velik. To se događa zato jer mu nazivnik $\cos\alpha$ postaje jako mali kad kut ide prema $\frac{\pi}{2}$ i bilo kojem drugom $(2k+1)\frac{\pi}{2}$. Funkcija tangens može poprimiti bilo koju vrijednost. Tangens kuta je omjer kateta, pa kad gledamo kako se kut mijenja, onda vidimo da je taj omjer isti za kuteve iz prvog i trećeg kvadranta, isto tako za kuteve iz drugog i četvrtog kvadranta. Nakon što smo prešli prvi kvadrant i drugi kvadrant, vrijednost tangensa se počnu ponavljati. Period funkcije tangens je π.

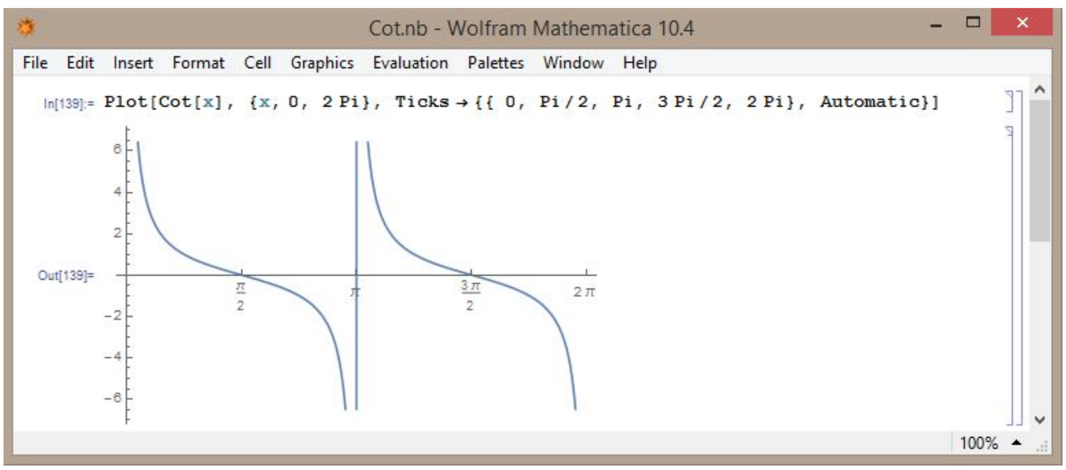


Iz jednakosti (3.3) vidimo da kad kut ide od nule prema 90° tangens raste. Ako kroz točke O i Q prolazi pravac, onda veći kut ima pravac koji je strmiji. Neka graf funkcije $f(x) = ax$ prolazi kroz točke O i Q. Tada su katete trokuta $OQ'Q$ duljine 1 i a. Tangens je

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{1}.$$

Dolazimo do važne činjenice da je **koeficijent smjera pravca $f(x) = ax$ jednak tangensu kuta koji taj pravac zatvara s pozitivnim dijelom osi x.** Isto vrijedi i za pravac $f(x) = ax + b$, jer se ovdje radi samo o pomaku, što je izometrija, pa se ne mijenja kut!

Funkcija $f(x) = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ je funkcija koja je definirana za $x \in \mathbb{R}$ za koje je $\sin x \neq 0$, dakle $x \neq 0, \pi, 2\pi$ u svakom krugu, pa to pišemo $x \neq k\pi$, pri čemu k može biti pozitivan ili negativan cijeli broj ili nula. Kotangens može biti velik, štoviše kad kut ide prema $k\pi$, tangens postaje beskonačno velik. To se događa zato jer mu nazivnik $\sin \alpha$ tada postaje jako mali. Funkcija kotangens može poprimiti bilo koju vrijednost, a period je π. Tangens i kotangens su neparne funkcije. Provjerite!



Rezimirajmo

$$
\begin{aligned}
\sin : \mathbb{R} &\to [-1, 1], \text{ period je } 2\pi \\
\cos : \mathbb{R} &\to [-1, 1], \text{ period je } 2\pi \\
\operatorname{tg} : \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\} &\to \mathbb{R}, \text{ period je } \pi \\
\operatorname{ctg} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi\} &\to \mathbb{R}, \text{ period je } \pi
\end{aligned}
$$

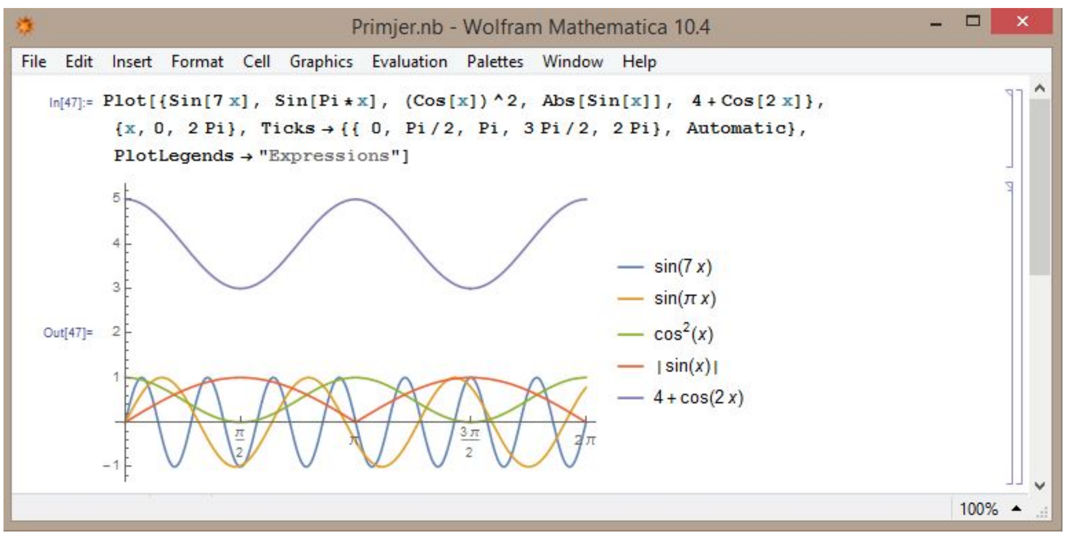
3.2 Periodičnost funkcija

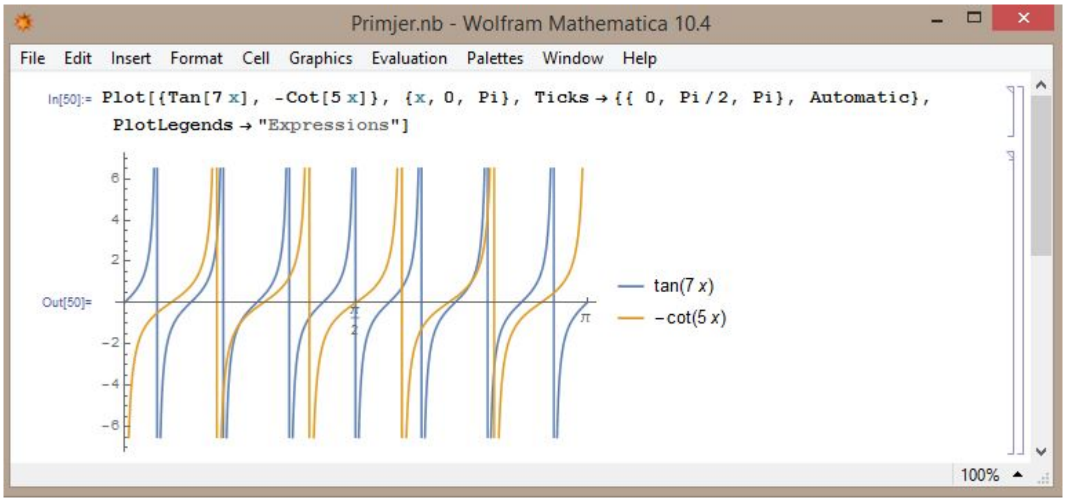
Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je **periodična na** $\mathbb{R}$ ako postoji $T > 0$ takav da vrijedi $f(x+T) = f(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Takav T nazivamo period funkcije, a ako postoji najmanji takav T, nazivamo ga temeljnim periodom funkcije f.

Iz definicija trigonometrijskih funkcija vidjeli smo koji su im periodi. Ti periodi su ujedno i temeljni, jer ne postoje manji brojevi koji bi bili periodi funkcija sinus, kosinus, tangens i kotangens. Treba naglasiti da za sinus i kosinus su periodi $2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots,$ odnosno $k \cdot 2\pi$ za svaki prirodni broj k. Za tangens i kotangens su periodi $\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots,$ odnosno $k\pi$ za svaki prirodni broj k.

Primjer 3.1 *Pomoću Wolframove Mathematice nacrtajte grafove funkcija i zaključite je li funkcija periodična. Ako jest, odredite joj temeljni period.*

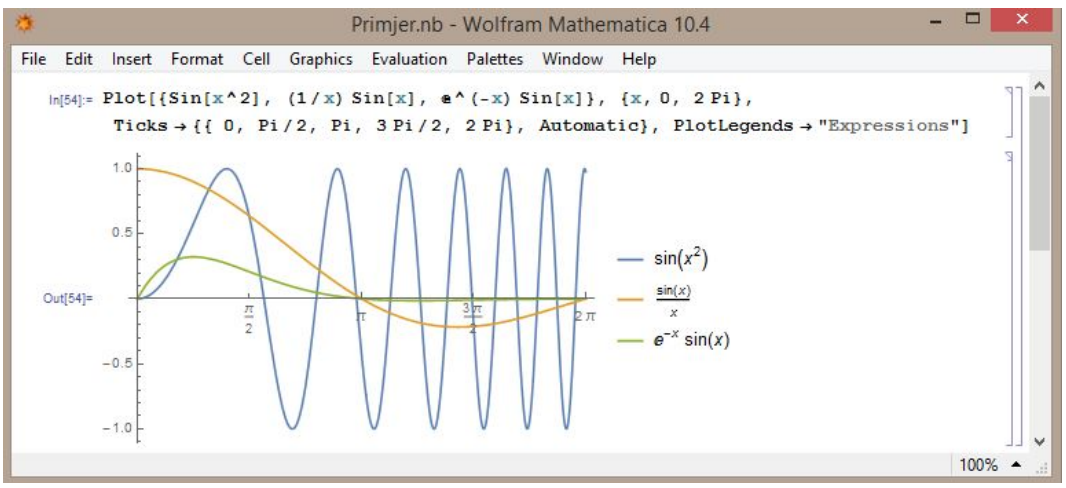
1. $f(x) = \sin 7x$
2. $f(x) = \sin \pi x$
3. $f(x) = \cos^2 x$
4. $f(x) = |\sin x|$
5. $f(x) = \operatorname{tg} 7x$
6. $f(x) = -\operatorname{ctg} 5x$
7. $f(x) = 4 + \cos 2x$.

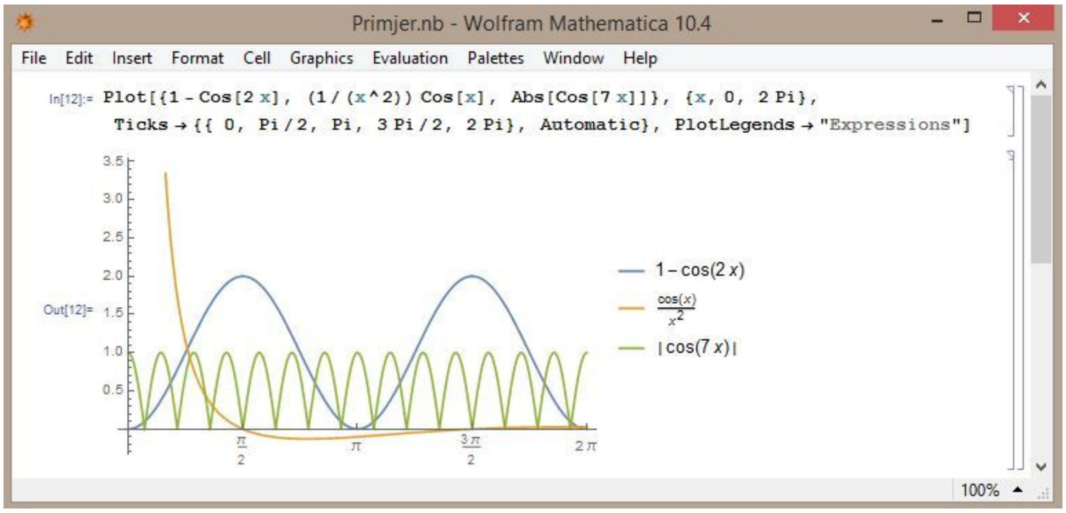




Primjer 3.2 *Pomoću Wolframove Mathematice nacrtajte grafove funkcija i zaključite je li funkcija periodična. Ako jest, odredite joj temeljni period.*

1. $f(x) = \sin x^2$
2. $f(x) = 1 - \cos 2x$
3. $f(x) = \frac{1}{x^2}\cos x$
4. $f(x) = \frac{1}{x}\sin x$
5. $f(x) = |\cos 7x|$
6. $f(x) = e^{-x}\sin x$





Primjer 3.3 *Pomoću prethodnih primjera i korištenjem vaših novih testnih primjera zaključite:*

1. *Koliki je period funkcija* $f(x) = \sin \omega x$, $f(x) = \cos \omega x$, $f(x) = \operatorname{tg} \omega x$, $f(x) = \operatorname{ctg} \omega x$*?*
2. *Koliki je period funkcija* $f(x) = |\sin \omega x|$, $f(x) = |\cos \omega x|$, $f(x) = |\operatorname{tg} \omega x|$, $f(x) = |\operatorname{ctg} \omega x|$*?*
3. *Koliki je period funkcija* $f(x) = |1 + \sin \omega x|$, $f(x) = |1 + \cos \omega x|$, $f(x) = |1 + \operatorname{tg} \omega x|$, $f(x) = |1 + \operatorname{ctg} \omega x|$*?*

Rješenje.

1. $\frac{2\pi}{\omega}$, $\frac{\pi}{\omega}$
2. $\frac{\pi}{\omega}$, $\frac{\pi}{\omega}$
3. $\frac{2\pi}{\omega}$, $\frac{\pi}{\omega}$

U definiciji periodičnosti ste sigurno uočili da temeljni period ne mora postojati. Kod trigonometrijskih funkcija postoje temeljni, odnosno najmanji periodi, ali navest ćemo primjer funkcije koja je periodična ali nema temeljni period.

Primjer 3.4 *Dirichletova funkcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definirana je sa*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{za } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{za } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Funkcija racionalnim brojevima pridružuje jedinice, a iracionalnim brojevima nule. Pokušajmo naći neki broj T *za koji vrijedi*

$$f(x+T) = f(x) \text{ za svaki} x \in \mathbb{R}.$$

Neka je T *racionalan broj. Vrijedi*

$$f(x+T) = 1 \text{ za svaki } x \in \mathbb{Q}$$

jer je $x + T$ *racionalan broj, pa zaključujemo da je*

$$f(x+T) = f(x) \text{ za svaki } x \in \mathbb{Q}.$$

Provjerimo ovu jednakost za iracionalan broj $x \notin \mathbb{Q}$. S obzirom da je $x+T$ iracionalan dobivamo

$$f(x+T) = 0 \text{ za svaki } x \notin \mathbb{Q},$$

pa i za iracionalne x vrijedi

$$f(x+T) = f(x) \text{ za svaki } x \notin \mathbb{Q}.$$

Ako vrijedi za racionalne i za iracionalne x, onda vrijedi za sve $x \in \mathbb{R}$. Dobili smo da je racionalan broj T period funkcije, a nismo uzeli neki određeni T. Dakle, bilo koji racionalan broj T je period Dirichletove funkcije. Pitamo se sad koji je to najmanji racionalan broj. Ne postoji najmanji racionalan broj, pa ne postoji ni temeljni period ove periodične funkcije.

Ova funkcija je malo neobična, ali dobro je vidjeti i takve funkcije da shvatimo zašto se u definiciji periodičnosti javlja ona pretpostavka koja kaže-ako postoji najmanji period. Dirichletova funkcija se često javlja kao primjer funkcije za koju neke lijepe stvari ne funkcioniraju, pa nas ona potiče da budemo precizni u svojim tvrdnjama. Ova funkcija je periodična funkcija koja se ne može zapisati kao suma sinusa i kosinusa različitih amplituda i frekvencija.

3.3 Opća sinusoida

Opća sinusoida ima oblik

$$f(x) = A\sin(\omega x + \varphi),$$

pričemu je A amplituda, ω kružna frekvencija, a φ fazni pomak. Mi ćemo govoriti o općoj sinusoidi, ali sve isto vrijedi i za opću kosinusoidu

$$f(x) = A\cos(\omega x + \varphi).$$

Fukcija pomaka kuglice koja obješena na oprugu titra pod utjecajem elastične sile, odnosno harmonijskog oscilatora, je opća kosinusoida ili opća sinusoida.

U prethodnom poglavlju smo došli do zaključka da je period funkcije $\sin\omega x$ jednak $\frac{2\pi}{\omega}$, pa je to ujedno i period opće sinusoide

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

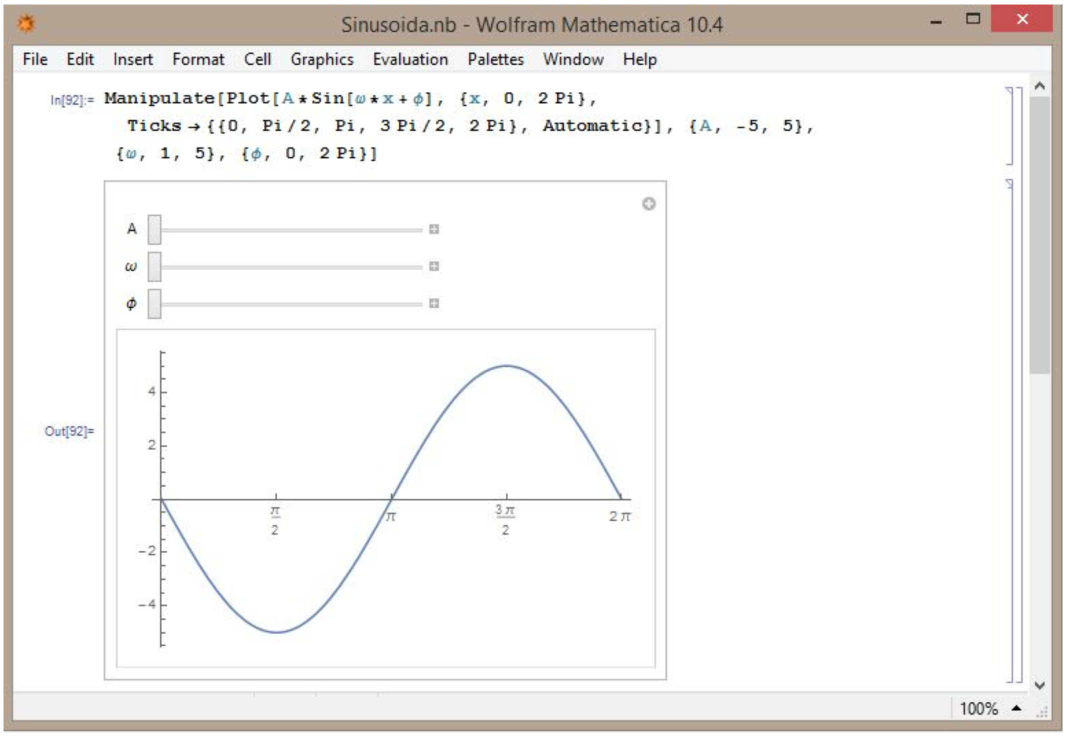
Sinusoida amplitude A poprima vrijednosti iz intervala $[-A, A]$. Ako sinusoidu zapišemo u obliku

$$f(x) = A\sin\omega(x + \frac{\varphi}{\omega}),$$

korištenjem znanja o izometrijama iz poglavlja 1, možemo je nacrtati tako da pomaknemo

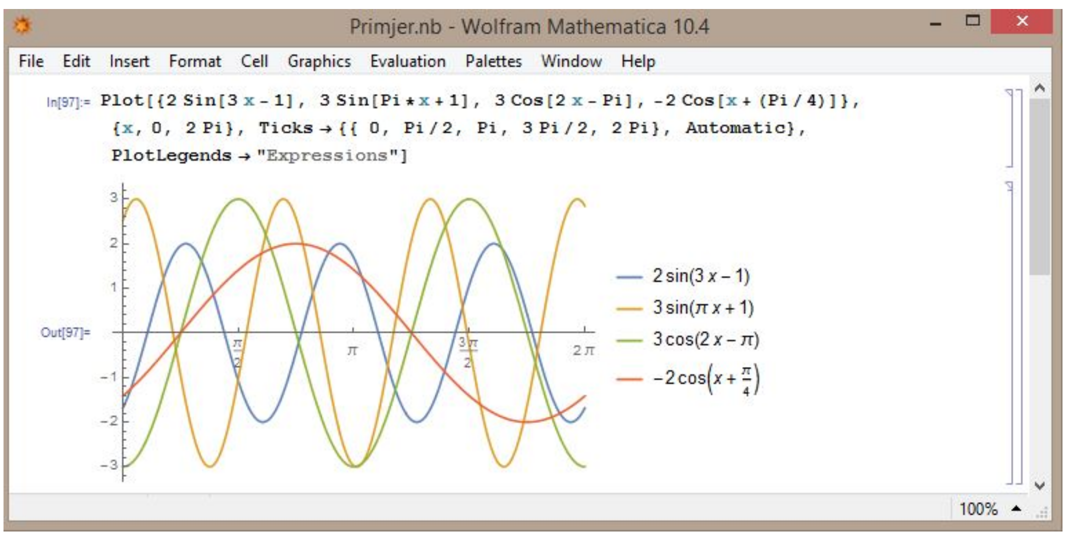
$$A\sin\omega x$$

duž osi x. Koristeći naredbu Manipulate promatrajte kako se mijenja sinusoida kad mijenjate amplitudu A, frekvenciju ω i fazni pomak φ.



Primjer 3.5 *Nacrtajte grafove funkcija*

1. $f(x) = 2\sin(3x - 1)$
2. $f(x) = 3\sin(\pi x + 1)$
3. $f(x) = 3\cos(2x - \pi)$
4. $f(x) = -2\cos(x + \frac{\pi}{4})$.



Opću sinusoidu možemo zapisati kao sumu sinusa i kosinusa iste frekvencije, ali bez pomaka. Računamo pomoću adicijskih formula

$$A\sin(\omega x + \varphi) = A\sin\varphi\cos\omega x + A\cos\varphi\sin\omega x,$$

pa ako stavimo

$$\begin{aligned} a &= A\sin\varphi \\ b &= A\cos\varphi \end{aligned} \tag{3.3}$$

onda imamo jednakost

$$A\sin(\omega x + \varphi) = a\cos\omega x + b\sin\omega x.$$

Iz jednakosti (3.3) dobivamo

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= \frac{a}{b} \\ A &= \sqrt{a^2+b^2}, \end{aligned}$$

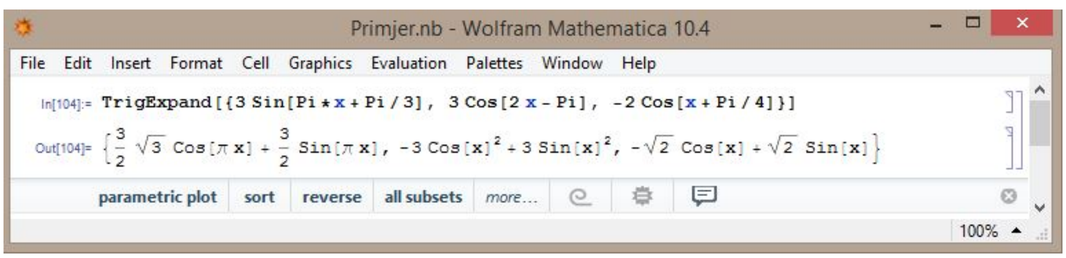
pa pomoću ovih jednakosti možemo opću sinusoidu prebaciti u sumu sinusa i kosinusa ili obrnuto.

Primjer 3.6 *Zadane funkcije zapišite u obliku* $a\cos\omega x + b\sin\omega x$

1. $f(x) = 3\sin(\pi x + \frac{\pi}{3})$
2. $f(x) = 3\cos(2x - \pi)$
3. $f(x) = -2\cos(x + \frac{\pi}{4})$.

Rješenje.

1. $f(x) = \frac{3}{2}\sin\pi x + \frac{3\sqrt{3}}{2}\cos\pi x$
2. $f(x) = -3(\cos x)^2 + 3(\sin x)^2$
3. $f(x) = \sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x$.



Primijetimo da je ovaj oblik koji smo dobili zapravo Fourierov red za funkcije koje su bile zadane. Zapravo smo dobili trigonomerijski Fourierov polinom, jer je suma konačna. Sve funkcije iz primjera (3.6) mogu se zapisati kao sume sinusa i kosinusa iste frekvencije. Složenije funkcije imaju sume različitih frekvencija.

Primjer 3.7 *Zadane funkcije zapišite u obliku opće sinusoide. Nakon što napišete u tom obliku, napravite provjeru. Pomoću adicijskih formula opću sinusoidu vratite u oblik koji je bio zadan i usporedite jeste li dobili istu funkciju. Funkcije su*

1. $f(x) = \sin \pi x + \cos \pi x$
2. $f(x) = 3 \sin 2x - 3 \cos 2x$
3. $f(x) = \sqrt{3} \sin 3x + \cos 3x$.

Rješenje.

1. $f(x) = \sqrt{2} \sin(\pi x + \frac{\pi}{4})$
2. $f(x) = 2\sqrt{3} \sin(2x - \frac{\pi}{4})$
3. $f(x) = 2 \sin(3x + \frac{\pi}{6})$.

U ovom primjeru da bi dobili fazni pomak tražili smo rješenja

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= 1 \qquad (3.4) \\ \operatorname{tg} \varphi &= -1 \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

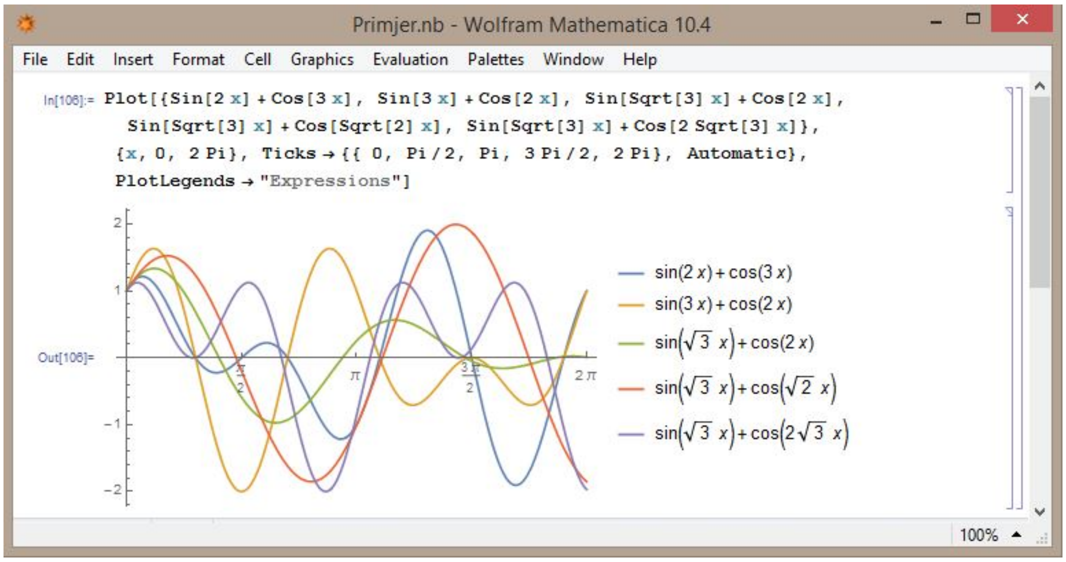
i dobili ih kao

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\pi}{4} \\ \varphi &= -\frac{\pi}{4} \\ \varphi &= \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Mi smo rješavajući ove jednadžbe tražili vrijednosti funkcije koja je inverzna funkciji tangens. Odlučili smo se za neke vrijednosti koje su rješenja jednadžbi (3.4). U sljedećem poglavlju definirat ćemo inverzne funkcije trigonometrijskih funkcija.

Primjer 3.8 *Pomoću Wolframove Mathematice nacrtajte grafove funkcija i zaključite je li funkcija periodična.*

1. $f(x) = \sin 2x + \cos 3x$
2. $f(x) = \sin 3x + \cos 2x$
3. $f(x) = \sin \sqrt{3}x + \cos 2x$
4. $f(x) = \sin \sqrt{3}x + \cos \sqrt{2}x$
5. $f(x) = \sin \sqrt{3}x + \cos 2\sqrt{3}x$



Primjer 3.9 *Pomoću primjera 3.8 postavite hipotezu o periodičnosti funkcije* $f(x) = \sin \omega_1 x + \cos \omega_2 x$ *u ovisnosti o* $\frac{\omega_1}{\omega_1}$.
Rješenje je da je za $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ *racionalan broje funkcija periodična, a za iracionalan nije.*

3.4 Definicija ciklometrijskih funkcija

Funkcije inverzne trigonometrijskim funkcijama, odnosno ciklometrijske funkcije definirat ćemo u ovom poglavlju. Ponovimo da smo o inverznoj funkciji f^{-1} naučili da postoji za funkciju f koja je bijekcija, te da je graf od f^{-1} simetričan grafu od f s obzirom na pravac $y = x$.

Provjerimo je li funkcija $f(x) = \sin x$, $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ bijekcija. Funkcija je surjekcija ako je slika funkcije jedanak kodomeni funkcije, što znači da u kodomeni nema viška elemenata, onih u koje se niti jedan x is domene ne preslika. Ovdje se vidi da je slika funkcije i kodomena interval $[-1, 1]$, jer sinusi poprimaju te vrijednosti. Dakle, funkcija je surjekcija. Funkcija je injekcija ako se različitim x pridružuju različite funkcijske vrijednosti, što ovdje nije slučaj. Na primjer, kad se pitamo koji x ide u 1, znamo da je

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1, \sin\frac{5\pi}{2} = 1, \ldots$$

pa funkcija nije injekcija. Da bismo mogli definirati funkciju inverznu funkciji sinus, moramo imati samo jedan x za koji vrijedi $\sin x = 1$, a isto tako za sve ostale vrijednosti sinusa. Smanjit ćemo interval na kojem promatramo funkciju, tako da izbacimo sve one x zbog kojih imamo ponavljanja vrijednosti funkcije. Moramo uzeti jedan podskup sadašnje domene $\mathbb{R}$ na kojem funkcija sinus poprima sve vrijednosti između -1 i 1, a nema ponavljanja. To možemo napraviti na beskonačno mnogo načina, evo nekih takvih intervala

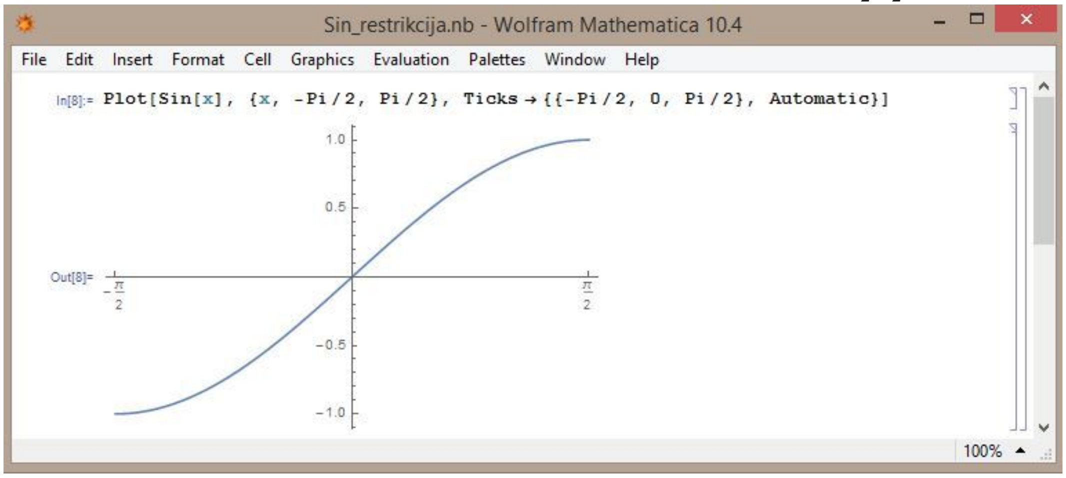
$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right], \ldots$$

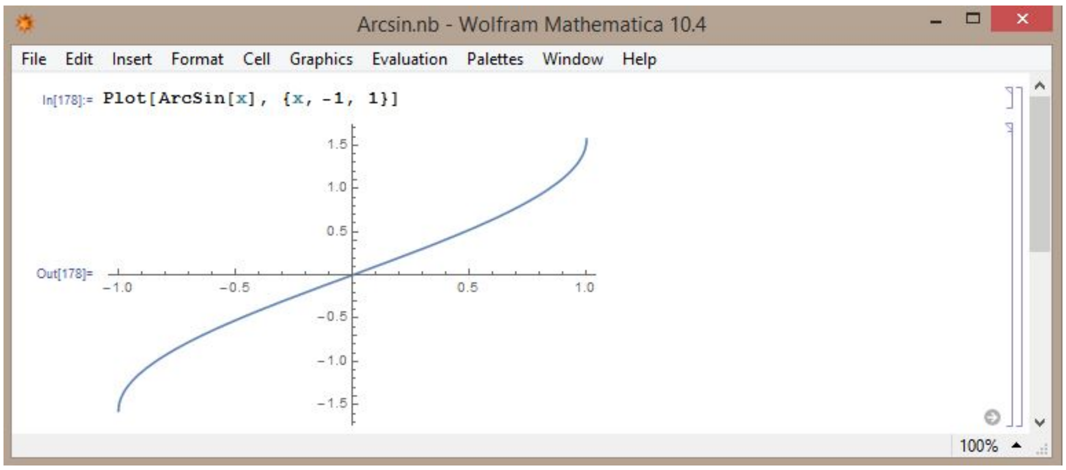
Obično uzimamo interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ na kojem funkcija $\sin x$ poprima vrijednosti od -1 do 1. Smanjili smo domenu i dobili restrikciju $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ početne funkcije $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$.

Funkcija $f(x) = \sin x$,

$$f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1] \quad \text{je bijekcija,}$$

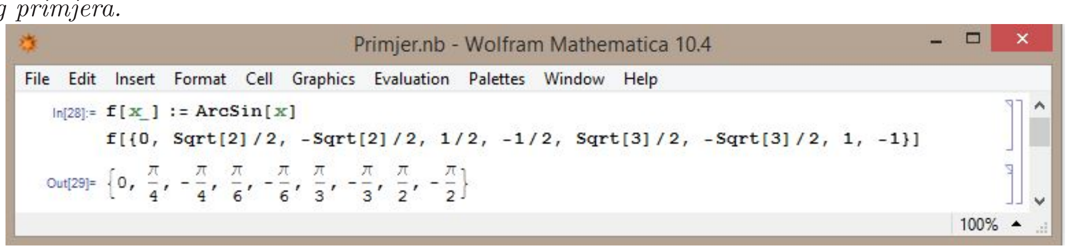
pa možemo definirati inverznu funkciju $f^{-1}(x) = \arcsin x$, $f^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.





Primjer 3.10 *Za funkciju* $f(x) = \arcsin x$ *izračunajte vrijednost funkcije u točki* x *ako je* $x = 0$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = 1$, $x = -1$.

Primjer 3.11 *Koristeći naredbu ArcSin[x] u Wolframovoj Mathematici provjerite rješenja iz prethodnog primjera.*



Primjer 3.12 *Intenzitet signala zadan je funkcijom* $f(x) = \sin x$. *Odredite za koji* x *je intenzitet:*

1. $\sin x > \frac{1}{2}$

2. $\sin x \leq \frac{1}{2}$

3. $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$

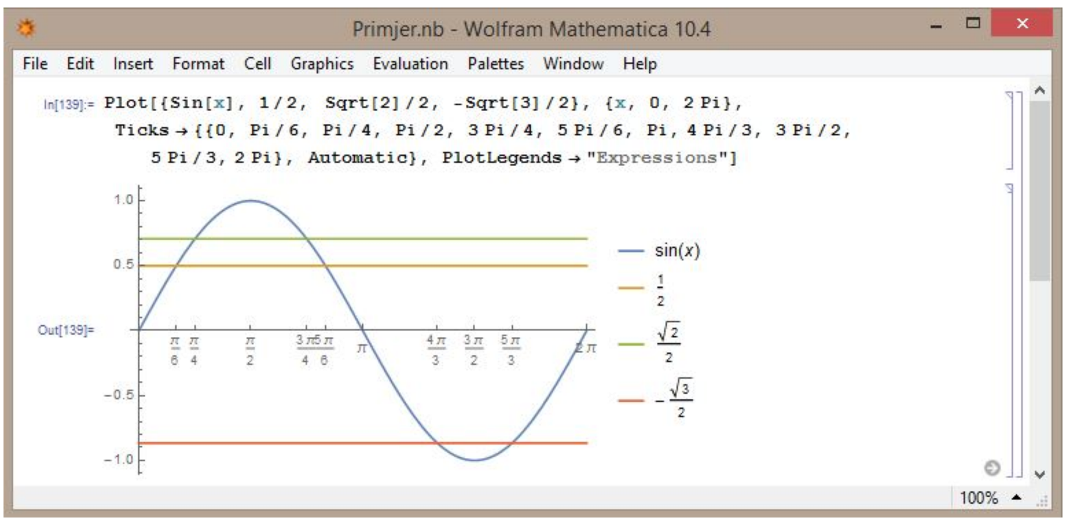
Rješenje.

1. *Crtamo graf funkcije* $y = \sin x$ *i pravac* $y = \frac{1}{2}$. *Otčitavamo za koje* x *je sinusoida iznad pravca* $y = \frac{1}{2}$. *Vidimo da je to za* $x \in (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$, *ali treba uvažiti periodičnost i dobivamo rješenje* $x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

2. $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

3. $x \in \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

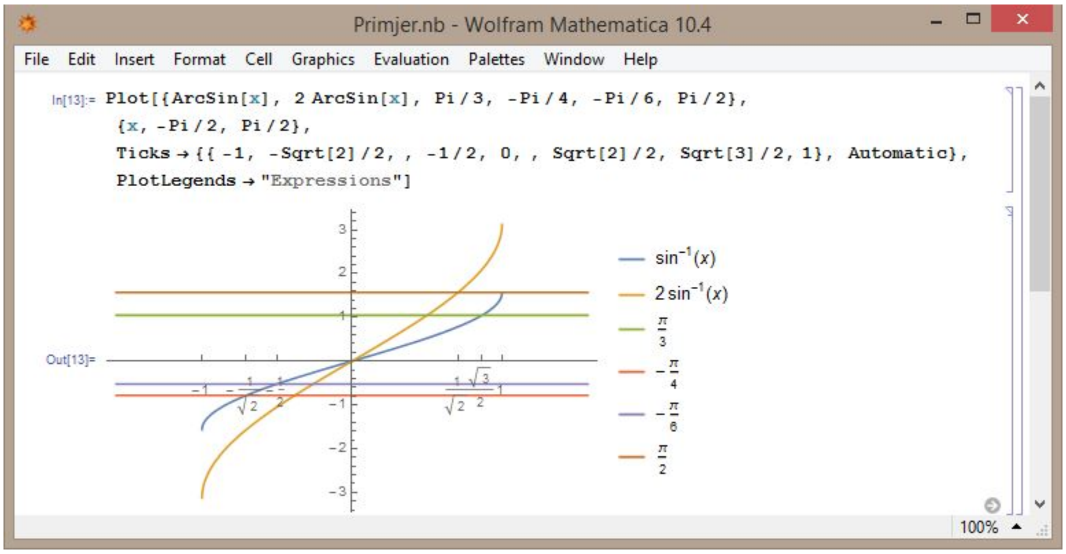
4. $x \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$



Primjer 3.13 *Gledajući graf funkcije* $f(x) = \arcsin x$ *riješite nejednadžbe*
1. $\arcsin x > \frac{\pi}{3}$, 2. $\arcsin x > -\frac{\pi}{4}$, 3. $\arcsin x > -\frac{\pi}{6}$, 4. $2\arcsin x < \frac{\pi}{2}$.

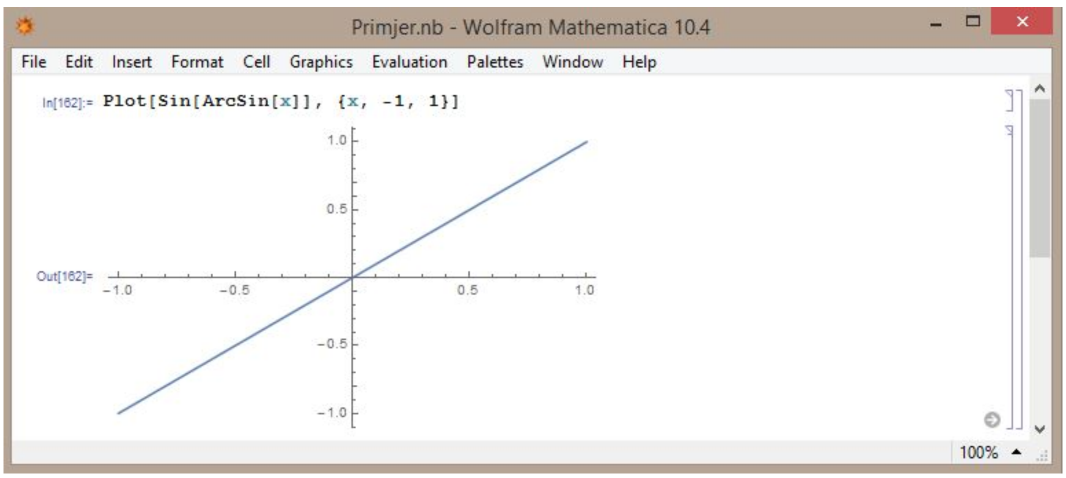
Rješenje.

1. $x \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$, 2. $x \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$, 3. $x \in (-\frac{1}{2}, 1]$, 4. $x \in [-1, \frac{\sqrt{2}}{2})$.



Uočimo da je funkcija $f(x) = \arcsin x$ neparna funkcija, njezin graf je centralno simetričan u odnosu na ishodište koordinatnog sustava.

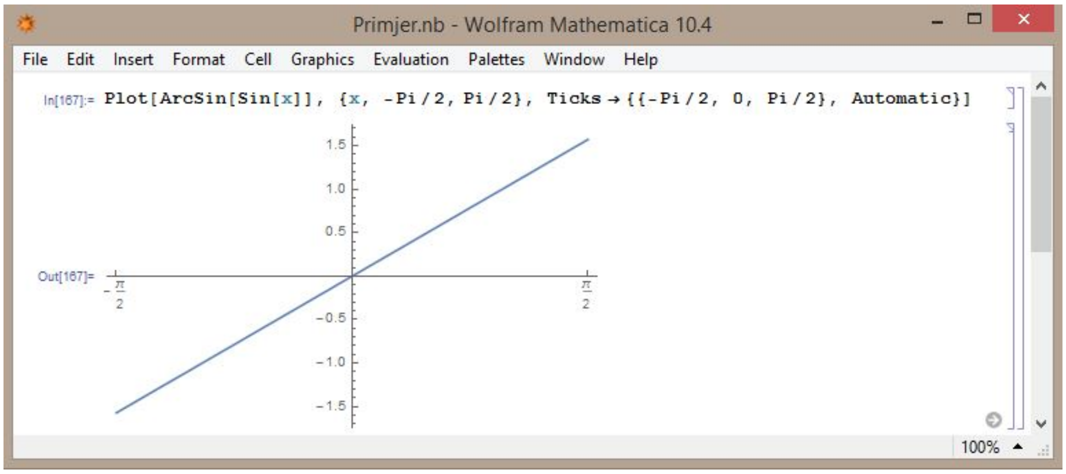
Primjer 3.14 *Zadana je funkcije* $f(x) = \sin \arcsin x$*. Uočimo da je ona definirana samo za* $x \in [-1, 1]$ *i da su na tom intervalu funkcije* sin *i* arcsin *inverzne, pa je* $f(x) = x$ *za* $x \in [-1, 1]$.



Primjer 3.15 *Nacrtajmo graf funkcije* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *zadane s* $f(x) = \arcsin \sin x$*. Zbog toga što su* sin *i* arcsin *inverzne vrijedi*

$$\sin \arcsin x = x, \quad \textit{za svaki } x \in [-1, 1]$$

$$\arcsin \sin x = x, \quad \textit{za svaki } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$



Ovaj primjer je zanimljiv jer funkcija $f(x) = \arcsin \sin x$ *definirana za svaki* $x \in \mathbb{R}$*, a znamo da ne vrijedi da je* $\arcsin \sin x = x$ *za svaki realan broj. Za sad imamo*

$$f(x) = \arcsin \sin x = \begin{cases} x & \textit{za } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \\ & \textit{ne znamo za ostale } x \end{cases}$$

Funkcija $f(x) = \arcsin \sin x$ *je periodična perioda* 2π *jer vrijedi* $f(x + 2\pi) = \arcsin \sin(x + 2\pi) = \arcsin \sin x = f(x)$*. Poznato nam je ponašanje funkcije* f *na intervalu* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ *duljine* π*, pa trebamo vidjeti ponašnje funkcije na još jednom intervalu duljine* π *da bi znali ponašanje funkcije. Odaberimo interval* $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right)$ *koji se slijeva nadovezuje na interval na kojem su funkcije inverzne. Uzmimo* $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right)$ *i računamo*

$$f(x) = \arcsin \sin x = \arcsin \sin \Big(x + \pi - \pi \Big).$$

Uzeli smo $x + \pi$ *je* $x + \pi \in x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ *ako je* $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right)$*, pa za* $x + \pi$ *možemo koristiti da su sinus i arkus sinus inverzne funkcije. Po adicijskoj formuli za sinus i neparnosti dobivamo*

$$= \arcsin \Big(-\sin(x + \pi) \Big) = -\arcsin \Big(\sin(x + \pi) \Big),$$

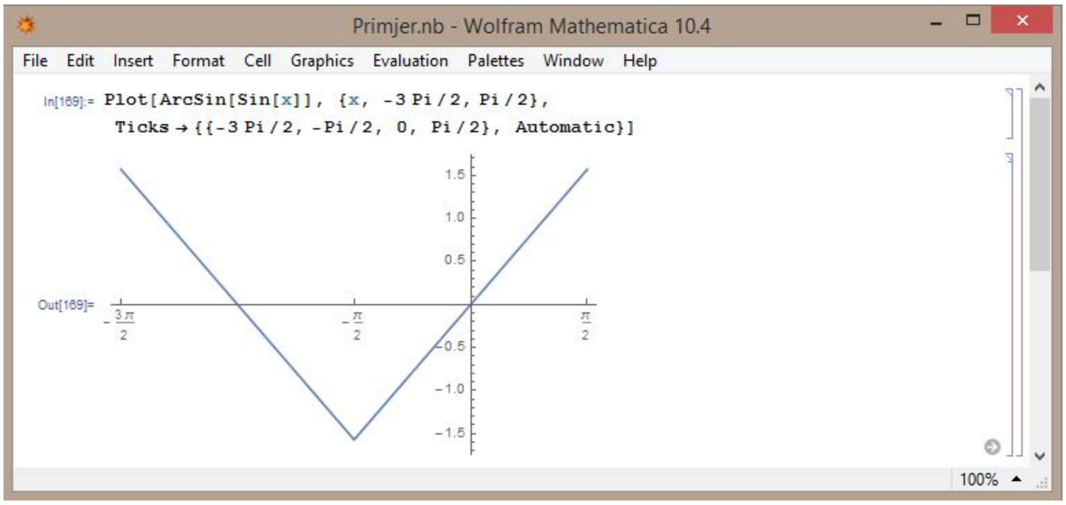
pa je

$$f(x) = -x - \pi \ \textit{za} \ x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right).$$

Dobili smo

$$f(x) = \arcsin \sin x = \begin{cases} -x - \pi & \textit{za } x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right) \\ x & \textit{za } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \end{cases}$$

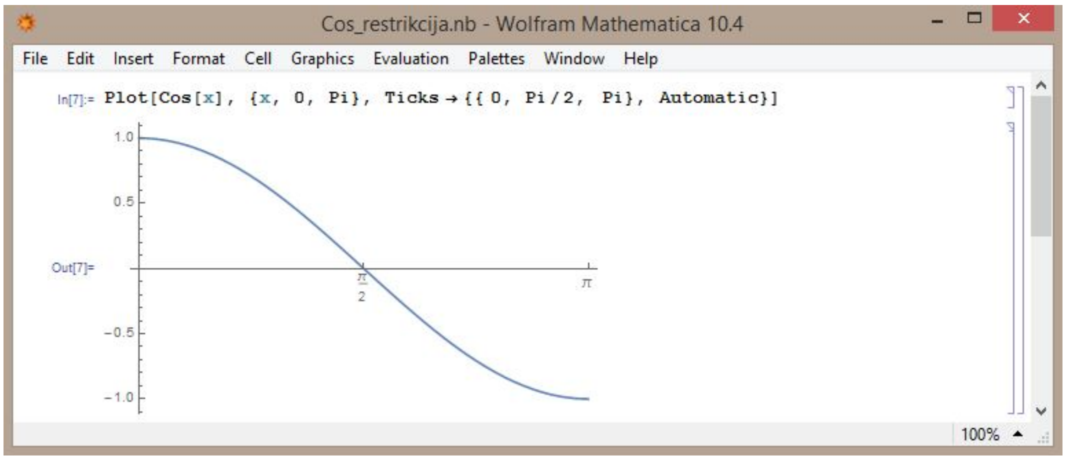
pa možemo nacrtati graf funkcije.

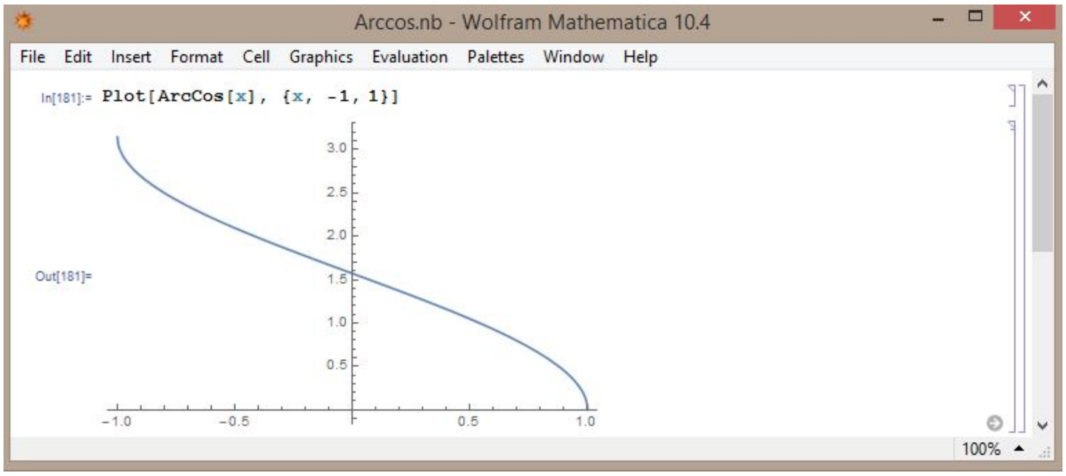


Slično kao za funkciju sinus, za funkciju kosinus isto uzimamo restrikciju i to na interval $[0, \pi]$. Funkcija $f(x) = \cos x$,

$$f : [0, \pi] \to [-1, 1] \qquad \text{bijekcija},$$

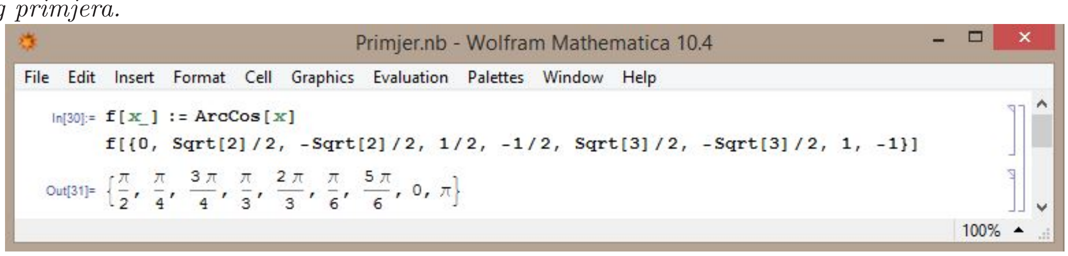
i možemo definirati inverznu funkciju $f^{-1}(x) = \arccos x$, $f^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$.





Primjer 3.16 *Za funkciju* $f(x) = \arccos x$ *izračunajte vrijednost funkcije u točki* x *ako je* $x = 0$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = 1$, $x = -1$.

Primjer 3.17 *Koristeći naredbu ArcCos[x] u Wolframovoj Mathematici provjerite rješenja iz prethodnog primjera.*



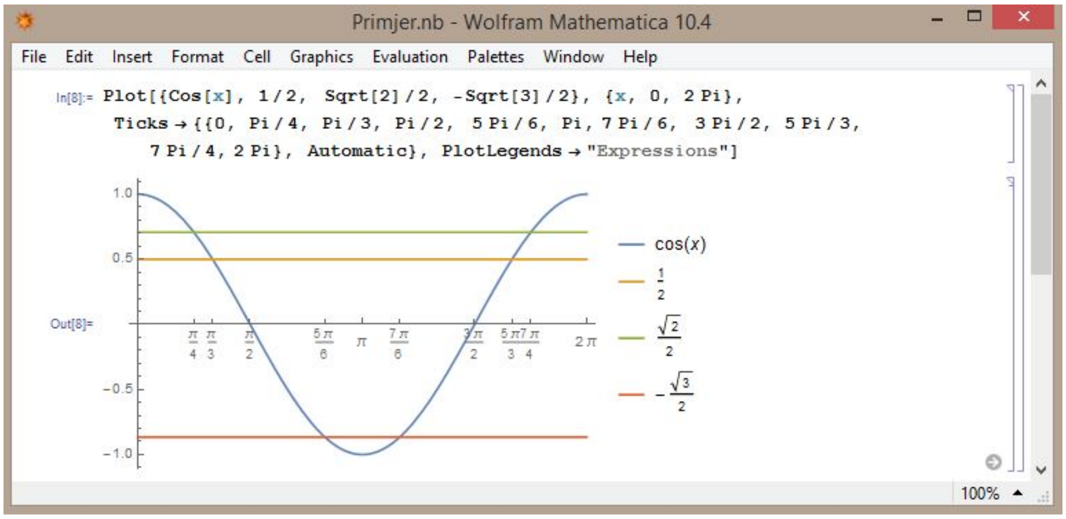
Primjer 3.18 *Intenzitet signala zadan je funkcijom* $f(x) = \cos x$. *Odredite za koji* x *je intenzitet:*

1. $\cos x > \frac{1}{2}$
2. $\cos x \leq \frac{1}{2}$
3. $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$
4. $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Rješenje.

1. *Crtamo graf funkcije* $y = \sin x$ *i pravac* $y = \frac{1}{2}$. *Otčitavamo za koje* x *je sinusoida iznad pravca* $y = \frac{1}{2}$. *Vidimo da je to za* $x \in (-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$, *ali treba uvažiti periodičnost i dobivamo rješenje* $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$
2. $x \in \mathbb{R} \setminus \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$
3. $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

4. $x \in \mathbb{R} \setminus \left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$



Primjer 3.19 *Gledajući graf funkcije* $f(x) = \arccos x$ *riješite nejednadžbe*

1. $\arccos x > \frac{\pi}{3}$

2. $\arccos x > \frac{\pi}{4}$

3. $\arccos x > \frac{\pi}{6}$

4. $2\arccos x < \frac{\pi}{2}$

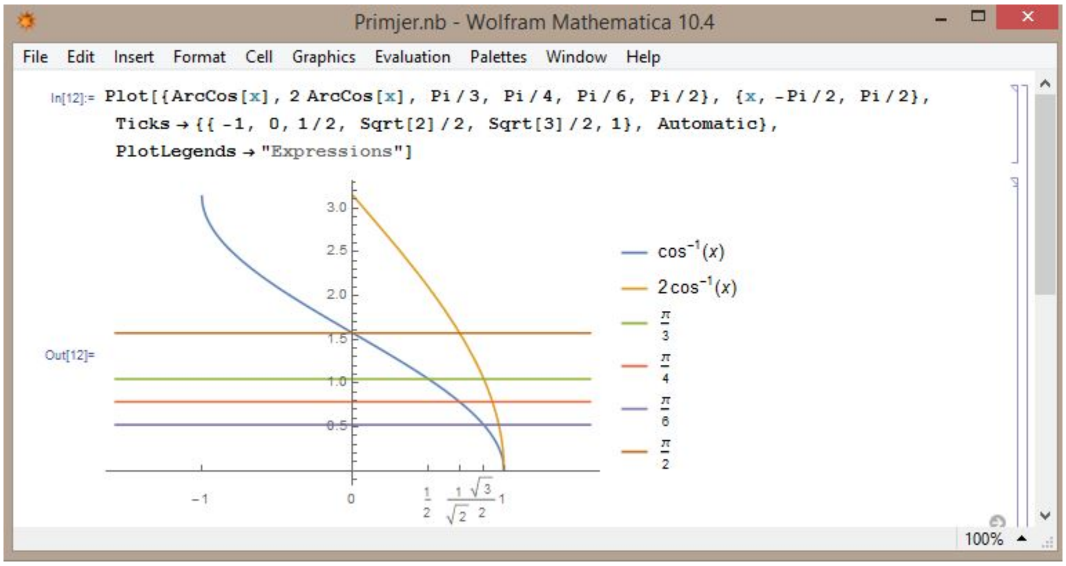
Rješenje.

1. $x \in [-1, \frac{1}{2})$

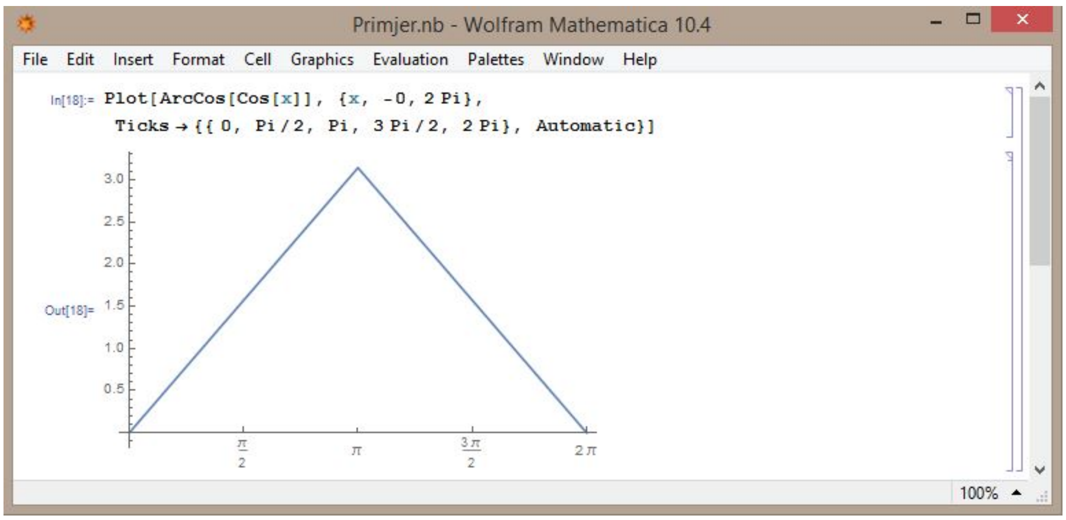
2. $x \in [-1, \frac{\sqrt{2}}{2})$

3. $x \in [-1, \frac{\sqrt{3}}{2})$

4. $x \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$



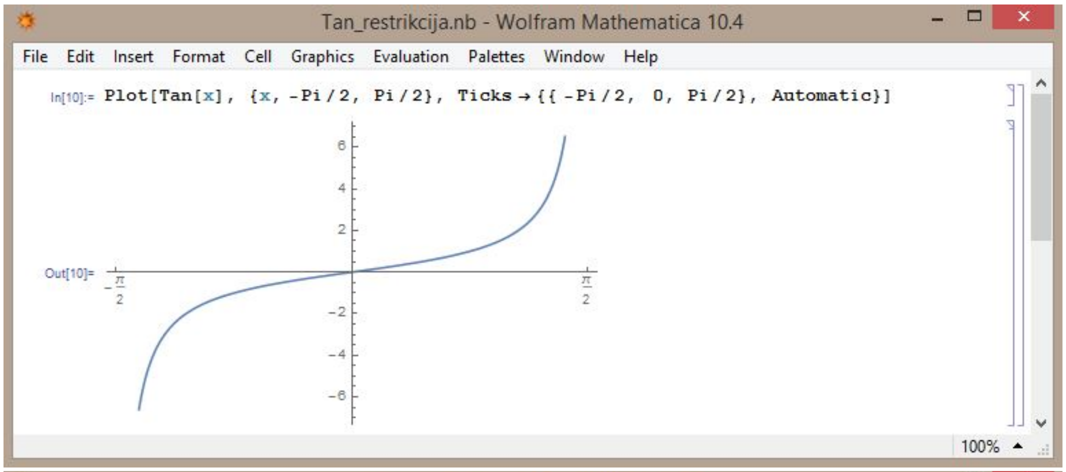
Primjer 3.20 *Nacrtajte graf funkcije* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *zadane s* $f(x) = \arccos\cos x$. *Provjerite rješenje pomoću Wolframove Mathematice.*

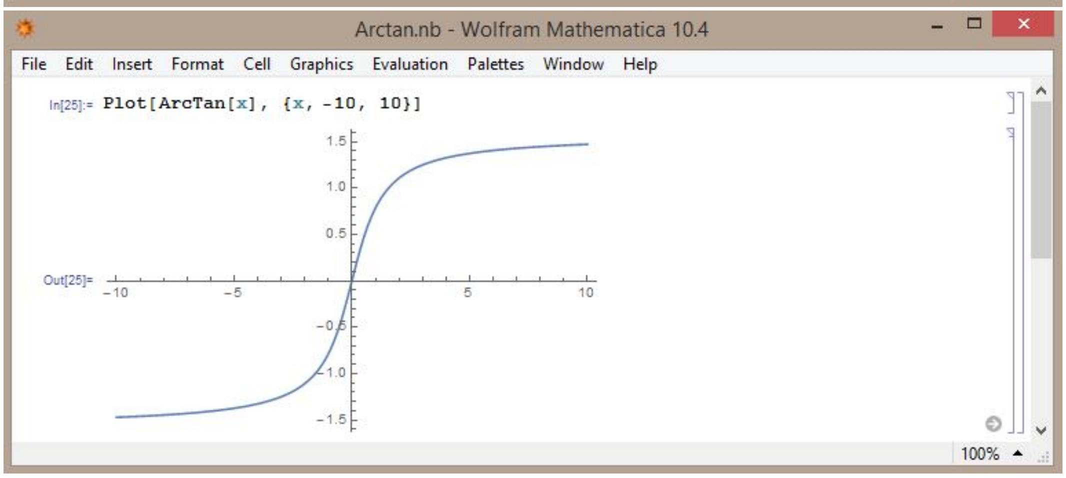


Za funkciju tangens uzimamo jednu granu grafa te funkcije i to onaj dio za koji je $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, isto kao za sinus. Funkcija $f(x) = \operatorname{tg} x$,

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R} \quad \text{je bijekcija,}$$

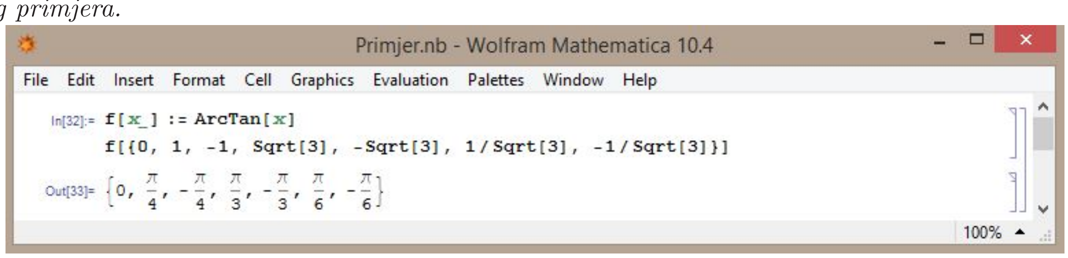
i možemo definirati inverznu funkciju $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$, $f^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.





Primjer 3.21 *Za funkciju* $f(x) = \operatorname{arctg} x$ *izračunajte vrijednost funkcije u točki* x *ako je* $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, $x = \sqrt{3}$, $x = -\sqrt{3}$, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$,

Primjer 3.22 *Koristeći naredbu ArcTan[x] u Wolframovoj Mathematici provjerite rješenja iz prethodnog primjera.*



Primjer 3.23 *Gledajući graf funkcije* $f(x) = \operatorname{tg} x$ *riješite nejednadžbe*

1. $\operatorname{tg} x > 1$
2. $\operatorname{tg} x > -1$

3. $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$

4. $\operatorname{tg} x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$

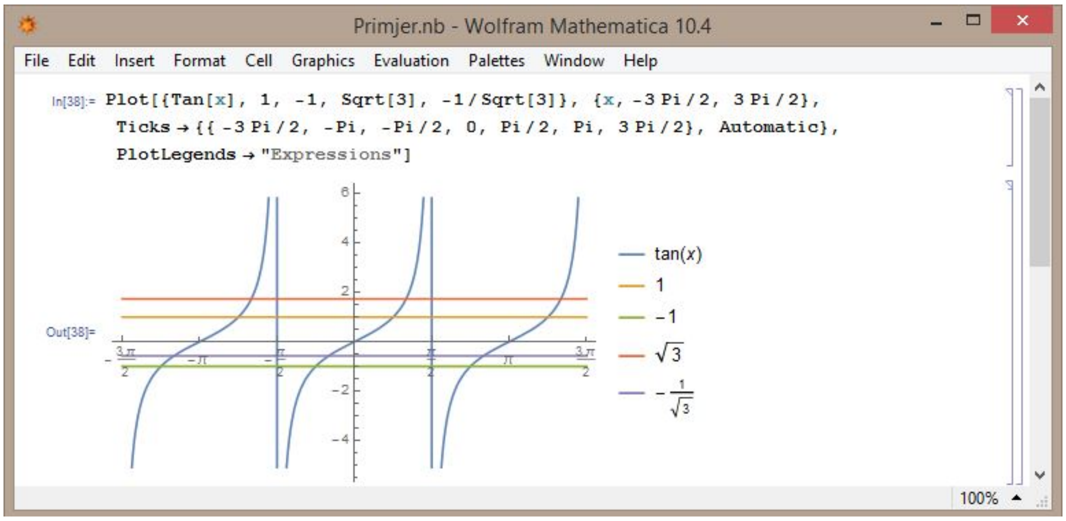
Rješenje.

1. $x \in \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$

2. $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$

3. $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$

4. $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{6} + k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$



Primjer 3.24 *Gledajući graf funkcije* $f(x) = \operatorname{arctg} x$ *riješite nejednadžbe*

1. $\operatorname{arctg} x > \frac{\pi}{3}$

2. $\operatorname{arctg} x > \frac{\pi}{4}$

3. $\operatorname{arctg} x > \frac{\pi}{6}$

4. $2 \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$

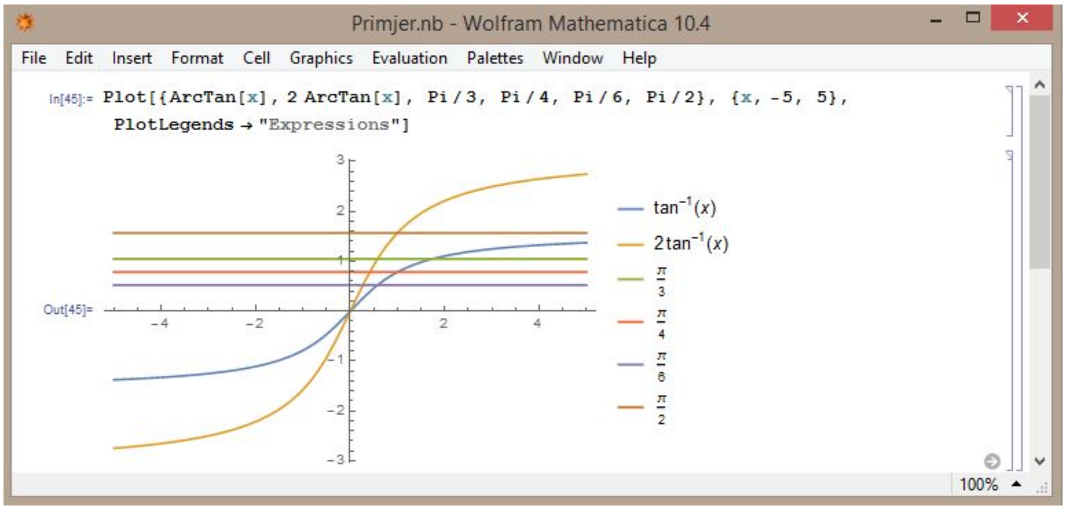
Rješenje.

1. $x > \sqrt{3}$

2. $x > 1$

3. $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$

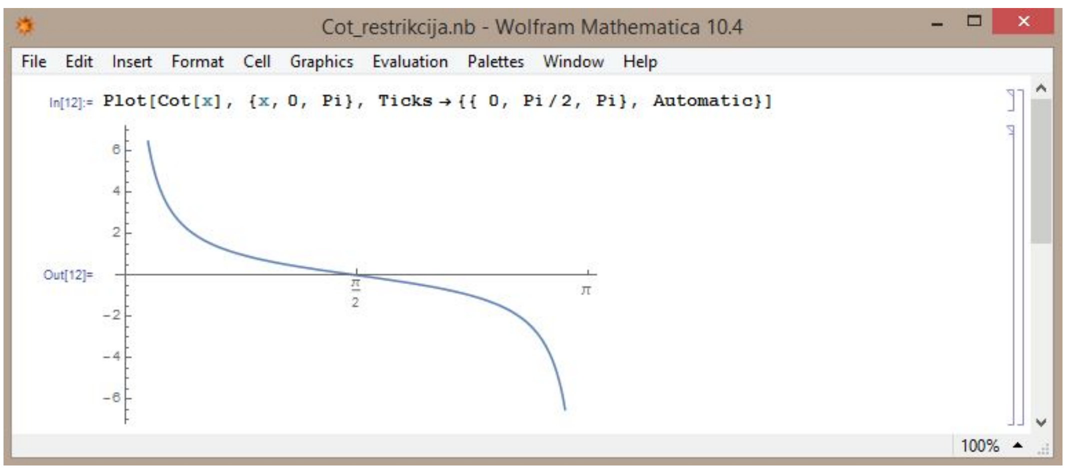
4. $x < 1$

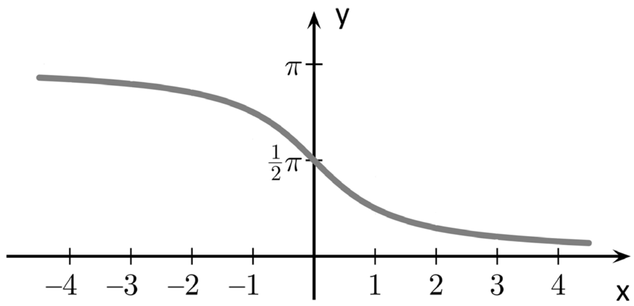


Za funkciju kotangens uzimamo jednu granu grafa te funkcije i to onaj dio za koji je $x \in (0, \pi)$, isto kao za kosinus. Funkcija $f(x) = \operatorname{ctg} x$,

$$f : (0, \pi) \to \mathbb{R} \quad \text{je bijekcija,}$$

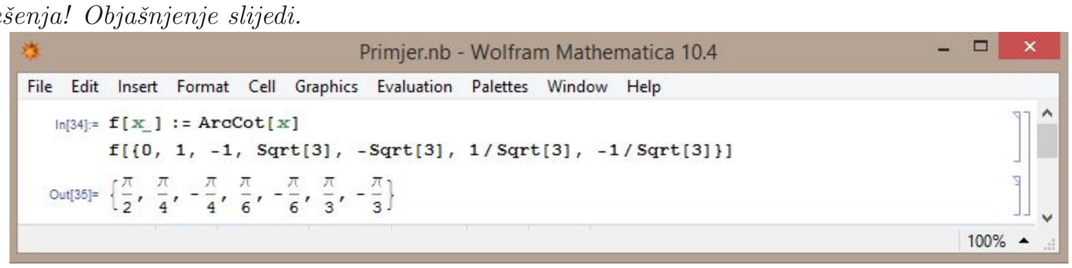
i možemo definirati inverznu funkciju $f^{-1}(x) = \operatorname{arcctg} x$, $f^{-1} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$.





Primjer 3.25 *Za funkciju* $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ *izračunajte vrijednost funkcije u točki* x *ako je* $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, $x = \sqrt{3}$, $x = -\sqrt{3}$, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Primjer 3.26 *Koristeći naredbu ArcCot[x] u Wolframovoj Mathematici provjerite rješenja iz prethodnog primjera. Nemojte se iznenaditi ako su rješenja u Wolframovoj Mathematici različita od vaših rješenja! Objašnjenje slijedi.*



Ako u Wolframovoj Mathematici nacrtamo graf funkcije $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ *nećemo dobiti graf koji je nacrtan na gornjoj slici. Što je uzrok tome? Odmah na početku kad smo definirali inverznu funkciju za funkciju sinus, spomenuli smo da u trebamo napraviti restrikciju domene funkcije sinus da bi ona na toj smanjenoj domeni postala bijekcija. Mi smo odlučili uzeti domenu* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. *Mogli smo odabrati bilo koji drugi interval na kojemu funkcija postiže sve vrijednosti, ali ih postiže samo jednom!*

Graf funkcije $f^{-1}(x) = \operatorname{arcctg} x$ *iz Wolframove Mathematice dobiva se kad uzmemo restrikciju funkcije* $f(x) = \operatorname{ctg} x$ *na interval* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Mi smo definirali $f^{-1} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$ *uzevši restrikciju* $f(x) = \operatorname{ctg} x$ *na interval* $(0, \pi)$. *Ovaj interval se dobije kad uzmemo jednu granu funkcije* $f(x) = \operatorname{ctg} x$. *Interval iz Wolframa se dobije ako odlučimo uzeti dvije polovice različitih grana funkcije* $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

Mi ćemo dalje raditi s funkcijom $f^{-1} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$, *pa u skladu s tim točna rješenja u primjeru 3.25 trebaju biti iz intervala* $(0, \pi)$:
1. $\frac{\pi}{2}$, 2. $\frac{\pi}{4}$, 3. $\frac{3\pi}{4}$, 4. $\frac{\pi}{6}$, 5. $\frac{5\pi}{6}$, 6. $\frac{\pi}{3}$, 7. $\frac{2\pi}{3}$.

Primjer 3.27 *Gledajući graf funkcije* $f(x) = \operatorname{ctg} x$ *riješite nejednadžbe*

1. $\operatorname{ctg} x > 1$

2. $\operatorname{ctg} x > -1$

3. $\operatorname{ctg} x < \sqrt{3}$

4. $\operatorname{ctg} x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$

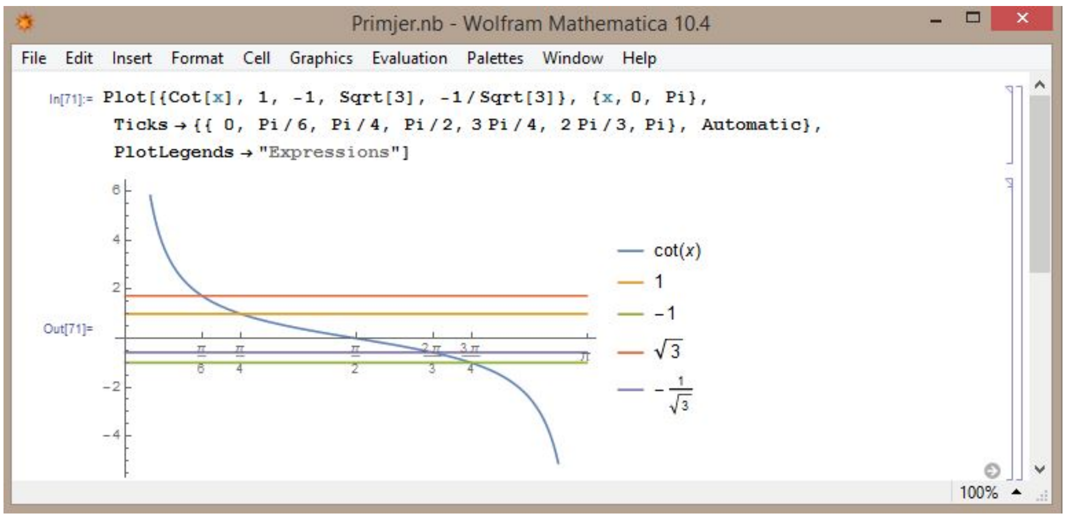
Rješenje.

1. $x \in \left(0 + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$

2. $x \in \left(0 + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$

3. $x \in \left(\frac{\pi}{6} + k\pi, \pi + k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$

4. $x \in \left(\frac{2\pi}{3} + k\pi, \pi + k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$



Primjer 3.28 *Gledajući graf funkcije $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ riješite nejednadžbe*

1. $\operatorname{arcctg} x > \frac{\pi}{3}$
2. $\operatorname{arcctg} x > \frac{\pi}{4}$
3. $\operatorname{arcctg} x > \frac{\pi}{6}$
4. $2 \operatorname{arcctg} x < \frac{\pi}{2}$

Rješenje.

1. $x < \frac{1}{\sqrt{3}}$
2. $x < 1$
3. $x < \sqrt{3}$
4. $x > 1$

Treba dobro zapamtiti kako izgledaju grafovi trigonometrijskih i ciklometrijskih funkcija, jer se oni javljaju u mnogim primjenama. Važno je znati koje su domene i slike tih funkcija, pa to možemo malo provježbati u sljedećem primjeru.

Primjer 3.29 *Odredite domene funkcija*

1. $f(x) = \arcsin 2x$
2. $f(x) = \arcsin(2x + 5)$
3. $f(x) = \arccos(x^2 - 2)$
4. $f(x) = \sqrt{\arcsin 2x}$
5. $f(x) = \sqrt{\arccos e^x}$

Rješenje.

1. $\mathcal{D}(f) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
2. $\mathcal{D}(f) = [-3, -2]$
3. $\mathcal{D}(f) = [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]$
4. $\mathcal{D}(f) = [0, \frac{1}{2}]$
5. $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 0]$

U prvom poglavlju smo testirali hipotezu $\mathrm{Log}[x] = \mathrm{Log}[-x] + i\,\pi$, ako je x negativan broj, a i imaginarna jedinica. Vidjeli smo da logaritamske funkcija djeluje i na negativnim brojevima, ali smo rekli da se mi time nećemo baviti jer najprije moramo naučiti raditi s realnim funkcijama.

Ipak, ponekad da bismo mogli neke stvari povezati, dobro je malo zaviriti u kompleksno područje. U nastavku ovog poglavlja, osim trigonometrijskim funkcijama, bavit ćemo se i hiperboličkim funkcijama. Veza između trigonometrijskih i hiperboličkih funkcija se može vidjeti kroz kompleksne brojeve.

Logaritamska funkcija može djelovati i na kompleksnim brojevima. Kompleksan broj

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

možemo zapisati kao

$$\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}.$$

Kompleksni logaritam djeluje

$$\mathrm{Log}[\cos x + i\sin x] = ix,$$

što pomoću eksponencijalne funkcije možemo napisati

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x.$$

Zbog neparnosti funkcije sinus vrijedi

$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x.$$

Zbrajanjem ovih eksponencijalnih jednakosti dobivamo

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \tag{3.5}$$

a oduzimanjem

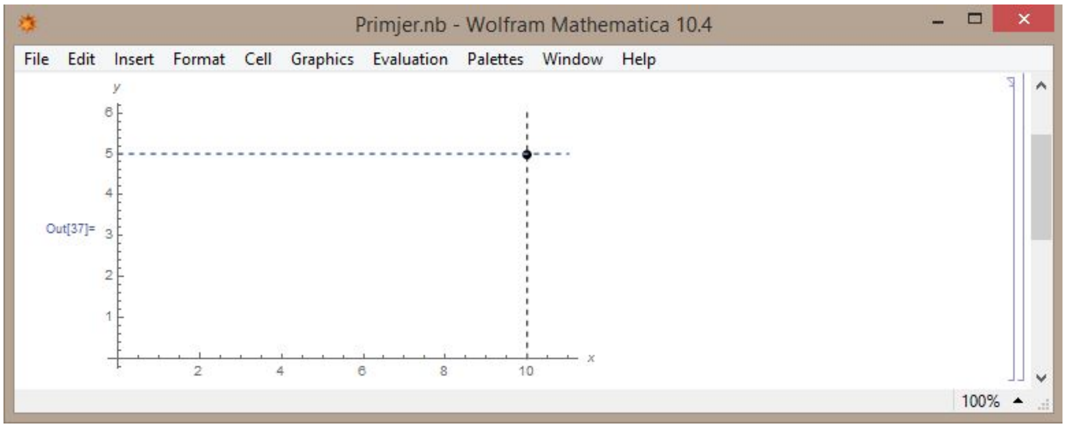
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}. \tag{3.6}$$

Ove jednakosti s imaginarnom jedinicom su važne da objasne povezanost trigonometrijskih i hiperboličkih funkcija. U poglavlju o hiperboličkim funkcijama vidjet ćemo da mnoge slične formule vrijede za trigonometrijske i hiperboličke funkcija.

3.5 Polarne koordinate, crtanje grafova funkcija u polarnim koordinatama

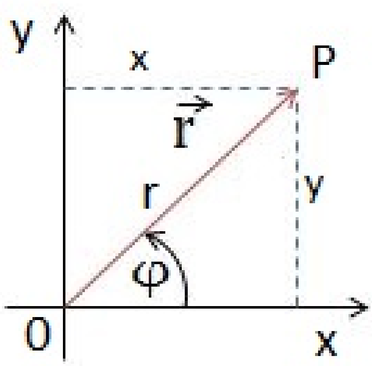
Ideja koordinatnog sustava je prirodna ideja na koju čovjek dođe sam kad mu je potrebno odrediti položaj nekog tijela. Ako ste na nekoj livadi zakopali blago, zapamtit ćete mjesto pomoću nekih objekata koji su na livadi i smatramo da nisu pomični. Na primjer, hodamo 10 koraka od bunara u smjeru stijene u obliku pseće glave, a onda skrenemo prema velikom hrastu i hodamo još 5 koraka. Tamo je zakopano blago.

Ideja koordinatnog sustava je upravo takva, pa ako želimo doći u točku $(10, 5)$ Kartezijevog koordinatnog sustava, hodat ćemo 10 koraka od ishodišta po osi x, a onda ćemo skrenuti i hodati 5 koraka paralelno s osi y. Jasno je da naš Kartezijev koordinatni sustav nije jedini koordinatni sustav kojim možemo točno odrediti položaj neke točke.



Polarni koordinatni sustav ima pol O, to je točka koja odgovara ishodištu kartezijevog koordinatnog sustava, a ima i polarnu os, to je polupravac koji ide iz pola O. Vidi sliku 3.5.

U fizici se veličine koje imaju sfernu simetriju prikazuju u polarnim koordinatama. Na primjer gravitacijski i električni potencijal imaju sfernu simetriju jer ovise o udaljenosti r kao $\frac{1}{r}$. Slično vrijedi za gravitacijsku i električnu silu koje ovise o udaljenosti r kao $\frac{1}{r^2}$.



Svaka točka P određena je svojom udaljenošću od pola i kutem koji zatvara OP s polarnom osi. Udaljenost $d(O, P)$ označavamo s r, a kut s φ. Duljina $d(O, P')$ je x koordinata točke P, pa je označimo s x. Duljina $d(P', P)$ je y koordinata točke P, pa je označimo s y. Trigonometrija pravokutnog trokuta nam kaže da je

$$\begin{aligned} x &= r\sin\varphi \\ y &= r\cos\varphi, \end{aligned} \tag{3.7}$$

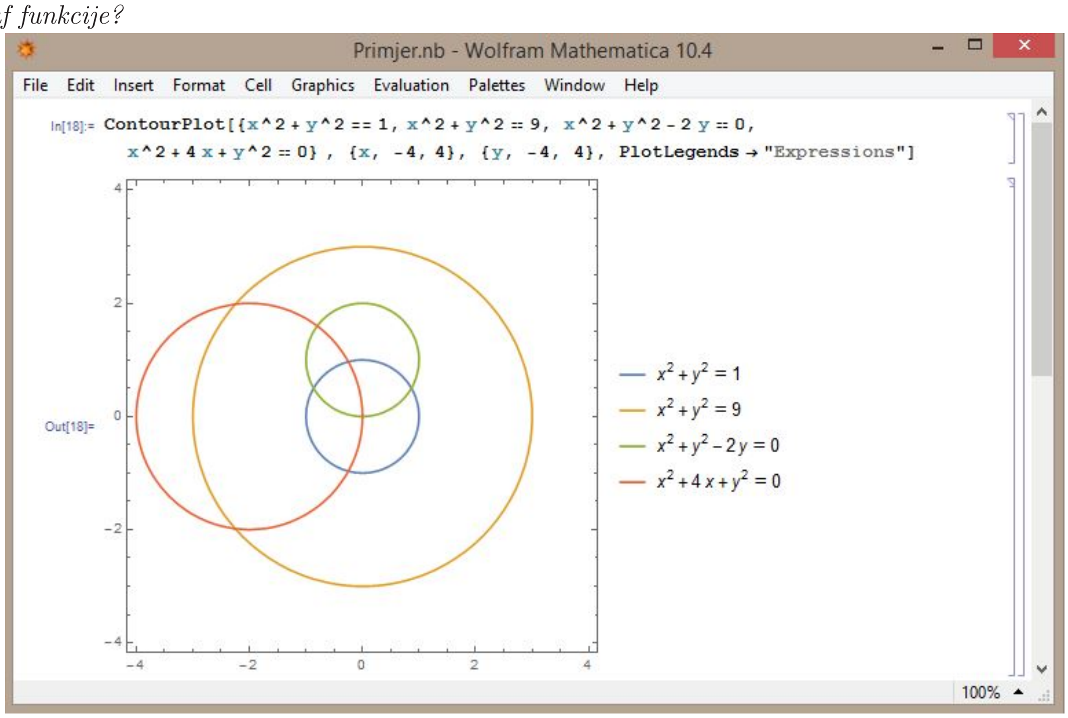
pa pomoću ovih jednakosti imamo vezu između pravokutnih i polarnih koordinata. Kvadriranjem i zbrajanjem, odnosno dijeljenjem jednadžbi iz (3.7) dobivamo

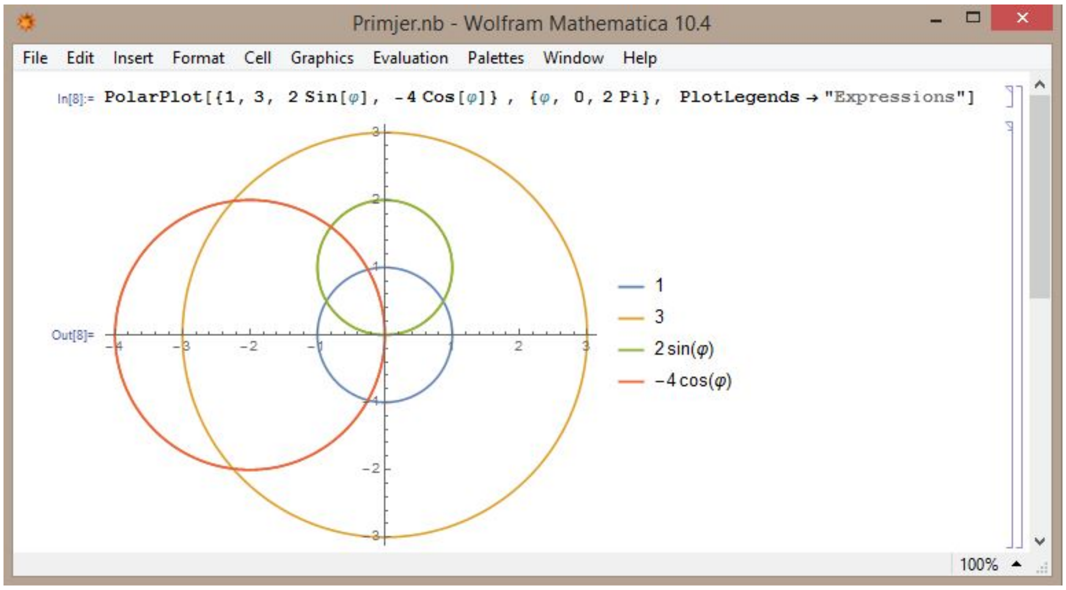
$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi &= \operatorname{arctg}\frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Primjer 3.30 *Krivulje zadane u pravokutnim koordinatama napišite u polarnim koordinatama*

1. $x^2+y^2=1$
2. $x^2+y^2=9$
3. $x^2+y^2-2y=0$
4. $x^2+4x+y^2=0$.

Primjer 3.31 *Pomoću Wolframove Mathematice nacrtaj krivulje iz primjera 3.30. Najprije ih nacrtajte u pravokutnim koordinatama korištenjem naredbe ContourPlot, a nakon toga u polarnim koordinatama korištenjem naredbe PolarPlot. Usporedite dobivene rezultate. Je li neka od dobivenih krivulja graf funkcije?*





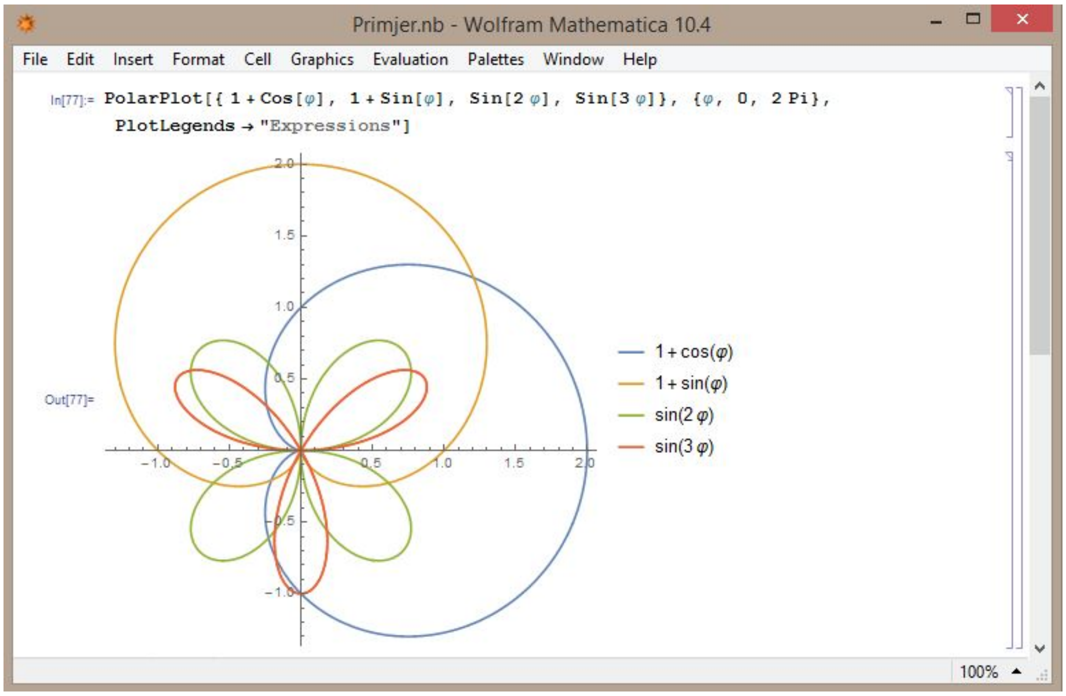
U primjeru 3.30 nemamo grafove funkcija, pa ćemo nacrtane grafove nazivati krivuljama. Krivulja je naziv za 1-dimenzionalni objekt u ravnini ili prostoru.

Primjer 3.32 *Krivulje iz primjera 3.30 rastavite na dijelove tako da dobijete grafove funkcija. Koristite oznake $y_1 = f_1(x)$ i $y_2 = f_2(x)$.*
Rješenje.

1. $f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$, $f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$
2. $f_1(x) = \sqrt{9-x^2}$, $f_2(x) = -\sqrt{9-x^2}$
3. $f_1(x) = \sqrt{1-x^2}+1$, $f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}+1$
4. $f_1(x) = \sqrt{-x^2-4x}$, $f_2(x) = -\sqrt{-x^2-4x}$

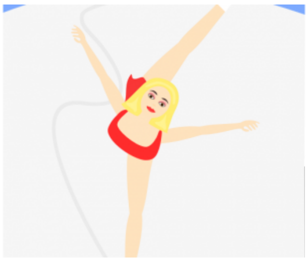
Primjer 3.33 *Pomoću Wolframove Mathematice korištenjem naredbe PolarPlot nacrtajte krivulje*

1. $r = 1 + \cos\varphi$
2. $r = 1 + \sin\varphi$
3. $r = \sin 2\varphi$
4. $r = \sin 3\varphi$.



Krivulje $r = 1 + \cos\varphi$ i $r = 1 + \sin\varphi$ se nazivaju kardioide, zbog svog oblika! Krivulje s laticama nazivamo lemniskatama. U primjeru 3.54 tijelo se giba pod utjecajem dviju elastičnih sila koje su međusobno okomite. Ovisno o tome kakvo je titranje duž osi x i y, tijelo se giba po različitim krivuljama, pri čemu se lemniskata pojavljuje kao putanja.


Primjer 3.34 *Klizačica i klizač kližu po istoj latici krivulje* $r = \sin 4\varphi$ *i ulaze u ishodište. Pod kojim kutem su njihove putanje?*



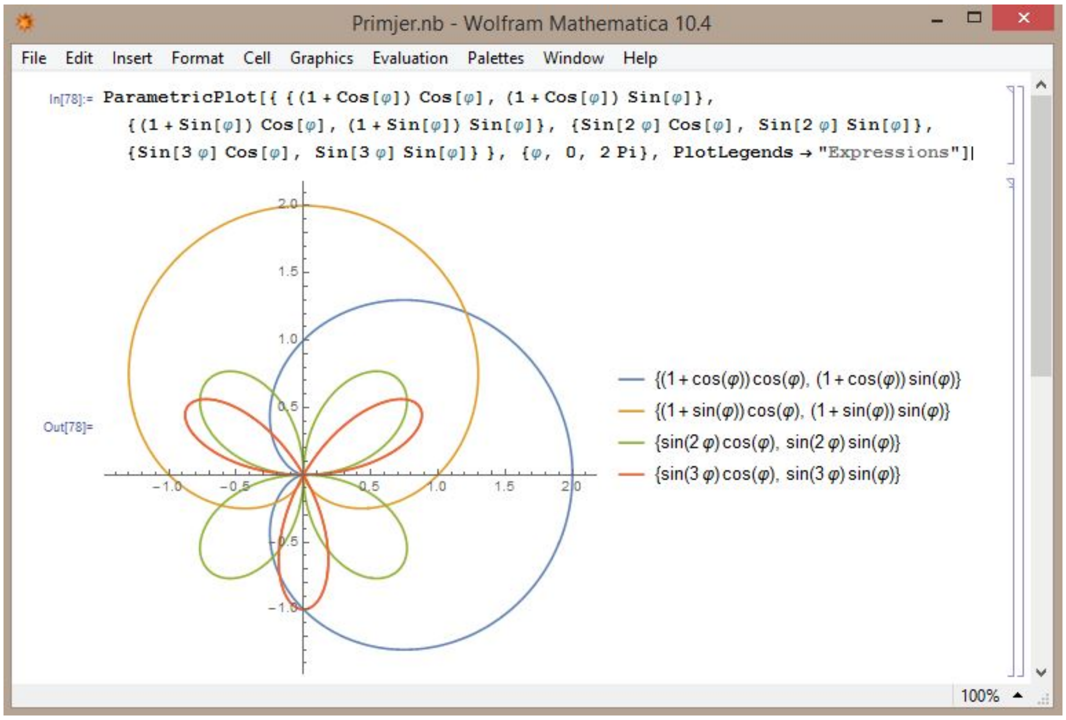
Rješenje je

$$\sin 4\varphi = 0, \varphi = \frac{k\pi}{4},$$

pa je traženi kut $\frac{\pi}{4}$.

Primjer 3.35 *Pomoću Wolframove Mathematice korištenjem naredbe ParametricPlot nacrtajte parametarski zadane krivulje*

1. $x = (1 + \cos\varphi)\cos\varphi,\ y = (1 + \cos\varphi)\sin\varphi$
2. $x = (1 + \sin\varphi)\cos\varphi,\ y = (1 + \sin\varphi)\sin\varphi$
3. $x = (\sin 2\varphi)\cos\varphi,\ y = (\sin 2\varphi)\sin\varphi$
4. $x = (\sin 3\varphi)\cos\varphi,\ y = (\sin 3\varphi)\sin\varphi$.



Usporedimo li krivulje iz primjera (3.33) i (3.35), vidimo da su to iste krivulje.

Vidimo da istu krivulju možemo napisati u polarnim koordinatam jednadžbom $r = r(\varphi)$ ili parametarski kao $x = r(\varphi)\cos\varphi,\ y = r(\varphi)\sin\varphi$.

Primjer 3.36 *Odredite za koje kuteve* φ *je definirana krivulja i nacrtajte je naredbom PolarPlot*

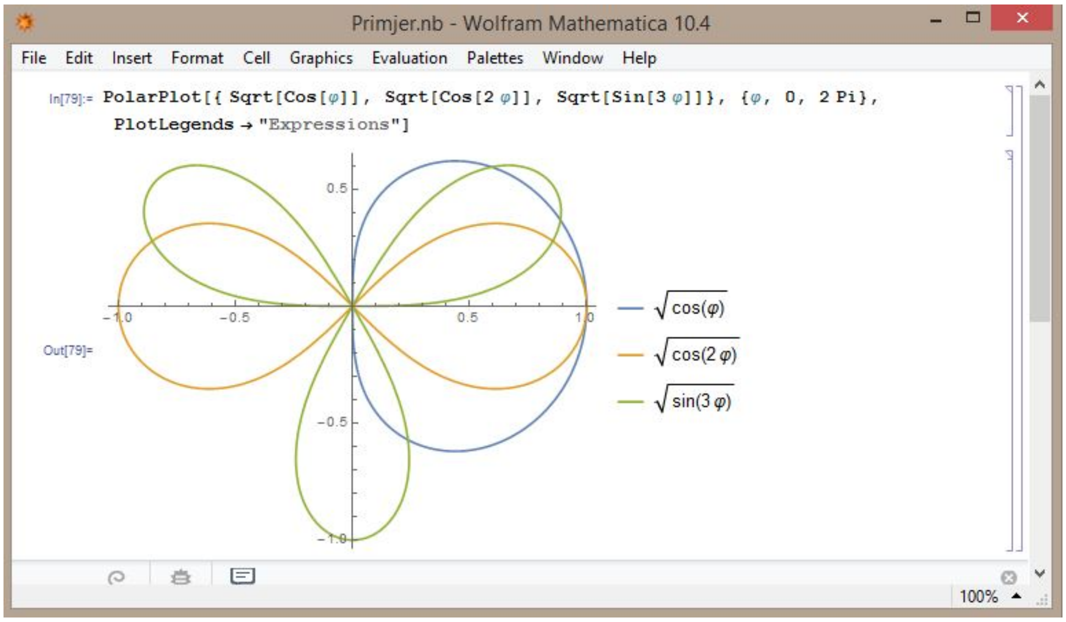
1. $r = \sqrt{\cos\varphi}$
2. $r = \sqrt{\cos 2\varphi}$
3. $r = \sqrt{\sin 3\varphi}$

Rješenje se svodi na rješavanje trigonometrijskih nejednadžbi

1. $\cos\varphi \geq 0,\ \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right],\ k \in \mathbb{Z}$

2. $\cos 2\varphi \geq 0,\ \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right],\ k \in \mathbb{Z}$

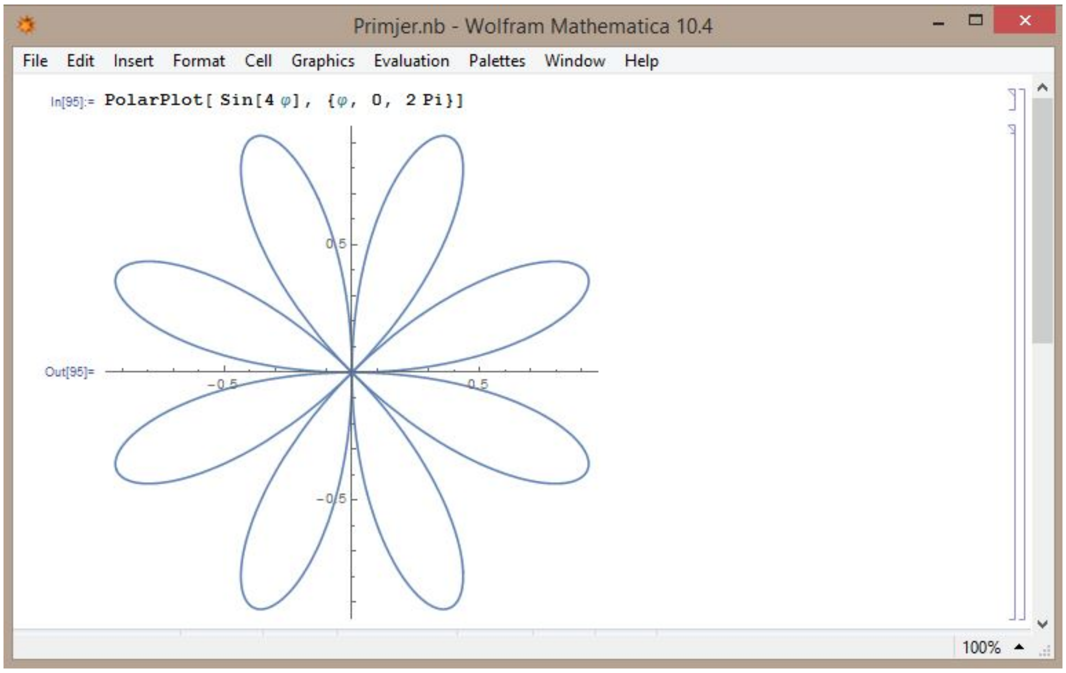
3. $\sin 3\varphi \geq 0,\ \varphi \in \left[2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right],\ k \in \mathbb{Z}.$



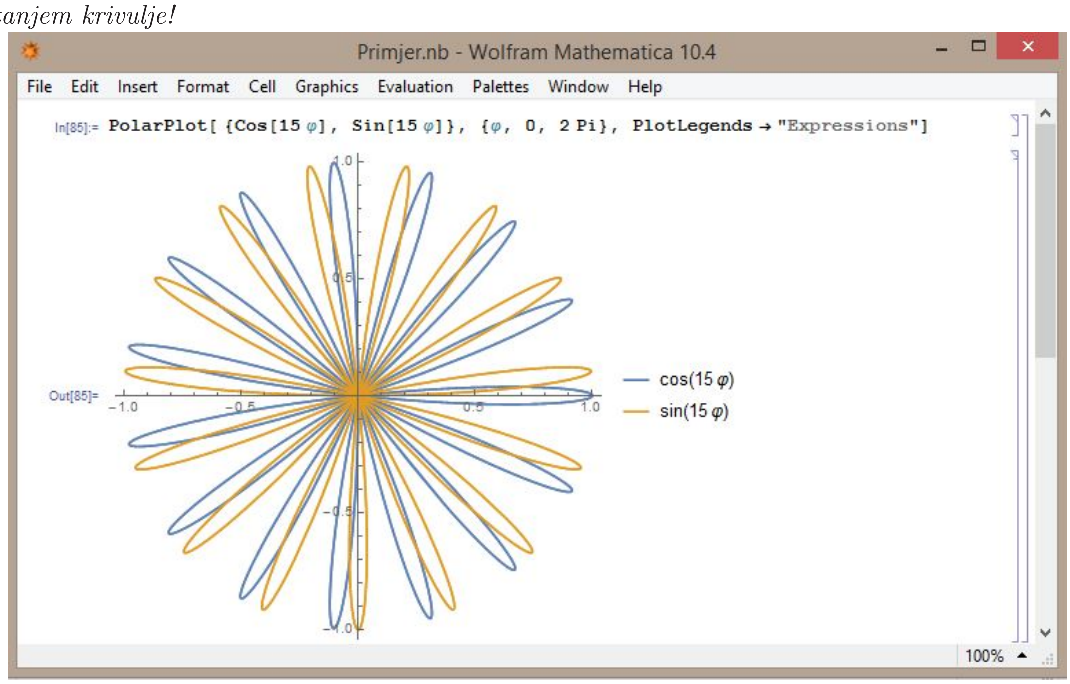
Primjer 3.37 *Bubamara se kreće po rubu cvijeta koji ima jednadžbu $r = \sin 4\varphi$ i počinje kretanje u sredini cvijeta, odnosno u ishodištu. Koliko se maksimalno udalji od sredine cvijeta? Koliko latica prijeđe prije nego se vrati u ishodište?*

Rješenje.

Maksimalna udaljenost je 1, a latica ima 8.

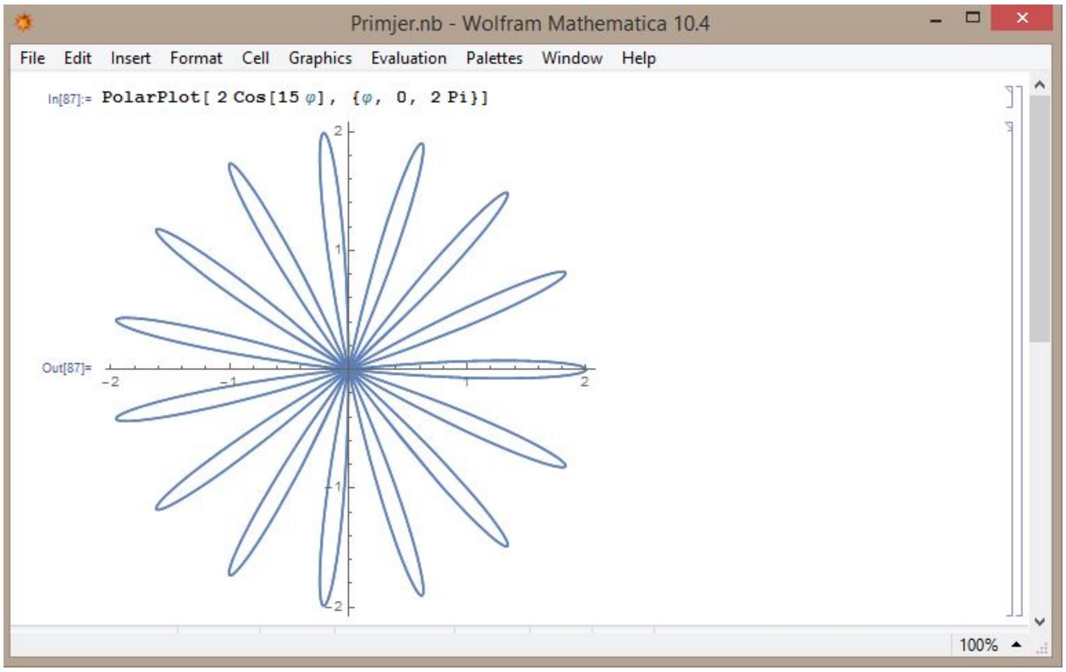


Primjer 3.38 *Napišite jednadžbu cvijeta s 15 latica!*
Rješenja su $r = \cos(15\varphi)$ *i* $r = \sin(15\varphi)$. *Nađite još neko rješenje i provjerite njegovu ispravnost crtanjem krivulje!*

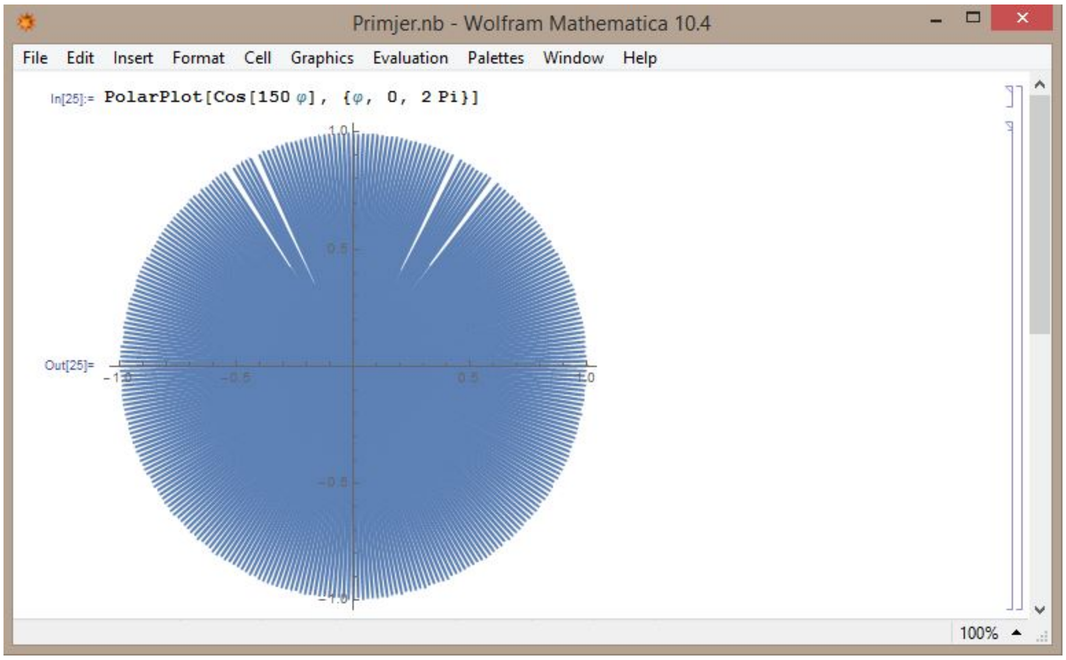


Primjer 3.39 *Cvijet* $r = \cos(15\varphi)$ *brzo raste, pa se duljina latica udvostručila. Napišite jednadžbu cvijeta nakon što je narastao!*

Rješenje je $r = 2\cos(15\varphi)$.



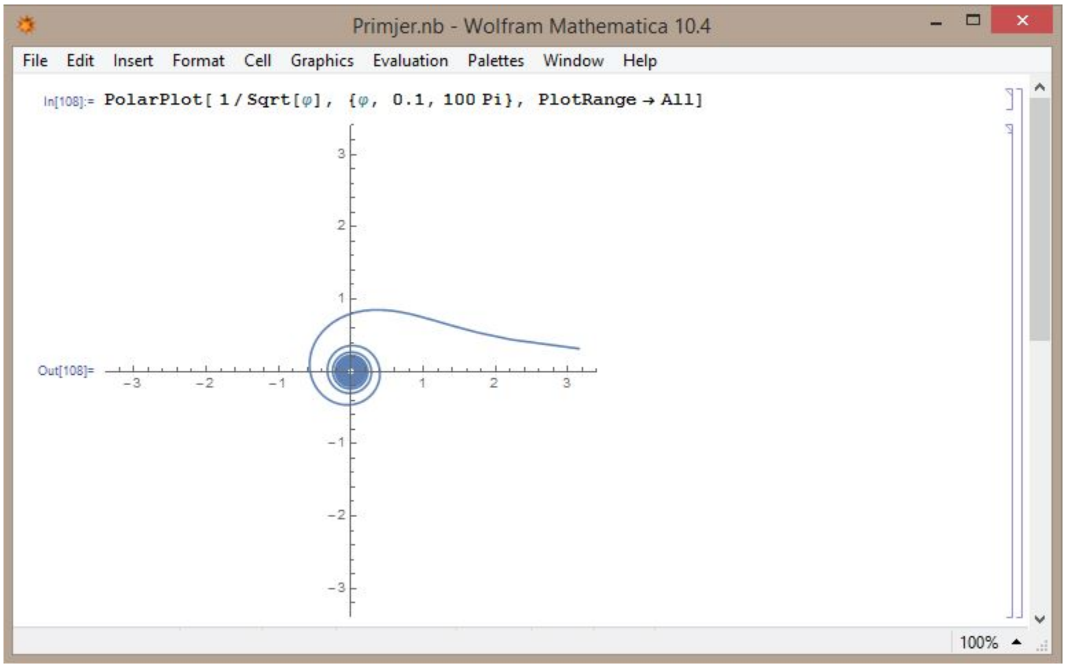
Primjer 3.40 *Nacrtajte cvijet sa* 150 *latica!*

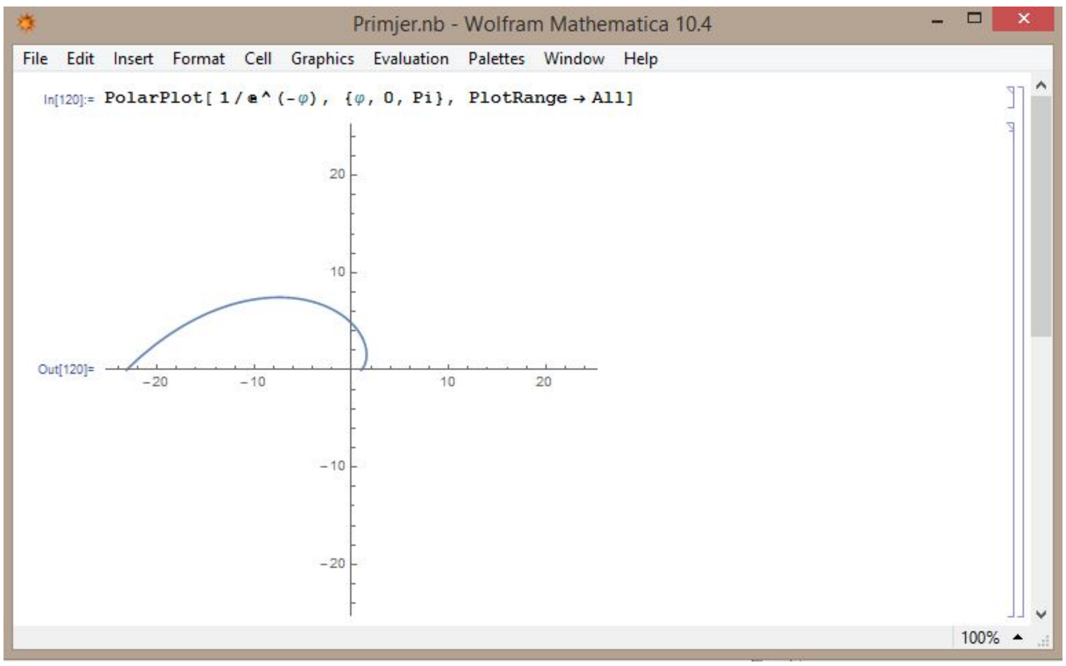


Zaključite koliko latica ima krivulja $r = \cos(n\varphi)$ ili $r = \sin(n\varphi)$ ovisno o tome je li n paran ili neparan prirodan broj! Uvjerite se da ove krivulje imaju n latica ako je n neparan broj, a $2n$ ako je n paran broj!

Primjer 3.41 *Mrav mora doći u ishodište kretanjem po krivulji r_1 ili r_2. Nacrtajte grafove i procijenite po kojoj krivulji mu je kraći put!*
1. $r_1 = \frac{1}{\sqrt{\varphi}}$, 2. $r_2 = \frac{1}{e^{-\varphi}}$.

Rješenje.
Kad crtamo r_1 vidimo da je to spirala koja jako sporo ide prema ishodištu, štoviše put po njoj je beskonačno dug. Mi nemamo dovoljno znanja da to izračunamo, ali vidi se veliko zacrnjenje kad se spirala jako sporo približava ishodištu. Mrav treba ići po eksponencijalnoj spirali koja ima konačan put. Vidi se na grafu da krivulja brzo ulazi u ishodište.

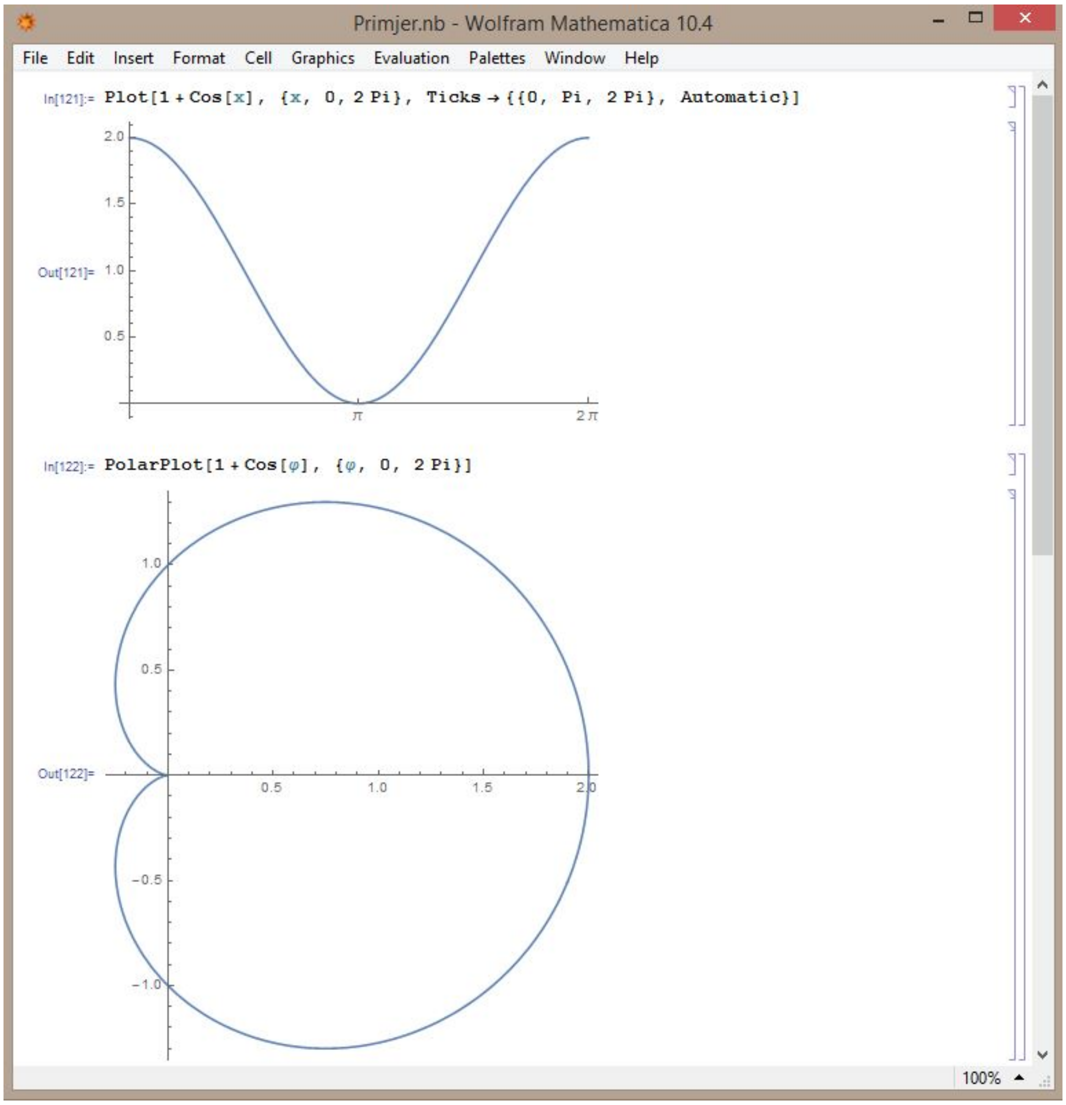




Primjer 3.42 *Nacrtajmo jednu jednostavniju krivulju bez pomoći računala!*
Odaberimo kardioidu $r = 1 + \cos\varphi$. *Prvi korak pri crtanju krivulje u polarnim koordinataa je određivanje njezine domene. Osim uobičajenih ograničenja koje imamo za parni korijen, nazivnik i izraz pod logaritmom, ovdje treba pripaziti na smislenost varijable* r. *Budući da je* r *udaljenost, onda* r *mora biti pozitivan. Vrijednosti od* φ *za koje je* $r < 0$ *nisu u području definicije krivulje. S obzirom da je*

$1 + \cos\varphi \geq 0$ *za svaki* φ*, kardioida je definirana za svaki* φ*.*

Crtamo u pravokutnim koordinatama graf $y = 1 + \cos x$*, pa ga prenosimo u polarni sustav. Najprije nacrtamo točku* $\varphi = 0$*, za koju dobivamo* $r = 2$*, pa je ucrtamo na polarnu os. Vidimo iz grafa* $y = 1 + \cos x$ *da radijus pada kad* φ *raste prema* $\frac{\pi}{2}$ *i nastavlja padati sve dok na bude* $r = 0$ *za kut* $\varphi = \pi$*. Nakon toga radijus ponovo raste, pa krivulju crtamo simetrično u odnosu na os* x*.*

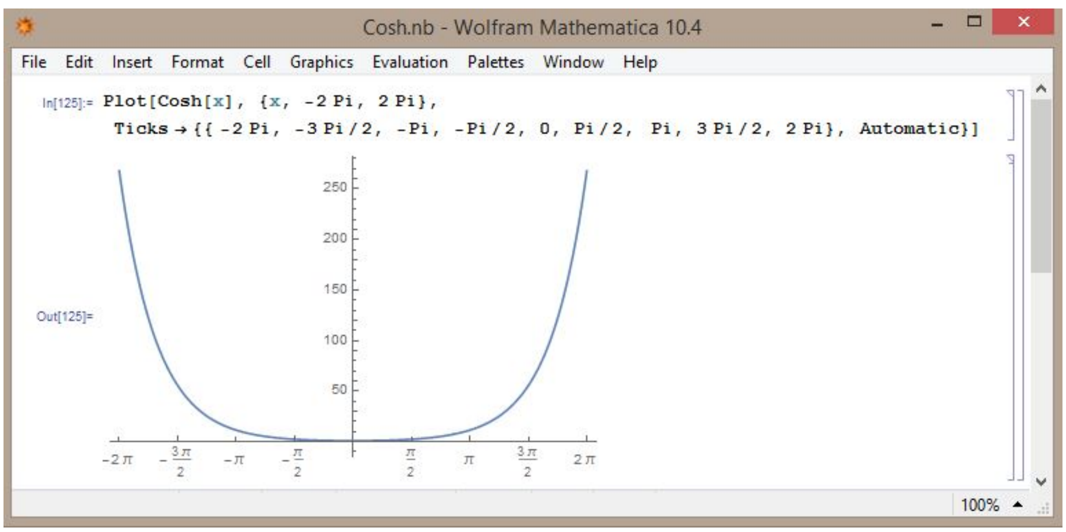


3.6 Definicija hiperboličkih funkcija

U gravitacijskom polju lanac ili uže vise u obliku krivulje koju nazivamo lančanicom. Njezina jednadžba je $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, pri čemu je

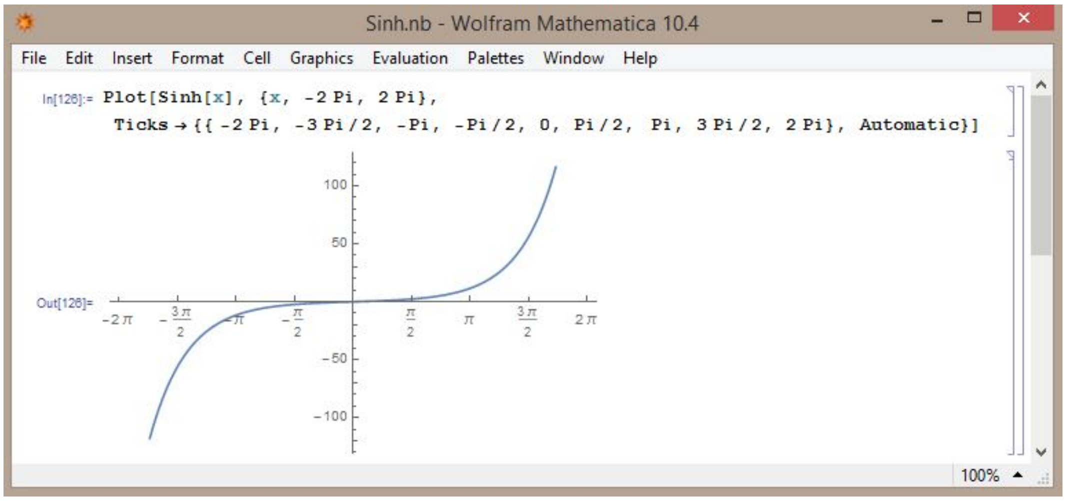
$$f(x) = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

funkcija kosinus hiperbolički.



Funkcije sinus hiperbolički definirana je s

$$f(x) = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$



Primjer 3.43 *Odredite domenu i sliku funkcija sinus i kosinus hiperbolički. Ispitajte parnost, neparnost i periodičnost. Dokažite da vrijedi*

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1.$$

Rješenje.

Funkcije sinus i kosinus hiperbolički definirane su za svaki $x \in \mathbb{R}$. *Slika funkcije sinus hiperbolički je cijeli skup realnih brojeva, a za kosinus hiperbolički interval* $[1, \infty)$. *Sinus hiperbolički je neparna funkcija, a kosinus parna, što se lako provjeri uvrštavanjem* $-x$ *u formule kojima su definirane funkcije.*

Jednakost $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$ *dokazujemo tako da uvrstimo formule kojima su definirane funkcije.*

Primjer 3.44 *Dokažite da vrijedi*

$$\begin{aligned}\mathrm{sh}(x+y) &= \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,y + \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}\,y\\ \mathrm{ch}(x+y) &= \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,y + \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,y\end{aligned}$$

Uputa: krenite računati s desnom stranom jednakosti.

Adicijski teoremi vrijede kao za trigonometrijske funkcije, samo postoji razlika u predznaku. Osnovna veza za trigonometrijske funkcije je

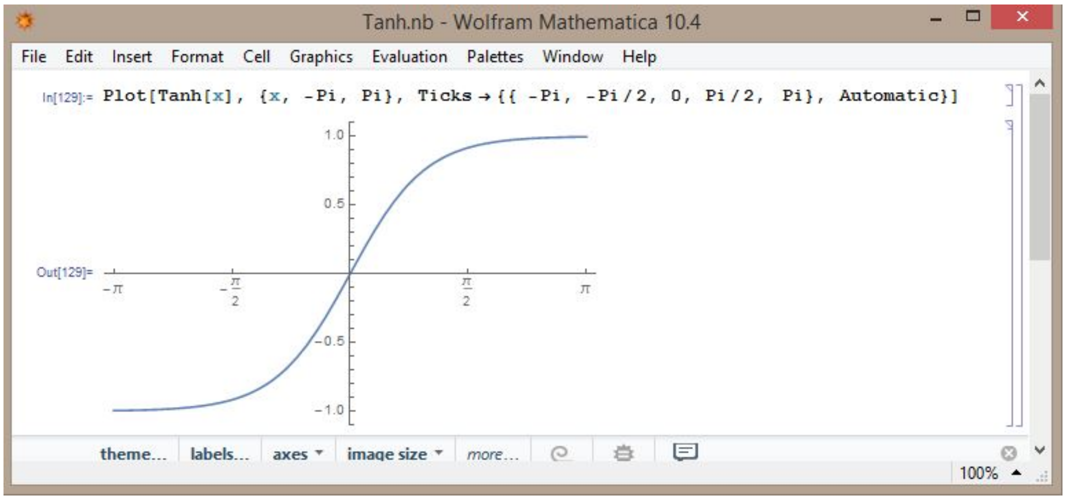
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

dok je za hiperboličke imamo razliku kvadrata funkcija $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$. Krivulju $y^2 - x^2 = 1$ nazivamo hiperbolom, pa od tuda potječe naziv za hiperboličke funkcije. Slično ponašanje trigonometrijskih i hiperboličkih funkcija uzrokovano je time što su jedne i druge funkcije definirane pomoću eksponencijalne funkcije, vidite (3.5), (3.6).

Funkcija tangens hiperbolički definirana je s

$$f(x) = \mathrm{th}\,x = \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

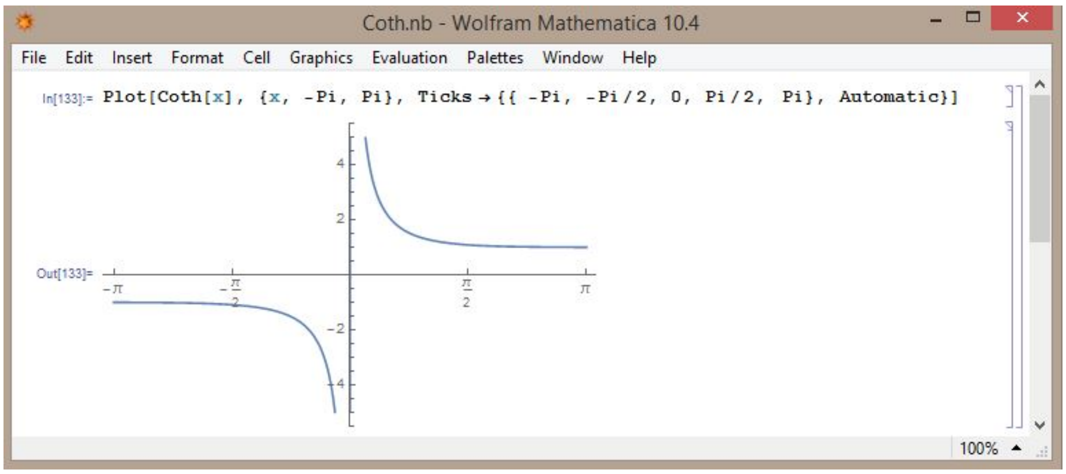
Domena funkcije je cijeli skup realnih brojeva, jer je nazivnik suma eksponencijalnih funkcija, pa to ne može biti nula. Slika funkcije je interval $(-1, 1)$ jer je nazivnik uvijek veći od brojnika.



Funkcija kotanges hiperbolički definirana je s

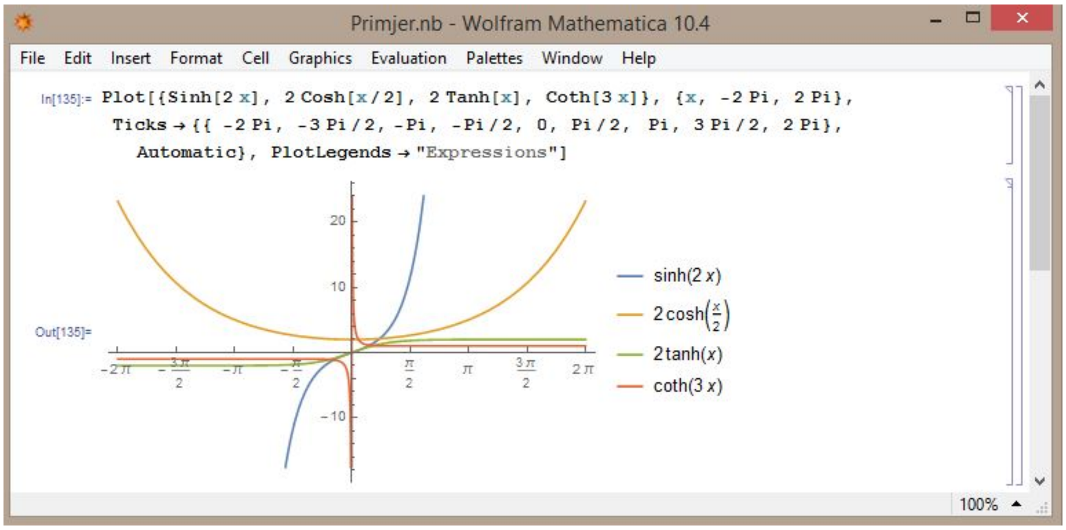
$$f(x) = \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

domena je $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, a slika $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.

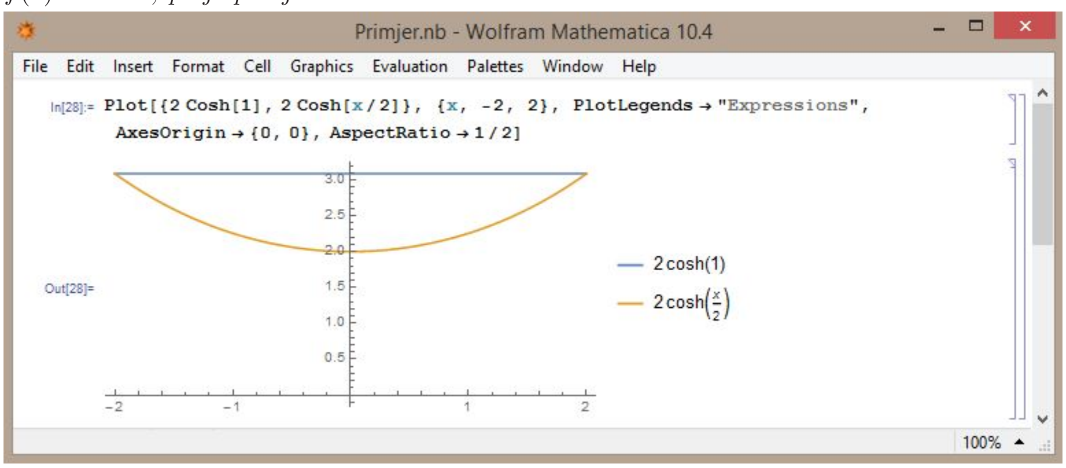


Primjer 3.45 *Pomoću Wolframove Mathematice i naredbi Sinh, Cosh, Tanh, Csch nacrtajte grafove funkcija*

1. $f(x) = \operatorname{sh} 2x$
2. $f(x) = 2 \operatorname{ch} \frac{x}{2}$
3. $f(x) = 2 \operatorname{th} x$
4. $f(x) = \operatorname{cth} 3x$



Primjer 3.46 *Lanac je obješen na štapu duljine 4 metra, a formula lančanice je* $f(x) = 2\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{2}$*. Koliko se lanac provjesio?*
Rješenje.
$f(2) = 2\,\mathrm{ch}\,1$*, pa je provjes* $2\,\mathrm{ch}\,1 - 2$.



3.7 Definicija area funkcija

Rezimirajmo

$$
\begin{aligned}
\mathrm{sh} &: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \text{neparna funkcija} \\
\mathrm{ch} &: \quad \mathbb{R} \to [1, \infty), \ \text{parna funkcija} \\
\mathrm{th} &: \quad \mathbb{R} \to (-1, 1), \ \text{neparna funkcija} \\
\mathrm{cth} &: \quad \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus [-1, 1], \ \text{neparna funkcija.}
\end{aligned}
$$

Želimo definirati inverzne funkcije od hiperboličkih funkcija, koje se obično zovu area funkcije. Sve funkcije osim kosinusa hiperboličkog su bijekcije i nećemo imati problema s definiranjem inverznih funkcija. Za ch trebamo smanjti domenu tako da se vrijednost funkcije javlja jednom, pa funkcija postaje bijekcija. Uzet ćemo

$$\mathrm{ch} : \mathbb{R}_0^+ \to [1, \infty),$$

restrikciju na pozitivne brojeve.

Krenimo s inverznom funkcijom od

$$f(x) = \mathrm{sh}\, x,$$

pa izraz

$$2y = e^x - e^{-x}$$

pomnožimo s e^x i dobivamo

$$2ye^x = e^{2x} - 1.$$

Jednadžbu

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$

supstitucijom $t = e^x$ pretvaramo u kvadratnu i dobivamo rješenja

$$t_{1,2} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

Rješenje

$$e^x = y - \sqrt{y^2 + 1}.$$

daje negativno vrijednost za e^x, pa ga odbacujemo jer e^x mora biti pozitivan broj. Ostaje nam rješenje

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1},$$

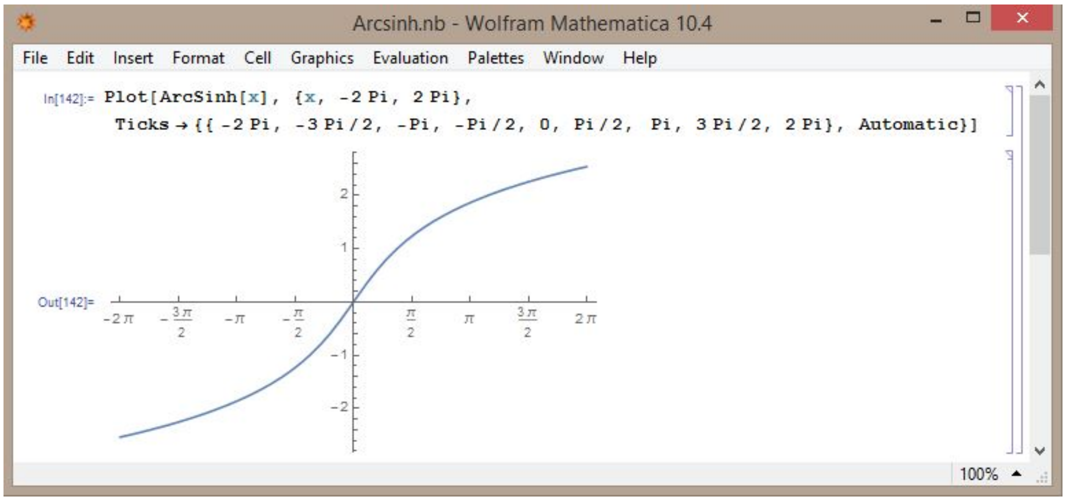
iz kojeg logaritmiranjem dobivamo rješenje

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right).$$

Zaključujemo da je inverzna funkcija funkcije sh, koju nazivamo arsh jednaka

$$f^{-1}(x) = \mathrm{arsh}\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$



Na sličan način krećemo s

$$f(x) = \operatorname{ch} x,$$

pa izraz

$$2y = e^x + e^{-x}$$

i dobivamo nakon supstitucije $t = e^x$ pretvaramo u kvadratnu i dobivamo rješenja

$$t_{1,2} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}.$$

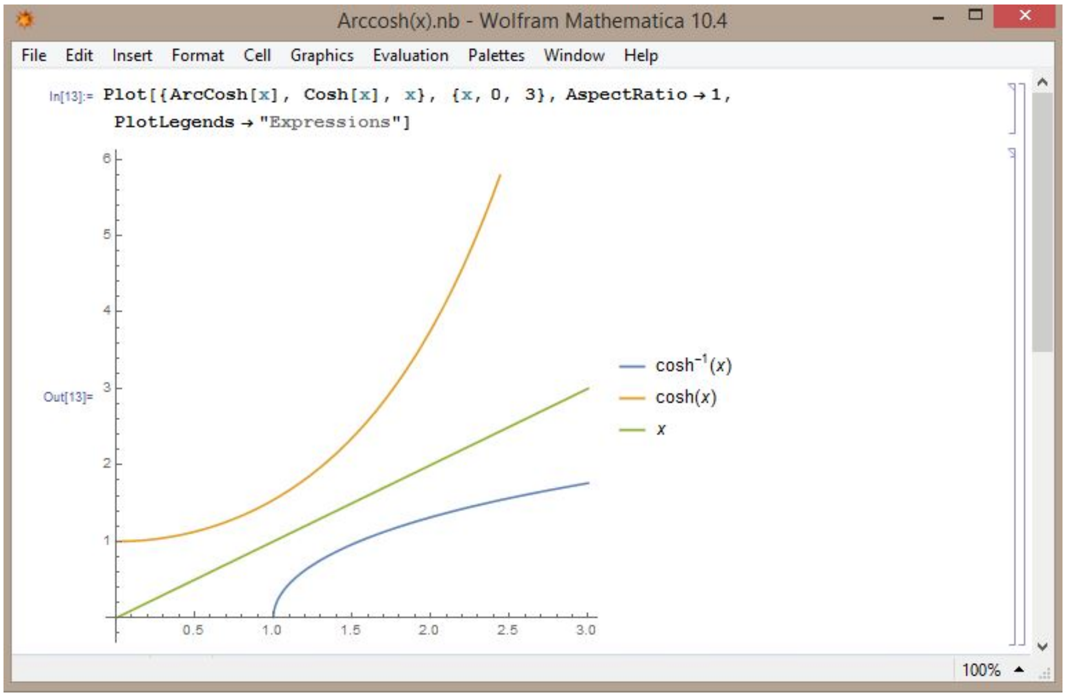
U ovom slučaju oba rješenja daju pozitivnu vrijednost za e^x, pa se moramo odlučiti koje rješenje ćemo uzeti. Ako uzmemo restrikciju

$$\operatorname{ch} : \mathbb{R}_0^+ \to [1, \infty),$$

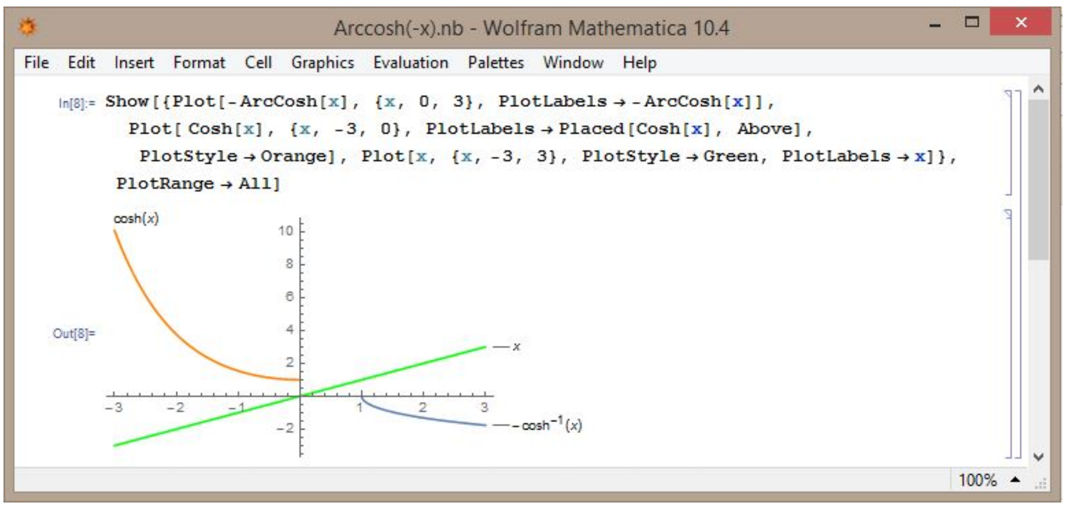
dobivamo

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

$$f^{-1} : [1, \infty) \to \mathbb{R}_0^+.$$



Da smo uzeli restrikciju $\mathrm{ch} : \mathbb{R}_0^- \to [1, \infty)$, dobili bismo funkciju $\operatorname{arch} x = \ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)$ koja ide $f^{-1} : [1, \infty) \to \mathbb{R}_0^-$.



Inverznu funkciju za

$$f(x) = \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

računamo iz

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

množenjem brojnika i nazivnika s e^x, pa dobivamo

$$y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}.$$

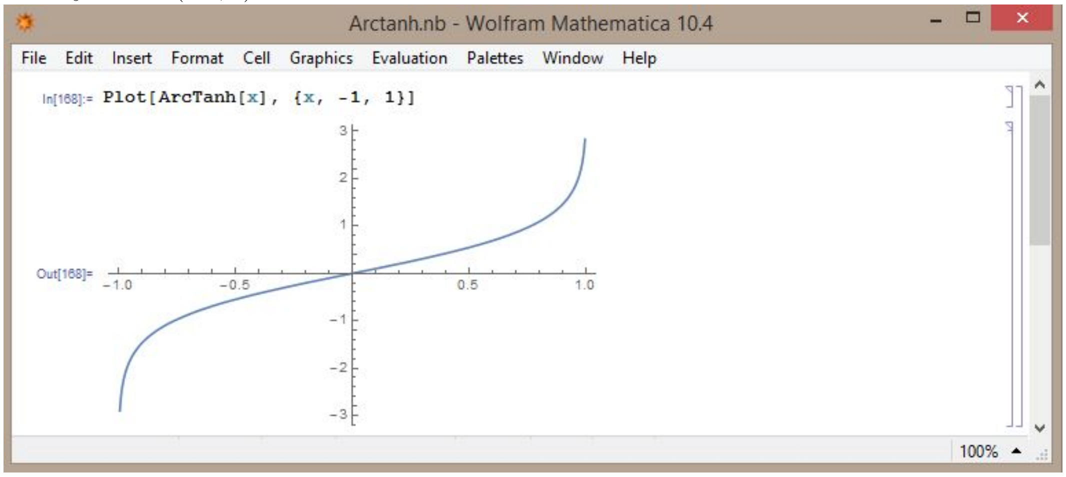
Nakon što riješimo po e^{2x} i logaritmiramo imamo

$$2x = \ln\frac{1+y}{1-y},$$

pa je

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},$$

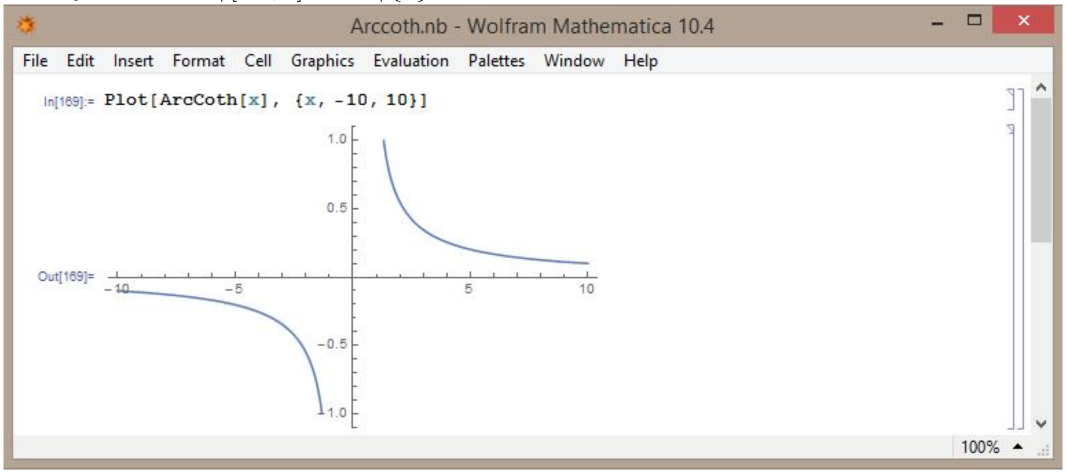
pri čemu je $\operatorname{arth} : (-1,1) \to \mathbb{R}$.



Slično

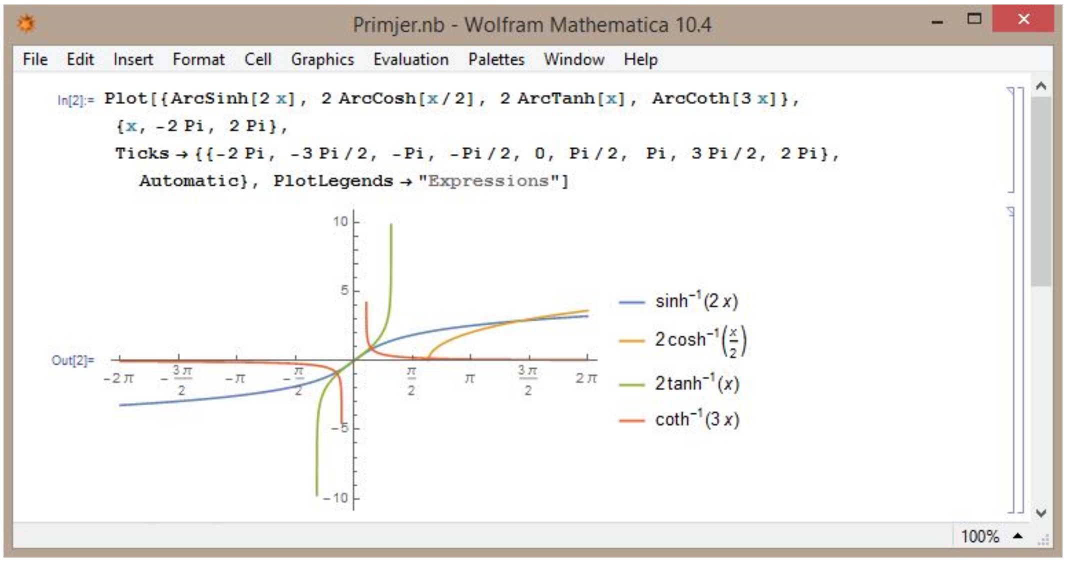
$$f^{-1}(x) = \operatorname{arcth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{x-1},$$

pri čemu je $\operatorname{arcth} : \mathbb{R}\setminus[-1,1] \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$



Primjer 3.47 *Pomoću Wolframove Mathematice i naredbi ArcCosh, ArcSinh, ArcTanh, ArcCsch nacrtajte grafove funkcija*

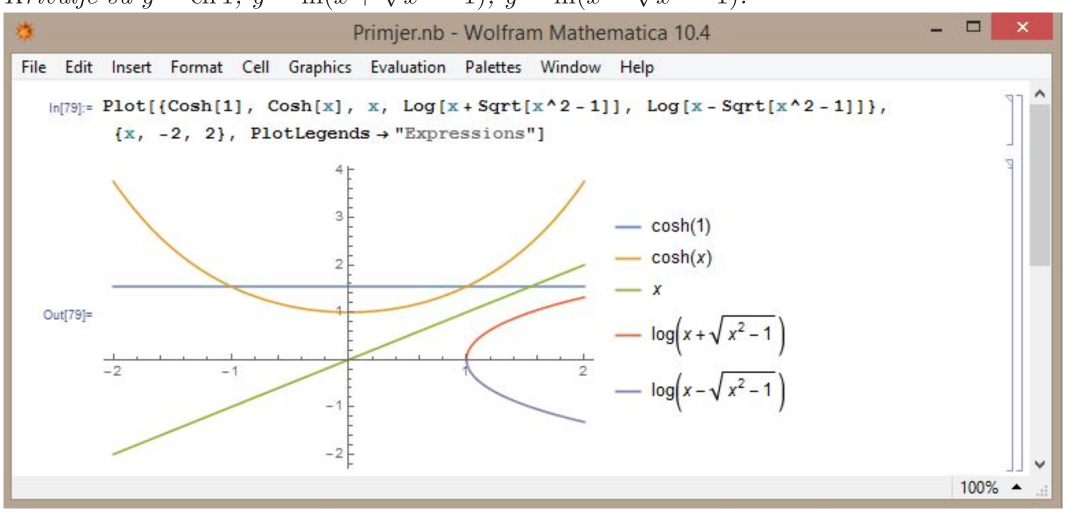
1. $f(x) = \operatorname{arsh} 2x$
2. $f(x) = 2 \operatorname{arch} \frac{x}{2}$
3. $f(x) = 2 \operatorname{arth} x$
4. $f(x) = \operatorname{arcth} 3x$



Primjer 3.48 *Lanac je obješen na štapu duljine 2 metra, a formula lančanice je* $f(x) = \operatorname{ch} x$.

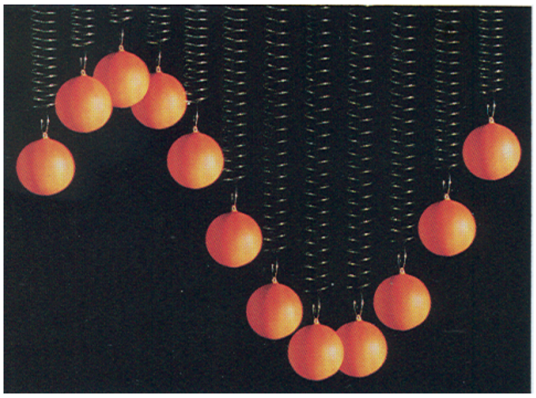
1. *Nacrtajte osnosimetričnu sliku lanca i štapa u odnosu na simetralu prvog kvadranta.*
2. *Napišite formule krivulja koje omeđuju dobiveni simetrični objekt.*

Rješenje.
Krivulje su $y = \operatorname{ch} 1$, $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $y = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$.



3.8 Modeliranje trigonometrijskim i hiperboličkim funkcijama

Primjer 3.49 *Kuglica obješena na oprugu titra pod utjecajem elastične sile $F = -kx$, k je konstanta elastičnosti, x je pomak iz položaja ravnoteže (harmonički oscilator). Fotografija snimljena stroboskopom pokazuje da je pomak $x(t)$ periodična funkcija. Pronađite na internetu informaciju što je to stroboskop!*



Pomak tijela iz položaja ravnoteže

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi),$$

A je amplituda titranja, $\omega = 2\pi$, $f = 2\pi/T$, ω je kružna frekvencija, f je frekvencija titranja, T je period titranja. Argument funkcije cos *naziva se faza titranja, a φ je početna faza u trenutku $t = 0$. Brzina titranja oscilatora je*

$$v(t) = A\omega \cdot \sin(\omega t + \varphi).$$

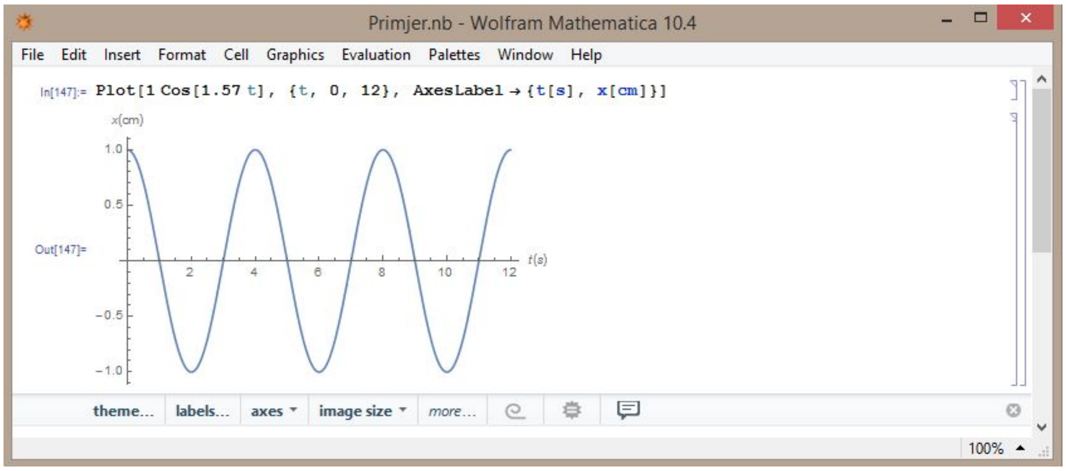
Za kuglicu mase $m = 0.5$ kg, koja titra obješena na oprugu konstante elastičnosti $k = 1.23$ N/m amplitudom $A = 1$ cm odredite:

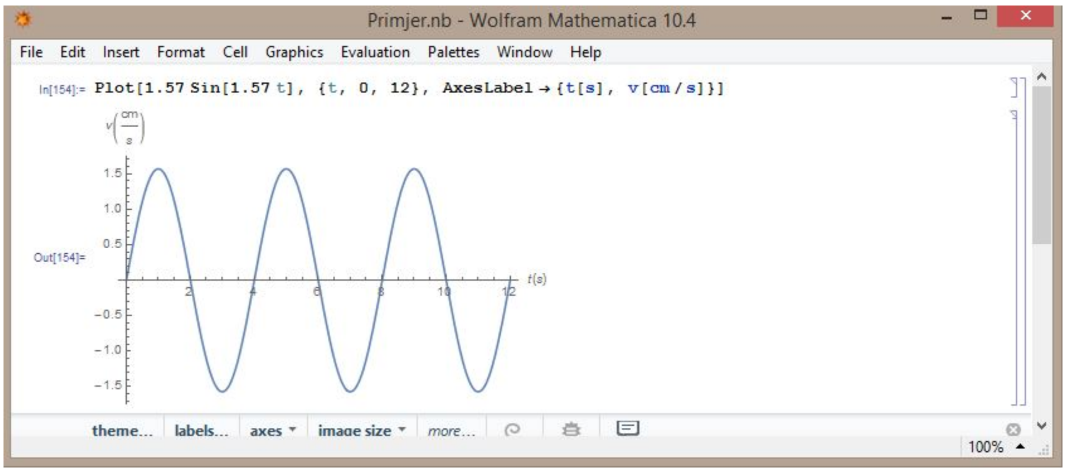
1. *grafičku ovisnost $x(t)$ i $v(t)$ za prvih 12 sekundi titranja uz $\varphi = 0$*

2. *grafički prikažite ovisnost o vremenu potencijalne $E_p = \frac{1}{2}k \cdot x^2(t)$ i kinetičke energije $E_k = \frac{1}{2}m \cdot v^2(t)$ oscilatora.*

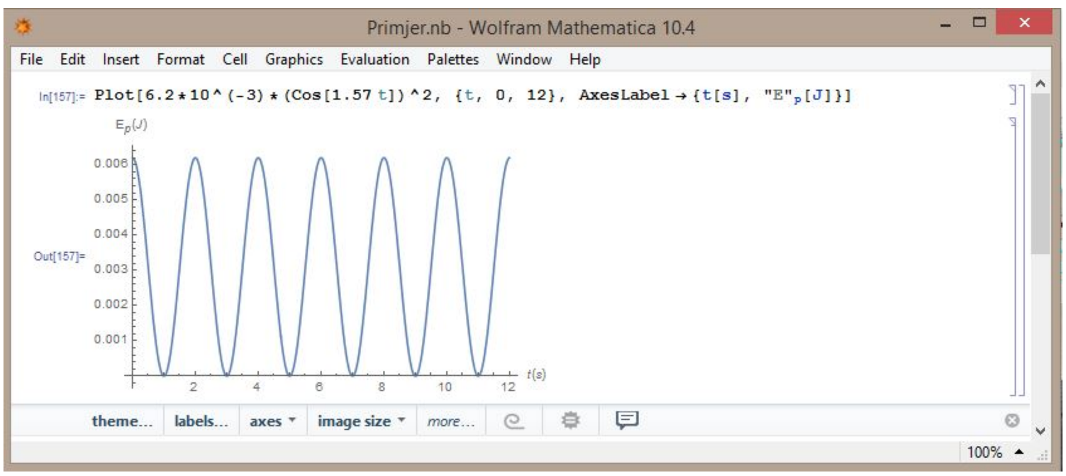
Rješenje.

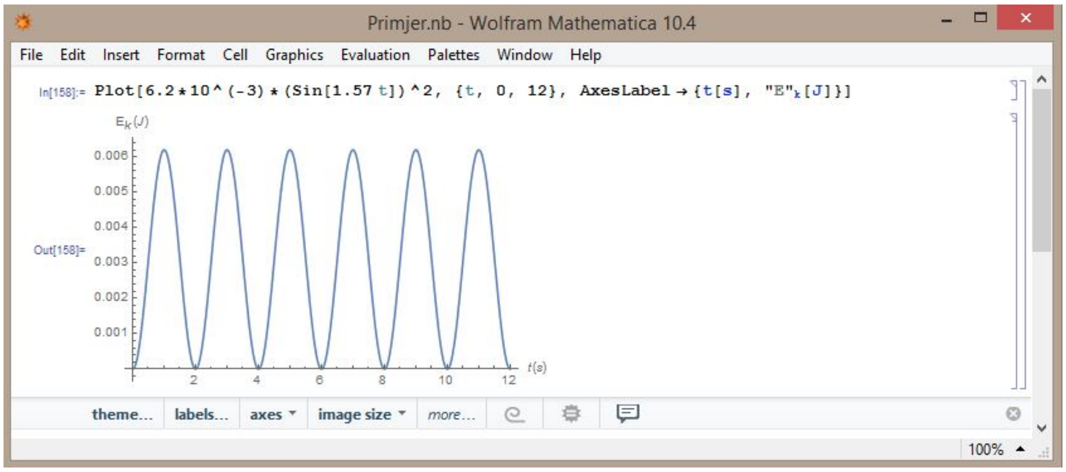
1. *Kružna frekvencija titranja* $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1.57$ rad/s.
   Ovisnost položaja i brzine o vremenu: $x(t) = 1 \cdot \cos(1.57t)$ cm,
   $v(t) = 1.57\sin(1.57t)$ cm/s.





2. *Potencijalna energija je* $E_p = \frac{1}{2}k\cdot x^2(t) = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$, *a kinetička energija* $E_k = \frac{1}{2}m\cdot v^2(t) = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t+\varphi)$. *U našem slučaju* $E_p = 6.2\cdot 10^{-3}\cos^2(1.57t)$ J *i* $E_k = 6.2\cdot 10^{-3}\sin^2(1.57t)$ J



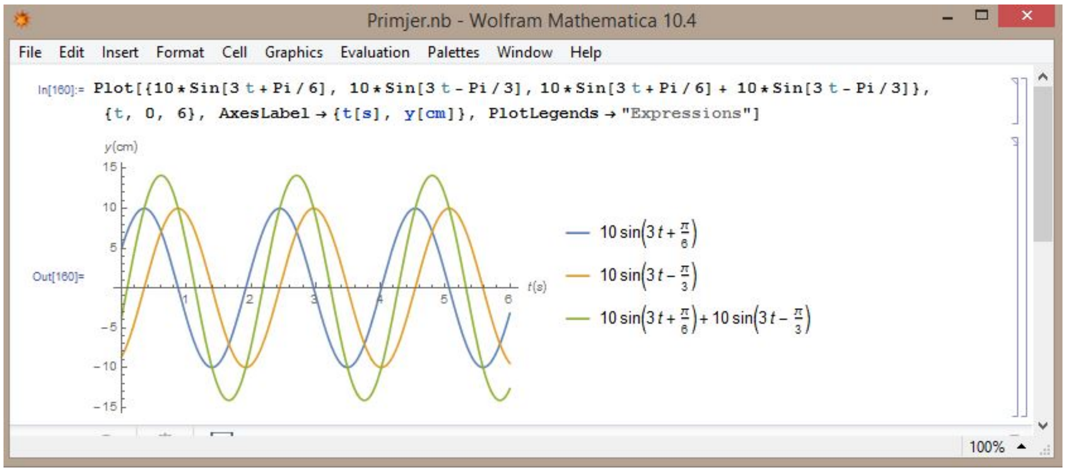


Primjer 3.50 *Čestice sredstva istovremeno su pobuđene s dva harmonička titranja jednakih amplituda i frekvencija opisana jednadžbama:* $y_1(t) = 10\sin(3t + \frac{\pi}{6})$ cm *i* $y_2(t) = 10\sin(3t - \frac{\pi}{3})$ cm*, vrijeme* t *u sekundama. Odredite:*

1. *grafički prikaz titranja* $y_1(t)$ *i* $y_2(t)$ *i superpozicije titranja* $y_1(t) + y_2(t)$
2. *za sva tri načina titranja odredite kružnu frekvenciju i period titranja*

Rješenje.

1. *Graf funkcija*



2. *Kružna frekvencija je* $\omega = 3$ s^{-1}*, period titranja* $T = 2\pi/\omega$*,* $T = 2.1$ s*. Iz grafičkog prikaza je vidljivo da zbrajanjem harmoničkih titranja jednake amplitude i frekvencije nastaje također harmoničko titranje jednake frekvencije.*

Primjer 3.51 *Čestice sredstva istovremeno su pobuđene s dva harmonička titranja različitih amplituda i frekvencija opisana jednadžbama:* $y_1(t) = A\sin(\omega_1 t)$ *i* $y_2(t) = A\sin(\omega_2 t)$*,* A *je amplituda titranja, vrijeme* t *u sekundama. Odredite:*

1. *izraz za rezultantno titranje nastalo superpozicijom dvaju zadanih titranja*

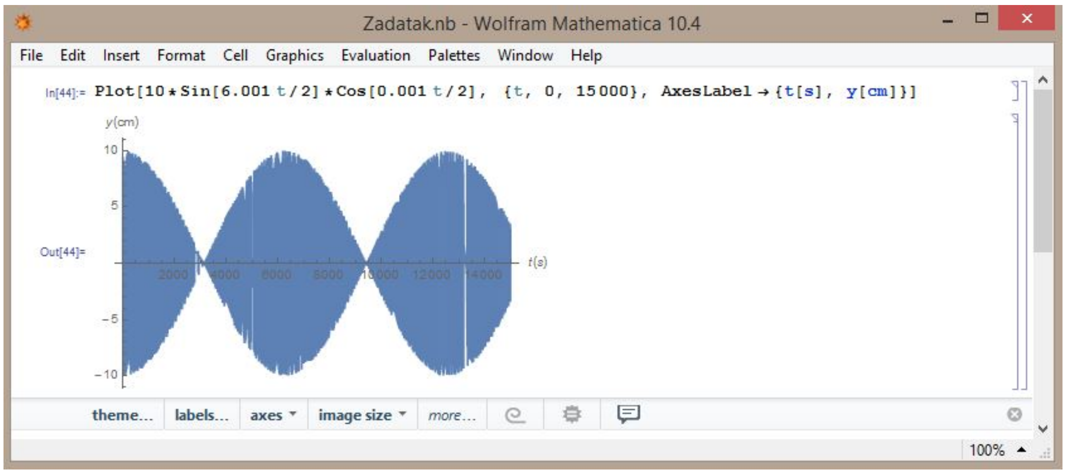
2. *grafički prikaz rezultantnog titranja ako se frekvencije titranja malo razlikuju i to* $\omega_1 = 3.001$ Hz *i* $\omega_2 = 3$ Hz, *amplituda titranja* $A = 5$ cm, *za* t *uzmite vrijednosti od* 0 *do* 15000 s. *Analizirajte rezultantno titranje.*

Rješenje.

1. $y(t) = y_1(t) + y_2(t) = A\sin(\omega_1 t) + A\sin(\omega_2 t) =$
   $2A\sin(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\cdot t)\cos(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\cdot t)$

2. $y(t) = 10\sin(\frac{6.001}{2}\cdot t)\cos(\frac{0.001}{2}\cdot t)$

3. *Graf funkcije*



Superpoziciju titranja bliskih frekvencija zovemo udarima. Radi se o titranju frekvencijom 3 Hz *pri čemu je amplituda modulirana funkcijom*

$$\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\cdot t\right) = \cos\left(\frac{0.001}{2}\cdot t\right).$$

Frekvencija udara je $\omega_1 - \omega_2$. *Fenomen udara koristi se za ugađanje muzičkih instrumenata. Ako npr. glazbena viljuška titra frekvencijom* ω_1 *tada do muzičara stiže val frekvencije* ω_1. *Ako je frekvencija zvuka koji proizvodi njegov instrument malo različita od* ω_1 *čut će se udari. Tek kada se muzički instrument podesi točno na frekvenciju* ω_1 *udari se više neće čuti.*

Primjer 3.52 *Maja je na jednom kraju zatitrala uže u vertikalnom smjeru. Taj poremećaj se širio užetom u formi vala koji se može napisati kao:* $y_1(t) = A\cdot\sin(\omega t - kx)$, *(A je amplituda vala,* ω *kružna frekvencija,* k *valni broj,* $k = 2\pi/\lambda$, λ *je valna duljina). Uže je učvršćeno na drugom kraju za zid pa će se val reflektirati. Reflektirani val ima oblik* $y_2(t) = A\cdot\sin(\omega t + kx + \pi)$. *Odredite:*

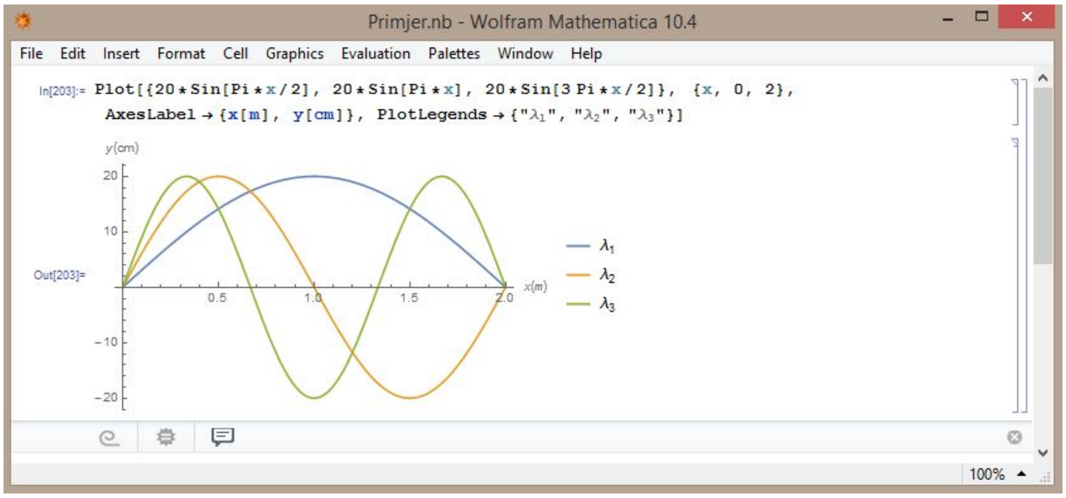
1. *oblik vala nastalog superpozicijom upadnog i reflektiranog vala*

2. *grafički prikaz rezultantnog vala u trenutku* $t = 0$ *sekundi za valne duljine* $\lambda_1 = 4$ m, $\lambda_2 = 2$ m *i* $\lambda_3 = 4/3$ m *(amplituda vala je* 10 *centimetra).*

Rješenje.

1. $y(t) = y_1(t) + y_2(t) = A\sin(\omega t - kx) + A\sin(\omega t + kx + \pi) = 2A\sin(kx)\cos(\omega t)$

2. *u trenutku* $t = 0$ *je* $y(t) = 2A\sin(kx)$



$$
\begin{aligned}
y(t) &= 20\sin(\frac{\pi}{2}x) \ \textit{za} \ \lambda_1 = 4 \text{ m} \\
y(t) &= 20\sin(\pi x) \ \textit{za} \ \lambda_2 = 2 \text{ m} \\
y(t) &= 20\sin(\frac{3\pi}{2}x) \ \textit{za} \ \lambda_3 = 4/3 \text{ m}.
\end{aligned}
$$

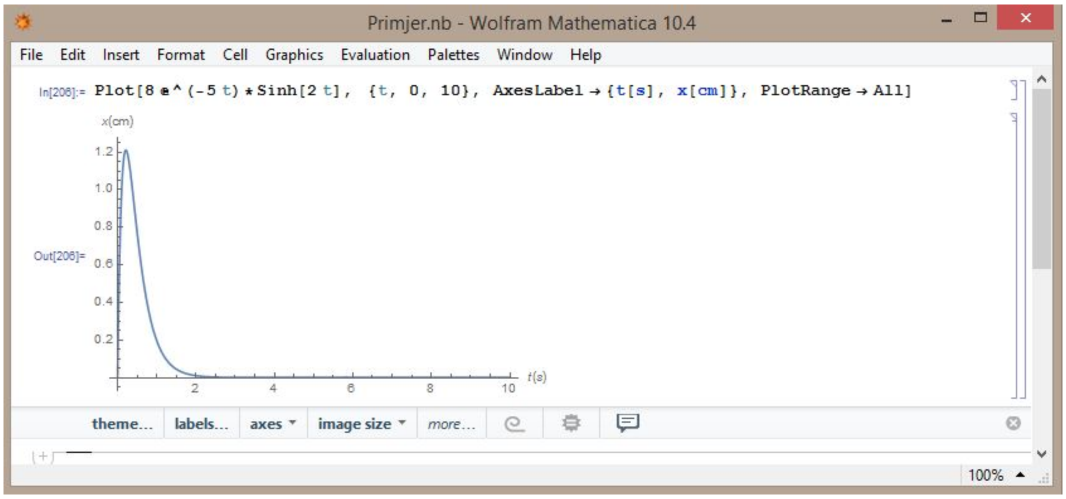
Primjer 3.53 *Uteg obješen na oprugu uronjen je u sredstvo s velikim koeficijentom otpora ($\delta = 5$ s^{-1}) ne može titrati već se nakon pomaka vraća prema ravnotežnom položaju. To je aperiodično gibanje koje se može prikazati izrazom*

$$x(t) = e^{-\delta\cdot t}\Big(A\,\mathrm{sh}\,\omega t + B\,\mathrm{ch}\,\omega t\Big).$$

Odredite vremensku ovisnost pomaka iz položaja ravnoteže ako je u početnom trenutku $t = 0$, $x(t) = 0$, ($A = 8$ cm, $\delta = 5$ s^{-1}, $\omega = 2$ s^{-1}), prikažite grafički.

Rješenje.

U izraz za pomak tijela iz položaja ravnoteže uvrstimo početne uvjete: $x(t) = e^{-\delta t}(A\,\mathrm{sh}\,\omega t + B\,\mathrm{ch}\,\omega t)$. *Za* $t = 0$ *je* $x(t) = e^{-\delta\cdot 0}(A\,\mathrm{sh}\,\omega\cdot 0 + B\,\mathrm{ch}\,\omega\cdot 0) = A\cdot 0 + B\cdot 1 = 0$, *znači konstanta* $B = 0$ *pa je pomak dan s:* $x(t) = Ae^{-\delta t}\cdot \mathrm{sh}\,\omega t$.
Grafički prikaz $x(t) = 8\cdot e^{-5t}\,\mathrm{sh}\,2t$ cm



Iz grafičkog prikaza se vidi da se tijelo malo pomakne iz ravnotežnog položaja, no već nakon približno 2 sekunde vrati se u početni položaj.

Primjer 3.54 *Ako na tijelo istovremeno djeluju dvije elastične sile koje su međusobno okomite tijelo će općenito izvoditi gibanje u ravnini. Neka su titranja duž x i y osi opisana s:* $x(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$ *i* $y(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$. *Odredite ovisnost* $y(x)$ *i grafički prikažite ako je:*

1. $\omega_1 = \omega_2 = \omega,\ \varphi_1 = \varphi_2 = 0,\ A_1 = A_2 = 2$ cm

2. $\omega_1 = \omega_2 = \omega,\ \varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = \pi,\ A_1 = A_2 = 2$ cm

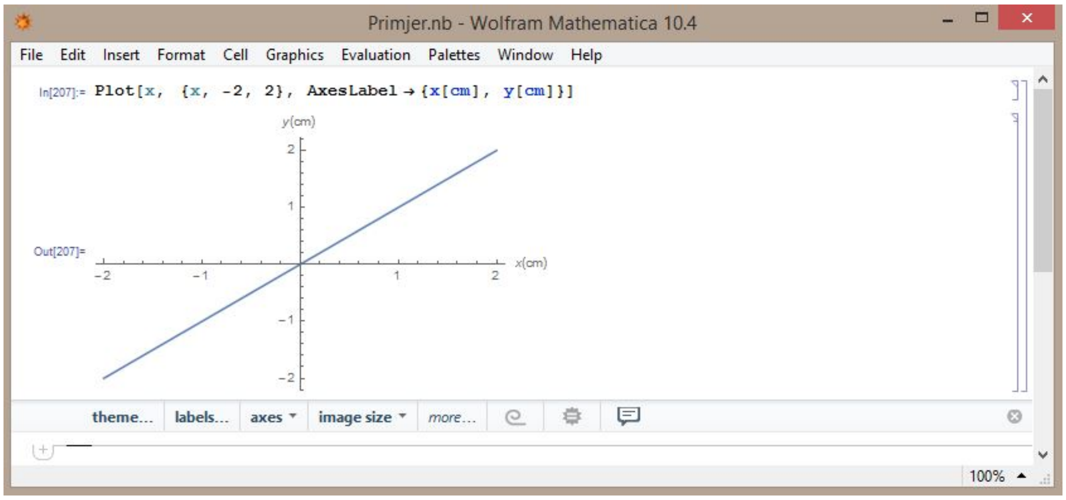
3. $\omega_1 = \omega_2 = \omega,\ \varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = \pi/2,\ A_1 = A_2 = 2$ cm

4. $\omega_2 = 2\omega_1 = 2\omega,\ \varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = 0,\ A_1 = A_2 = 2$ cm

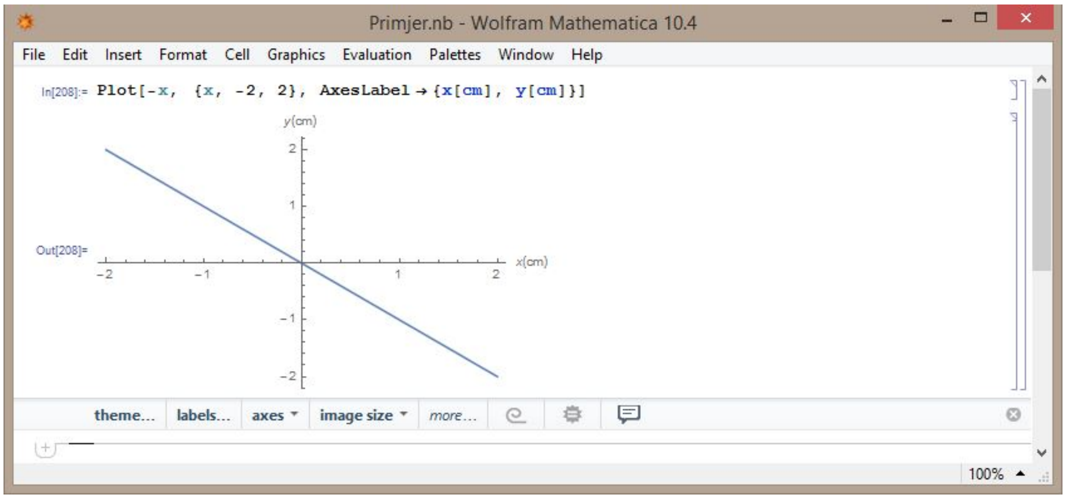
5. $\omega_2 = 2\omega_1 = 2\omega,\ \varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = \pi/2,\ A_1 = A_2 = 2$ cm

Rješenje.

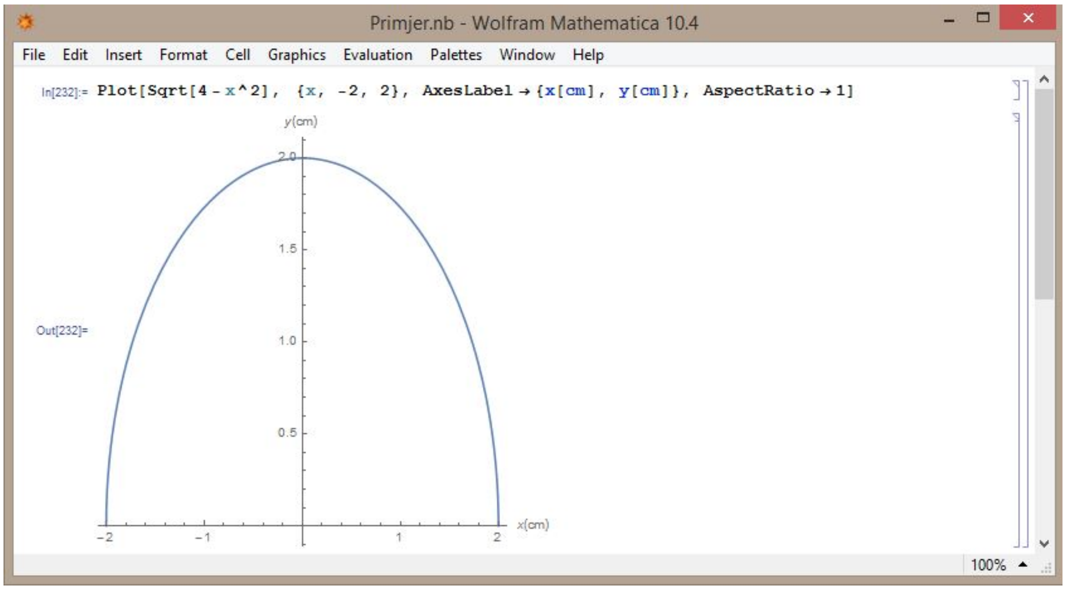
1. $x(t) = A_1 \sin(\omega t)$ *i* $y(t) = A_2 \sin(\omega t)$, *pa je* $y(x) = \frac{A_2}{A_1} x$, *putanja tijela je dužina - dijagonala pravokutnika stranica* $2A_1$ *i* $2A_2$.
   Crtamo putanju $y(x) = x$



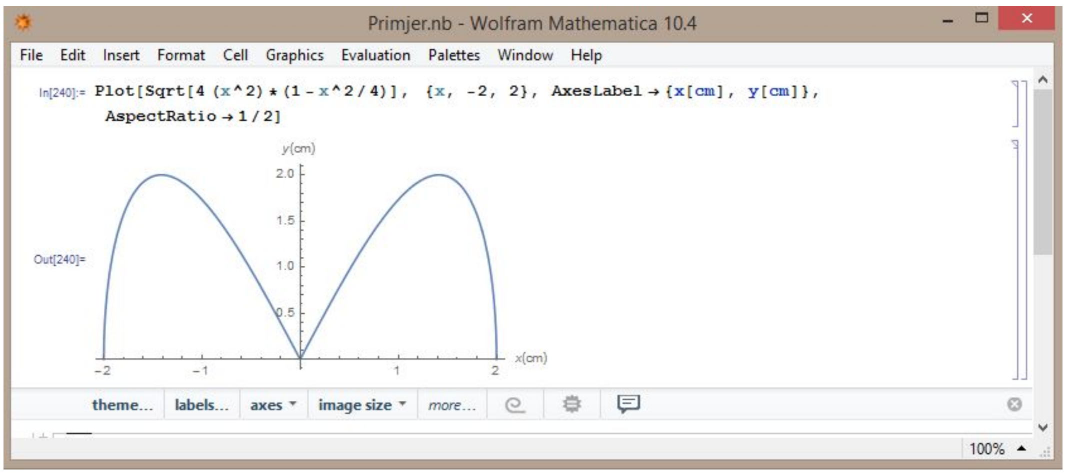
2. $x(t) = A_1 \sin(\omega t)$ *i* $y(t) = A_2 \sin(\omega t + \pi)$, *pa je* $y(x) = -\frac{A_2}{A_1} x$.
Crtamo putanju $y(x) = -x$



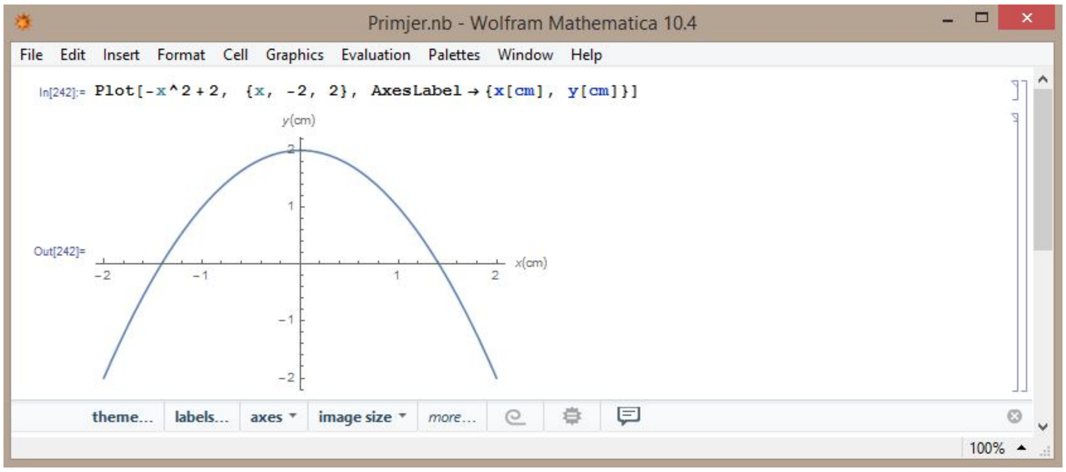
3. $x(t) = A_1 \sin(\omega t)$ *i* $y(t) = A_2 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$, *pa je* $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$. *Putanja tijela je elipsa. Za* $A_1 = A_2$ *putanja je kružnica.*
Crtamo putanju $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$



4. $x(t) = A_1 \sin(\omega t)$ *i* $y(t) = A_2 \sin(2\omega t)$, *pa je* $y^2 = (2\frac{A_2}{A_1})^2 x^2 (1 - \frac{x^2}{A_1^2})$. *Putanja tijela je lemniskata* $y^2 = 4x^2(1 - \frac{x^2}{4})$.



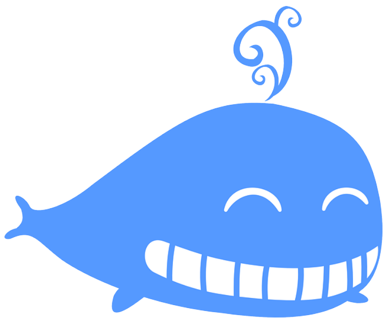
5. $x(t) = A_1 \sin(\omega t)$ *i* $y(t) = A_2 \sin(2\omega t + \frac{\pi}{2})$. *Računamo* $y(t) = A_2 \cos(2\omega t) = A_2(1 - 2\sin^2 \omega t)$. *Dobivamo da je parabola* $y = -2\frac{A_2}{A_1^2}x^2 + A_2$ *putanja tijela.*
Crtamo putanju $y = -x^2 + 2$.



Primjer 3.55 *Kit u zabavnom parku osim izvođenjem trikova, zabavlja publiku prskanjem mlazom vode kroz otvor s najviše točke na glavi. Kit izbacuje vodu brzinom v (m/s), pod kutem θ lebdeći x metara horizontalno od publike i y metara vertikalno iznad zemlje. Model izbacivanja mlaza vode može se prikazati kao kvadratna funkcija u varijabli x*

$$f(x) = x\text{tg}\theta - \frac{9.8x^2}{2(v\cdot\cos\theta)^2}.$$

1. *Kit se nalazi 1 metar daleko od publike, mjereći horizontalno i 2 metra vertikalno, pa ih prska brzinom 7 m/s. Da bi kit pogodio publiku vodom, pod kojim kutem mora izbaciti vodu? Uputa-trigonometrijsku jednadžbu koja se pojavi u izračunu riješite računalom.*
2. *Nacrtajte računalom graf funkcije f uz kut $\theta = 75°$ i komentirajte ga.*

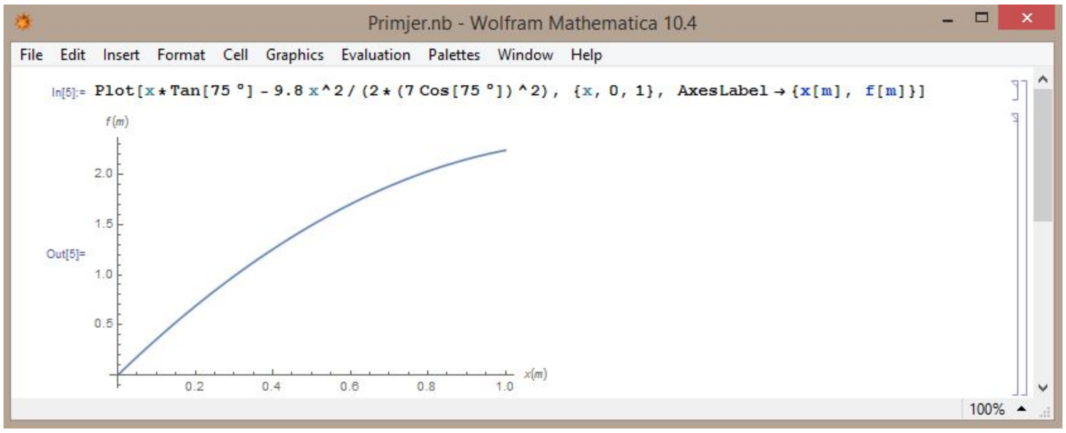


Rješenje.

1. *Ako je* $f(x) = 2$ m, $x = 1$ m, $v = 7$ m/s *slijedi izračun kuta* θ.
   $2 = 1\cdot\text{tg}\theta - \frac{9.8\cdot 1^2}{2(7\cdot\cos\theta)^2}$
   $2 = \text{tg}\theta - \frac{1}{10\cdot(\cos\theta)^2}$
   $20 = 10\,\text{tg}\theta - \frac{1}{(\cos\theta)^2}$
   $20 = 10\,\text{tg}\theta - \left(1 + (\text{tg}\theta)^2\right)$
   $(\text{tg}\theta)^2 - 10\text{tg}\theta + 21 = 0$
   $x = \text{tg}\theta$

$x^2 - 10x + 21 = 0$
$x_1 = 7,\ x_2 = 3$
$\text{tg}\theta_1 = 7,\ \text{tg}\theta_2 = 3$
$\theta_1 = 71.6°\ ,\ \theta_2 = 81.9°$

2. *Graf funkcije*



Funkcija iz primjera s kitom ovisi o x, v, θ, pa smo je mogli shvatiti kao funkciju više varijabli. Mi smo zbog jednostavnosti fiksirali dvije vrijednosti i promatrali funkciju samo jedne varijable x. Prirodno se pojavljuje potreba promatrati funkcije više varijabli, ali mićemo ih svoditi na funkcije jedne varijable kao što će biti i u sljedećem primjeru.

Primjer 3.56 *Promotrimo funkciju za određivanje duljine dana. Vrijednost funkcije S je broj sati u danu u kojima je dnevno svjetlo. Funkcija ovisi o zemljopisnoj širini mjesta i datumu. U izrazu*

$$S = 24 - \frac{24}{\pi}\arccos\left[\frac{\sin\frac{0.8333\cdot\pi}{180} + \sin\frac{z\cdot\pi}{180}\cdot\sin y}{\cos\frac{z\cdot\pi}{180}\cdot\cos y}\right]$$

je $y = \arcsin(0.3975\cos(0.2163 + 2\,\text{arctg}(0.9671\,\text{tg}(0.0086\cdot(x-186)))))$, *gdje z označava zemljopisnu širinu u stupnjevima, a x označava redni broj dana u godini.*

1. *Izračunajte koliko sati dnevnog svjetla ima* 150. *dan u godini u Slavonskom Brodu, koji ima zemljopisnu širinu* $45°15'$ *? Zadatak riješite računalom.*

2. *Provjeriti računalom koliko današnji dan ima sati dnevnog svjetla, a zatim provjerite rješenje - pronađite podatak kada je bio izlazak i zalazak sunca.*

3. *Funkcija za određivanje broja sati može se zapisati i u obliku*

$$\text{f(x)= Asin}(B(x-C)) + D.$$

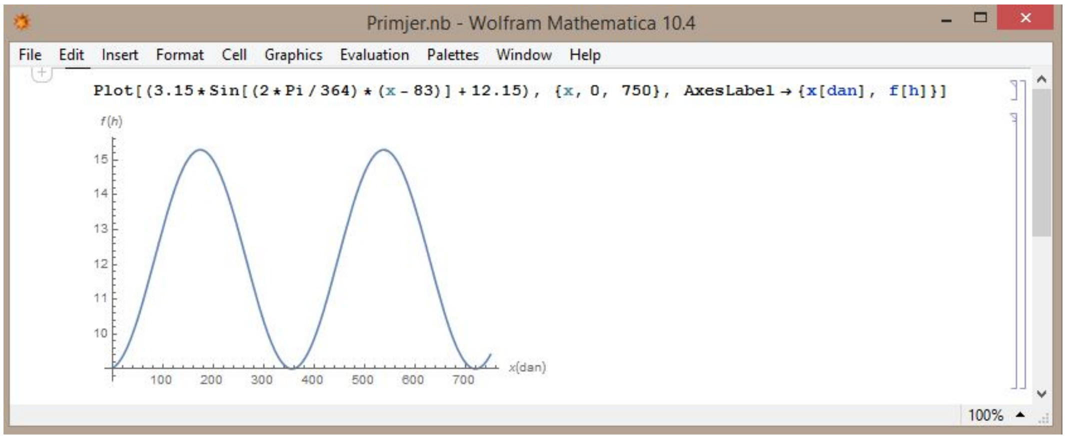
A označava razliku maksimalnog i minimalnog broja dnevnih sati u godini podijeljen s dva, D označava zbroj istih podijeljen s dva, a B označava period $\frac{2\pi}{364}$. *Ako je minimalan broj dnevnih sati* 9, *maksimalan* 15.3, *a C iznosi* 83 *napišite izraz kojim je definirana funkcija f u ovisnosti o rednom broju dana x. Ako je minimalan broj dnevnih sati* 9, *maksimalan* 15.3, *a C iznosi* 83, *izračunajte koliko današnji dan ima sati dnevnog svjetla. Nacrtajte na računalu i komentirajte dobiveni graf.*

Rješenje.

1. $S = 15.3343$ *sati dnevnog svjetla*

2. f(x)= $3.15 \cdot \sin(\frac{2\pi}{364}(x-83)) + 12.15$

3. *Graf funkcije*



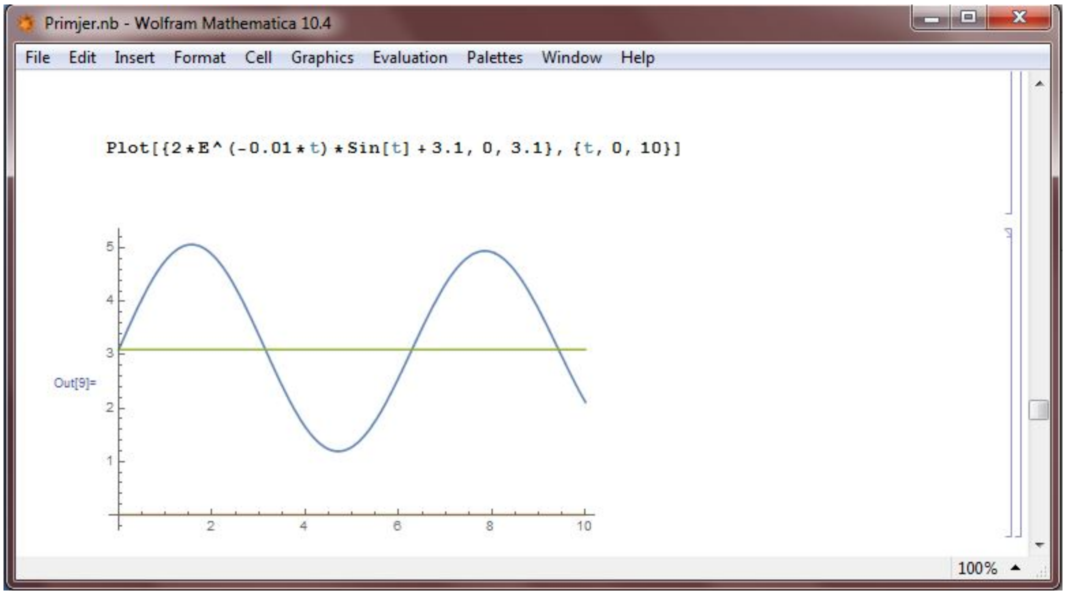
Primjer 3.57 *Zadana je vremenska ovisnost inflacije funkcijom* $i(t) = 2e^{-0.01t}\sin t + 3.1$, *gdje je* t *vrijeme.*

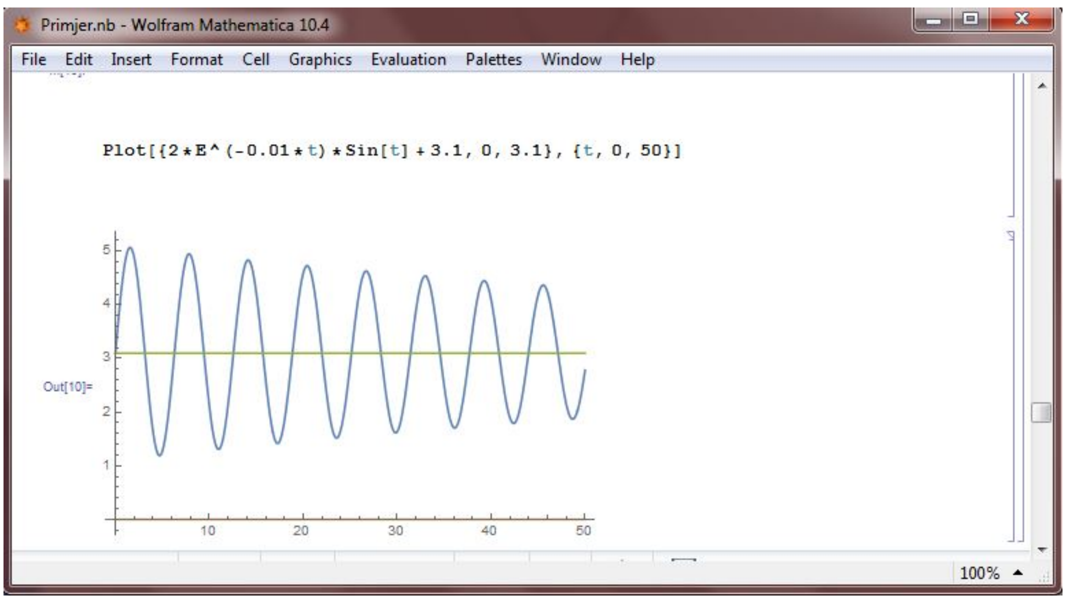
1. *Nacrtajte graf funkcije za različite intervale varijable* t. *Komentirajte.*

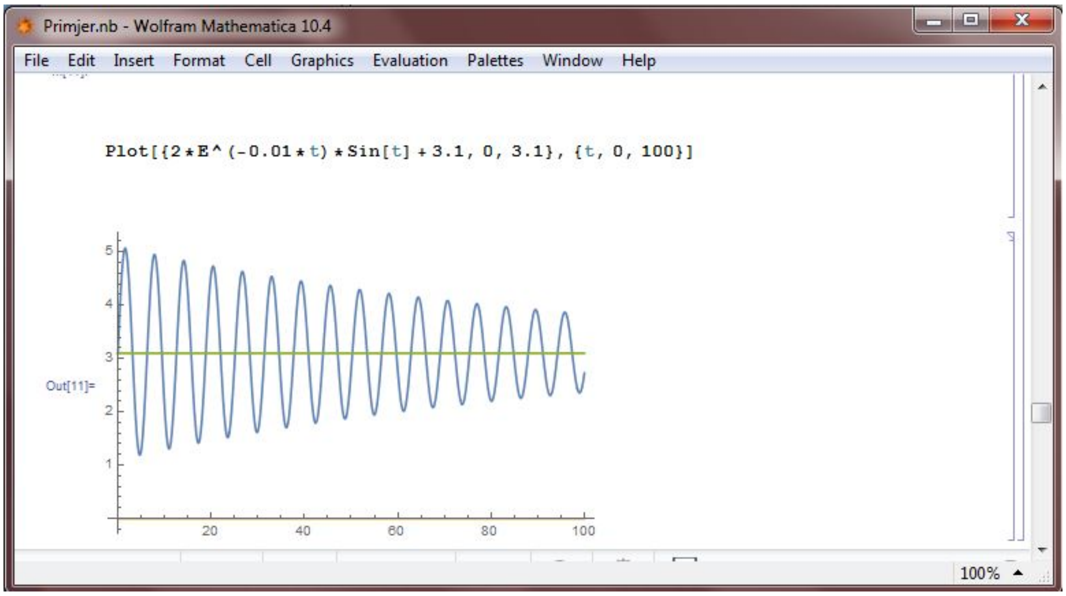
2. *Intuitivno, iz grafa procijenite u koju će vrijednost inflacija težiti dugoročno.*

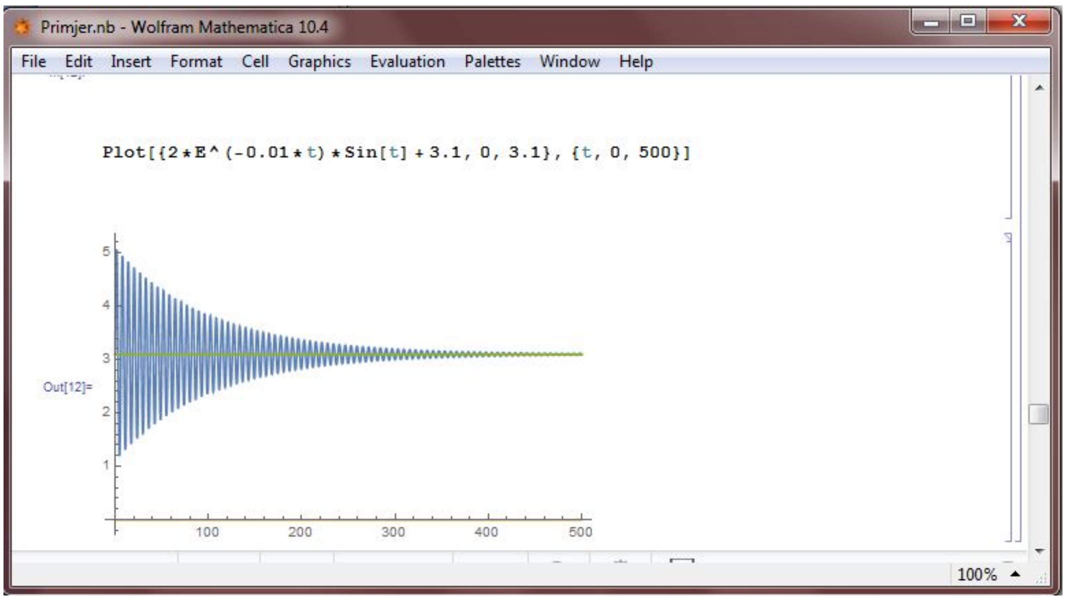
Rješenje.

1. *Graf funkcije*


Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
Plot[{2*E^(-0.01*t)*Sin[t]+3.1, 0, 3.1}, {t, 0, 10}]
Out[9]=
100%


Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
Plot[{2*E^(-0.01*t)*Sin[t]+3.1, 0, 3.1}, {t, 0, 50}]
Out[10]=
100%





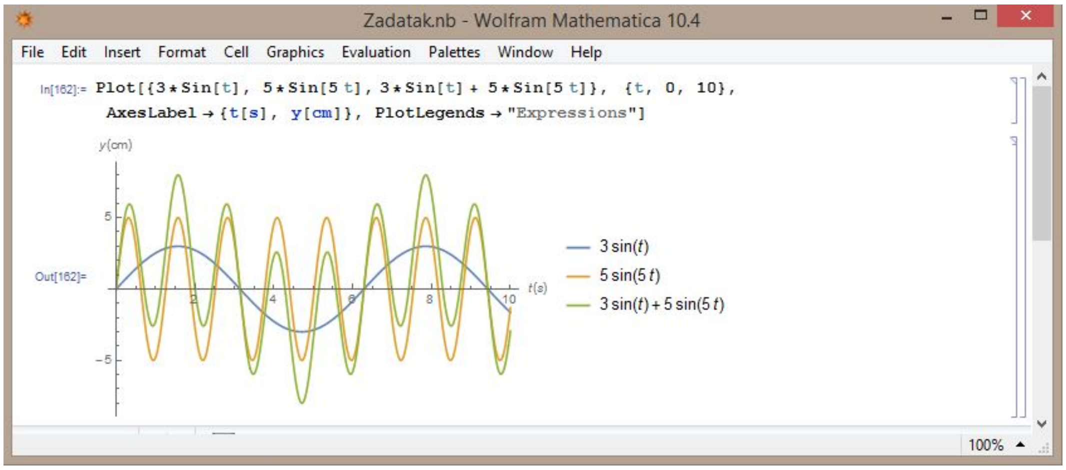
Iz grafova primjećujemo da funkcija inflacije ima oscilacije oko pravca $y = 3.1$.

2. *Što je vrijeme* t *veće, oscilacije su sve manje i manje. Kažemo da inflacija bez obzira na oscilacije, dugoročno konvergira u vrijednost* 3.1. *Funkcija inflacije ima prigušene oscilacije.*

3.9 Zadaci za vježbu

Zadatak 3.1 *Čestice sredstva istovremeno su pobuđene s dva harmonička titranja različitih amplituda i frekvencija opisana jednadžbama:* $y_1(t) = 3\sin t$ cm *i* $y_2(t) = 5\sin 5t$ cm, *vrijeme* t *u sekundama. Odredite grafički prikaz titranja* $y_1(t)$ *i* $y_2(t)$ *i superpozicije titranja* $y_1(t) + y_2(t)$.

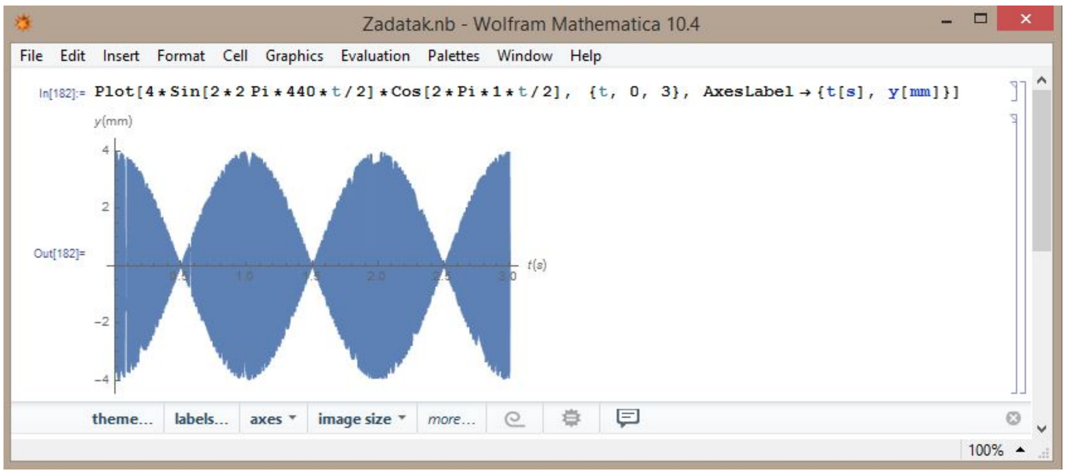
Rješenje.



Zadatak 3.2 *Glazbena viljuška titra frekvencijom* $f = 440$ Hz *(ova frekvencija odgovara tonu A) amplitudom* 2 mm. *Žica na violini je previše nategnuta pa se pri titranju viljuške i žice čuje* 1 *udar u sekundi. Amplituda titranja violine je također* 2 mm. *Odredite superpoziciju titranja glazbene viljuške i violine (u intervalu* $0 - 3$ s*), prikažite grafički.*

Rješenje.

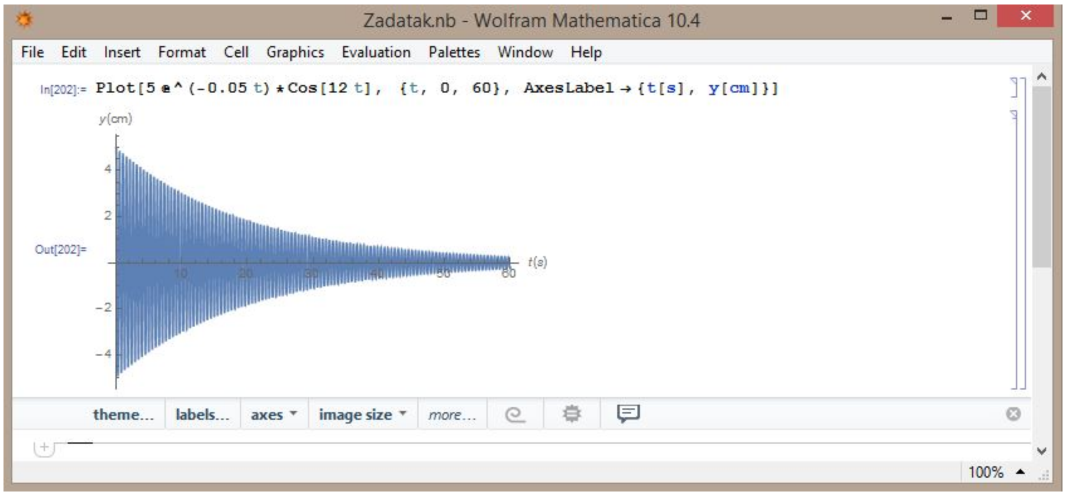
$y(t) = 4\sin(\frac{2\cdot 2\pi\cdot 440}{2}\cdot t)\cos(\frac{2\pi\cdot 1}{2}\cdot t)$ mm



Zadatak 3.3 *Tijelo obješeno na oprugu titra u sredstvu koje prigušuje gibanje. Pomak tijela iz položaja ravnoteže je:* $y(t) = A_0 e^{-\delta\cdot t}\cos\omega t$. *Početna amplituda titranja je* 5 *centimetra, koeficijent prigušenja* $\delta = 0.05$ s^{-1}, $\omega = 12$ s^{-1}. *Grafički prikažite gibanje oscilatora.*

Rješenje.

$y(t) = 5e^{-0.05\cdot t}\cos 12t$



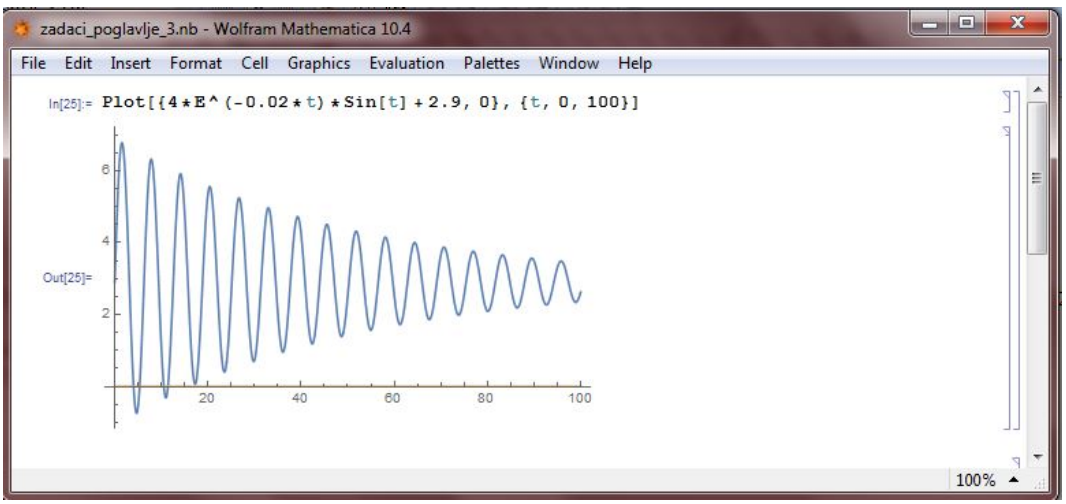
Zadatak 3.4 *Zadana je vremenska ovisnost inflacije funkcijom* $i(t) = 4e^{-0.02t}\sin(t) + 2.9$, *gdje je* t *vrijeme.*

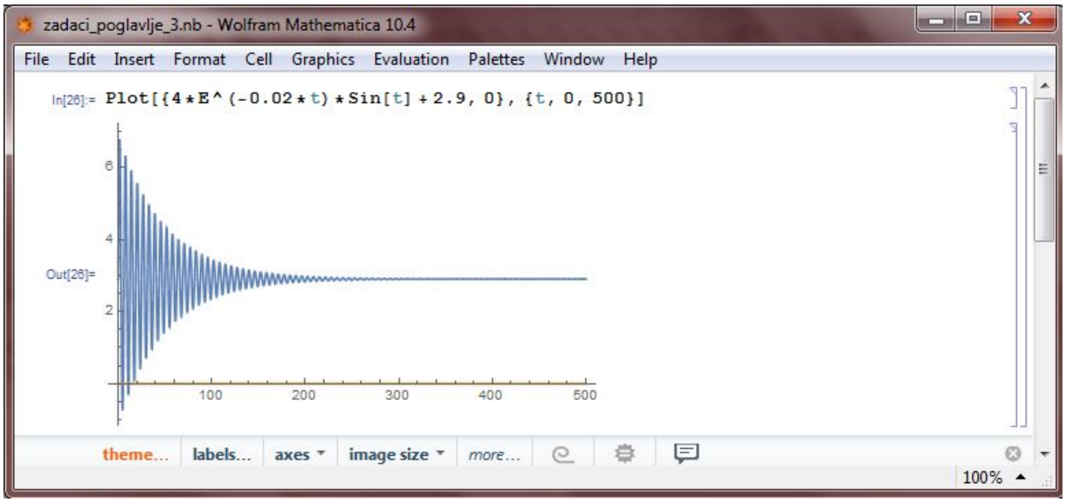
1. *Nacrtajte graf funkcije za različite intervale varijable* t. *Komentirajte.*

2. *Intuitivno, iz grafa procijenite u koju će vrijednost inflacija težiti dugoročno.*

Rješenje.

1. *Graf*





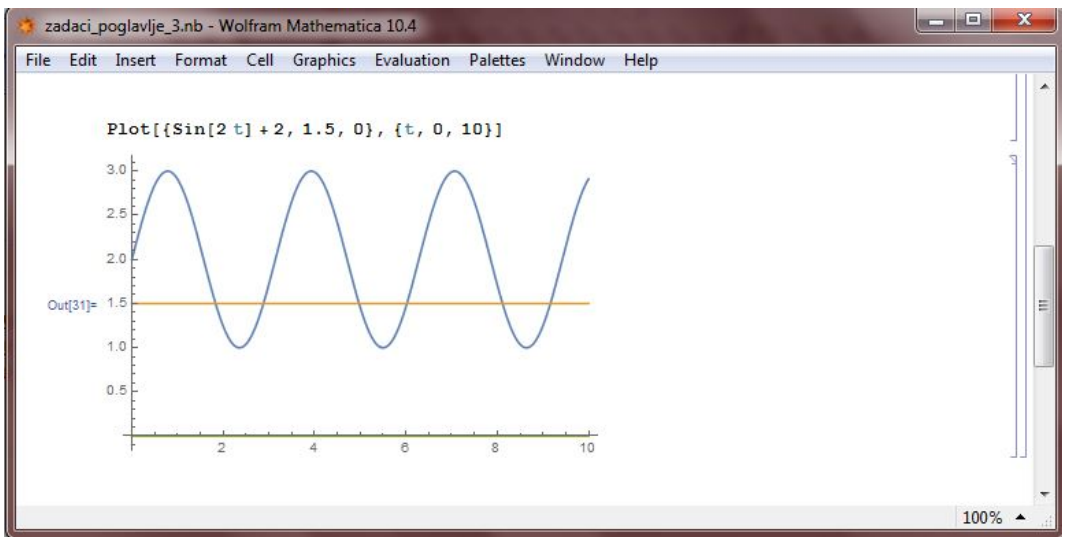
2. $y = 2.9$.

Zadatak 3.5 *Distributivno poduzeće nabavlja proizvod po cijeni* 3*, a prodaje po cijeni koja se definira na temelju varijabilnosti potražnje. Ovisnost prodajne cijene o vremenu dana je modelom* $p(t) = \sin(2t)+2$*, gdje je* t *vrijeme.*

1. *Nacrtajte graf funkcije za različite intervale varijable* t*. Komentirajte.*
2. *Intuitivno, iz grafa procijenite u koju će vrijednost cijena težiti dugoročno.*
3. *Iz grafa komentirajte u kojim će vremenskim intervalima poduzeće biti profitabilno.*

Rješenje.

1. *Graf*



2. *Graf oscilira između vrijednosti* 1 *i* 3*, te ne teži ni u koju vrijednost.*

3. *Poduzeće je profitabilno u vremenskim intervalima u kojima je prodajna cijena veća od nabavne cijene* 1.5.

Poglavlje 4

Polinomi, racionalne i iracionalne funkcije

4.1 Motivacija za uvođenje pojma polinoma

Polinomi su funkcije oblika

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f(x) &= ax^2 + bx + c \\ f(x) &= ax + b \end{aligned}$$

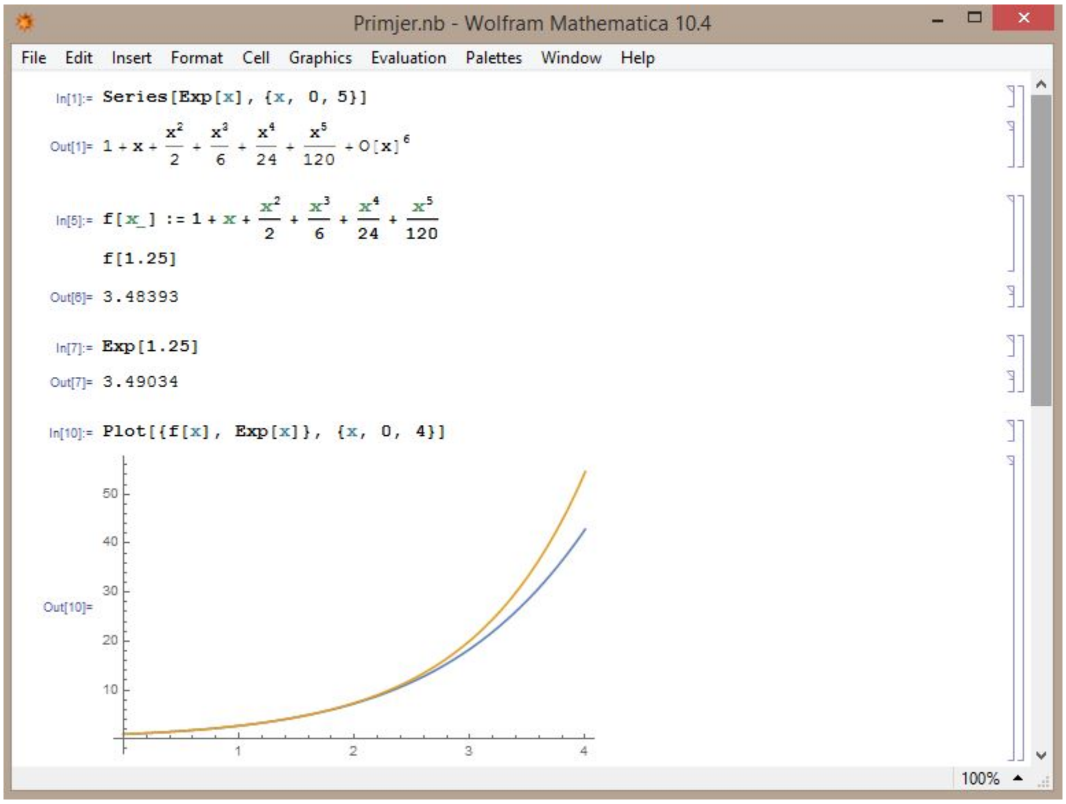
ili općenito

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \tag{4.1}$$

gdje je $n \in \mathbb{N}$ stupanj polinoma ako je $a_n \neq 0$. Brojevi $a_0, a_1, a_2, \dots a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ su koeficijenti polinoma. Polinom je definiran za svaki realni broj x.

Polinomi su značajni u matematici i primjeni jer su to funkcije s lijepim ponašanjem i s njima se lako računa. Većina funkcija koje ste do sada radili može se aproksimirati pomoću polinoma, što je vrlo korisno za primjenu. Pojam aproksimacije funkcije polinomom objasnit ćemo u sljedećim primjerima.

Primjer 4.1 *Napisat ćemo eksponencijalnu funkciju kao polinom P stupnja 5 plus ostatak, naredbom $Series[Exp[x], \{x, 0, 5\}]$. Ovakvom naredbom dobivamo polinom koji dobro aproksimira eksponencijalnu funkciju u blizini nule. Izračunajmo vrijednost eksponencijalne funkcije i polinoma za $x = 1.25$. Izračunajmo razliku i nacrtajmo grafove obiju funkcija.*



Primjer 4.2 *Napišite eksponencijalnu funkciju kao polinom P stupnja n plus ostatak u okolini točke $x = a$, naredbom $Series[Exp[x], \{x, a, n\}]$.*

Izračunajte vrijednost eksponencijalne funkcije i polinoma u točki x_0. Izračunajte razliku funkcijskih vrijednosti i nacrtajte grafove obiju funkcija ako su zadane vrijednosti

1. $n = 10,\ a = 0,\ x_0 = 1.25$; 2. $n = 10,\ a = 0,\ x_0 = 7$; 3. $n = 10,\ a = 5,\ x_0 = 7$.

Polinom koji smo izračunali u svakom podzadatku ovog primjera naziva se Taylorov polinom funkcije u okolini točke $x = a$.

Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4

File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

In[54]:= `Series[Exp[x], {x, 0, 10}]`

Out[54]= $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}+\frac{x^7}{5040}+\frac{x^8}{40\,320}+\frac{x^9}{362\,880}+\frac{x^{10}}{3\,628\,800}+O[x]^{11}$

In[55]:= $f[x\_] := 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}+\frac{x^7}{5040}+\frac{x^8}{40\,320}+\frac{x^9}{362\,880}+\frac{x^{10}}{3\,628\,800}$

```
f[1.25]
Exp[1.25]
f[7]
Exp[7]
```

Out[56]= 3.49034

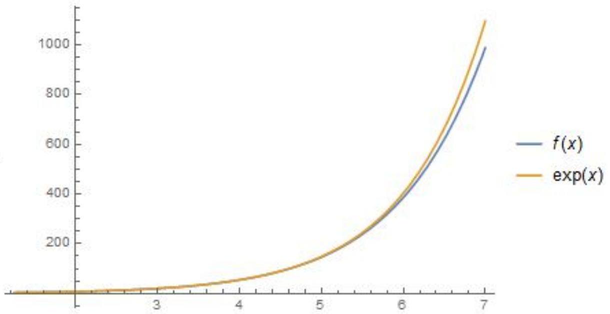
Out[57]= 3.49034

Out[58]= $\frac{512\,486\,087}{518\,400}$

Out[59]= e^7

In[60]:= `Plot[{f[x], Exp[x]}, {x, 1.25, 7}, PlotLegends → "Expressions"]`

Out[60]=



100%

Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4

File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

In[32]:= `Series[Exp[x], {x, 5, 10}]`

Out[32]= $e^5+e^5(x-5)+\frac{1}{2}e^5(x-5)^2+\frac{1}{6}e^5(x-5)^3+\frac{1}{24}e^5(x-5)^4+\frac{1}{120}e^5(x-5)^5+\frac{1}{720}e^5(x-5)^6+\frac{e^5(x-5)^7}{5040}+\frac{e^5(x-5)^8}{40\,320}+\frac{e^5(x-5)^9}{362\,880}+\frac{e^5(x-5)^{10}}{3\,628\,800}+O[x-5]^{11}$

In[33]:= $f[x\_] := e^5+e^5(x-5)+\frac{1}{2}e^5(x-5)^2+\frac{1}{6}e^5(x-5)^3+\frac{1}{24}e^5(x-5)^4+\frac{1}{120}e^5(x-5)^5+\frac{1}{720}e^5(x-5)^6+\frac{e^5(x-5)^7}{5040}+\frac{e^5(x-5)^8}{40\,320}+\frac{e^5(x-5)^9}{362\,880}+\frac{e^5(x-5)^{10}}{3\,628\,800}$

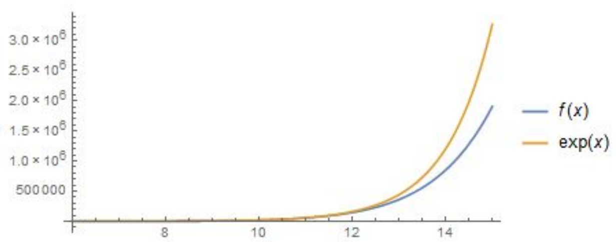
```
f[7]
Exp[7]
```

Out[34]= $\frac{34\,913\,e^5}{4725}$

Out[35]= e^7

In[53]:= `Plot[{f[x], Exp[x]}, {x, 6, 15}, PlotLegends → "Expressions", AspectRatio → 1/2, PlotRange → All]`

Out[53]=

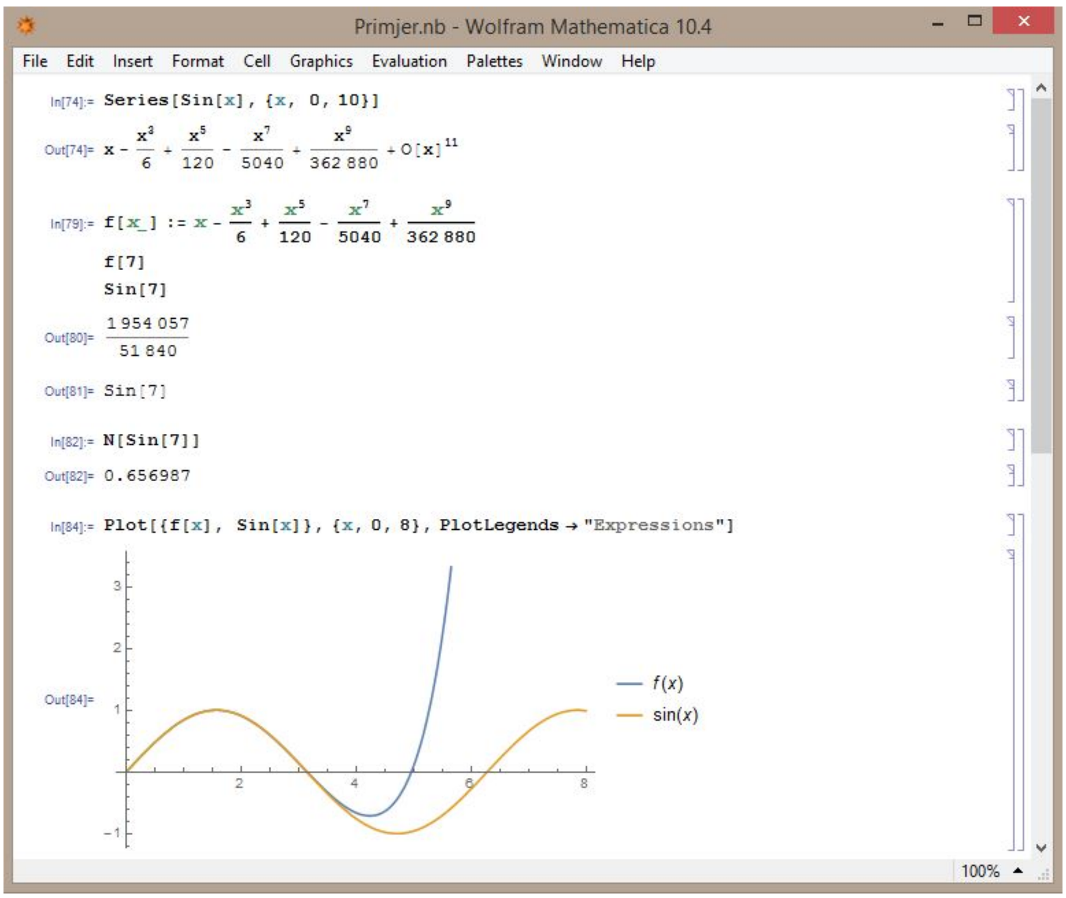


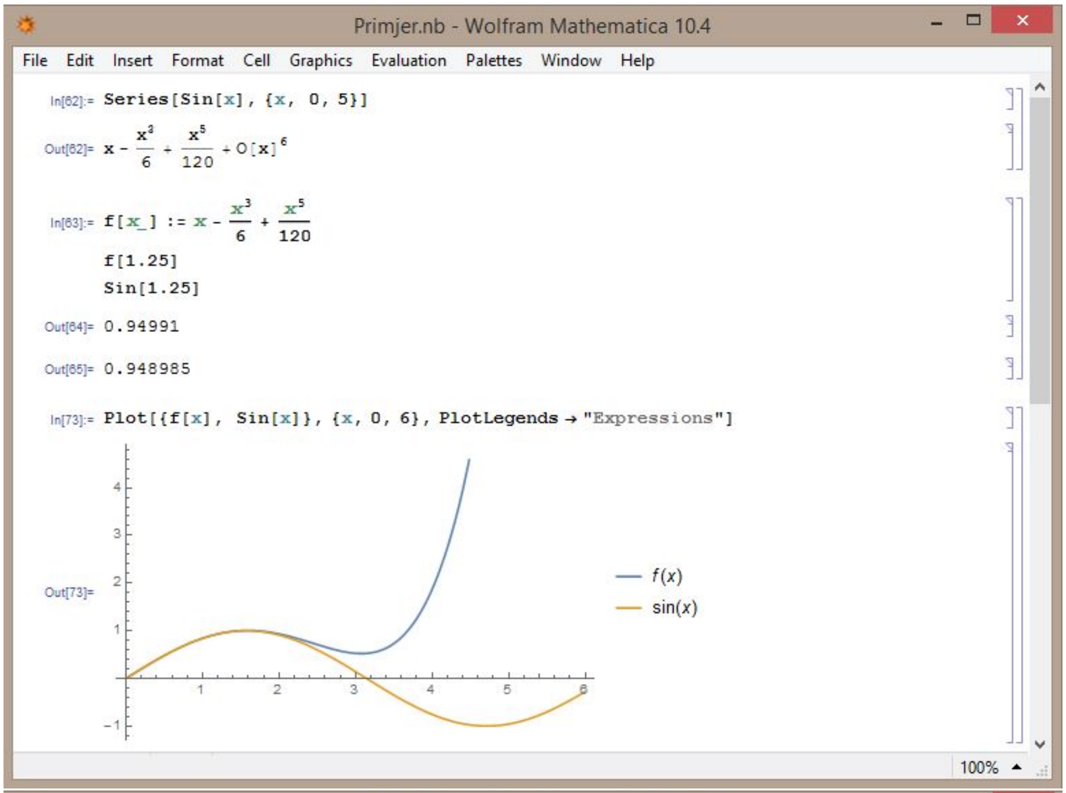
100%

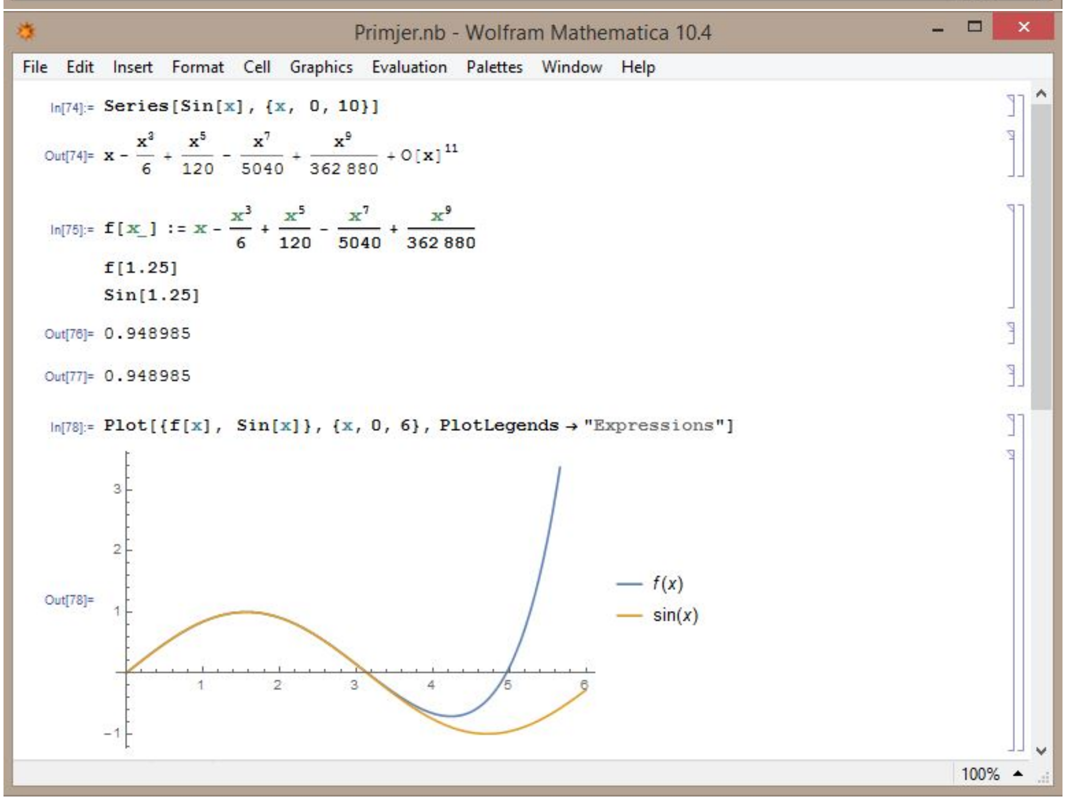
Primjer 4.3 *Napišite funkciju* $f(x) = \sin x$ *kao polinom* P *stupnja* n *plus ostatak u okolini točke* $x = a$, *naredbom* $Series[Sin[x], \{x, a, n\}]$.

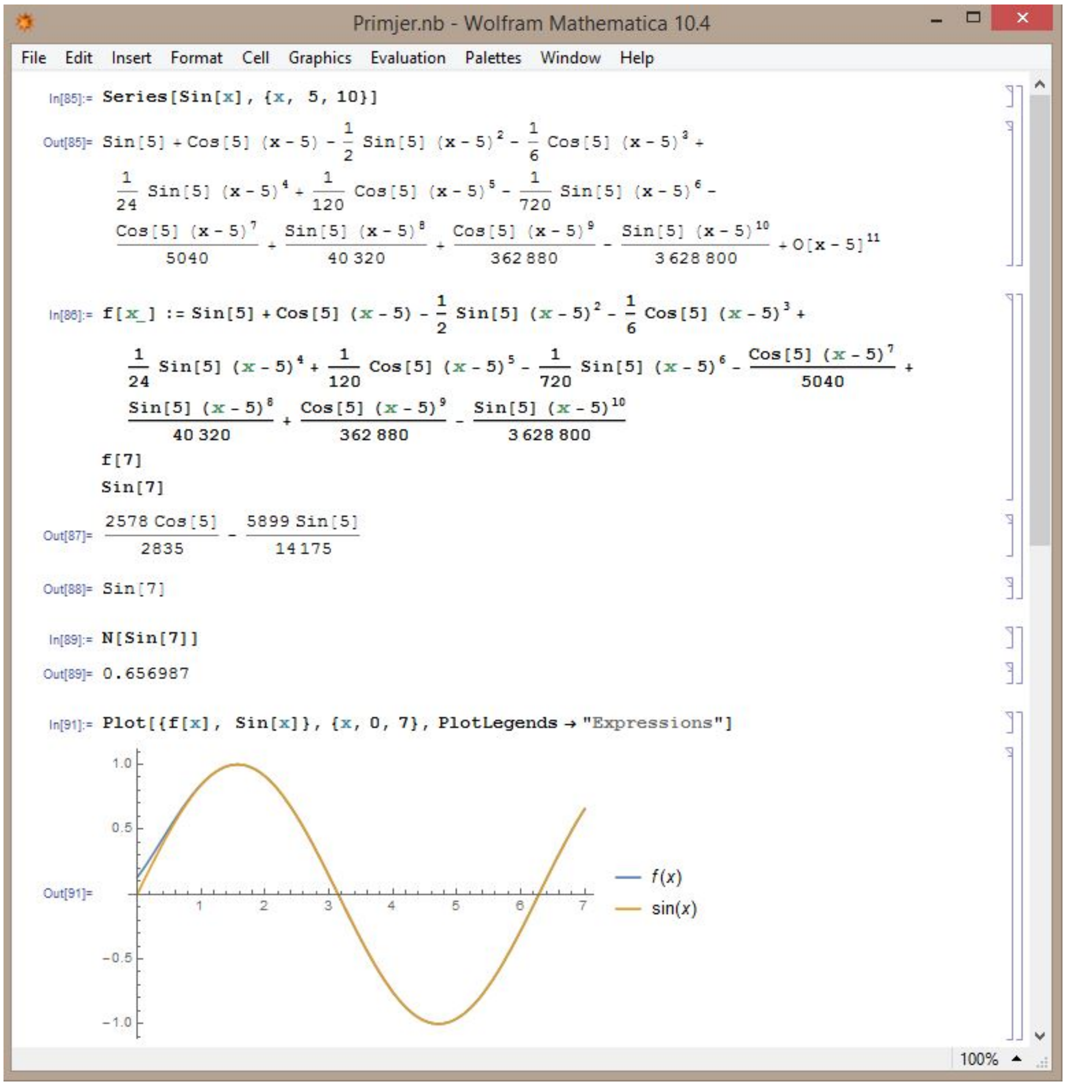
Izračunajte vrijednost funkcije sinus i polinoma u točki x_0. *Izračunajte razliku funkcijskih vrijednosti i nacrtajte grafove obiju funkcija ako su zadane vrijednosti*

1. $n = 5,\ a = 0,\ x_0 = 1.25,$
2. $n = 10,\ a = 0,\ x_0 = 1.25,$
3. $n = 10,\ a = 0,\ x_0 = 7,$
4. $n = 10,\ a = 5,\ x_0 = 7.$




Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[62]:= Series[Sin[x], {x, 0, 5}]
Out[62]= $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O[x]^6$
In[63]:= $f[x\_] := x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$
f[1.25]
Sin[1.25]
Out[64]= 0.94991
Out[65]= 0.948985
In[73]:= Plot[{f[x], Sin[x]}, {x, 0, 6}, PlotLegends → "Expressions"]
Out[73]=
f(x)
sin(x)
100%


Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[74]:= Series[Sin[x], {x, 0, 10}]
Out[74]= $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362\,880} + O[x]^{11}$
In[75]:= $f[x\_] := x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362\,880}$
f[1.25]
Sin[1.25]
Out[76]= 0.948985
Out[77]= 0.948985
In[78]:= Plot[{f[x], Sin[x]}, {x, 0, 6}, PlotLegends → "Expressions"]
Out[78]=
f(x)
sin(x)
100%



Primijetite da je aproksimacija funkcije polinomom bolja kad stupanj Taylorovog polinoma viši i kad je točka x_0 u kojoj računamo, blizu točke $x = a$.

Koji se postupak krije iza naredbe Series možete otkriti ako napišete Series[f[x], {x, a, 3}] što će vam dati općeniti izraz polinoma trećeg stupnja koji aproksimira funkciju f u okolini točke $x = a$. U izrazu se javljaju derivacije funkcije f, što je pojam koji se uči u 4. razredu gimnazije.

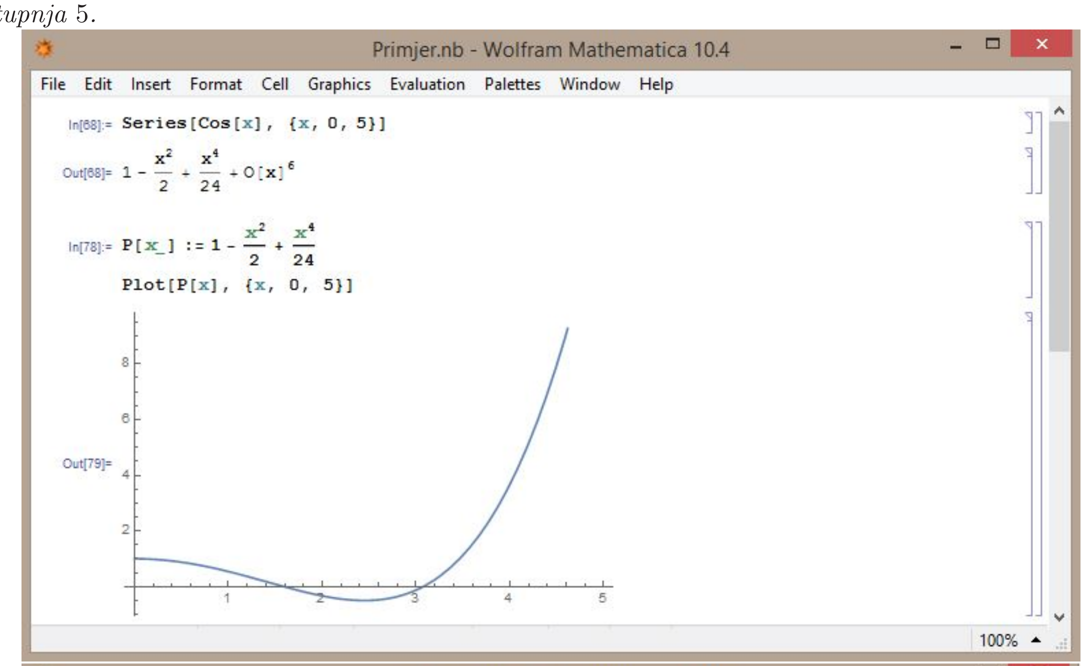
Zanimljivo je primijetiti da je periodična funkcija $f(x) = \sin x$ aproksimirana funkcijom koja je polinom i nije periodična. Naglašavamo da je funkcija dobro aproksimirana Taylorovim polinomom samo u okolini točke $x = a$, a daleko od te točke to više nije slučaj. Ako želimo aproksimaciju u točki x_0 koja je daleko od točke $x = a$, trebamo uzeti Taylorov polinom oko druge točke $x = a$.

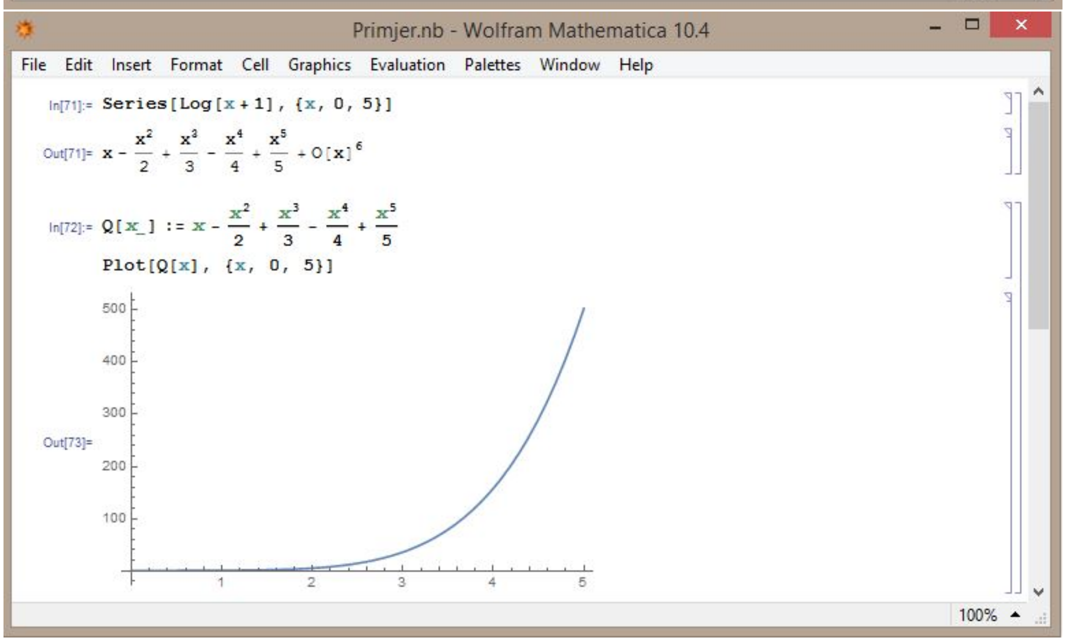
Kad želimo raditi s periodičnim funkcijama i želimo da i dalje budu periodične na cijeloj svojoj domeni, a ne da gledamo samo jedan mali dio domene, onda ih zapisujemo pomoću trigonometrijskih Fourierovih polinoma, koji su sume $\sin(\omega n x)$ i $\cos(\omega n x)$.

Mi ćemo se u ovom poglavlju baviti polinomima jedne varijable. Postoje i polinomi više varijabli.

Oni su specijalan slučaj funkcija više varijabli kojima se kratko bavimo u poglavlju 5. Trigonometrijskim polinomima se nećemo baviti, to smo samo spomenuli u poglavlju 3.

Primjer 4.4 *Pomoću naredbe Series napišite Taylorov polinom stupnja* 5 *u okolini* $x = 0$ *za funkcije* $f(x) = \cos x$ *i* $g(x) = \ln(x+1)$. *Nacrtajte grafove funkcije i grafove Taylorovih polinoma polinoma stupnja* 5.





Računalo vrijednosti funkcija računa upravo upotrebom Taylorovih polinoma visokog stupnja da bi se dobila visoka točnost.

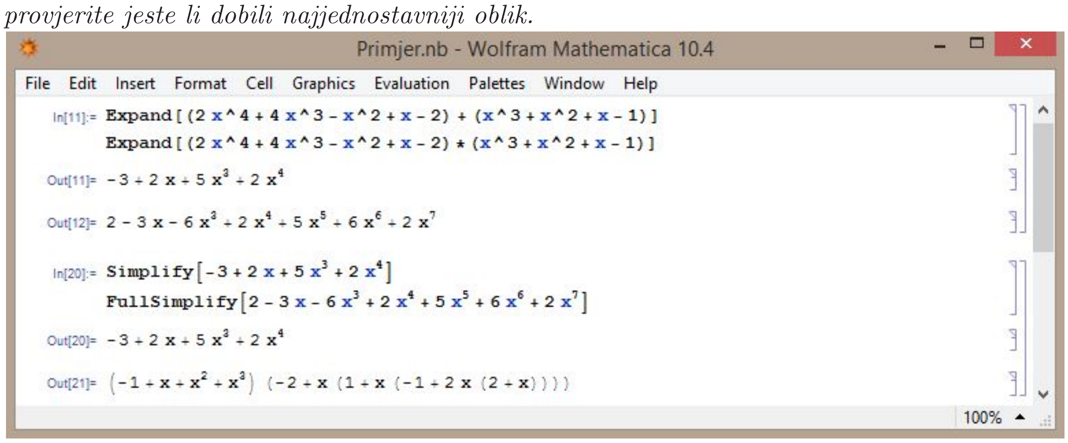
4.2 Operacije s polinomima

Polinome možemo zbrajati, oduzimati, množiti i dijeliti. Polinomi se zbrajaju i oduzimaju tako da se oduzmu ili zbroje koeficijenti uz iste potencije. Množe se tako da se svaki član jednog polinoma pomnoži sa svakim članom drugog polinoma.

Primjer 4.5 *Zbrojite i pomnožite polinome*

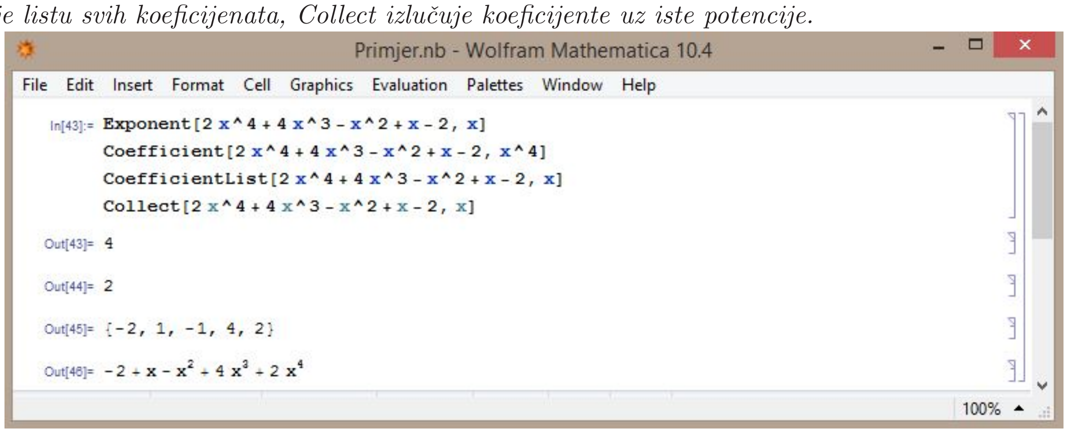
$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^4 + 4x^3 - x^2 + x - 2 \\ g(x) &= x^3 + x^2 + x - 1. \end{aligned}$$

Provjerite rezultat pomoću naredbe Expand u Wolframovoj Mathematici. Upotrijebite i naredbu Simplify da provjerite jeste li dobili najjednostavniji oblik.



Primjer 4.6 *Istražite što s polinomima rade naredbe Exponent, Coefficient, CoefficientList, Collect.*
Rješenje.

Exponent daje stupanj polinoma, Coefficient daje koeficijent uz zadanu potenciju, CoefficientList daje listu svih koeficijenata, Collect izlučuje koeficijente uz iste potencije.



Dijeljenje polinoma je malo složenija zadaća od zbrajanja i oduzimanja. Objasnit ćemo postupak dijeljenja i provjeriti nakon toga množenjem polinoma. Napišemo

$$(2x^4 + 4x^3 - x^2 + x - 2) : (x^3 + x^2 + x - 1)$$

i zaključujemo da je prvi član kvocijenta $2x$ jer je to kvocijent vodećih članova polinoma $2x^4 : x^3$. Nakon toga pomnožimo $2x$ i $x^3 + x^2 + x - 1$ i zapišimo umnožak sa suprotnim koeficijentima ispod $2x^4 + 4x^3 - x^2 + x - 2$. Za sad imamo

$$\begin{array}{l} (2x^4 + 4x^3 - x^2 + x - 2) \quad : (x^3 + x^2 + x - 1) = 2x \\ \underline{-2x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2x} \end{array}$$

Zbrojimo $2x^4 + 4x^3 - x^2 + x - 2$ i $-2x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2x$ i dobivamo $2x^3 - 3x^2 + 3x - 2$, pa ponovo dijelimo vodeće članove $2x^3$ i x^3 i dobivamo drugi član kvocijenta 2.

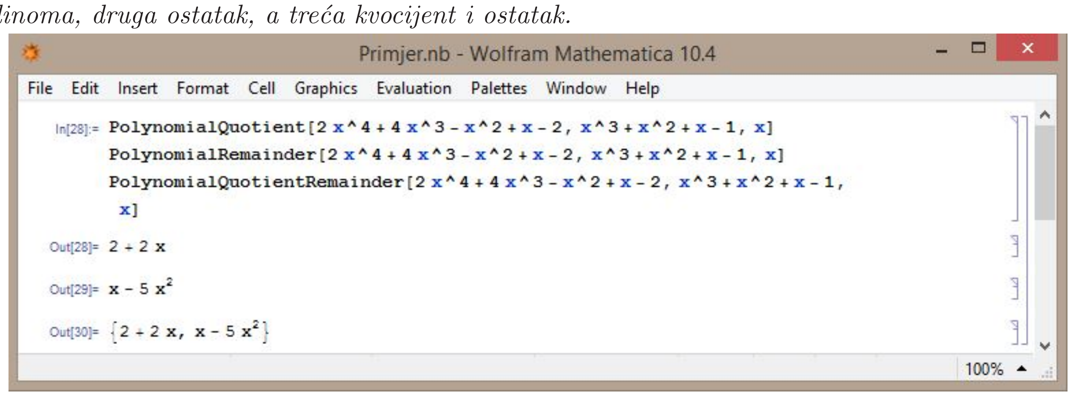
Nakon toga ponovimo postupak množenja 2 i $x^3 + x^2 + x - 1$, mijenjanja predznaka, potpisivanja ispod $2x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ i zbrajanja. Dobivamo $-5x^2 + x$ koji više ne možemo podijeliti s $x^3 + x^2 + x - 1$ jer je nižeg stupnja. Kompletni postupak izgleda

$$\begin{array}{l} (2x^4 + 4x^3 - x^2 + x - 2) \quad : (x^3 + x^2 + x - 1) = 2x + 2 \\ \underline{-2x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2x} \\ \quad 2x^3 - 3x^2 + 3x - 2 \\ \underline{-2x^3 - 2x^2 - 2x + 2} \\ \qquad -5x^2 + x \end{array}$$

pa zaključujemo da je kvocijent jednak $2x + 2$, a ostatak $-5x^2 + x$. Ovaj izračun možemo zapisati i u obliku razlomka

$$\frac{2x^4 + 4x^3 - x^2 + x - 2}{x^3 + x^2 + x - 1} = 2x + 2 + \frac{-5x^2 + x}{x^3 + x^2 + x - 1} \tag{4.2}$$

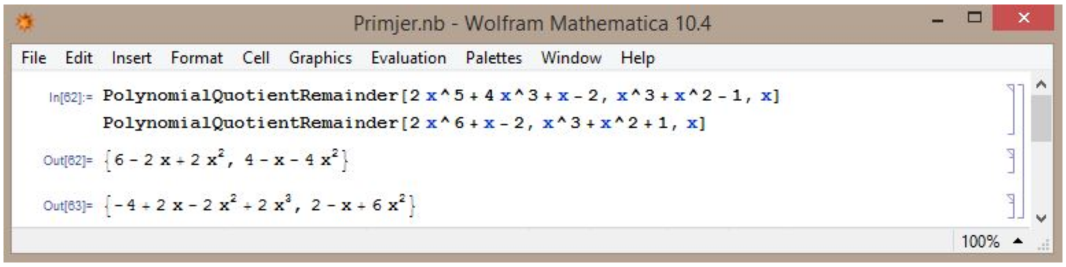
Primjer 4.7 *Provjerite račun iz prethodnog primjera pomoću računala korištenjem naredbi PolynomialQuotient, PolynomialRemainder i PolynomialQuotientRemainder. Prva naredba ispisuje kvocijent polinoma, druga ostatak, a treća kvocijent i ostatak.*



Primjer 4.8 *Podijelite polinome i provjerite rezultat pomoću Wolframove Mathematice. Napišite sve korake pri dijeljenju, kao što je gore opisano, da možete pronaći grešku ako se vaš rezultat i rezultat dobiven računalom ne poklope. Zadani su polinomi*

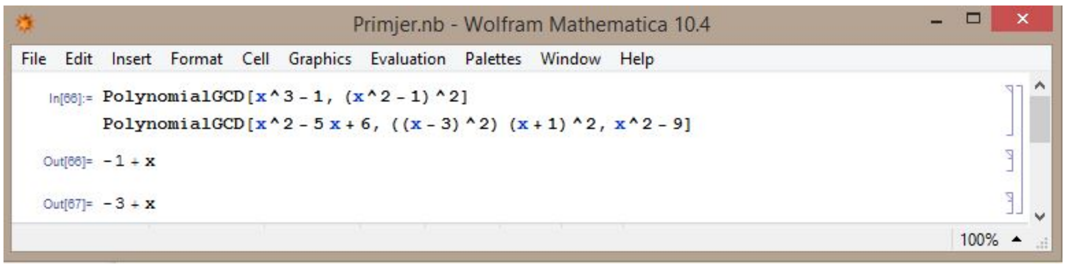
1. $f(x) = 2x^5 + 4x^3 + x - 2,\ g(x) = x^3 + x^2 - 1$

2. $f(x) = 2x^6 + x - 2,\ g(x) = x^3 + x^2 + 1.$



Primjer 4.9 *Nađite polinom najvišeg stupnja kojim su djeljivi svi zadani polinomi. Dobiveni rezultat provjerite pomoću naredbe PolynomialGCD, koja daje najveći zajednički djelitelj polinoma. Zadani su polinomi*

1. $f(x) = x^3 - 1,\ g(x) = (x^2 - 1)^2$
2. $f(x) = x^2 - 5x + 6,\ g(x) = (x - 3)^2(x + 1)^2, h(x) = x^2 - 9.$



4.3 Nultočke polinoma

Nultočke polinoma prvog stupnja su rješenja linearne jednadžbe, a nultočke polinoma drugog stupnja su rješenja kvadratne jednadžbe. Znamo da kvadratna jednadžba može imati realna ili kompleksna rješenja. Slično je s jednadžbama višeg stupnja. Već smo naglašavali da radimo s realnim funkcijama, pa nas kod proučavanja ponašanja funkcije neće zanimati kompleksna rješenja. **Realne nultočke funkcije su presjeci grafa funkcije i osi** x, pa su nam važne pri crtanju grafova funkcija. Po osnovnom teoremu algebre polinom stupnja n

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \tag{4.3}$$

ima n nultočaka, ako uračunamo realne i kompleksne nultočke i njihovu kratnost. Riješimo jedan primjer da shvatimo što to znači.

Primjer 4.10 *Koliko realnih i koliko kompleksnih nultočaka ima polinom?*

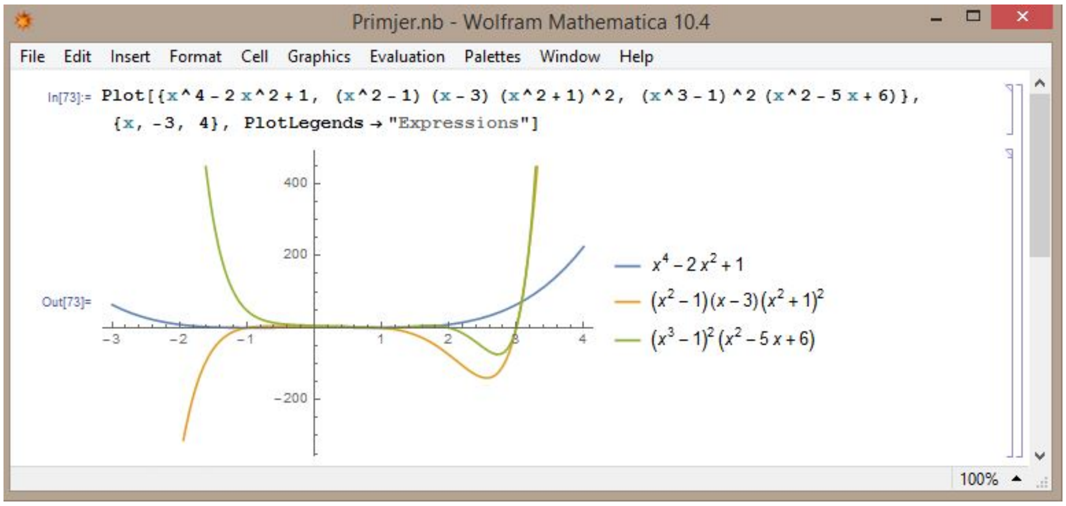
1. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$
2. $f(x) = (x^2 - 1)(x - 3)(x^2 + 1)^2$
3. $f(x) = (x^3 - 1)^2(x^2 - 5x + 6).$

Rješenje.

1. *Napišimo* $f(x) = (x^2 - 1)^2 = (x-1)^2(x+1)^2$, *pa vidimo da su* $x = 1$ *i* $x = -1$ *realna dvostruka rješenja. Polinom stupnja 4 ima ukupno 4 rješenja računajući njihovu kratnost.*

2. *Napišimo* $f(x) = (x-1)(x+1)(x-3)(x-i)^2(x+i)^2$ *pa vidimo da su* $x = 1$, $x = -1$ *i* $x = 3$ *realna rješenja. Kompleksna dvostruka rješenja su* $x = i$ *i* $x = -i$. *Polinom stupnja 7 ima ukupno 7 rješenja računajući njihovu kratnost.*

3. *Napišimo* $f(x) = (x-1)^2(x^2+x+1)^2(x-2)(x-3)$ *pa vidimo da je* $x = 1$, *dvostruko realno rješenje,* $x = 2$ *i* $x = 3$ *realna rješenja. Polinom stupnja* $(x^2+x+1)^2$ *ima 2 dvostruka kompleksna rješenja. Ukupno, polinom stupnja 8 ima ukupno 8 rješenja računajući njihovu kratnost.*



U ovom primjeru je bilo lako vidjeti nultočke jer je samo trebalo znati riješiti kvadratnu jednadžbu i napraviti rastav na faktore razlike kvadrata i razlike kubova.

Riješiti linearnu i kvadratnu jednadžbu znamo jer postoje formule za rješavanje. Za kubnu jednadžbu i jednadžbu četvrtog stupnja postoje komplicirane formule koje mi ne moramo znati i koristiti, ali programski paketi ih koriste. Wolframova Mathematica ih koristi u naredbama NSolve i NRoots. Za rješavanje jednadžbi stupnja 5 i više, ne postoje formule i programski paketi rješavaju te jednadžbe numeričkim metodama.

Primjer 4.11 *Wolframova Mathematica računa rješenja polinomijalnih jedadžbi st*< 5 *pomoću formula i naredbi Solve i Roots. Za polinomijalne jednadžbe višeg stupnja koristi numeričke algoritme koji se pokreću naredbama Solve i Roots. Iskoristi prikladnu naredbu i nađi nultočke polinoma*

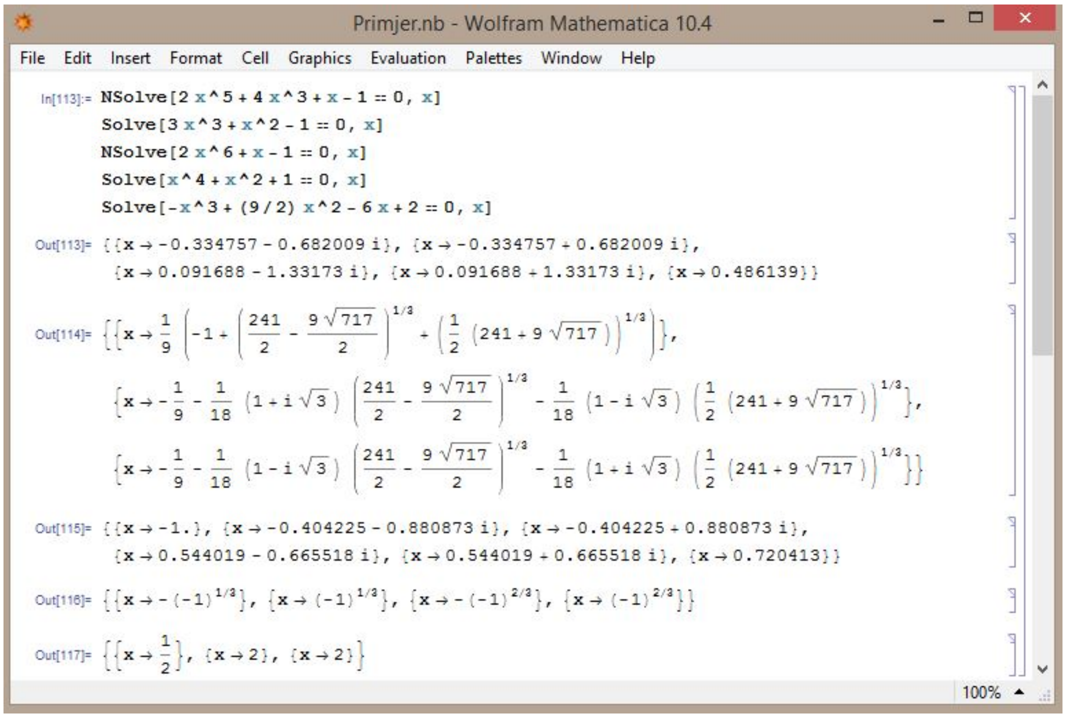
1. $f(x) = 2x^5 + 4x^3 + x - 1$

2. $f(x) = 3x^3 + x^2 - 1$

3. $f(x) = 2x^6 + x - 1$

4. $f(x) = x^4 + x^2 + 1.$

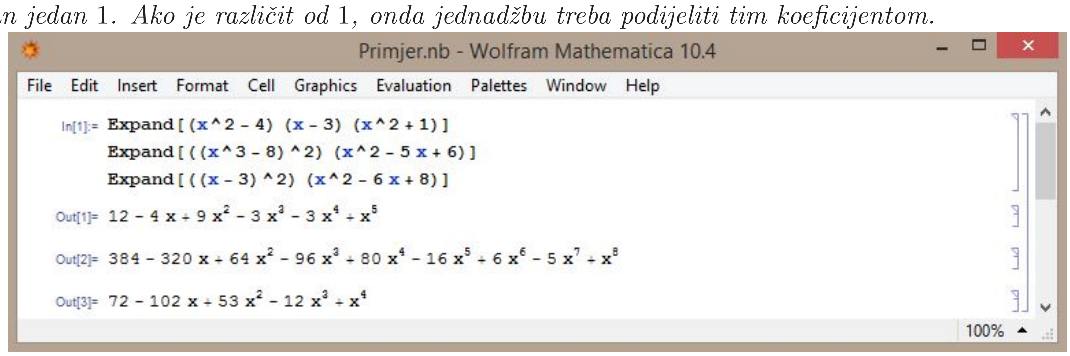
5. $f(x) = -x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 6x + 2.$



Primjer 4.12 *Pomoću naredbe Expand pomnoži faktore u polinomu*

1. $f(x) = (x^2 - 4)(x - 3)(x^2 + 1)$
2. $f(x) = (x^3 - 8)^2(x^2 - 5x + 6)$
3. $f(x) = (x - 3)(x^2 - 6x + 8)$.

Za svaki zadani polinom ispiši sva realna rješenja i napiši slobodni član, odnosno koeficijent a_0. Uočavate li vezu između realnih rjesěnja polinomijalne jednadžbe i koeficijenta a_0? Rješenje. Cjelobrojna realna rješenja polinomijalne jednadžbe su djelitelji od a_0. To vrijedi za polinome kojima je koeficijent uz vodeći član jedan 1. Ako je različit od 1, onda jednadžbu treba podijeliti tim koeficijentom.



Primjer 4.13 *Nađite cjelobrojna rješenja polinomijalnih jednadžbi*

1. $2x^3 - 12x^2 - 8x + 48 = 0$

2. $8x^5 - 40x^4 + 48x^3 - 8x^2 + 40x - 48 = 0$

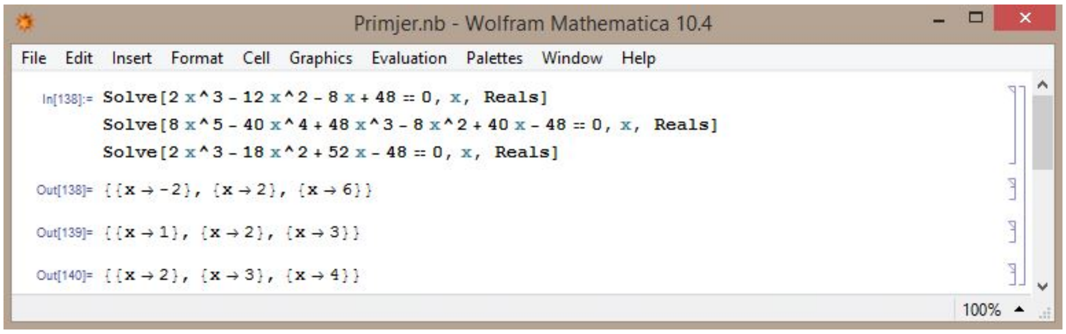
3. $2x^3 - 18x^2 + 52x - 48 = 0.$

Cjelobrojna rješenja su

1. $-2, 2, 6$

2. $1, 2, 3$

3. $2, 3, 4.$

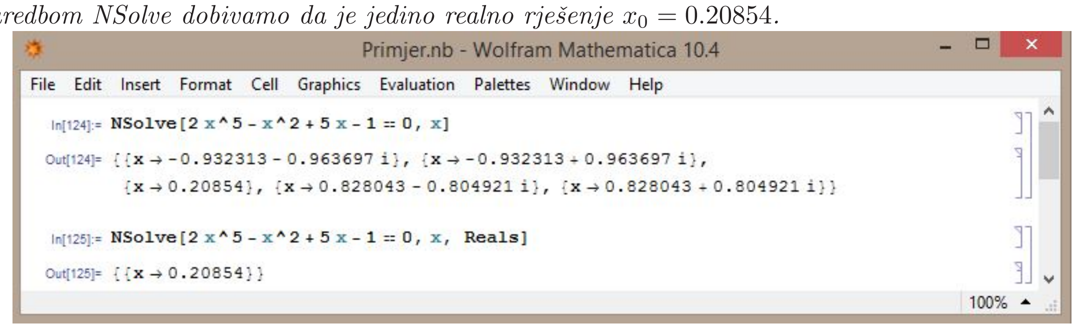


Pokušajmo u grubo opisati jednu ideju za numerički pristup.

Primjer 4.14 *Rješavajući jednadžbu*

$$2x^5 - x^2 + 5x - 1 = 0$$

naredbom NSolve dobivamo da je jedino realno rješenje $x_0 = 0.20854$.



Vidjet ćemo da možemo približno doći do tog rješenja bez računala, samo uz pomoć običnog kalkulatora. Kalkulator ne zna nikakve algoritme i služi nam za računanje osnovnih računskih operacija. Označimo

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^5 - x^2 + 5x - 1 \\ f_1(x) &= 2x^5 \\ f_2(x) &= x^2 - 5x + 1. \end{aligned}$$

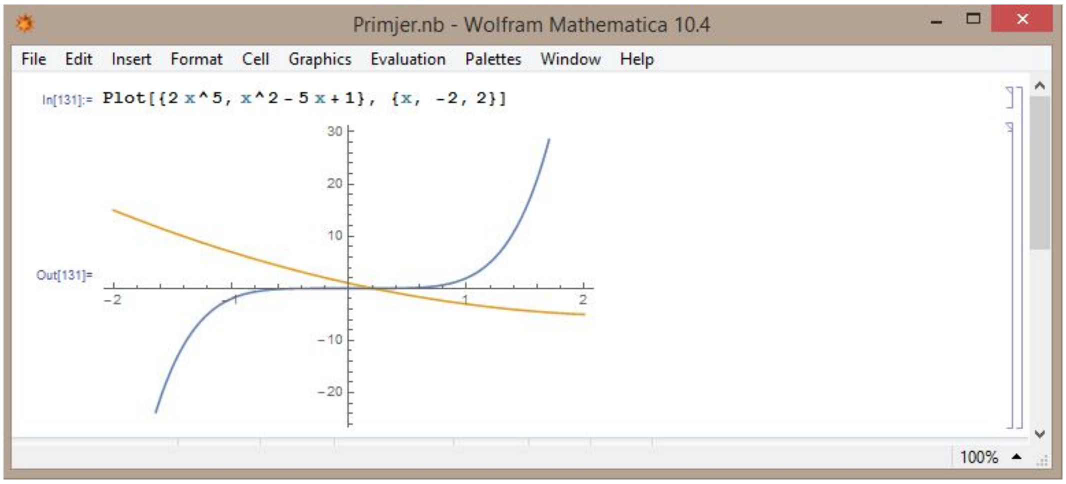
Crtamo grafove funkcija f_1 *i* f_2*, pa vidimo da se grafovi sijeku za neki pozitivni* x_0*. Potražimo je! Funkcija* f *ima naultočku između brojeva* a *i* b *ako vrijedi da je* $f(a) > 0$ *i* $f(b) < 0$ *ili obrnuto. Potražimo takve brojeve* a *i* b*! Vrijedi*

$$\begin{aligned} f(0) &= -1 \\ f(1) &= 4. \end{aligned}$$

Krenimo metodom raspolavljanja smanjivati interval $(0,1)$ *u kojem se nalazi nultočka* x_0. *Računamo*

$$\begin{aligned}
f(0.5) &= 1.3125 \text{ pa zaključujemo da je nultočka u intervalu } (0,0.5)\\
f(0.25) &= 0.189453 \text{ pa zaključujemo da je nultočka u intervalu } (0,0.25)\\
f(0.125) &= -0.390564 \text{ pa zaključujemo da je nultočka u intervalu } (0.125,0.25)\\
f(0.1875) &= -0.0971928 \text{ pa zaključujemo da je nultočka u intervalu } (0.1875,0.25) \quad \ldots
\end{aligned}$$

Na ovaj način možemo nastaviti postupak koji vodi k uskom intervalu u kojem leži nultočka $x_0 = 0.20854$.



Primjer 4.15 *Riješite jednadžbu posupkom opisanim u primjeru 4.14*

$$x^7 - x^2 + 3x - 1 = 0.$$

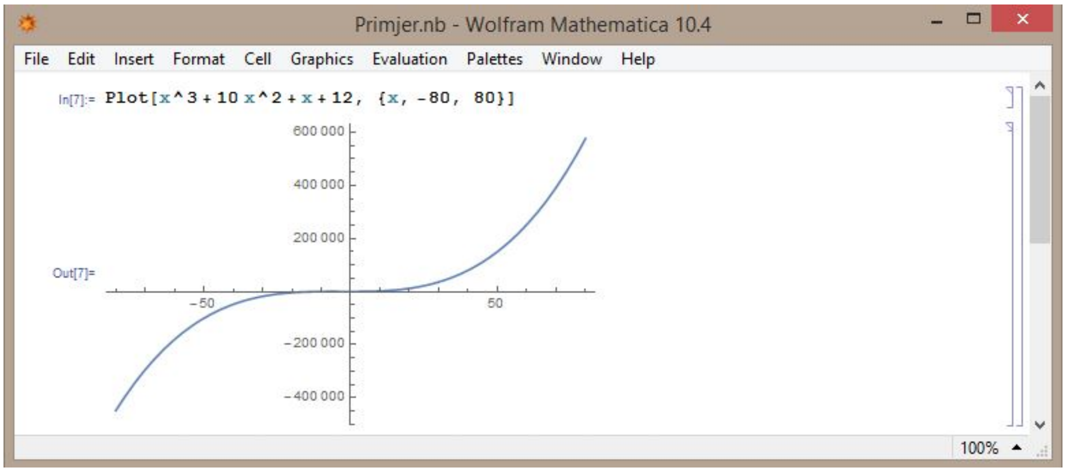
Neka vaš rezultat bude interval čija duljina je manja od 0.1.
Rješenje je 0.381441. *To je jedino realno rješenje jednadžbe.*

4.4 Graf polinoma

Graf polinoma je jednostavan i zapravo je jedini problem točno određivanje položaja nultočaka. Kad je varijabla x jako velika, vrijednost polinoma je isto jako velika, ali može biti pozitivna ili negativna. Polinom

$$f(x) = x^3 + 10x^2 + x + 12$$

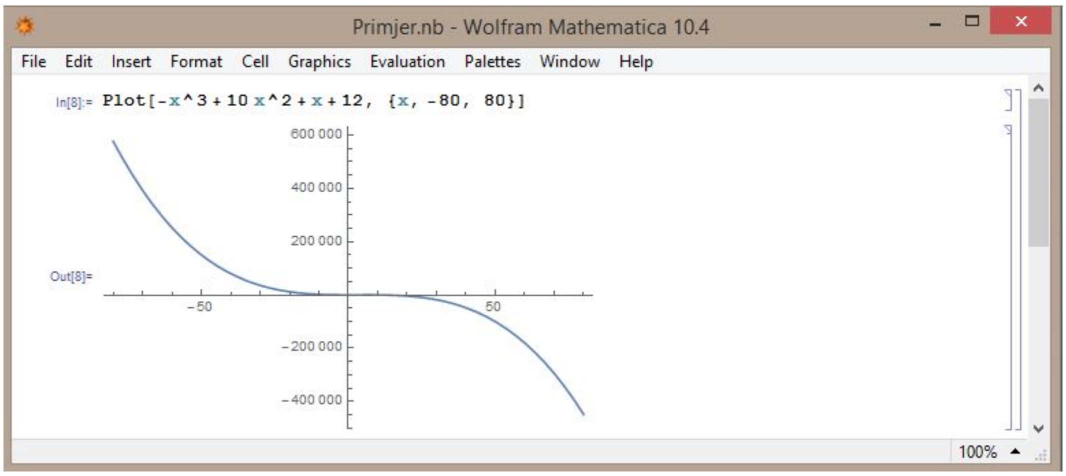
ide u beskonačnost kad x ide u beskonačnost. Kad x ide u minus beskonačno, tada vrijednost polinoma ide u minus beskonačno.



Polinom

$$f(x) = -x^3 + 10x^2 + x + 12$$

ide u minus beskonačno kad x ide u beskonačnost. Kad x ide u minus beskonačno, tada vrijednost polinoma ide u beskonačnost.

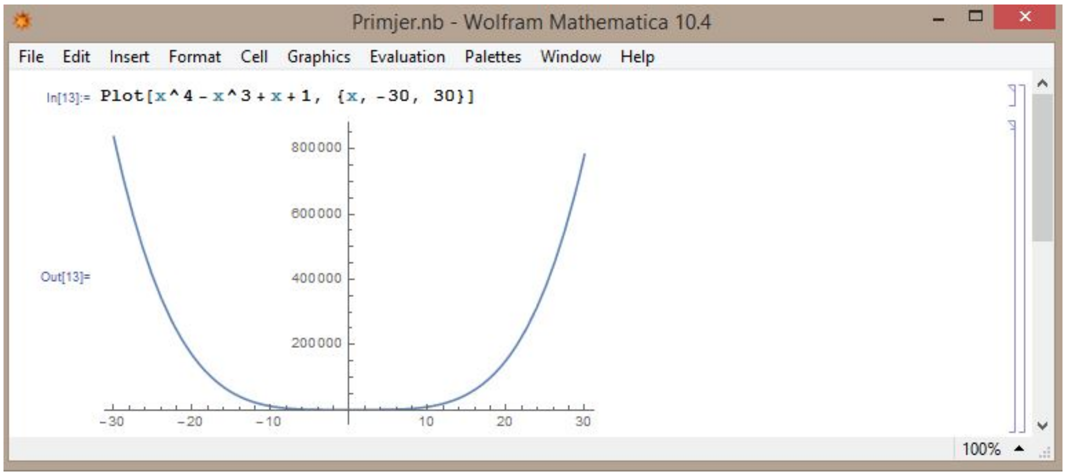


Svi polinomi neparnih stupnjava se ponašaju na ovaj način. S jedne strane idu u beskonačnost, a s druge u minus beskonačnost. Dakle, postoje brojevi a i b tako da vrijedi da je $f(a) > 0$ i $f(b) < 0$ ili obrnuto. Posljedica je da polinomi neparnog stupnja imaju barem jednu realnu nultočku! Ne postoji polinom neparnog stupnja kojemu su sve nultočke kompleksne.

Polinom parnog stupnja

$$f(x) = x^4 - x^3 + x + 1$$

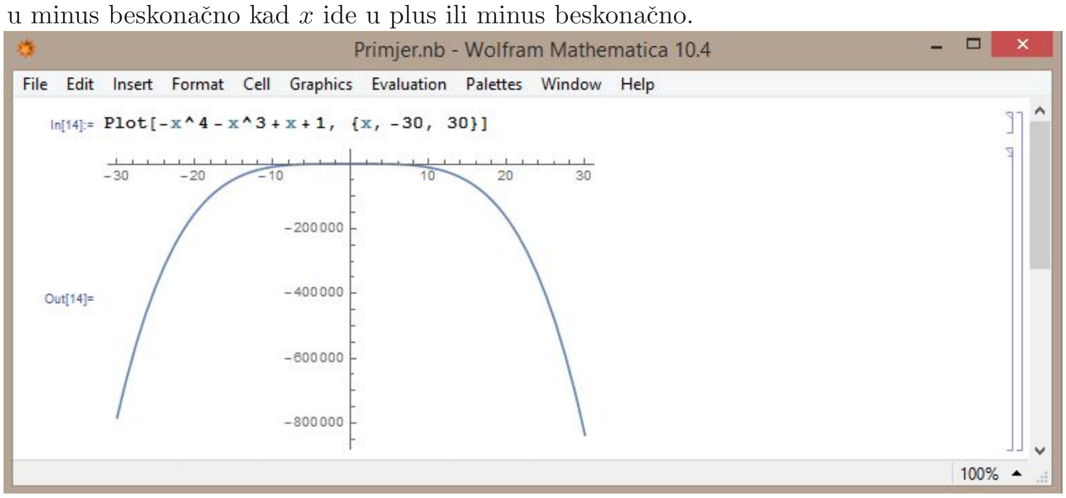
ide u beskonačnost kad x ide u plus ili minus beskonačno.



Polinom parnog stupnja

$$f(x) = -x^4 - x^3 + x + 1$$

ide u minus beskonačno kad x ide u plus ili minus beskonačno.

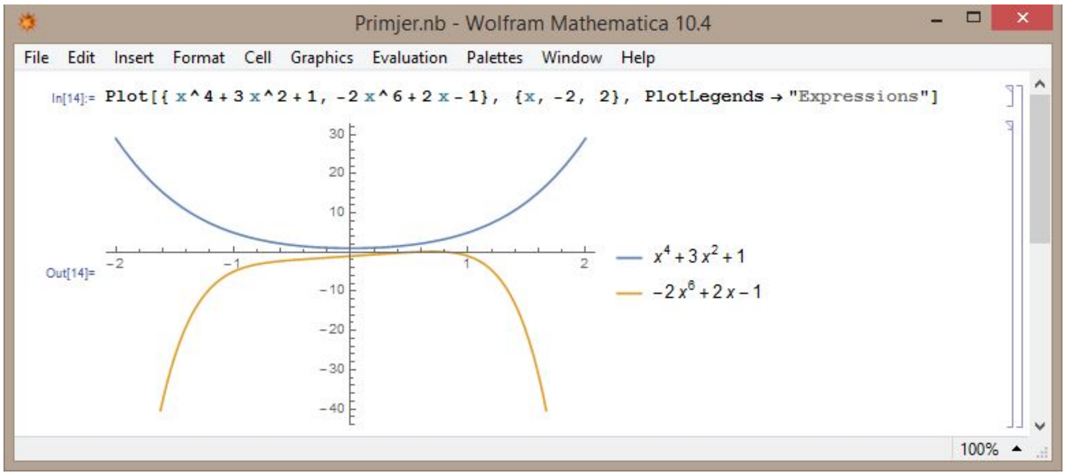


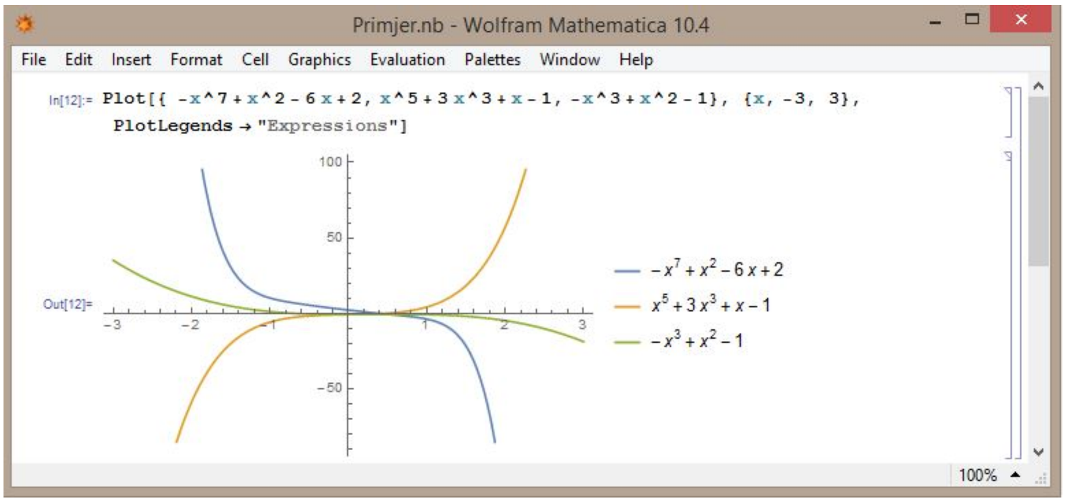
Uočimo da se polinom ponaša u beskonačnosti kao njegova vodeća potencija. Ako ona ima pozitivan koeficijent, onda polinom ide u beskonačnost kad x ide u beskonačnost. Za negativan koeficijent ide u minus beskonačno.

Polinom parnog stupnja može imati sve nultočke kompleksne, sve nultočke realne ili jedne i druge.

Primjer 4.16 *Nacrtajte grafove polinoma i iz grafa komentirajte ponašanje u beskonačnosti i broj realnih nultočaka*

1. $f(x) = x^5 + 3x^3 + x - 1$
2. $f(x) = -x^3 + x^2 - 1$
3. $f(x) = -2x^6 + 2x - 1$
4. $f(x) = x^4 + 3x^2 + 1.$
5. $f(x) = -x^7 + x^2 - 6x + 2.$





Primijetimo da polinomi imaju na svom grafu točke koji možemo smatrati vrhovima brijega i točke koje su dolovi. Te točke nazivamo **maksimumima i minimumima funkcije**, jednim imenom to su ekstremi funkcije. Ako krenemo iz maksimuma u lijevo ili u desno, spuštat ćemo se po grafu funkcije. Na primjer funkcija $f(x) = -x^2$ čiji graf je parabola okrenuta prema dolje ima maksimum u točki $(0, 0)$. Ako krenemo iz minimuma u lijevo ili u desno, penjat ćemo se po grafu funkcije. Na primjer funkcija $f(x) = x^2$ čiji graf je parabola ima minimum u točki $(0, 0)$.

Primjer 4.17 *Za grafove iz prethodnog primjera odredite koliko minimuma i maksimuma imaju. Sami nacrtajte grafove, uzimajte manje intervale i tako se pomičite duž osi x tražeći minimume i maksimume.*
Rješenje.
Redom polinomi iz primjera 4.16 imaju jedan minimum, jedan maksimum, sljedeća dva polinoma nemaju ekstrema, a zadnji ima jedan minimum i jedan maksimum.

4.5 Racionalna funkcija

Racionalna funkcija je funkcija oblika

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

gdje su P, Q polinomi. Kad smo učili kako podijeliti dva polinoma, vidi izraz (4.2), zapravo smo računali s racionalnom funkcijom

$$\frac{2x^4 + 4x^3 - x^2 + x - 2}{x^3 + x^2 + x - 1}$$

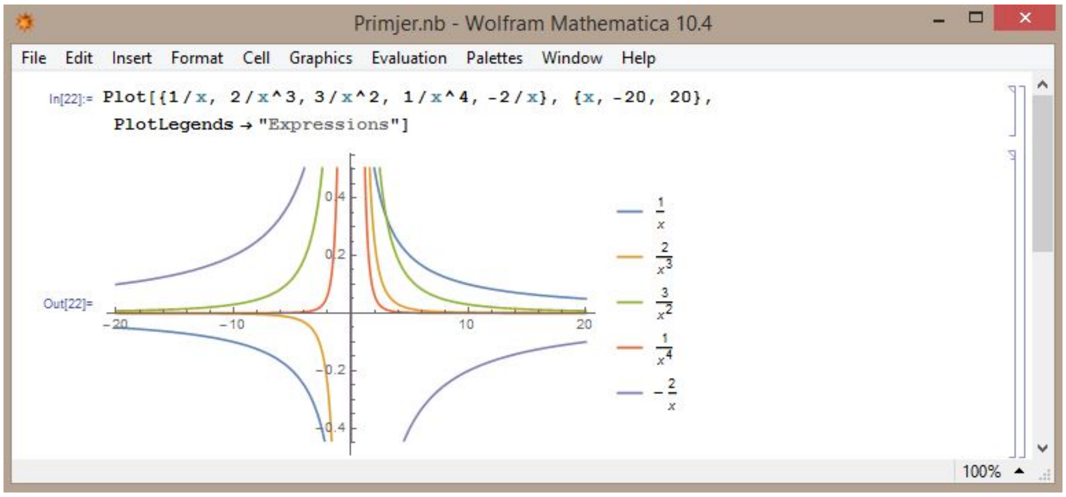
koju smo napisali u drugom obliku kao sumu polinoma prvog stupnja i racionalne funkcije

$$2x + 2 + \frac{-5x^2 + x}{x^3 + x^2 + x - 1}.$$

Domena racionalne funkcije je skup realnih brojeva iz kojeg mičemo realne nultočke nazivnika.

Primjer 4.18 *Pomoću Wolframove Mathematice nacrtajte grafove racionalnih funkcija*

1. $f(x) = \frac{1}{x}$
2. $f(x) = \frac{2}{x^3}$
3. $f(x) = \frac{3}{x^2}$
4. $f(x) = \frac{1}{x^4}$
5. $f(x) = \frac{-2}{x}$

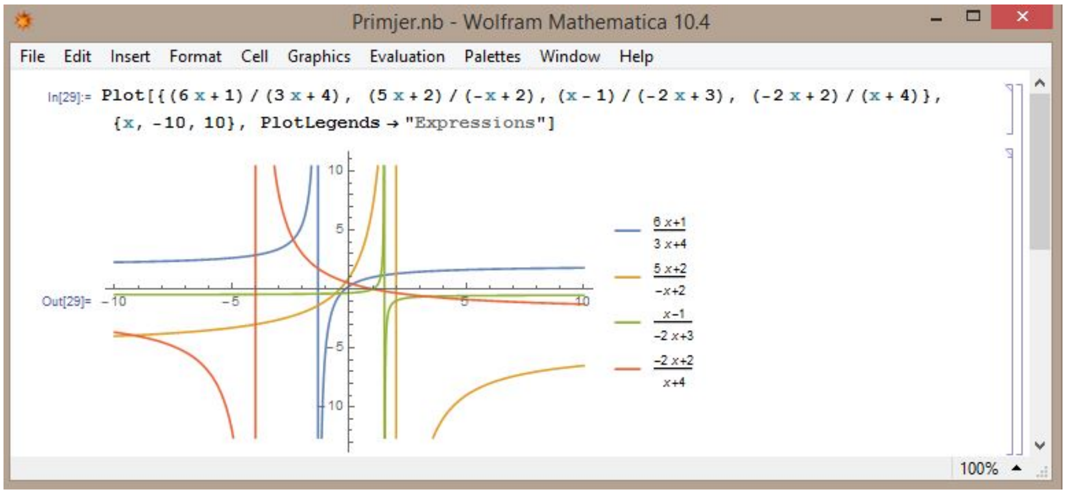


Primjer 4.19 *Koristeći prethodni primjer zaključite kako izgleda graf funkcije $f(x) = \frac{c}{x^k}$, ovisno o tome je li $c \in \mathbb{R}$ pozitivan ili negativan broj i ovisno o tome je li $k \in \mathbb{N}$ paran ili neparan broj.*

Primijetite da se ovi grafovi funkcija za x blizu nule približavaju osi y, a kad je varijabla x ide u $\pm\infty$ onda se približavaju osi x. Za ove grafove $x = 0$ je vertikalna asimptota, a $y = 0$ horizontalna asimptota. Ne moraju asimptote uvijek biti baš koordinatne osi. Općenito, **vertikalna ili okomita asimptota** je pravac $x = c$, $c \in \mathbb{R}$ kojemu se gaf funkcije približava. Vertikalne asimptote se javljaju u točkama koje nisu u domeni funkcije, ako nula u ovim primjerima. **Horizontalna ili vodoravna asimptota** je pravac $y = c$, $c \in \mathbb{R}$ kojemu se gaf funkcije približava kad x ide u $\pm\infty$.

Primjer 4.20 *Pomoću Wolframove Mathematice nacrtajte grafove racionalnih funkcija*

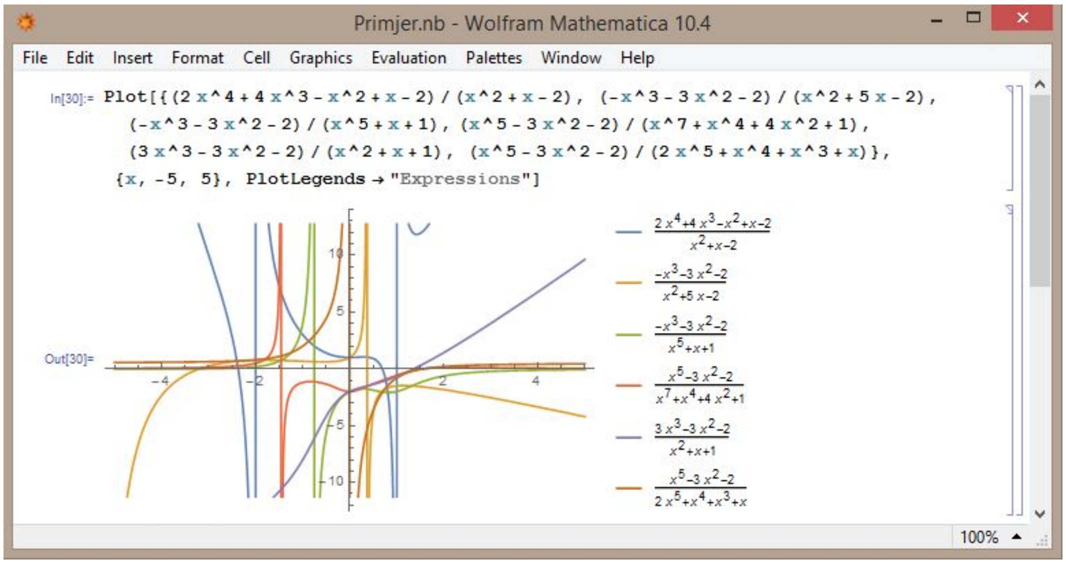
1. $f(x) = \frac{6x+1}{3x+4}$
2. $f(x) = \frac{5x+2}{-x+2}$
3. $f(x) = \frac{x-1}{-2x+3}$
4. $f(x) = \frac{-2x+2}{x+4}$



Primjer 4.21 *Koristeći prethodni primjer zaključite kako izgleda graf funkcije $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, ovisno o tome kakvi su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Koje točke nisu u domeni funkcije? Koje nultočke ima funkcija? Kako se funkcije ponaša za beskonačno velike x?*
Rješenje.
Vertikalna asimptota $x = \frac{-d}{c}$, horizontalna asimptota $y = \frac{a}{c}$.

Primjer 4.22 *Pomoću Wolframove Mathematice nacrtajte grafove racionalnih funkcija i zaključite kako se ponašaju u beskonačnosti ovisno o stupnju polinoma u brojniku i nazivniku*

1. $f(x) = \frac{2x^4+4x^3-x^2+x-2}{x^2+x-2}$
2. $f(x) = \frac{-x^3-3x^2-2}{x^2+5x-2}$
3. $f(x) = \frac{-x^3-3x^2-2}{x^5+x+1}$
4. $f(x) = \frac{x^5-3x^2-2}{x^7+x^4+4x^2+1}$
5. $f(x) = \frac{3x^3-3x^2-2}{x^2+x+1}$
6. $f(x) = \frac{x^5-3x^2-2}{2x^5+x^4+x^3+x}$



Primjer 4.23 *Koristeći prethodni primjer zaključite kako se graf funkcije* $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ *ponaša u beskonačnosti, ovisno o stupnju polinoma* P *i* Q.

Rješenje.

Ide u nulu ako je nazivnik višeg stupnja nego brojnik, ako je suprotno onda ide u beskonačno. Ako su brojnik i nazivnik istog stupnja onda je horizontalna asimptota $y = c$, *gdje je* c *kvocijent vodećih koeficijenata brojnika i nazivnika.*

4.6 Rastav funkcije na parcijalne razlomke

Rastav racionalne funkcije $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ na parcijalne razlomke je važan postupak koji se često pojavljuje kod računanja s racionalnim funkcijama. Opisat ćemo postupak u 4 koraka.

1. Ako je stupanj $P \geq$ stupanj Q onda najprije podijelimo polinome, ako nije, onda idemo odmah na korak 3.
2. Dobivamo oblik kao u formuli 4.2, racionalna funkcija je jednaka sumi polinoma i racionalne funkcije kojoj je stupanj brojnika $<$ stupnja nazivnika,
3. Nazivnik racionalne funkcije rastavimo na faktore. Faktori mogu biti linearni i kvadratni koji nemaju realnih rješenja.
4. Racionalnu funkciju kojoj je stupanj brojnika manji od stupnja nazivnika izjednačimo sa sumom racionalnih funkcija kojima su nazivnici faktori iz nazivnika. Svaki nazivnik se javlja do one kratnosti koja se pojavljuje u faktorizaciji. Brojnik je konstanta ako nazivnik ima realnu nultočku, a polinom prvog stupnja ako nema realne nultočke.

Pogledajmo to na primjerima.

Primjer 4.24 *Rastavimo na parcijalne razlomke racionalnu funkciju*

$$f(x) = \frac{x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}.$$

1. *Dijeljenjem polinoma dobivamo*

$$\frac{x^4-2x^3-4x^2-1}{x^2-5x+6}=x^2+3x+5+\frac{7x-31}{x^2-5x+6}.$$

2. *Faktoriziramo nazivnik i dobivamo*

$$\frac{x^4-2x^3-4x^2-1}{x^2-5x+6}=x^2+3x+5+\frac{7x-31}{(x-2)(x-3)}.$$

3. *Postavimo jednakost*

$$\frac{7x-31}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}.$$

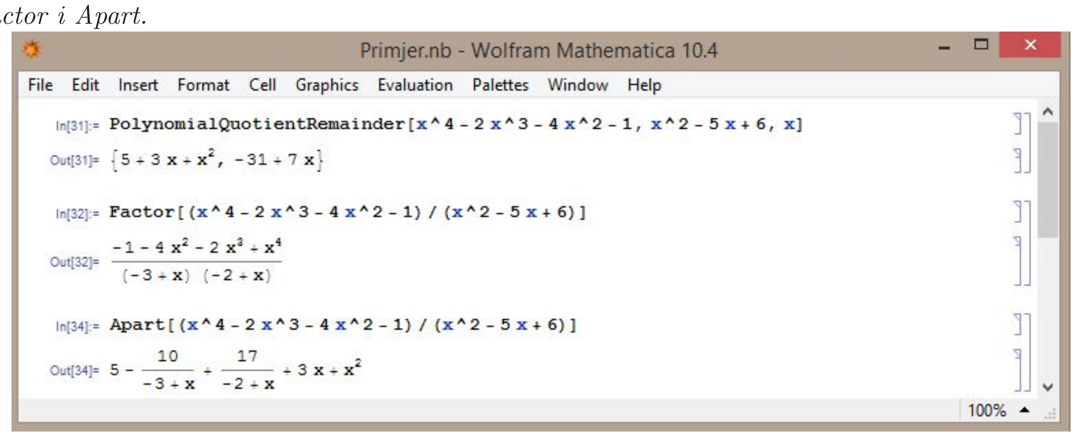
Množenjem i izjednačavanjem istih koeficijenata uz iste potencije dobivamo

$$A=17,\ \ B=-10,$$

pa je rastav na parcijalne razlomke jednak

$$\frac{x^4-2x^3-4x^2-1}{x^2-5x+6}=x^2+3x+5+\frac{17}{x-2}-\frac{10}{x-3}.$$

Primjer 4.25 *Provjerite račun iz prethodnog primjera pomoću naredbi PolynomialQuotientRemainder, Factor i Apart.*



Primjer 4.26 *Rastavimo na parcijalne razlomke racionalnu funkciju*

$$f(x)=\frac{x^4-2x^3-4x^2-1}{(2+x)(1+x)^2(x^2+1)}.$$

1. *Ne trebamo dijeliti polinome, jer je stupanj brojnika manji od stupnja nazivnika, a i nazivnik je već faktoriziran.*

2. *Postavimo jednakost*

$$\frac{x^4-2x^3-4x^2-1}{(2+x)(1+x)^2(x^2+1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(1+x)^2}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)}.$$

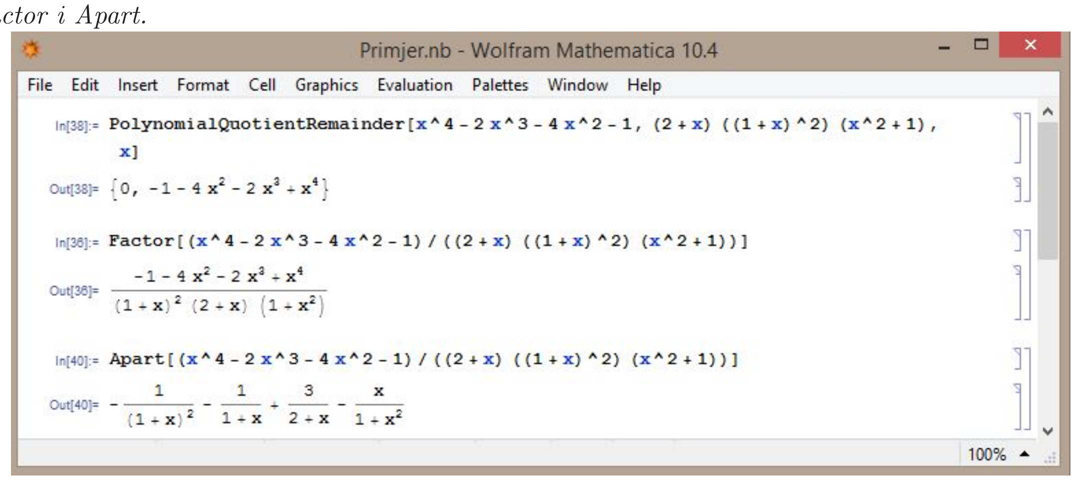
Množenjem i izjednačavanjem istih koeficijenata uz iste potencije dobivamo

$$A = 3, \; B = -1, \; C = -1, \; D = -1, \; E = 0$$

pa je rastav na parcijalne razlomke jednak

$$\frac{x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 1}{2 + x)(1+x)^2(x^2+1)} = \frac{3}{x+2} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{x}{(x^2+1)}.$$

Primjer 4.27 *Provjerite račun iz prethodnog primjera pomoću naredbi PolynomialQuotientRemainder, Factor i Apart.*



Primjer 4.28 *Pomoću Wolframove Mathematice rastavite racionalne funkcije na parcijalne razlomke*

1. $f(x) = \frac{2x^4+4x^3-x^2+x-2}{x^2+x-2}$
2. $f(x) = \frac{-x^3-3x^2-2}{x^2+5x-2}$
3. $f(x) = \frac{-x^2-3x^2-2}{x^5+x+1}$
4. $f(x) = \frac{x^5-3x^2-2}{x^4-x^2-x-1}$
5. $f(x) = \frac{3x^2-3x^2-2}{x^2+x+1}$
6. $f(x) = \frac{x^5-3x^2-2}{x^3+2x^2+x}$.

4.7 Neke jednostavne iracionalne funkcije

Iracionalne funkcije su funkcije koje sadrže korijene i najjednostavnije takve funkcije su

$$f(x) = x^q, \; \text{gdje je } q \text{ racionalan broj.}$$

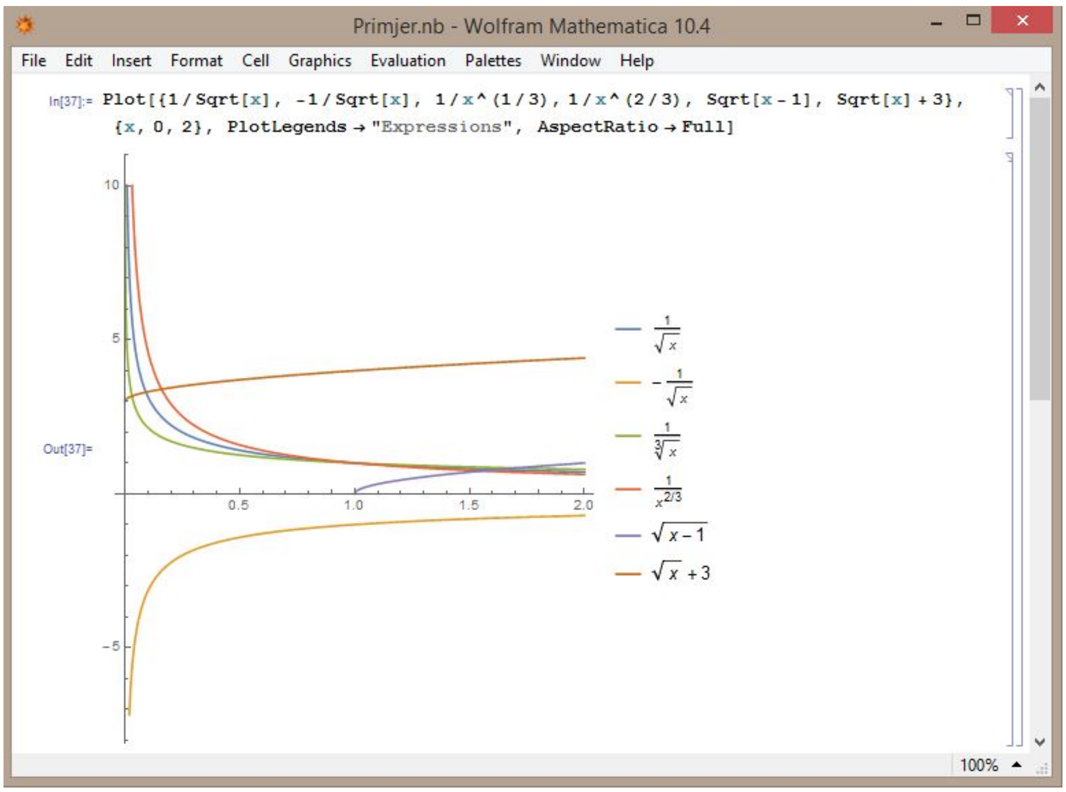
Ako je $q = \frac{a}{b}$ onda je

$$f(x) = \sqrt[b]{x^a}.$$

Kod uvođenja inverznih funkcija za potencije, već smo se bavili funkcijama ovog tipa za $a > 0$. Znamo da je domena funkcije koja je parni korijen skup $\mathbb{R}_0^+$. Za neparni korijen to je cijeli skup realnih brojeva. Podsjetimo se grafova korijena koje smo već spominjali, podsjetimo se pomicanja grafova duž osi x i y, te istražmo kako izgledaju grafovi ako je $a < 0$. Za $a < 0$ se pojavljuje nazivnik, pa treba paziti da se nultočku nazivnika izbaci iz domene.

Primjer 4.29 *Odredite domenu i sliku funkcije, te pomoću Wolframove Mathematice nacrtajte grafove iracionalnih funkcija*

1. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
2. $f(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}}$
3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$
4. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$
5. $f(x) = \sqrt{x-1}$
6. $f(x) = \sqrt{x} + 3$.



4.8 Modeliranje polinomima, racionalnim i iracionalnim funkcijama

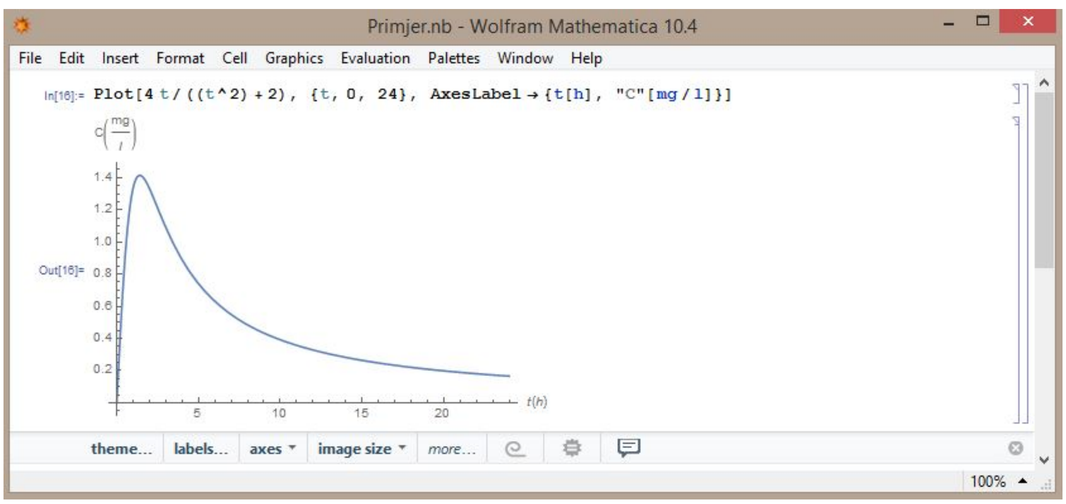
Primjer 4.30 *Zadana je funkcija za određivanje koncentracije određene vrste lijeka u krvi u nekom vremenu t koje kreće od trenutka $t = 0$:*

$$C(t) = \frac{4t}{t^2 + 2}.$$

1. *Izračunajte koncentraciju lijeka u krvi 6 sati nakon konzumiranja lijeka.*
2. *Izračunajte koncentraciju lijeka u krvi 21 sat nakon konzumiranja lijeka.*
3. *Odredite domenu i sliku funkcije, te komentirajte.*
4. *Nacrtajte graf funkcije uz pomoć računala te komentirajte njezin rast/pad.*
5. *Ako koncentracija lijeka u krvi pri manjem operacijskom zahvatu kod psa treba iznositi 2%, u kojem vremenu će biti ostvarena ta vrijednost?*

Rješenje.

1. $C(6) = \frac{4\cdot 6}{6^2+2} = \frac{24}{38} = \frac{12}{19}$ mg/l.
2. $C(21) = \frac{4\cdot 21}{21^2+2} = \frac{84}{443}$ mg/l.
3. *Matematički, domena se određuje iz uvjeta da je $t^2 + 2 \neq 0$. S obzirom na to da je vrijeme t realan broj domena bi bila $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Ipak, vrijeme je $t \geq 0$, pa je smisleno promatrati funkciju s domenom $\mathbb{R}_0^+$. Slika funkcije je $\mathbb{R}^+$.*
4. *Iz (1) vidimo da funkcija prvo raste na intervalu $[0, 1.5]$, a zatim počinje padati na intervalu $[1.5, \infty)$.*



5. *Matematički, trebamo riješiti jednadžbu $C(t) = \frac{4t}{t^2+2} = 0.02$. Dakle,*
   $\frac{4t}{t^2+2} = 0.02$
   $4t = 0,02 \cdot (t^2 + 2)$
   $0.02t^2 - 4t + 0.04 = 0$
   $t_{1,2} = 100 \pm \sqrt{9998}$

Primjer 4.31 *Odredite prosječni trošak proizvodnje LED žarulja.*

1. *Ako fiksni troškovi iznose* 1000 *kuna, a cijena izrade jedne žarulje* 5 *kuna, izračunajte koliko iznosi prosječni trošak proizvodnje* 500 *LED žarulja?*

2. *Izvedite model za određivanje cijene izrade žarulja.*

3. *Definirajte fiksni i varijabilni trošak.*

4. *Nacrtajte graf funkcije.*

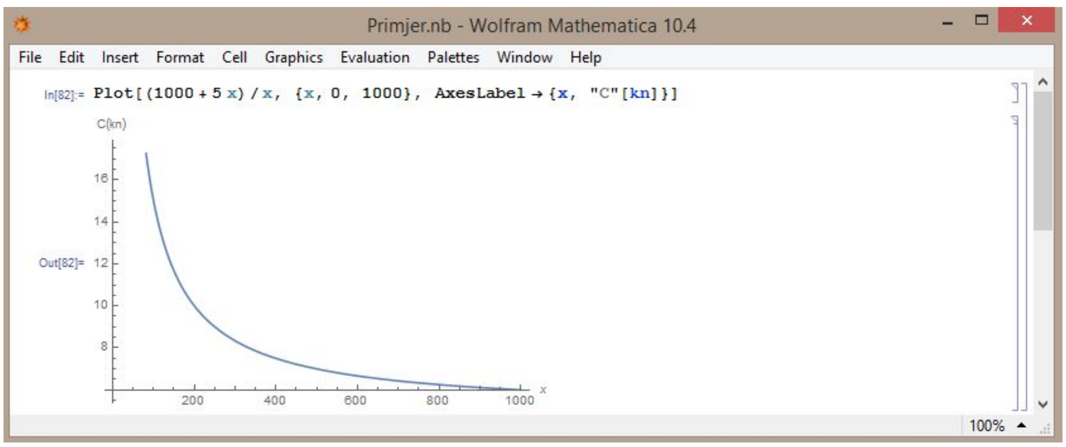
Rješenje.

1. *Prosječni trošak proizvodnje iznosi* $\bar{C}(500) = \frac{1000+5\cdot 500}{500} = 7$ *kuna.*

2. *Neka je* x *broj žarulja. Tada je prosječan trošak proizvodnje jednak* $\bar{C}(x) = \frac{1000+5\cdot x}{x}$.

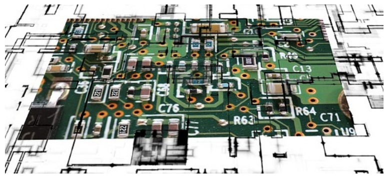
3. *Funkcija ukupnog troška je* $C(x) = 1000 + 5 \cdot x$*. Fiksni trošak je trošak koji postoji i kad nema proizvodnje. Dakle, fiksni trošak je* $C(0) = 1000 + 5 \cdot 0 = 1000$*. Varijabilni trošak je ukupan trošak umanjen za fiksni trošak. Dakle, varijabilan trošak je* $VC(x) = C(x) - C(0) = 1000 + 5 \cdot x - 1000 = 5x$.

4. *Graf funkcije*



Primjer 4.32 *Tvrtka koja proizvodi računala utvrdila je da u prosjeku novi zaposlenik može sastaviti* $N(t)$ *komponenti računala dnevno nakon* t *dana provedenog na probnom roku. Funkcija koja to prikazuje je:*

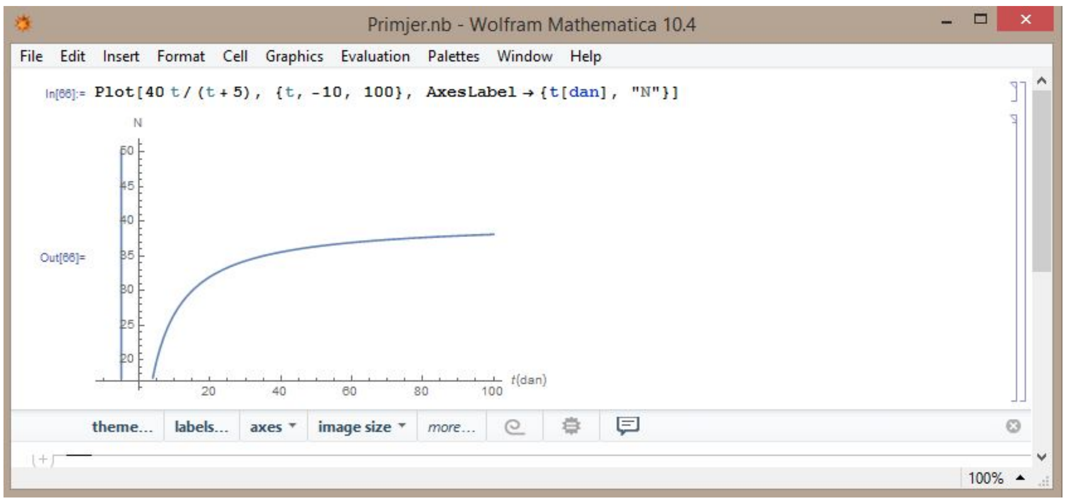
$$N(t) = \frac{40t}{t+5}$$



1. *Izračunajte koliko komponenti zaposlenik može sastaviti u* 30 *dana.*
2. *Ako je potrebno sastaviti* 30 *komponenti u što kraćem roku, koliko će trebati zaposleniku vremena?*
3. *Nacrtajte graf funkcije te komentirajte. Odredite vertikalnu i horizontalnu asimptotu.*

Rješenje.

1. $N\left(30\right) = \frac{40 \cdot 30}{30+5} = 34.29 \approx 34$
2. $30 = \frac{40t}{t+5}$
   $30\left(t+5\right) = 40t$
   $30t + 150 - 40t = 0$
   $-10t = -150$
   $t = 15$
3. *Graf funkcije*



Primjer 4.33 *Zadana je funkcija troškova odstranjivanja x% štetne tvari iz proizvodnje, $C(x)$ u tisućama kuna:*

$$C(x) = \frac{20x}{104 - x}$$

1. *Izračunajte troškove ukoliko se želi odstraniti* 80% *štetne tvari.*

2. *Izračunajte troškove ukoliko se želi odstraniti* 100% *štetne tvari.*

3. *Odredite domenu i sliku funkcije, te komentirajte.*

4. *Ukoliko poduzeće ima u svom budžetu isplanirano* 300 *tisuća kuna koje može potrošiti za odstranjivanje štetne tvari, koliki je maksimalan postotak štetne tvari moguće odstraniti?*

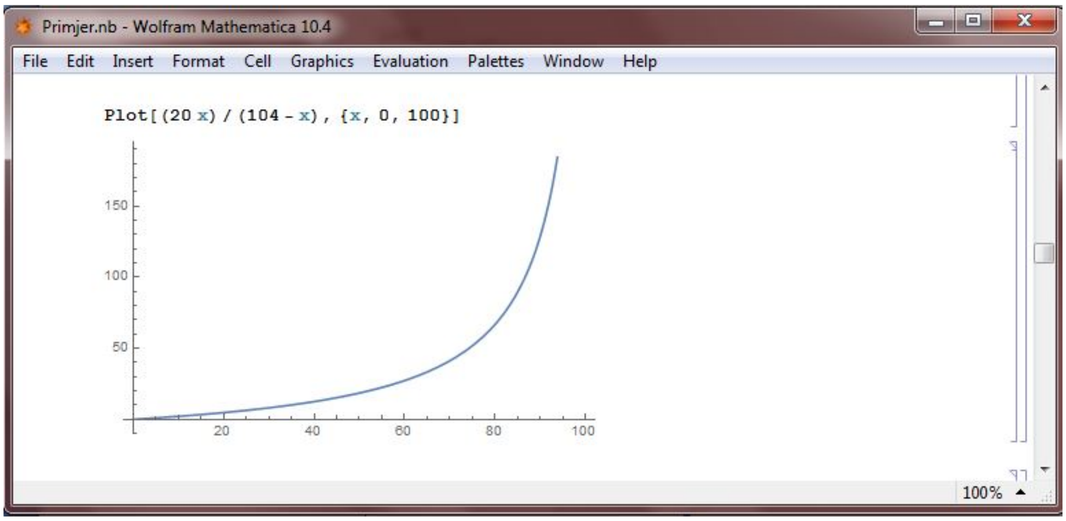
5. *Nacrtajte graf funkcije u Wolframovoj Mathematici, te komentirajte njezin rast.*

Rješenje.

1. $C(80) = \frac{20 \cdot 80}{104-80} = \frac{1600}{24} = 66.67$ *tisuća kuna*

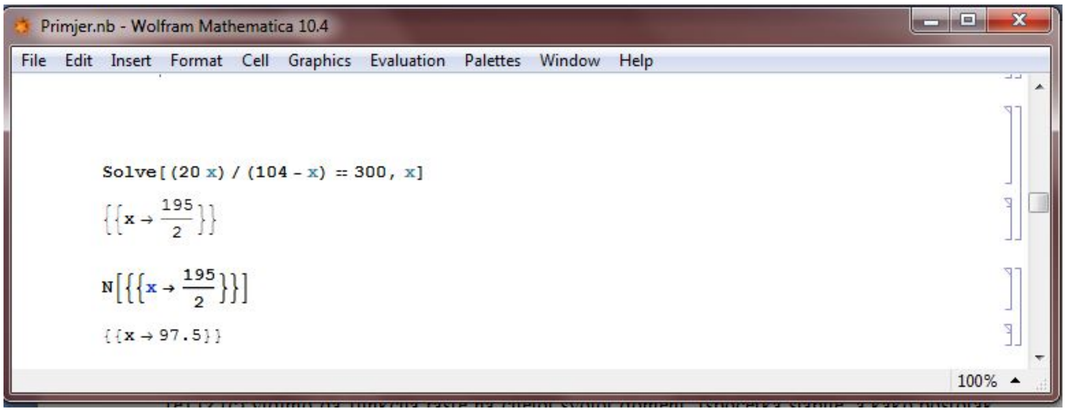
2. $C(100) = \frac{20 \cdot 100}{104-100} = \frac{2000}{4} = 500$ *tisuća kuna*

3. *Matematički, domena se određuje iz uvjeta da je* $104 - x \neq 0$. *No, s obzirom da je* x *postotak, vrijedi da je domena interval* $[0, 100]$. *Sliku je lakše odrediti iz grafa funkcije.*



Vidimo da funkcija raste na cijeloj domeni, pa sliku dobijemo tako da izračunamo vrijednost funkcije u granicama intervala $[0, 100]$. $C(0) = \frac{20 \cdot 0}{104-0} = \frac{0}{104} = 0$, $C(100) = \frac{20 \cdot 100}{104-100} = \frac{2000}{4} = 500$, *pa je slika funkcije interval* $[0, 500]$.

4. *Matematički, trebamo riješiti jednadžbu* $C(x) = \frac{20x}{104-x} = 300$. *Dakle,* $\frac{20x}{104-x} = 300$
$20x = 300 \cdot (104 - x)$
$20x = 31200 - 300x$
$320x = 31200$
$x = 97.5\%$



5. *Iz (3) vidimo da funkcija raste na cijeloj svojoj domeni. Ispočetka slabije, a kako postotak odstranjene tvari raste, troškovi rastu sve brže.*

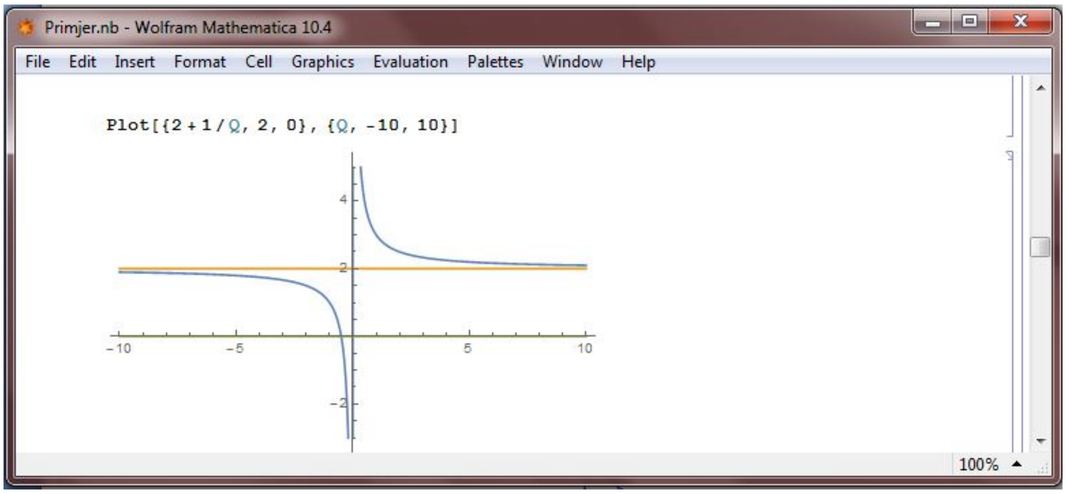
Primjer 4.34 *Zadana je funkcija ukupnih troškova proizvodnje* $C(Q) = 2Q + 1$, *gdje je* Q *količina proizvodnje. Izvedite funkciju prosječnih troškova proizvodnje i grafički je prikažite.*

Rješenje.

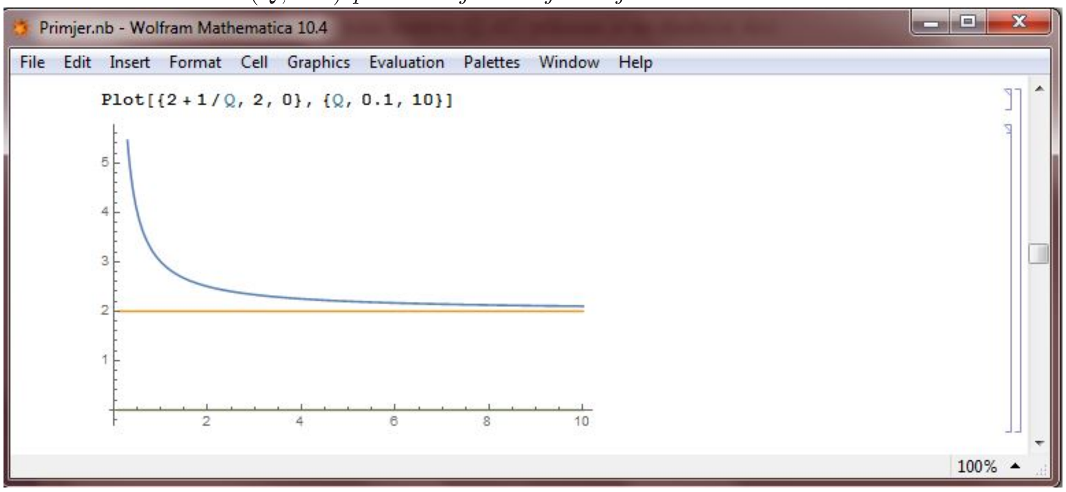
Funkciju prosječnih troškova dobijemo tako da funkciju ukupnih troškova podijelimo s količinom proizvodnje, tj.,

$$AC(Q) = \frac{C(Q)}{Q} = \frac{2Q+1}{Q} = 2 + \frac{1}{Q}.$$

Dakle, funkcija prosječnih troškova je racionalna funkcija. Pravac $Q = 0$ *je okomita asimptota funkcije, a pravac* $y = 2$ *vodoravna asimptota funkcije. Graf funkcije se približava tim pravcima, ali ih nikad neće dotaknuti. Prikažemo li tu funkciju grafički za* $-10 \leq Q \leq 10$, *dakle kao matematičku, a ne ekonomsku funkciju, dobivamo:*



Uzimajući u obzir da je $Q > 0$, uzimamo samo dio grafa koji odgovara tom uvjetu, tj., graf funkcije u koordinatnom sustavu (Q, AC) prikazan je na sljedećoj slici:



Primijetimo da su za jako niske razine proizvodnje prosječni troškovi jako visoki. Također, za jako visoke razine proizvodnje, prosječni su troškovi sve niži. Pravac $y = 2$ je vodoravna asimptota funkcije, a os ordinata okomita asimptota funkcije. Intuitivno, asimptota funkcije je pravac kojem se graf funkcije približava. Općenito graf funkcije može presjecati svoju horizontalnu asimptotu, može oscilirati oko nje i približavati joj se kad x postaje sve veći. Ovdje to nije slučaj, ali je u poglavlju 3 primjer s oscilirajućom inflacijom bio upravo takav. Vratimo se na ovaj primjer u kojem graf funkcije ne siječe svoju horizontalnu asimptotu. Možemo reći da što je razina proizvodnje veća, prosječni su troškovi sve niži, ali nikad neće dostići fiksnu razinu 2.

Primjer 4.35 *Zadana je funkcija ukupnih troškova proizvodnje za jedno poduzeće, $C(Q) = 196 + 100Q - 10Q^2 + Q^3$, gdje je Q količina proizvodnje, a $C(Q)$ su ukupni troškovi.*

1. *Izračunajte fiksne troškove.*
2. *Izračunajte varijabilne troškove.*
3. *Izvedite funkciju prosječnih troškova proizvodnje.*

4. *Grafički prikažite funkciju prosječnih troškova proizvodnje.*
5. *Uz koju se količinu proizvodnje ostvaruju minimalni prosječni troškovi i koliko oni iznose?*
6. *Izvedite prosječne varijabilne troškove.*
7. *Grafički prikažite prosječne varijabilne troškove.*
8. *Na istoj slici, za Q iz različitih intervala, nacrtajte grafove prosječnih troškova i prosječnih varijabilnih troškova, te komentirajte njihov odnos.*

Rješenje.

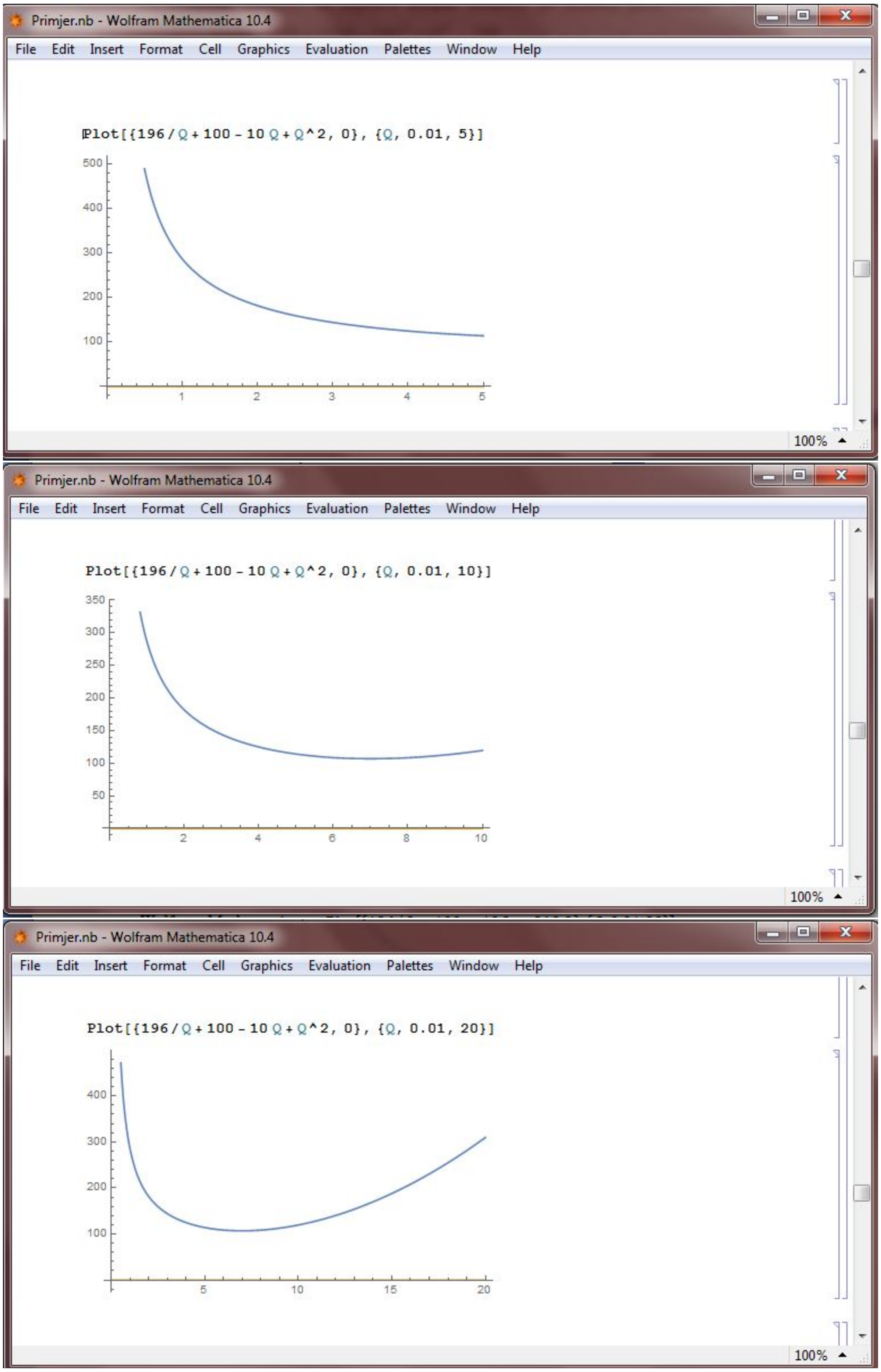
1. *Fiksni troškovi su troškovi koji postoje i kad nema proizvodnje. Matematički, fiksni troškovi su $C(0)$. U našem su slučaju fiksni troškovi jednaki* $C(0) = 196 + 100 \cdot 0 - 10 \cdot 0^2 + 0^3 = 196$.
2. *Varijabilni troškovi su jednaki razlici ukupnih i fiksnih troškova, tj.,* $C(Q) - C(0) = 196 + 100Q - 10Q^2 + Q^3 - 196 = 100Q - 10Q^2 + Q^3$.
3. *Prosječni troškovi su zapravo ukupni troškovi po jedinici proizvodnje. Matematički,* $AC(Q) = \frac{C(Q)}{Q} = \frac{196+100Q-10Q^2+Q^3}{Q} = \frac{196}{Q} + 100 - 10Q + Q^2$.
4. *Nacrtat ćemo graf za različite intervale varijable x. To je važno jer ponekad samo jedan interval može stvoriti krivu sliku grafa. Na prvim slikama se ne vidi da za velike Q funkcija ide u beskonačnost. Vidite slike* 4.1. *i* 4.2.

   Uvijek je važno kombinirati teorijska znanja i primjenu programskih alata. Vidimo da se radi o kvadratnoj funkciji plus funkcija $const/Q$. Spomenuli smo da se polinom u beskonačnosti ponaša kao njegova najveća potencija, ali isto vrijedi i ako dodamo neki član koji je jako mali. Član $const/Q$ je jako mali za velike Q pa se funkcija u beskonačnosti ponaša kao kvadratna funkcija. Za kvadratnu funkciju čija parabola je okrenuta prema gore znamo da funkcija mora ići u ∞ za velike Q, odnosno kad Q ide u beskonačnost.
5. *Iz grafa zaključujemo da se neki minimalni prosječni troškovi ostvaruju. Pomoću Wolframove Mathematice možemo odgovoriti na postavljeno pitanje o minimumu funkcije koristeći naredbu FindMinimum.*

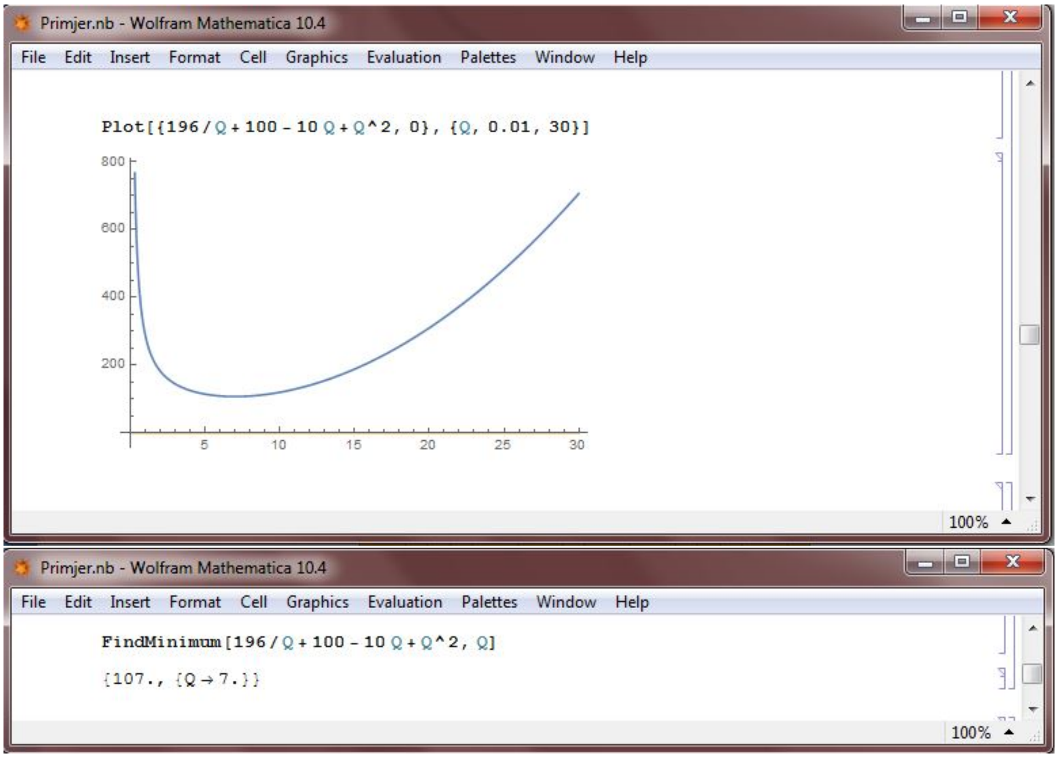
   Dakle, za količinu proizvodnje $Q = 7$, ostvaruju se minimalni prosječni troškovi $AC(7) = 107$.
6. *Iz (2) znamo da su varijabilni troškovi jednaki* $C(Q) - C(0) = 100Q - 10Q^2 + Q^3$. *Prosječni varijabilni troškovi se dobiju tako da se varijabilni podijele s količinom proizvodnje, tj.,*

$$\frac{C(Q) - C(0)}{Q} = \frac{100Q - 10Q^2 + Q^3}{Q} = \frac{Q(100 - 10Q + Q^2)}{Q} = 100 - 10Q + Q^2$$

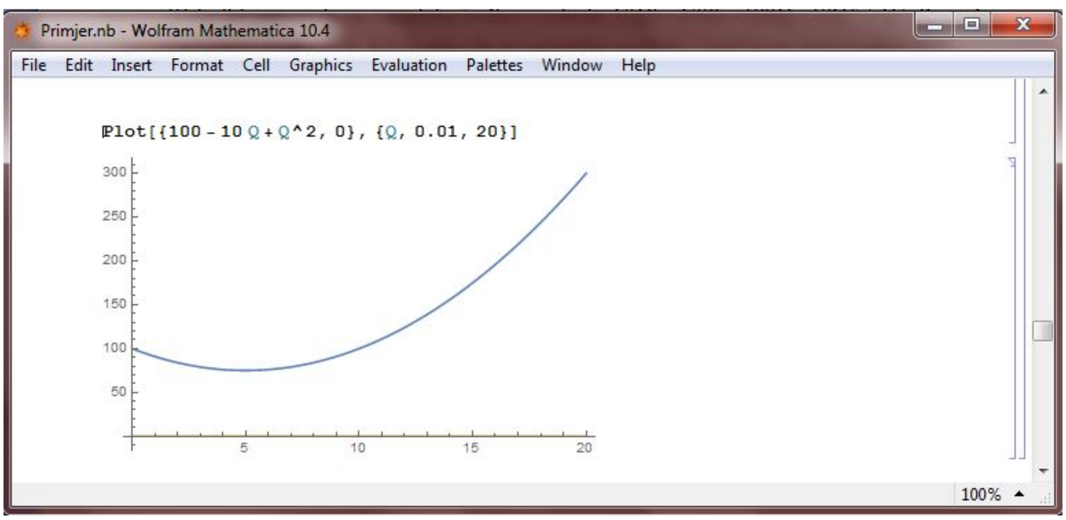
7. *Graf funkcije je na slici* 4.3.
8. *Grafovi funkcija su na slici* 4.4. *Iz gornjih grafova zaključujemo da za veće količine proizvodnje prosječni troškovi postaju jednaki prosječnim varijabilnim troškovima.*



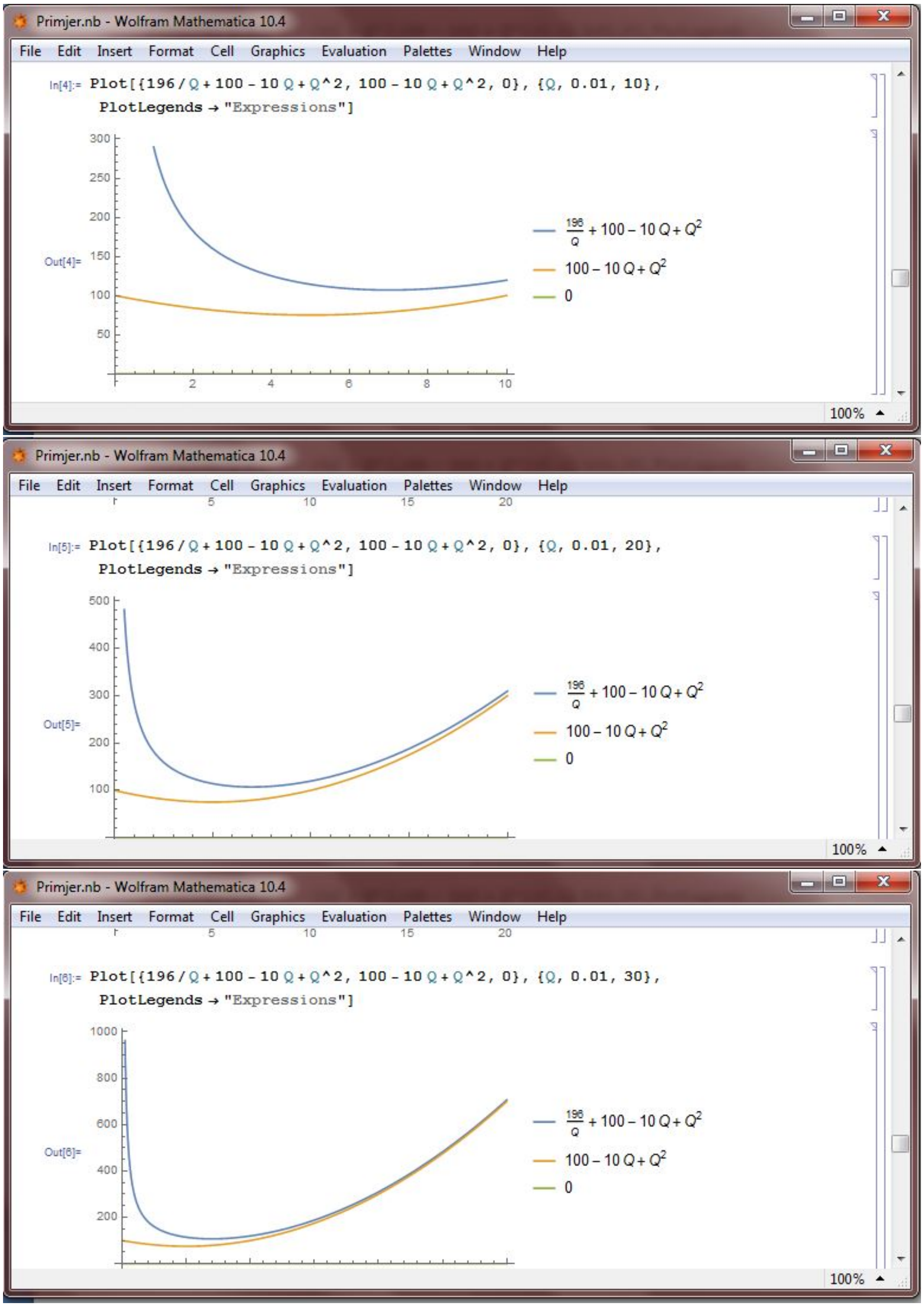
Slika 4.1: Prosječni troškovi



Slika 4.2: Prosječni troškovi



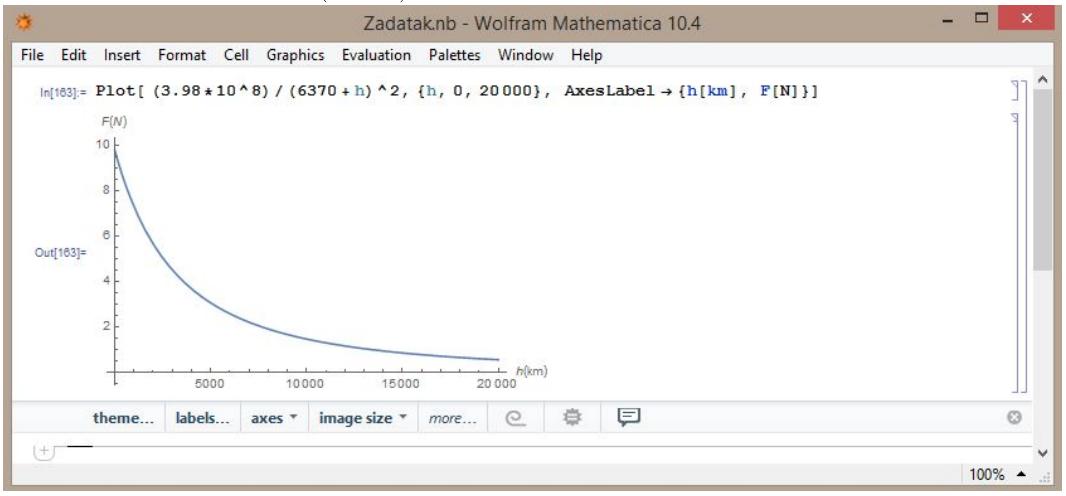
Slika 4.3: Prosječni varijabilni troškovi



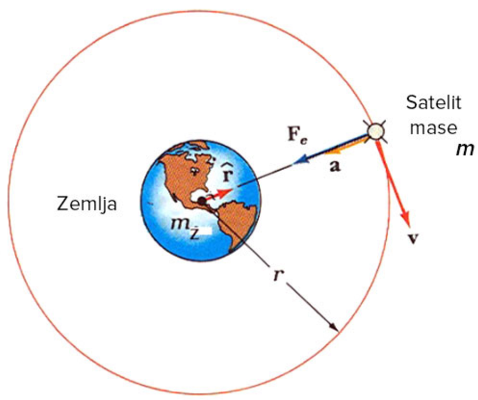
Slika 4.4: Prosječni troškovi i prosječni varijabilni troškovi

Primjer 4.36 *Grafički prikažite ovisnost iznosa gravitacijske sile kojim Zemlja privlači tijelo mase* $m = 1$ *kilogram o udaljenosti tijela od Zemlje. Polumjer Zemlje je* $R_z = 6370$ km, *masa Zemlje* $m_z = 5.96 \cdot 10^{24}$ kg, *gravitacijska konstanta* $G = 6.672 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2. *Gravitacijska sila između Zemlje i tijela mase m je* $F = G\frac{M_z \cdot m}{r^2}$.
Rješenje.

Ako je gravitacijska sila između Zemlje i tijela mase m jednaka $F = G\frac{M_z \cdot m}{r^2}$, $r = R_z + h$ *je udaljenost tijela od središta Zemlje.* $F = \frac{3.98 \cdot 10^8}{(6370+h)^2}$, *za h ćemo uzeti vrijednosti* $(0 - 20000)$ *kilometra.*



Primjer 4.37 *Satelit mase m kruži oko Zemlje na udaljenosti h određenom brzinom v. Gravitacijska sila između Zemlje i tijela mase m je* $F = G\frac{M_z \cdot m}{r^2}$. *Centripetalna sile tijela mase m koje kruži brzinom v je* $F_c = \frac{m \cdot v^2}{r}$.

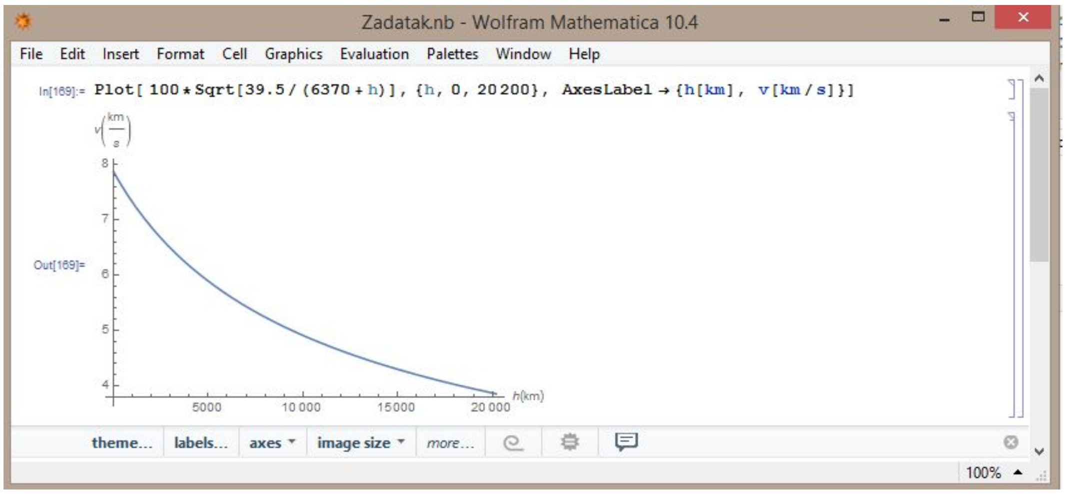


Odredite:

1. *ovisnost brzine gibanja satelita o udaljenosti od površine Zemlje (prikažite grafički). Polumjer Zemlje je* $R_z = 6370$ km, *masa Zemlje* $m_z = 5.96 \cdot 10^{24}$ kg, *gravitacijska konstanta* $G = 6.672 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg
2. *brzinu gibanja GPS satelita koji kruži na visini* 20200 km *od Zemlje*
3. *odredite period kruženja GPS satelita oko Zemlje.*

Rješenje.

1. *Da bi satelit kružio oko Zemlje na udaljenosti* $R_z + h$ *od središta Zemlje treba biti zadovoljen uvjet da je centripetalna sila potrebna za kružno gibanje jednaka gravitacijskoj sili:* $\frac{mv^2}{R_z+h} = G\frac{M_z \cdot m}{(R_z+h)^2}$.
   Brzina je $v = \sqrt{\frac{G \cdot M_z}{R_z+h}}$, $v = 100 \cdot \sqrt{\frac{39.5}{6370+h}}$.



   Uočimo da je za vrijednost $h = 0$ *vrijednost brzine* 7.9 km/s, *ta brzina se naziva prva kozmička brzina.*

2. *brzina GPS satelita je* 3.86 km/s.

3. *period kruženja oko Zemlje:* $T = \frac{2(R_z+h)\cdot\pi}{v} = 43227.9$ s, *GPS satelitu treba* 12 *sati da obiđe Zemlju.*

Primjer 4.38 *GPS satelit kruži oko Zemlje na udaljenosti h od površine. Polumjer Zemlje je* $R_z = 6370$ km, *masa Zemlje* $m_z = 5.96 \cdot 10^{24}$ kg, *masa satelita* 520 kg, *gravitacijska konstanta* $G = 6.672 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg. *Odredite:*

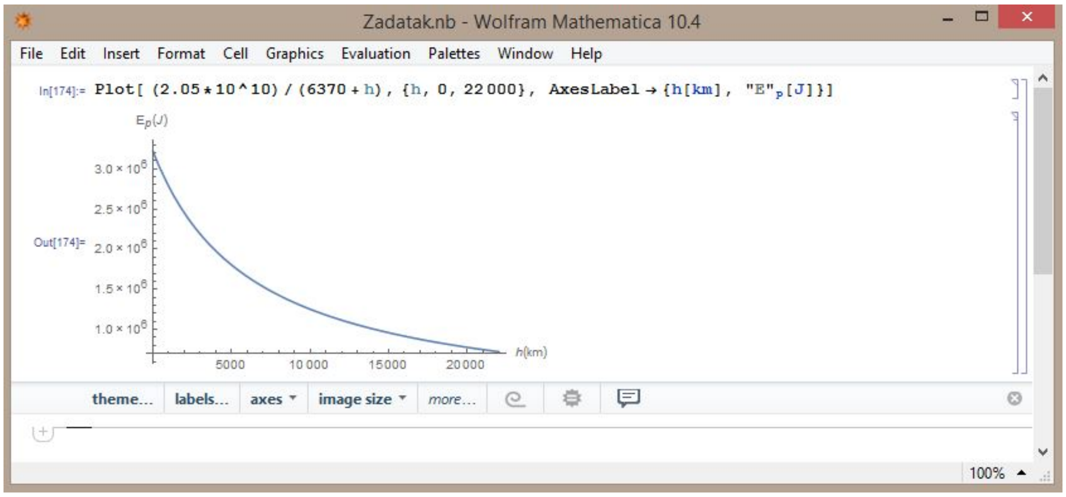
1. *ovisnost potencijalne energije satelita o udaljenosti h (prikažite grafički)*

2. *koliki rad treba uložiti da se satelit dovede sa Zemlje u orbitu na visini* 20200 *kilometra od Zemlje*

3. *usporedite taj rad s kinetičkom energijom satelita.*

Uputa.
Gravitacijska potencijalna energija satelita je $E_p(r) = -G\frac{M_z \cdot m}{R_z+h}$.
Rad je jednak razlici potencijalnih energija satelita na Zemlji i u orbiti.
Kinetička energija satelita je $E_k = \frac{1}{2}mv^2$.
Rješenje.

1. *Gravitacijska potencijalna energija satelita je* $E_p(r) = -G\frac{M_z \cdot m}{R_z+h}$
   $E_p(r) = \frac{2.05}{R_z+h} \cdot 10^{10}$ J



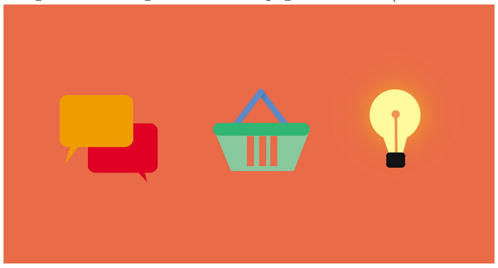
2. *rad je jednak razlici potencijalnih energija satelita na Zemlji i u orbiti,* $\Delta E_p = 3.9 \cdot 10^6$ J.

3. *kinetička energija satelita je* $E_k = \frac{1}{2}mv^2$, *brzina satelita izračunata je u prethodnom primjeru* (3.86 km/s) *pa je* $E_k = 3.9 \cdot 10^6$ J *zbog zakona očuvanja energije* $\Delta E_p = E_k$.

Primjer 4.39 *Kad poduzeće želi prodati svoj proizvod koristi se i promocijom. Tu promociju treba platiti, tj., u nju treba uložiti novčana sredstva. Koliko će novaca poduzeće uložiti? Hoće li promocija pridonijeti povećanju prodaju? Koliko? Da bismo odgovorili na ta pitanja, modeliramo kretanje prodaje u ovisnosti o sredstvima uloženima u promociju. Jedan od takvih modela je i ADBUG funkcija (autor je Little John,* 1970.*) koja se definira kao*

$$m(x) = 0.2 + 0.3\frac{x^2}{1+x^2}.$$

Pritom su x *sredstva uložena u promociju, a* $m(x)$ *tržišni udjel promatrane marke. Dakle,* $m(x)$ *je postotak tržišta na koje promatrano poduzeće plasira svoj proizvod (ili marku).*



1. *Izračunajte tržišni udjel promatrane marke ako su uložena sredstva u promociju redom jednaka* 0, 2, 4, 6, 8, 10.

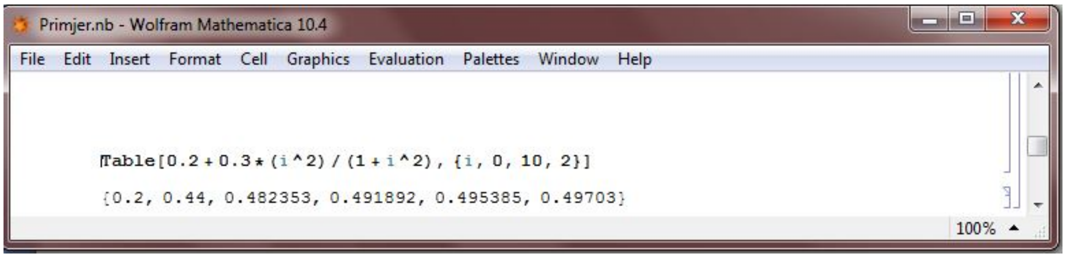
2. *Izračunajte tržišni udjel promatrane marke ako su uložena sredstva u promociju redom jednaka* 50, 100, 150, 200, 250.

3. *Nacrtajte graf funkcije u Wolframovoj Mathematici za različite intervale varijable* x.

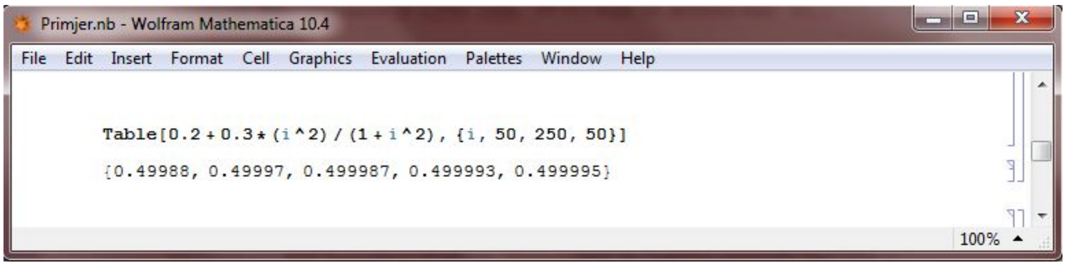
4. *Komentirajte rezultate pod (1) i (2). Što biste predložili odjelu marketinga promatranog poduzeća, koliko uložiti u promociju?*

Rješenje.

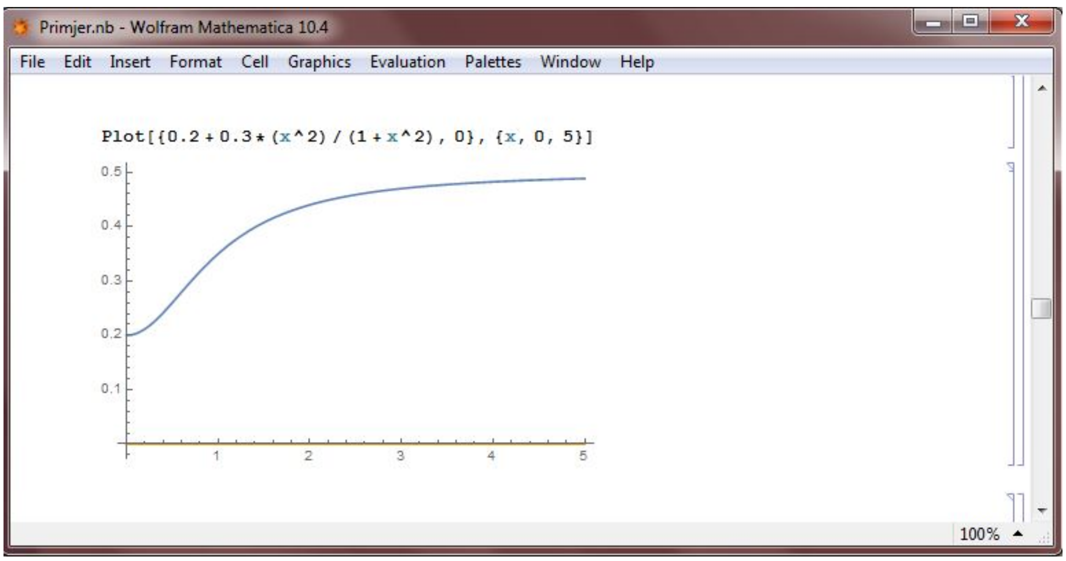
1. *Računamo* $m(0) = 0.2 + 0.3\frac{0^2}{1+0^2} = 0.2$, $m(2)$, $m(4)$, $m(6)$, $m(8)$ *i* $m(10)$.

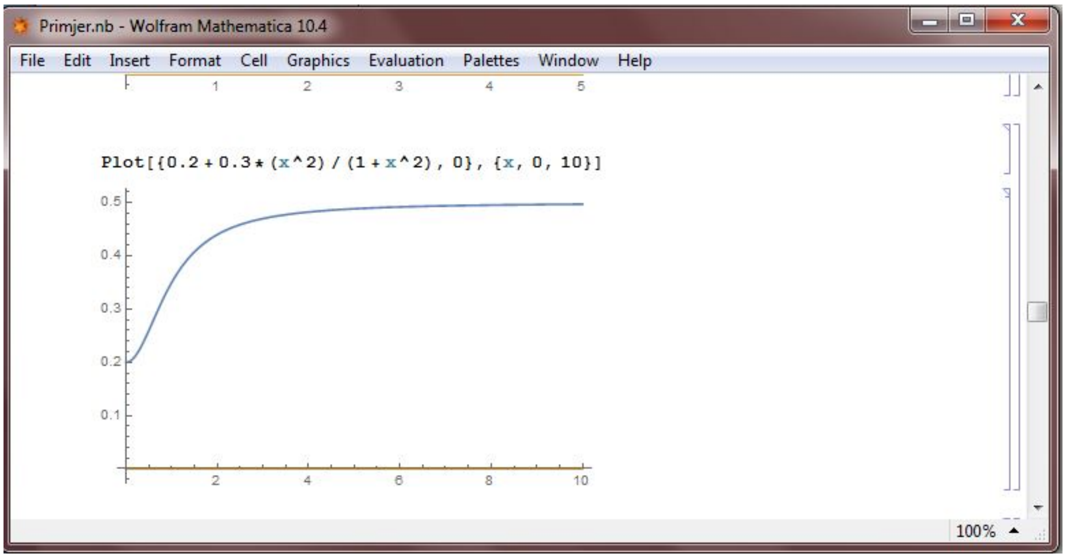


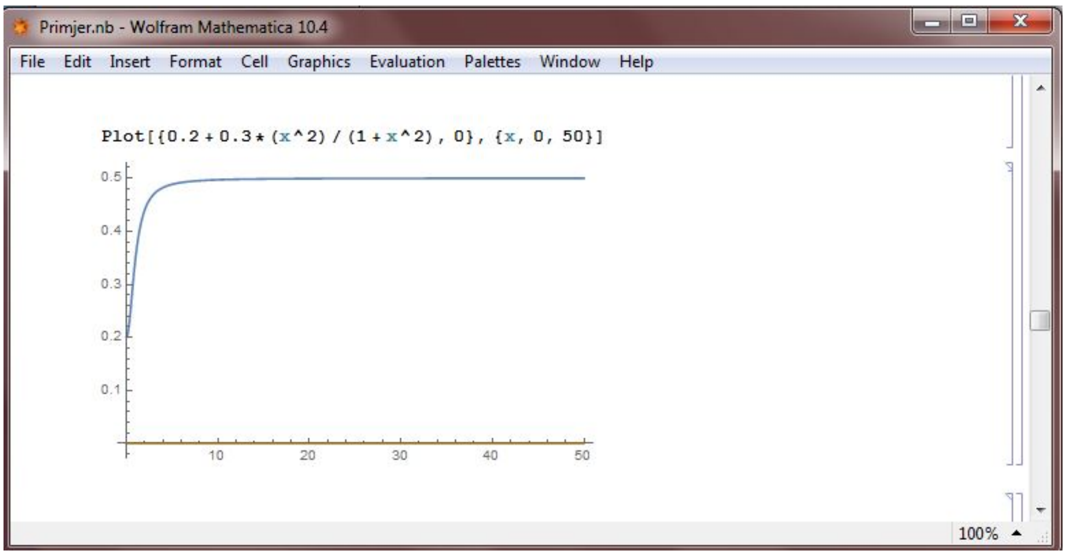
2. *Iznos funkcije*



3. *Nacrtat ćemo graf za različite intervale varijable* x.







Iz varijanti grafova koje smo nacrtali zaključujemo da udjel na tržištu ispočetka brzo raste s porastom ulaganja u promociju. To vidimo i iz numeričkih vrijednosti koje smo dobili pod (1). No, kako ulaganje u promociju prelazi vrijednost 10*, zaključujemo da udjel na tržištu raste, ali sve sporije i sporije. Pa se zapravo pitamo do koje razine nam se isplati ulagati u promociju tako da porast udjela na tržištu bude značajan. Odgovor na to pitanje je subjektivan i ovisi o strategiji poduzeća. Možda bi razumno bilo uložiti* 10*, ali kao što smo već naveli, ta je odluka zaista subjektivna. Poanta je da nam matematički model olakšava donošenje odluke jer nam pomoću grafa vizualizira kretanje udjela na tržištu.*

Primjer 4.40 *Želimo li uložiti određeni iznos novca Y_0 u banku uz godišnji kamatnjak (kamatnu stopu) p, složeni i dekurzivan obračun kamata, nakon n godina raspolagat ćemo s iznosom od*

$$Y(n) = Y_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^n.$$

Veličinu $1 + \frac{p}{100}$ *zovemo dekurzivnim kamatnim faktorom i označavamo s* r. *Dakle,* $r = 1 + \frac{p}{100}$, *pa je konačna vrijednost uloženog iznosa (glavnice) jednaka* $Y(n) = Y_0 \cdot r^n$. *Možemo postaviti pitanje: koliko moramo uložiti danas ako želimo nakon* n *godina raspolagati s iznosom od* $Y(n)$. *Odgovor je, moramo uložiti* $Y_0 = \frac{Y(n)}{r^n}$. *Na ovaj smo način definirali racionalnu funkciju koja nam opisuje početnu vrijednost glavnice u ovisnosti o konačnoj vrijednosti glavnice i dekurzivnom kamatnom faktoru. Pretpostavimo sad da želimo štedjeti kako bismo za dvije godine imali dovoljno novaca za maturalac.*

1. *Ako maturalac košta* 2500 *kuna, koliko moramo uložiti danas uz godišnji kamatnjak* 1%, *složen i dekurzivan obračun kamata?*

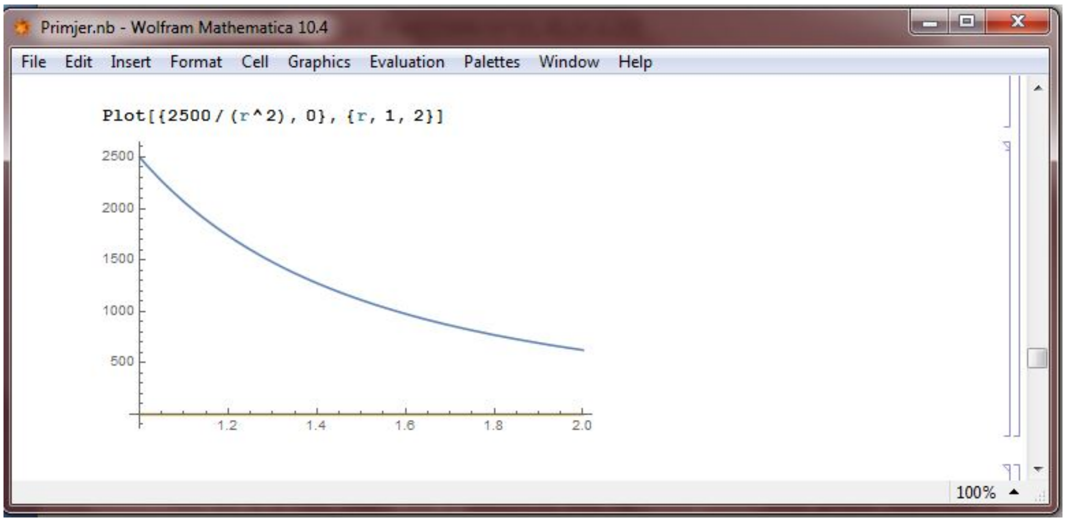
2. *Uz pretpostavku promjenjivog kamatnjaka, grafički prikažite funkciju početne vrijednosti u ovisnosti o dekurzivnom kamatnom faktoru* r. *Komentirajte.*

3. *Ako je početna vrijednost* $Y_0 = 2200$ *kuna, a konačna vrijednost nakon dvije godine* 2500 *kuna, uz koji je kamatnjak uložen početni iznos?*

Rješenje.

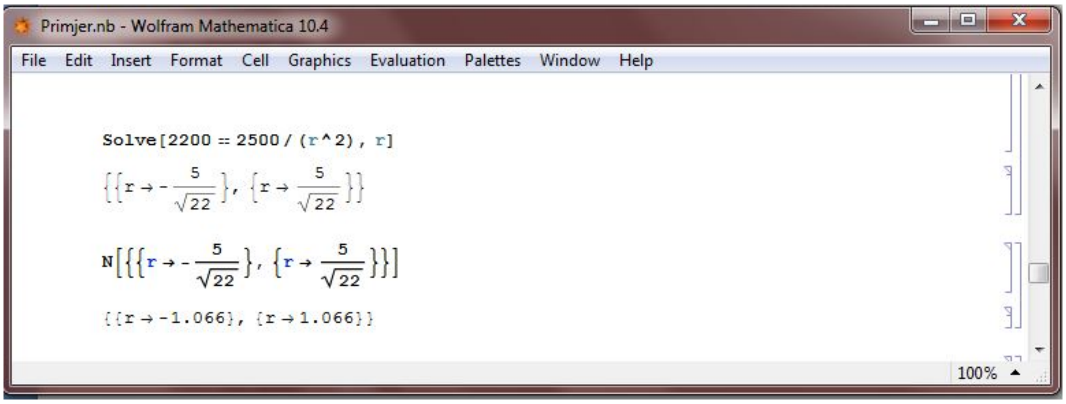
1. *U definiranim oznakama,* $p = 1$, $n = 2$, $Y(2) = 2500$. *Slijedi da je* $r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{1}{100} = 1.01$, *pa je* $Y_0 = \frac{Y(2)}{1.01^2} = \frac{2500}{1.01^2} = 2450.74$ *kuna.*

2. $Y_0(r) = \frac{Y(2)}{r^2} = \frac{2500}{r^2}$.



Iz grafa zaključujemo da je početna vrijednost manja (funkcija pada) što je dekurzivni kamatni faktor r *veći. Budući da je* $r = 1 + \frac{p}{100}$, *gdje je* p *kamatnjak, zaključujemo da je* r *veći što je* p *veći. Dakle, što je kamatnjak veći, da bismo nakon dvije godine raspolagali s* 2500 *kuna, uložit ćemo manji iznos danas u banku.*

3. $Y_0(r) = \frac{Y(2)}{r^2}$
$2200 = \frac{2500}{r^2}$
$r^2 = \frac{2500}{2200} = 1.13636$
$r = \sqrt{1.13636} = 1.066$
Iz $r = 1 + \frac{p}{100}$ *slijedi da je* $p = (r - 1) \cdot 100 = (1.066 - 1) \cdot 100 = 6.6$.



Wolframova Mathematica daje dva rješenja jer se radi o kvadratnoj jednadžbi, ali nama odgovara samo ono pozitivno, 1.066.

Primjer 4.41 *Za dvije godine želite otići na maturalac. Maturalac košta* 2500 *kuna. Ukoliko je godišnji kamatnjak* 1*, danas bi trebalo uložiti* 2450.74 *kuna na dvije godine u banku uz dekurzivan i složen obračun kamata. No, problem je što nemate toliko novaca. Druga je mogućnost kroz dvije godine, početkom svake godine uložiti jednak periodički iznos tako da na kraju raspolažemo s* 2500 *kuna. Općenito, ukoliko želimo nakon* n *godina raspolagati iznosom* $Y(n)$ *i početkom svake godine uložiti periodički iznos* R*, tada vrijedi da je* $Y(n) = R \cdot r \cdot \frac{r^n-1}{r-1}$*. Iz te nam formule slijedi da je periodički iznos koji se mora uložiti početkom svake godine jednak* $R = Y(n) \cdot \frac{r-1}{r\cdot(r^n-1)}$.

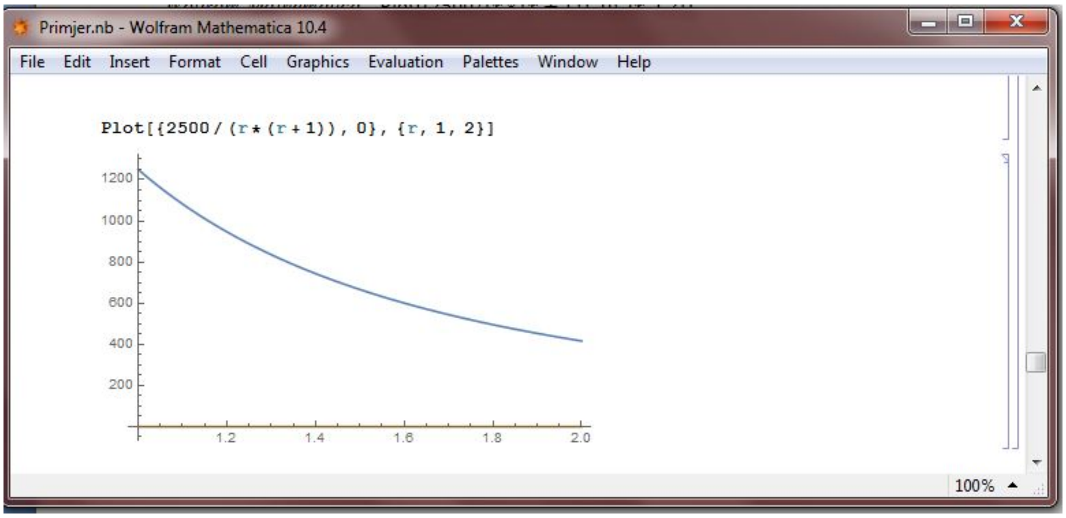
1. *Koji se periodički iznos mora uložiti početkom prve i druge godine da bi se na kraju druge godine raspolagalo iznosom od* 2500 *kuna? Godišnji kamatnjak je* 1*, a obračun dekurzivan i složen.*

2. *Uz pretpostavku promjenjivog kamatnjaka, grafički prikažite funkciju periodičkog iznosa* R *u ovisnosti o dekurzivnom kamatnom faktoru* r*. Komentirajte.*

Rješenje.

1. *U definiranim oznakama,* $p = 1$, $n = 2$, $Y(2) = 2500$*. Slijedi da je* $r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{1}{100} = 1.01$*, pa je* $R = Y(2) \cdot \frac{r-1}{r\cdot(r^2-1)} = \frac{Y(2)}{r\cdot(r+1)} = \frac{2500}{1.01\cdot(1.01+1)} = 1231.47$

2. $R = Y(2) \cdot \frac{r-1}{r\cdot(r^2-1)} = \frac{Y(2)}{r\cdot(r+1)} = \frac{2500}{r\cdot(r+1)}$



Dakle, što je r veći (tj., što je p veći), periodički iznos koji treba ulagati početkom svake godine je manji (funkcija pada s porastom kamatnjaka).

Primjer 4.42 *Pretpostavimo da je zadovoljstvo grupe kupaca uslijed kupovine tenisica modelirano funkcijom $u(x) = \sqrt{x}$, gdje je x broj pari tenisica, a u oznaka za korisnost.*

1. *Izračunajte korisnost grupe kupaca ako je broj kupljenih pari tenisica jednak* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 *i* 10.

2. *Za svako povećanje količine tenisica, izračunajte povećanje korisnosti grupe kupaca. Što primjećujete? Ekonomski komentirajte.*

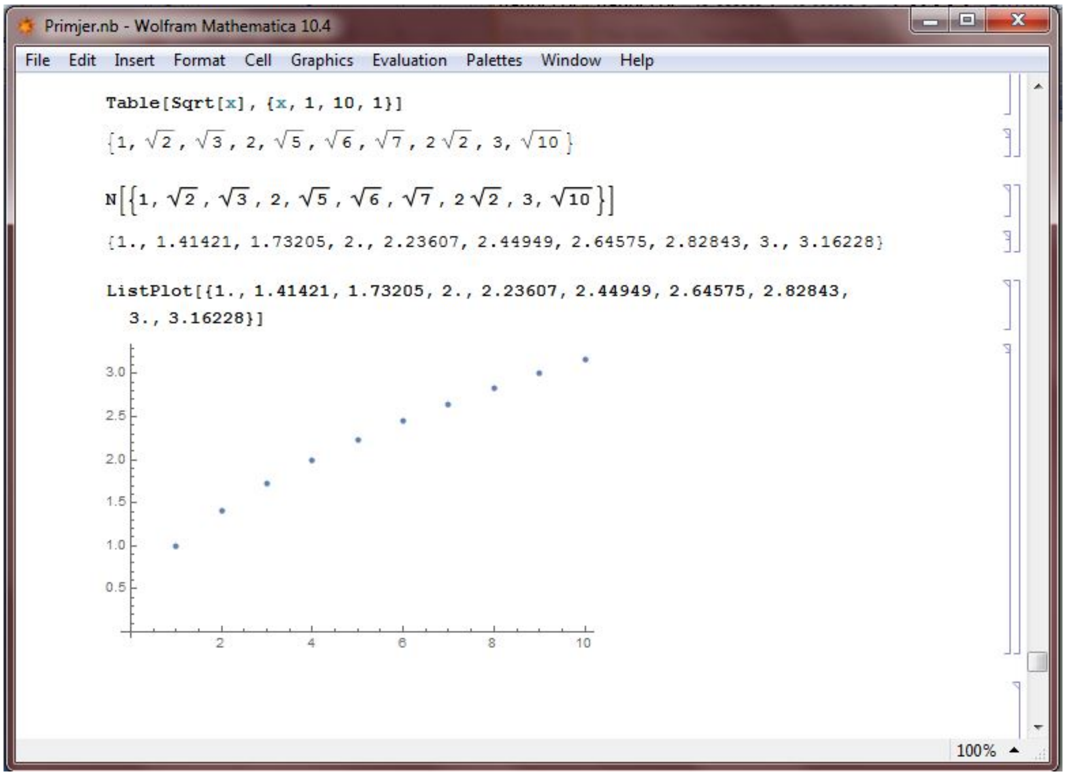
3. *Nacrtajte graf funkcije korisnosti i komentirajte graf nastavno na zaključak iz (2).*

4. *Koliko pari tenisica grupa kupaca mora kupiti da bi korisnost bila veća od* 10*?*

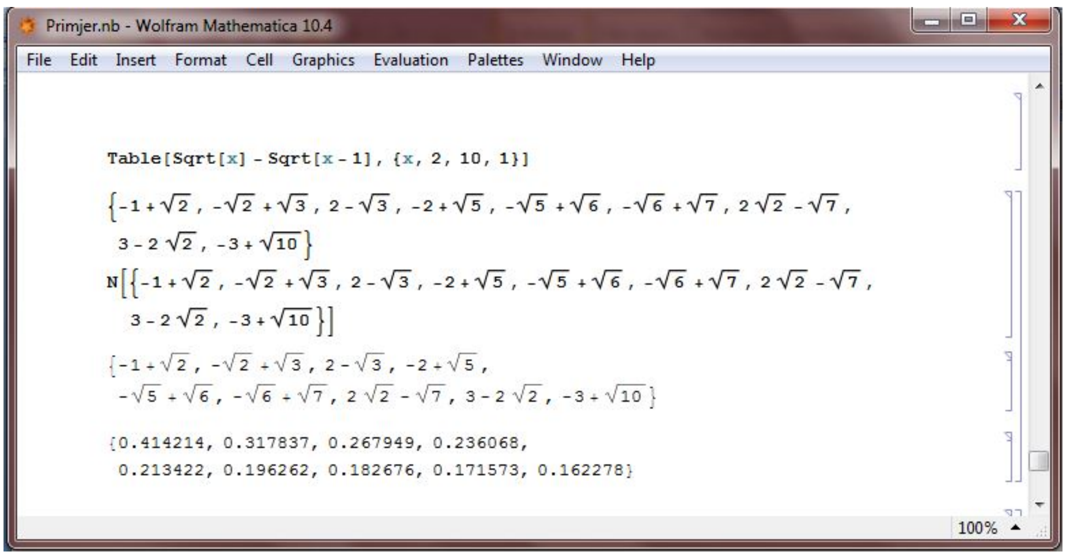
5. *Prikažite broj pari tenisica kao funkciju korisnosti.*

Rješenje.

1. *Vrijednosti funkcije na grafu funkcije*

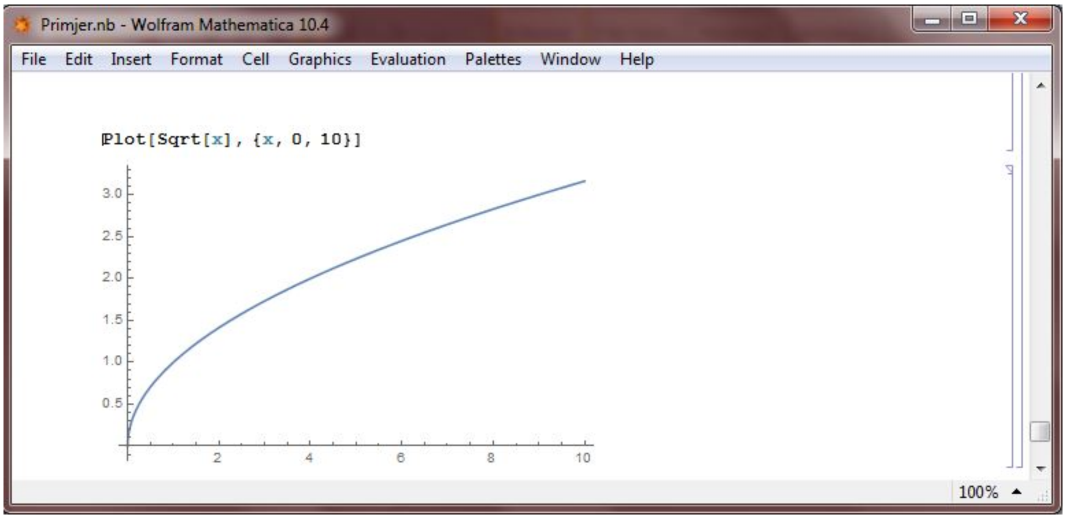


2. *Vrijednosti funkcije*



Povećanje korisnosti je sve manje i manje. Korisnost pokazuje opadajuće prinose.

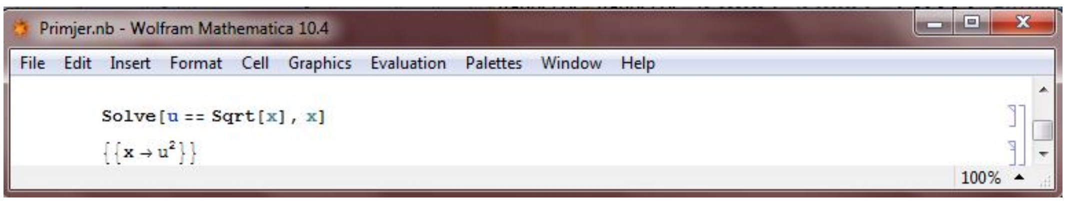
3. *Graf funkcije*



Nastavno na (1) i (2), iz gornje slike zaključujemo da korisnost raste, ali sve sporije što je karakteristika opadajućih prinosa. Dakle, kad je kupljena količina tenisica mala, korisnost grupe značajno raste. Kad je količina kupljenih tenisica velika, svaka nova kupovina povećava korisnost, ali ne u mjeri kao što je bilo u slučaju male količine tenisica.

4. *Matematički, treba riješiti nejednadžbu* $u(x) > 10$*, tj.,* $\sqrt{x} > 10$*. Iz grafa zaključujemo da je dovoljno riješiti jednadžbu* $\sqrt{x} = 10$*. Slijedi da je* $x = 100$*, pa je korisnost veća od* 10 *ako je količina kupljenih pari tenisica veća od* 100*.*

5. *Matematički, treba pronaći inverz funkcije* $u(x) = \sqrt{x}$*. Slijedi da je* $x = [u(x)]^2$*, tj.,* $x(u) = u^2$*. Dakle, ukoliko, na primjer, želimo odgovoriti na pitanje ”‘Koliko pari tenisica treba kupiti da bi korisnost bila* 8*?”’ jednostavno izračunamo* $x(8) = 8^2 = 64$*.*



Primjer 4.43 *Da bi poduzeće proizvodilo, treba naručivati materijal (sirovine). Pritom stvara zalihu materijala u svom skladištu i to predstavlja trošak koji poduzeće želi minimizirati. Isto se događa i kod distributivnih poduzeća koja naručuju robu i skladište je. Dakle, zalihe predstavljaju trošak, ali zalihe moraju postojati kako bi se brzo zadovoljavala potražnja kupaca. Formula koja određuje optimalnu količinu naručivanja za zalihe uz pretpostavku stabilne potražnje i naručivanja u jednakim vremenskim intervalima je* $Q = \sqrt{\frac{2DS}{H}}$*, gdje je* Q *optimalna količina narudžbe,* D *je godišnja potražnja za proizvodom,* S *je fiksni trošak narudžbe, a* H *jedinični trošak držanja zaliha.*

1. *Uz pretpostavku da je trošak jedne narudžbe* 200*, a jedinični trošak držanja zaliha* 10*, izvedite model optimalne količine naručivanja u ovisnosti o godišnjoj potražnji za pametnim telefonima u jednom dućanu.*

2. *Ukoliko je godišnja potražnja* 1000*, koliko pametnih telefona treba naručiti u svakoj pošiljci?*

3. *Koliko će puta u roku od godine dana dućan naručiti pametne telefone ako je godišnja potražnja 1000?*

4. *Ukoliko se trošak držanja zaliha poveća za 15%, izvedite model optimalne količine naručivanja u ovisnosti o godišnjoj potražnji za pametnim telefonima u jednom dućanu.*

5. *Na istoj slici grafički prikažite modele optimalne količine naručivanja uz trošak držanja zaliha 10 i izračunati trošak iz (4). Komentirajte.*

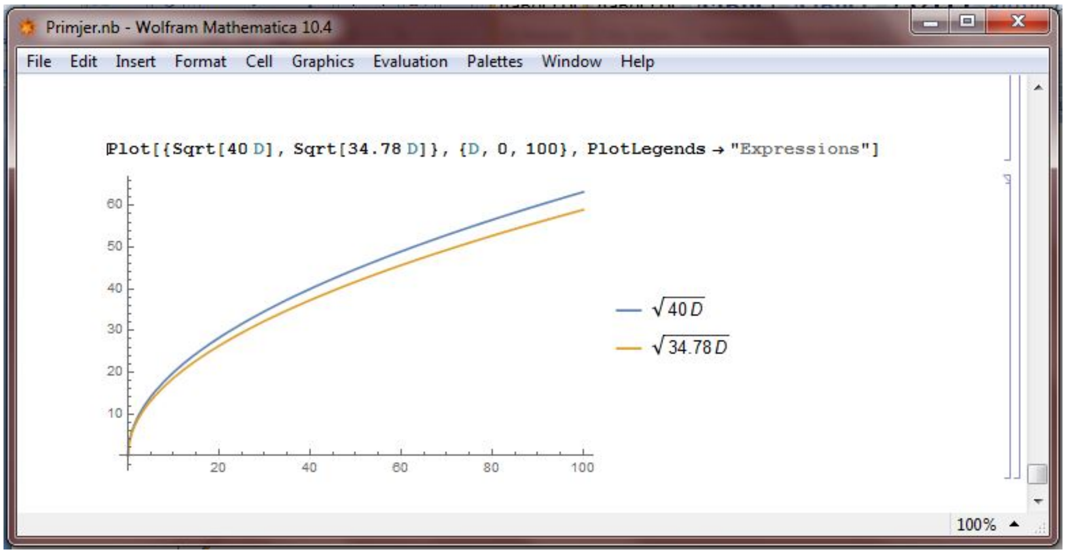
Rješenje.

1. *U definiranim oznakama, slijedi da je* $S = 200$, $H = 10$. *Model je onda* $Q = \sqrt{\frac{2DS}{H}} = \sqrt{\frac{2D\cdot 200}{10}} = \sqrt{\frac{400D}{10}} = \sqrt{40D}$, *tj., optimalna količina naručivanja u ovisnosti o godišnjoj potražnji je:* $Q(D) = \sqrt{40D}$.

2. $Q(1000) = \sqrt{40 \cdot 1000} = \sqrt{40000} = 200$.

3. *Naručit će* $\frac{D}{S} = \frac{1000}{200} = 5$ *puta (svaki put po 200 pametnih telefona).*

4. *Graf funkcije*



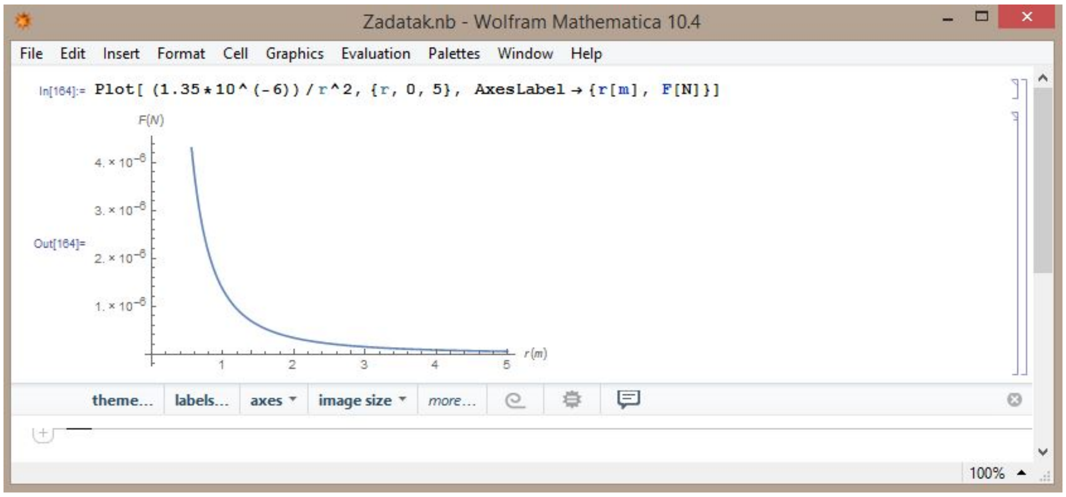
Ukoliko je godišnja potražnja niska, optimalna količina naručivanja je otprilike ista za oba modela (krivulje su ispočetka jako blizu). No, za velike godišnje potražnje, optimalna količina naručivanja za drugi model (veći troškovi držanja zaliha) je sve manja (krivulje su udaljenije).

4.9 Zadaci za vježbu

Zadatak 4.1 *Odredite ovisnost iznosa električne sile o udaljenosti između dva naboja* $q_1 = 100$ nC *i* $q_2 = 150$ nC *(grafički prikažite). Električna sila između dva naboja je* $F = k\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$; $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2}$.

Rješenje.

$F = \frac{1.35\cdot 10^{-6}}{r^2}$, *za* r *uzeti vrijednosti* $(1-5)$ *metara.*



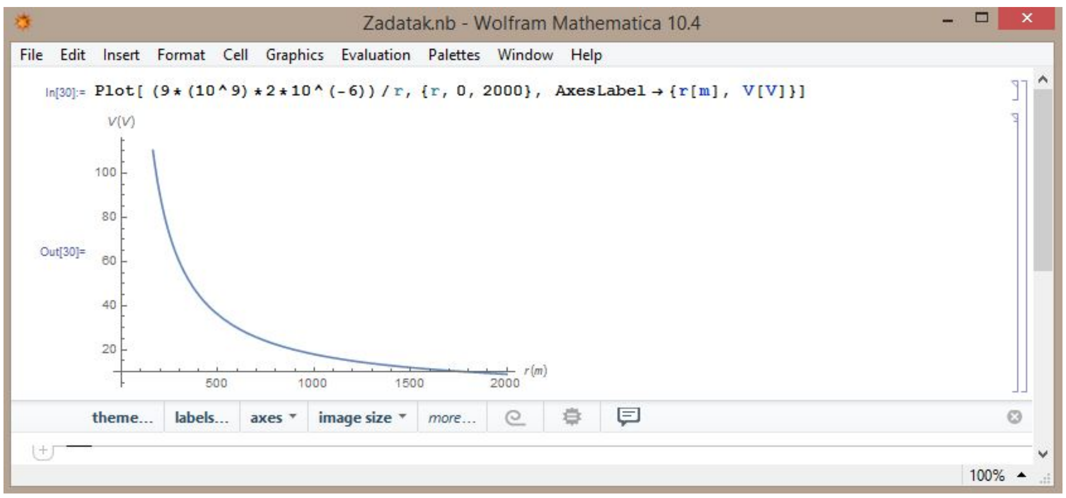
Zadatak 4.2 *Točkasti naboj $q = 2\ \mu$C nalazi se u ishodištu koordinatnog sustava. Odredite:*

1. *ovisnost električnog potencijala o udaljenosti r od ishodišta je $V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} = k \cdot \frac{q}{r}$, $k = 9 \cdot 10^9\ \mathrm{Nm}^2/\mathrm{C}^2$ za naboj $q = 2\ \mu$C (prikažite grafički)*

2. *električni potencijal u točkama s radijus vektorom položaja: $\vec{r}_A = 2\vec{i}$ m, $\vec{r}_B = -2\vec{i}$ m i $\vec{r}_C = -2\vec{k}$ m.*

Uputa.
Duljine svih vektora $\vec{r}_A = 2\vec{i}$ m, $\vec{r}_B = -2\vec{i}$ m i $\vec{r}_C = -2\vec{k}$ m su jednake $r_A = r_B = r_C = 2$ m.
Rješenje.

1. $V(r) = 9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 10^{-6}}{r}$



2. *Električni potencijal je jednak u točkama A, B i C i iznosi $9 \cdot 10^3$ V za naboj $q = 6\ \mu$C.*

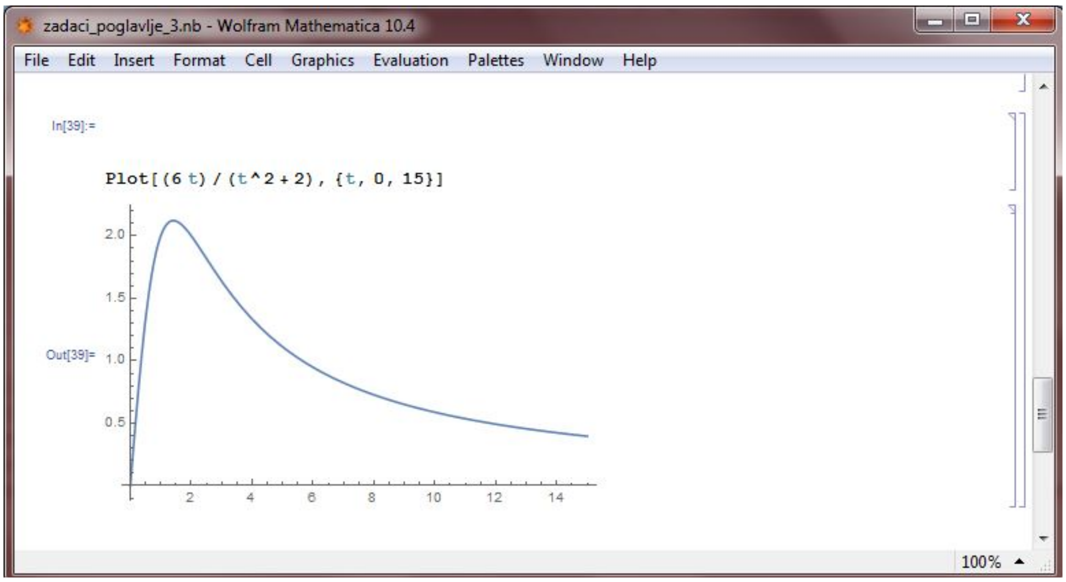
Zadatak 4.3 *Zadana je funkcija za određivanje koncentracije određene vrste lijeka u krvi u nekom vremenu t:*

$$C(t) = \frac{6t}{t^2 + 2}.$$

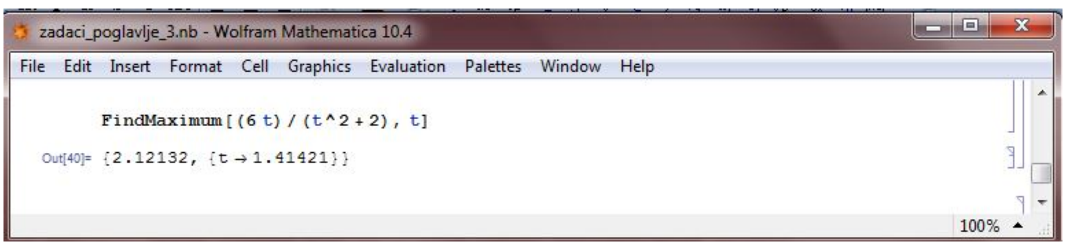
1. *Izračunajte koncentraciju lijeka u krvi* 5 *sati nakon konzumiranja lijeka.*
2. *Izračunajte koncentraciju lijeka u krvi* 10 *sati nakon konzumiranja lijeka.*
3. *Odredite domenu i sliku funkcije, te komentirajte.*
4. *Nacrtajte graf funkcije uz pomoć računala te komentirajte njezin rast/pad.*
5. *Ako koncentracija lijeka u krvi pri manjem operacijskom zahvatu kod psa treba iznositi* 2%*, u kojem vremenu će biti ostvarena ta vrijednost?*

Rješenje.

1. 1.1111
2. 0.5882
3. *Matematički domena je cijeli skup realnih brojeva, ali budući da je vrijeme pozitivno ili nula, domena koja ima smisla je* $[0, +\infty)$*. Sliku funkcije ćemo lakše odrediti iz grafa:*

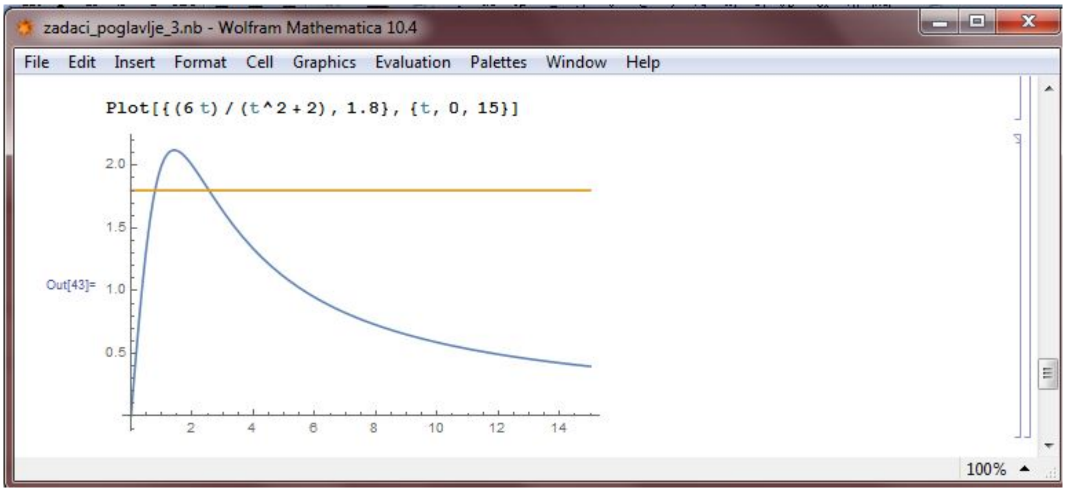


Dakle, slika funkcije je interval od nule do maksimalne vrijednosti funkcije ako je domena $[0, +\infty)$*.*

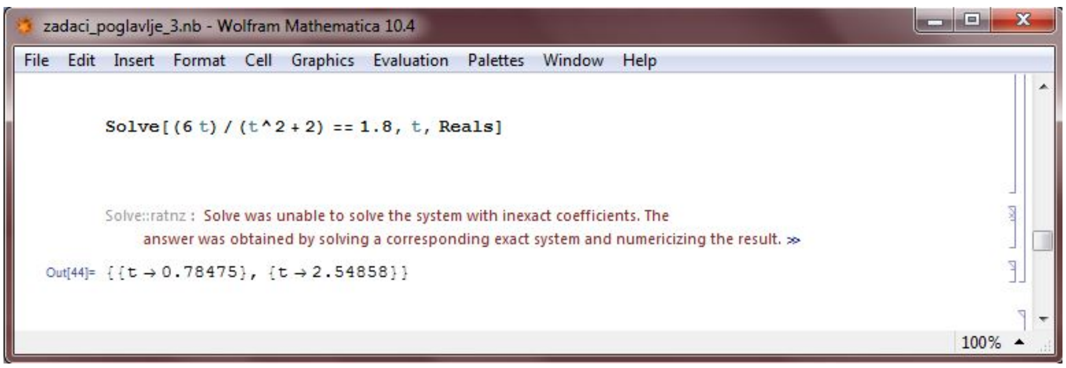


$\mathcal{R} = [0, 2.12132]$

4. *Funkcija raste na intervalu* $[0, 1.41421)$, *a pada na intervalu od* $(1.41421, +\infty)$
5. *Grafički, to izgleda ovako:*



Algebarski, rješavamo jednadžbu kako slijedi:



Zadatak 4.4 *Tvrtka koja proizvodi računala utvrdila je da u prosjeku novi zaposlenik može sastaviti* $N(t)$ *komponenti računala dnevno nakon* t *dana provedenog na probnom roku. Funkcija koja to prikazuje je:*

$$N(t) = \frac{50t}{t+8}$$

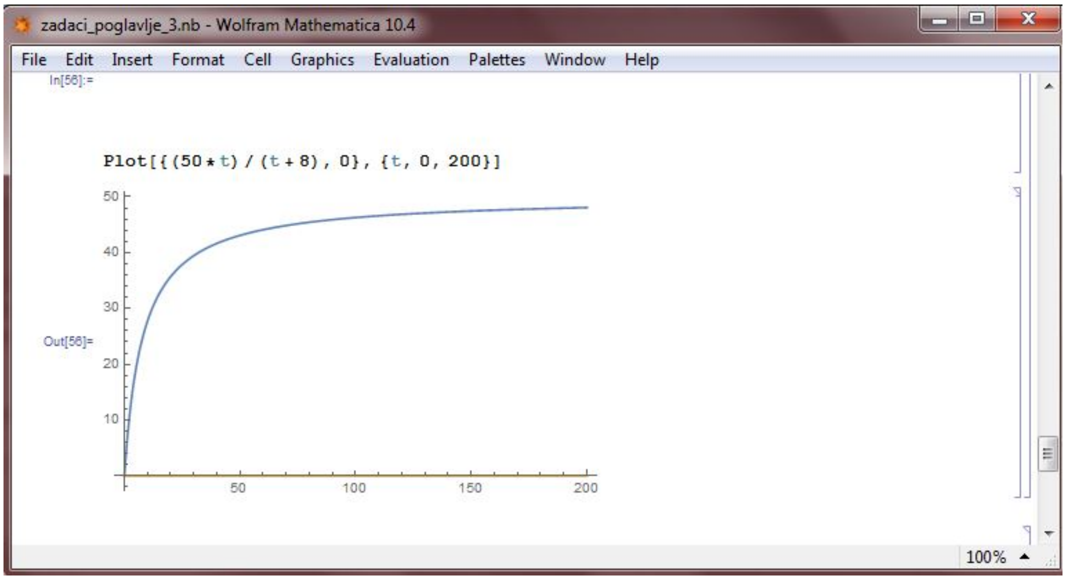
1. *Izračunajte koliko komponenti zaposlenik može sastaviti u* 10 *dana.*
2. *Ako je potrebno sastaviti* 40 *komponenti u što kraćem roku, koliko će trebati zaposleniku vremena?*
3. *Nacrtajte graf funkcije te komentirajte. Odredite vertikalnu i horizontalnu asimptotu.*

Rješenje.

1. $N(10) = 27.7778$. *Otprilike* 28 *komponenti.*

2. 32

3. *Vertikalna asimptota je pravac* $x = -8$ *što u ovom primjeru nije relevantno jer je* t *nenegativna varijabla. Horizontalna asimptota je pravac* $y = 50$.



Zadatak 4.5 *Zadana je funkcija troškova odstranjivanja* $x\%$ *štetne tvari iz proizvodnje,* $C(x)$ *u tisućama kuna:*

$$C(x) = \frac{120x}{215 - 2x}$$

1. *Izračunajte troškove ukoliko se želi odstraniti* 50% *štetne tvari.*

2. *Izračunajte troškove ukoliko se želi odstraniti* 100% *štetne tvari.*

3. *Odredite domenu i sliku funkcije, te komentirajte.*

4. *Ukoliko poduzeće ima u svom budžetu isplanirano* 300 *kuna koje može potrošiti za odstranjivanje štetne tvari, koliki je maksimalan postotak štetne tvari moguće odstraniti?*

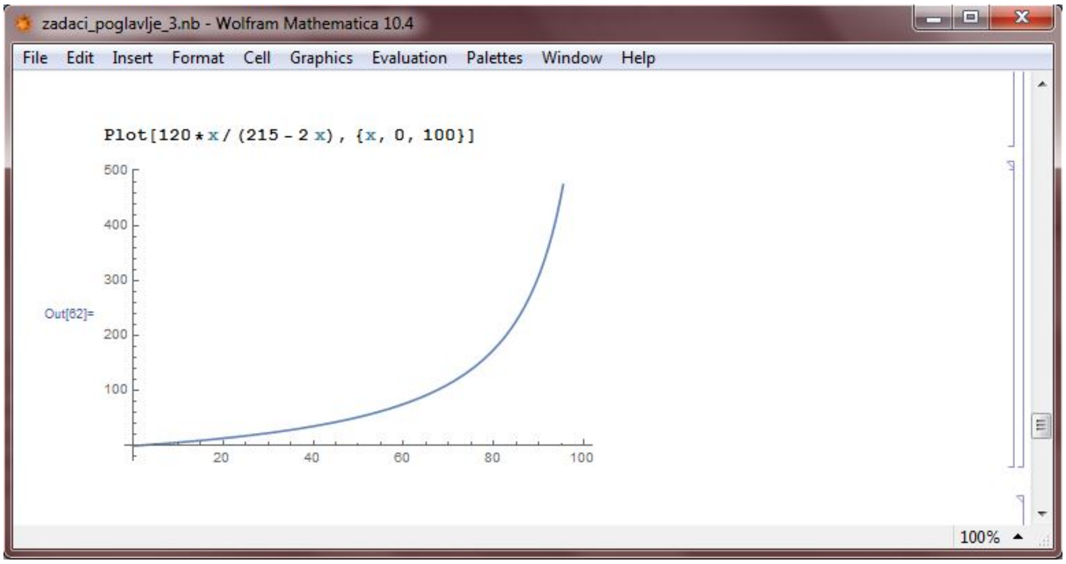
5. *Nacrtajte graf funkcije u Wolframovoj Mathematici, te komentirajte njezin rast.*

Rješenje.

1. $52,17$

2. 800

3. *Matematički domena je skup* $\mathbb{R} \setminus \{\frac{215}{2}\}$. *Domena koja ima smisla je interval* $[0, 100]$ *jer je* x *postotak. Ako je domena* $[0, 100]$, *sliku funkcije ćemo odrediti iz grafa:*



Slika funkcije je interval $[0, 800]$.

4. 89.5833%

5. *Funkcija raste na cijeloj svojoj domeni.*

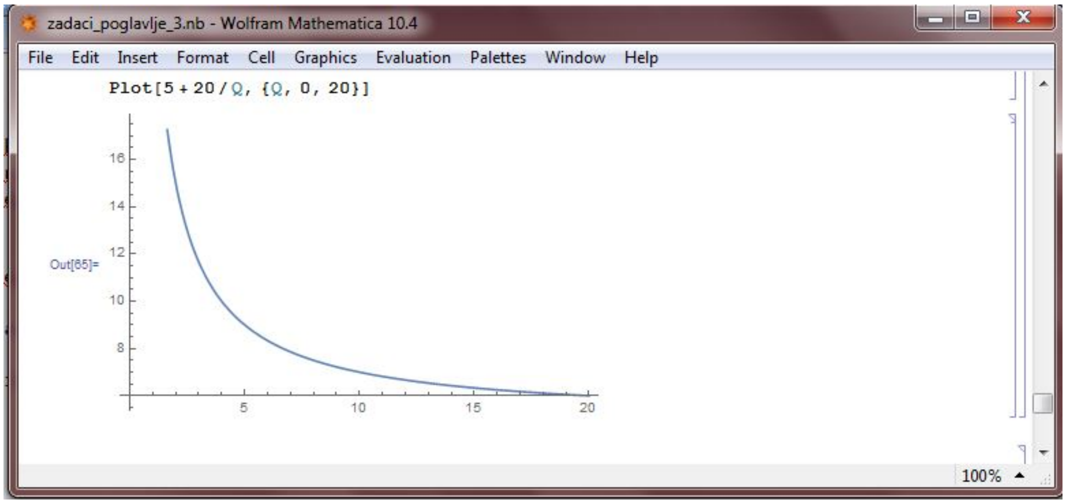
Zadatak 4.6 *Zadana je funkcija ukupnih troškova proizvodnje* $C(Q) = 5Q + 20$, *gdje je* Q *količina proizvodnje.*

1. *Izvedite funkciju prosječnih troškova proizvodnje i grafički je prikažite. Uputa: vidite primjer 4.35.*

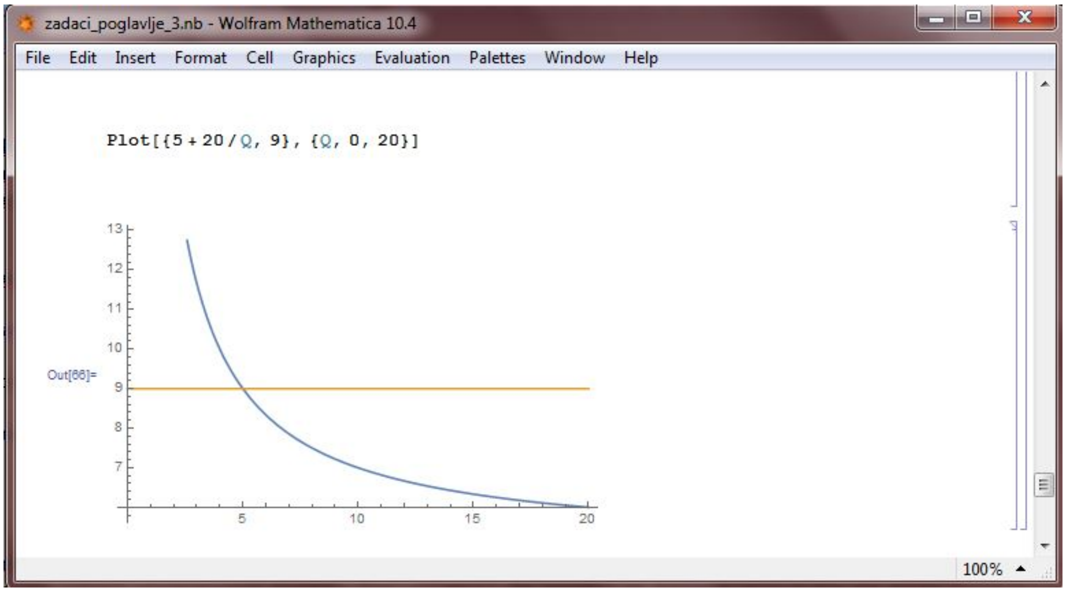
2. *Ukoliko je prodajna cijena proizvoda jednaka 2, za koje je količine proizvodnje poduzeće profitablino? Grafički prikažite rješenje.*

Rješenje.

1. $AC(Q) = 5 + \frac{20}{Q}$. *Graf:*



2. *Za količine za koje je $AC(Q) < 9$. Znači za količine iz intervala $(5, +\infty)$.*



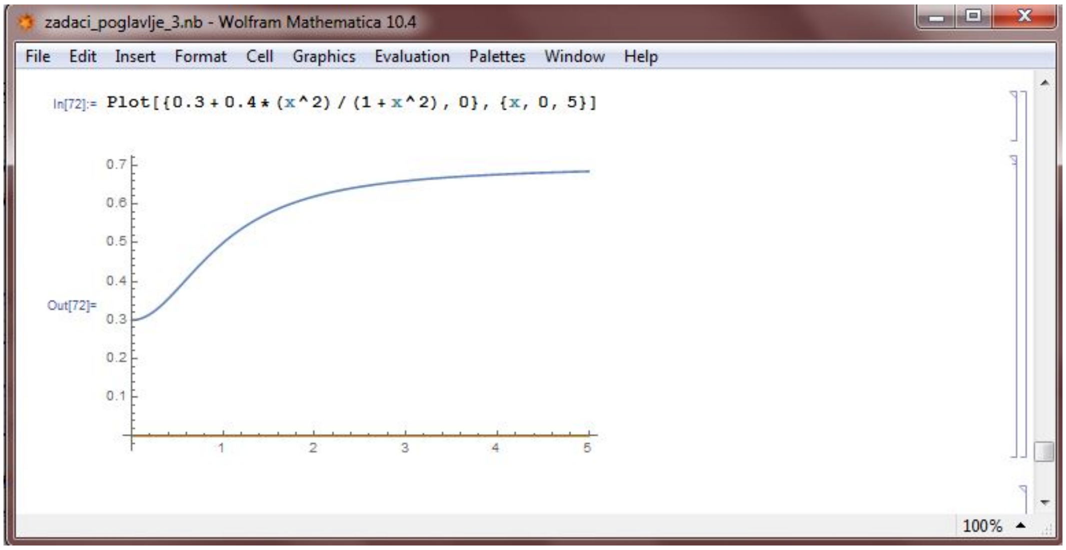
Zadatak 4.7 *Zadana je ADBUG funkcija jednog poduzeća kao $m(x) = 0.3 + 0.4\frac{x^2}{1+x^2}$. Pritom su x sredstva uložena u promociju, a $m(x)$ tržišni udjel promatrane marke. Dakle, $m(x)$ je postotak tržišta na koje promatrano poduzeće plasira svoj proizvod (ili marku).*

1. *Izračunajte tržišni udjel promatrane marke ako su uložena sredstva u promociju jednaka* 12.
2. *Izračunajte tržišni udjel promatrane marke ako su uložena sredstva u promociju jednaka* 120.
3. *Nacrtajte graf funkcije u Wolframovoj Mathematici za različite intervale varijable x.*

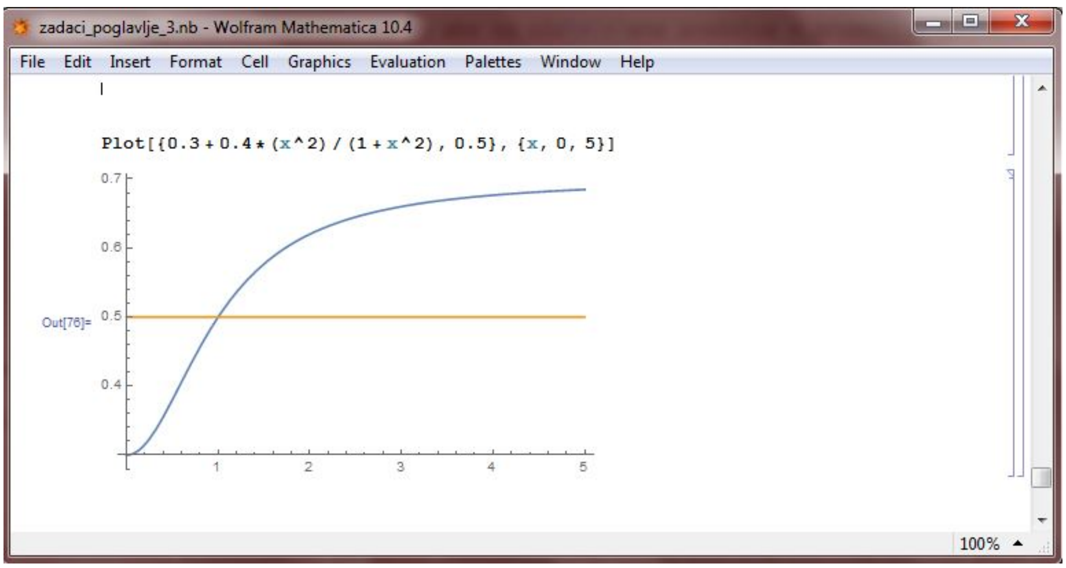
4. *Koliko treba uložiti u promociju da bi udjel na tržištu bio barem 50%? Prikažite rješenje grafički.*
5. *Komentirajte rezultate pod (1) i (2). Što biste predložili odjelu marketinga promatranog poduzeća, koliko uložiti u promociju?*

Rješenje.

1. 0.697241
2. 0.699972



3. *Treba vrijediti* $m(x) \geq 0.5$. *Slijedi da je* $x \geq 1$.



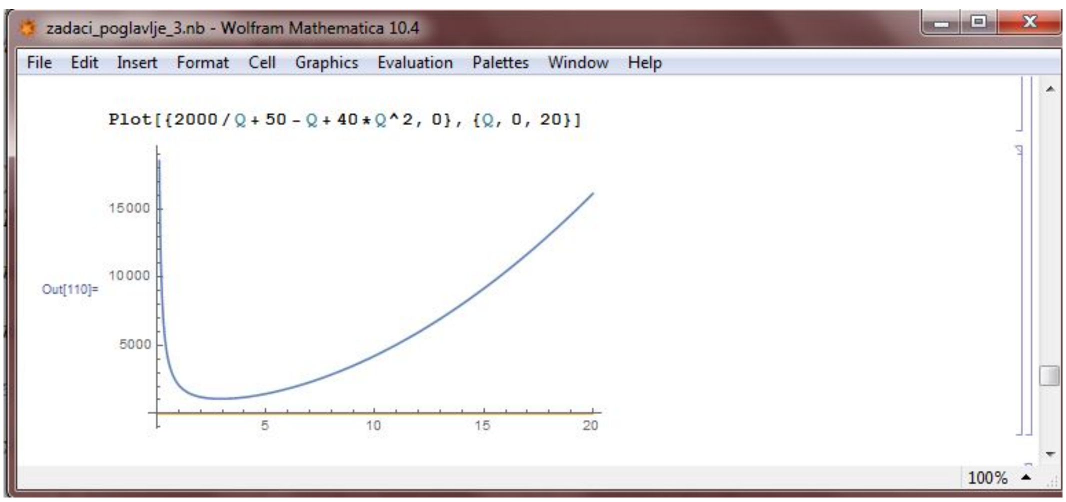
4. *Razlika u tržišnom udjelu za* $x = 12$ *i* $x = 120$ *nije velika. Sugestija je subjektivna, ali vjerojatno bi se ulog* $x = 10$ *mogao smatrati razumnim.*

Zadatak 4.8 *Zadana je funkcija ukupnih troškova proizvodnje za jedno poduzeće,* $C(Q) = 200 - 20Q^2 + 2Q^3$*, gdje je* Q *količina proizvodnje, a* $C(Q)$ *su ukupni troškovi.*

1. *Izračunajte fiksne troškove.*
2. *Izračunajte varijabilne troškove.*
3. *Izvedite funkciju prosječnih troškova proizvodnje.*
4. *Grafički prikažite funkciju prosječnih troškova proizvodnje. Uputa: vidite primjer 4.35.*
5. *Uz koju se količinu proizvodnje ostvaruju minimalni prosječni troškovi i koliko oni iznose?*
6. *Izvedite prosječne varijabilne troškove.*
7. *Grafički prikažite prosječne varijabilne troškove.*
8. *Na istoj slici, za* Q *iz različitih intervala, nacrtajte grafove prosječnih troškova i prosječnih varijabilnih troškova, te komentirajte njihov odnos.*

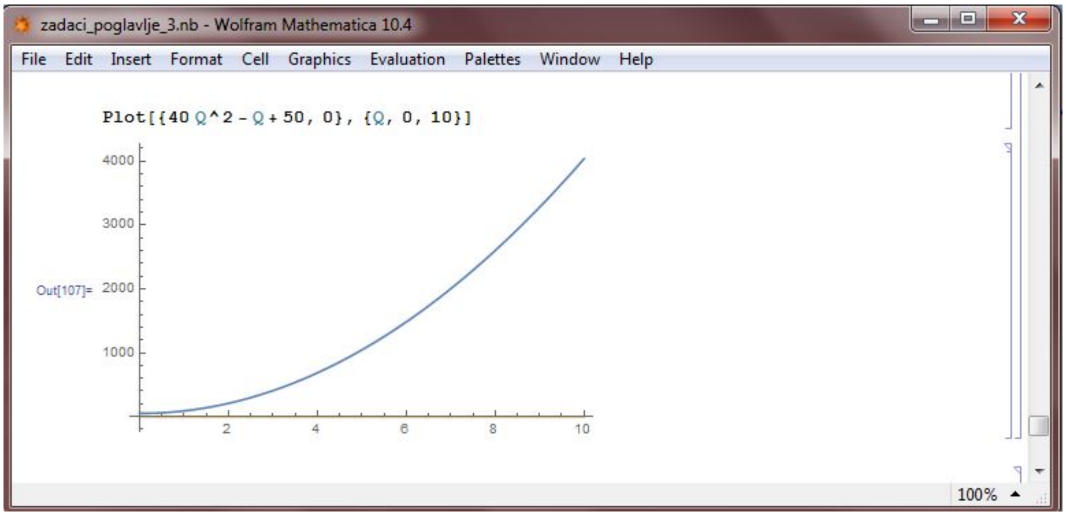
Rješenje.

1. $FC(Q) = 2000$
2. $VC(Q) = 40Q^3 - Q^2 + 50Q$
3. $AC(Q) = \frac{2000}{Q} + 50 - Q + 40Q^2$
4. *Graf:*

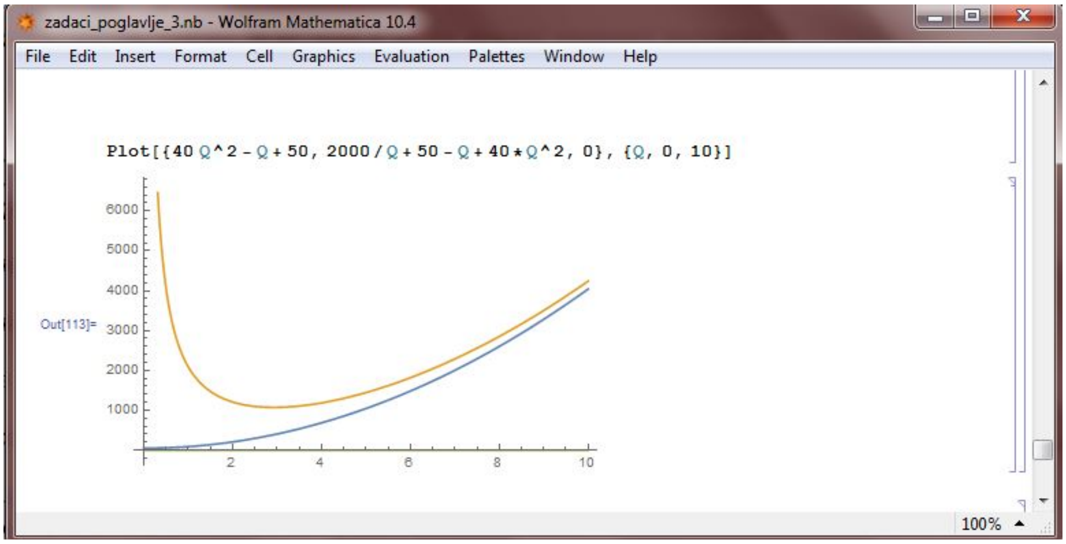


5. *Za* $Q = 2.92819$ *minimalni prosječni troškovi iznose* 1073.06.
6. $AVC(Q) = 40Q^2 - Q + 50$

7. *Graf:*



8. *Za veće količine, prosječni troškovi i prosječni varijabilni troškovi postaju približno jednaki.*



Zadatak 4.9 *Martin želi štedjeti kako bi za godinu dana imao dovoljno novaca za novi pametni telefon.*

1. *Ako pametni telefon košta* 1200 *kuna, koliko Martin mora uložiti danas uz godišnji kamatnjak* 2%, *složen i dekurzivan obračun kamata? Uputa: vidite primjer 4.40.*

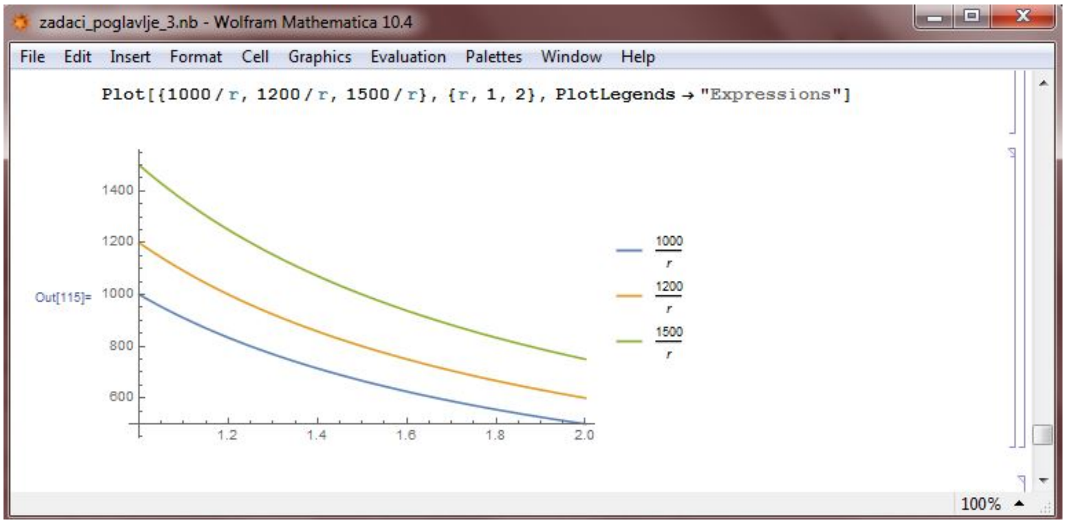
2. *Uz pretpostavku promjenjivog kamatnjaka, na istoj slici, grafički prikažite funkciju početne vrijednosti u ovisnosti o dekurzivnom kamatnom faktoru* r, *a za konačne vrijednosti* 1000 *kuna,* 1200 *kuna i* 1500 *kuna. Komentirajte.*

3. *Ako je početna vrijednost* $Y_0 = 1000$ *kuna, a konačna vrijednost nakon godinu dana* 1200 *kuna, uz koji je kamatnjak uložen početni iznos?*

Rješenje.

1. 1176.47

2. *Funkcija početne vrijednosti pada s porastom* $r - a$*, tj., kamatnjaka. Što je konačna vrijednost veća, početna vrijednost je također veća.*



3. $p = 20$

Zadatak 4.10 *Maja želi štedjeti kako bi za godinu dana imala dovoljno novaca za novi pametni telefon. Baka joj je obećala pomoći uz uvjet da preko ljeta radi i zaradi* 30% *iznosa potrebnog za kupnju, a ona će uložiti u banku iznos tako da iduće godine zajedno raspolažu s* 900 *kuna koliko pametni telefon košta.*

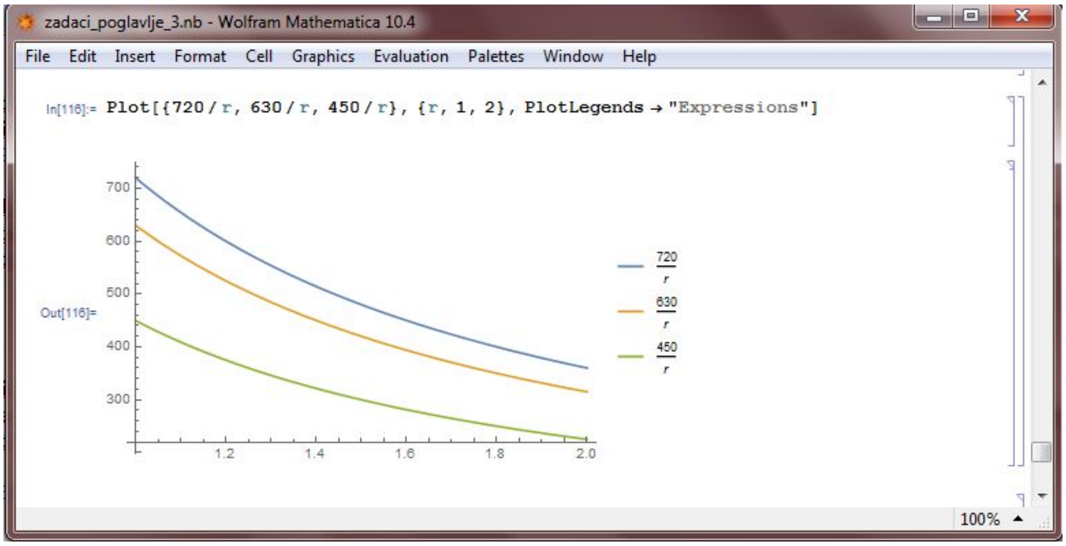
1. *Koliko baka mora uložiti danas uz godišnji kamatnjak* 2%*, složen i dekurzivan obračun kamata? Uputa: vidite primjer 4.40.*

2. *Uz pretpostavku promjenjivog kamatnjaka, na istoj slici, grafički prikažite funkciju početne vrijednosti u ovisnosti o dekurzivnom kamatnom faktoru* r*, ako Maja mora zaraditi* 20%*,* 30% *i* 50% *iznosa. Komentirajte.*

Rješenje.

1. *Maja će zaraditi* 270 *kn, a baka će uložiti* 617.65 *kn.*

2. *Funkcija početne vrijednosti pada s porastom od* r*, tj., kamatnjaka. Što je postotak koji Maja mora zaraditi veći veći, početna vrijednost je manja.*



Zadatak 4.11 *Za tri godine želite otići na maturalac. Maturalac košta* 2800 *kuna, a štedjet ćete tri godine tako što ćete početkom svake godine uplatiti određeni periodički iznos.*

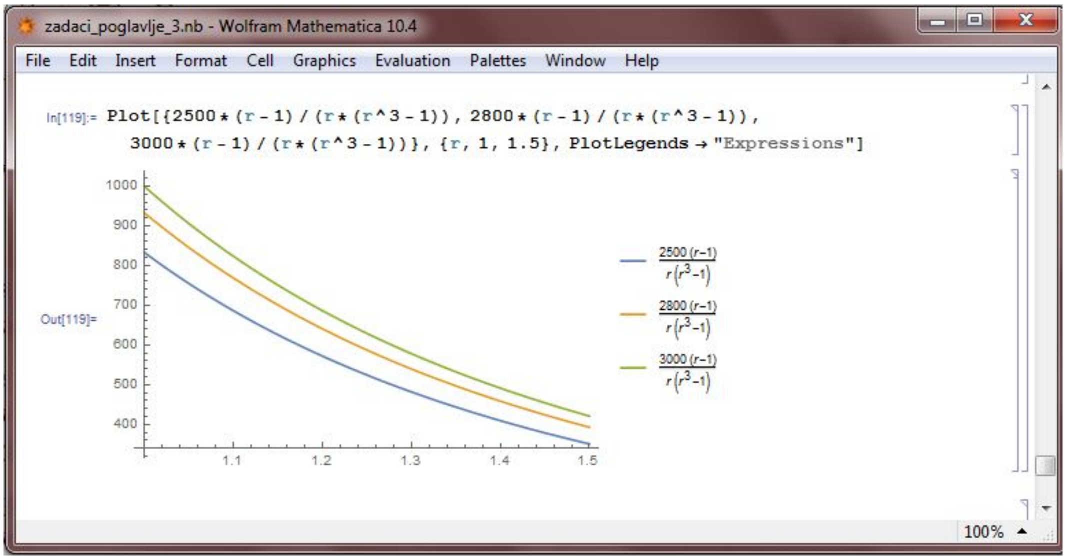
1. *Koji se periodički iznos mora uložiti početkom prve, druge i treće godine da bi se na kraju treće godine raspolagalo s iznosom od* 2800 *kuna? Godišnji kamatnjak je* 0.8, *a obračun dekurzivan i složen. Uputa: vidite primjer 4.40.*

2. *Uz pretpostavku promjenjivog kamatnjaka, na istoj slici, grafički prikažite funkciju periodičkog iznosa* R *u ovisnosti o dekurzivnom kamatnom faktoru* r *ako je cijena maturalca* 2500 *kuna,* 2800 *kuna i* 3000 *kuna. Komentirajte.*

Rješenje.

1. 918.56 *kn*

2. *Funkcija periodičkog iznosa raste s porastom konačne vrijednosti.*



Zadatak 4.12 *Pretpostavimo da je zadovoljstvo grupe kupaca uslijed kupovine tableta modelirano funkcijom* $u(x) = \log x + \sqrt{x}$*, gdje je* x *količina tableta, a* u *oznaka za korisnost.*

1. *Izračunajte korisnost grupe kupaca ako je količina kupljenih tableta jednaka* 1, 3, 5, 7 *i* 9.

2. *Za svako povećanje količine tableta, izračunajte povećanje korisnosti grupe kupaca. Što primjećujete? Ekonomski komentirajte.*

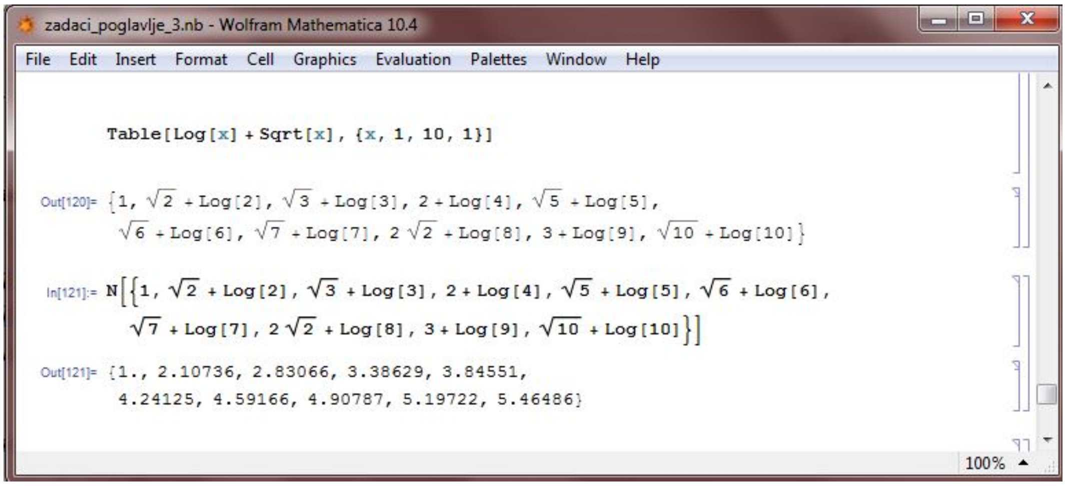
3. *Nacrtajte graf funkcije korisnosti i komentirajte graf nastavno na zaključak iz (2).*

4. *Koliko tableta grupa kupaca mora kupiti da bi korisnost bila veća od* 4*?*

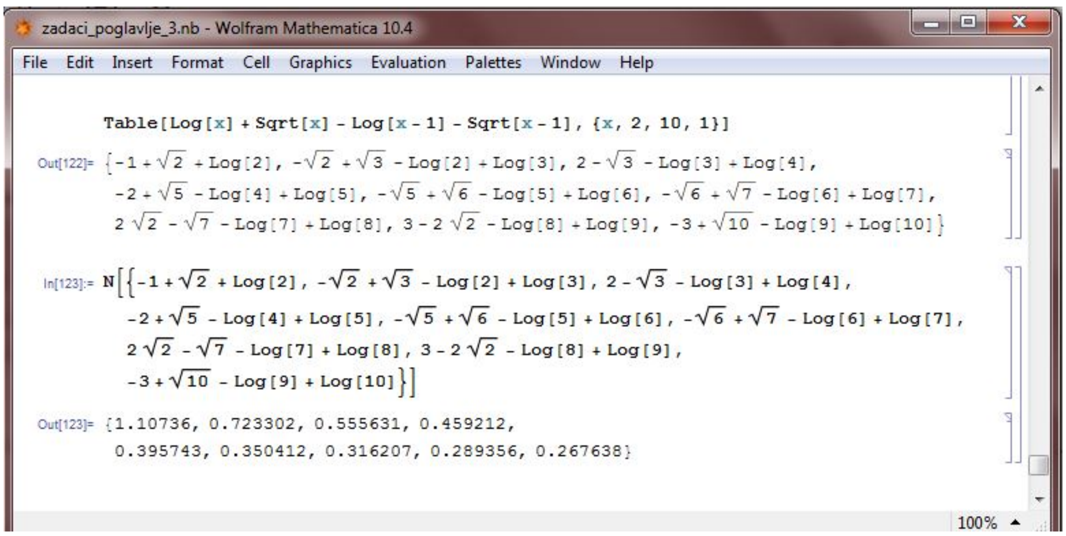
5. *Ukoliko je količina kupljenih tableta funkcija cijene, tj.,* $x(p) = 3000 - p$*, izrazite korisnost kao funkciju cijene i grafički je prikažite. Komentirajte.*

Rješenje.

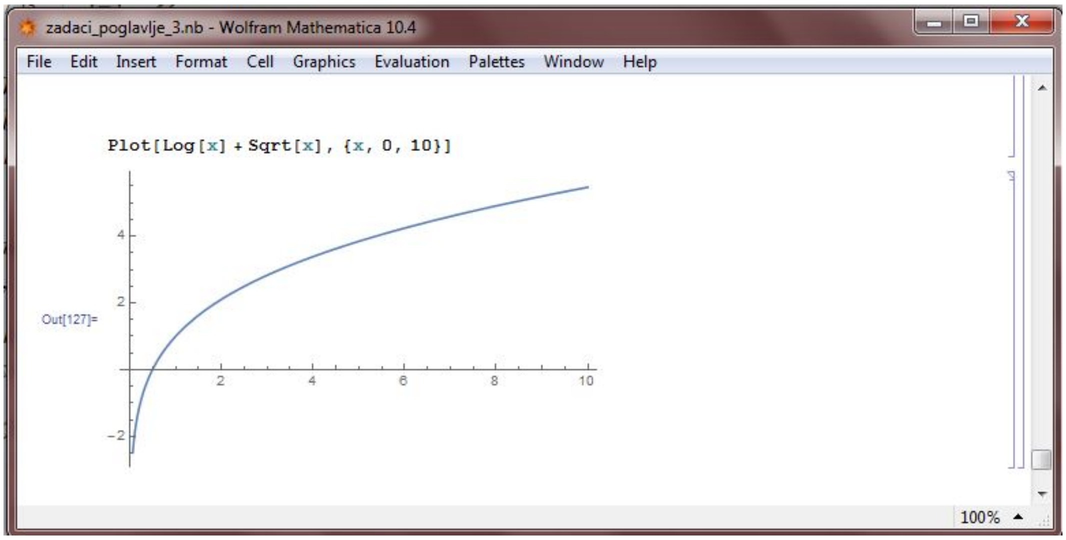
1. *Vrijednosti funkcije*



2. Porasti funkcije se smanjuju

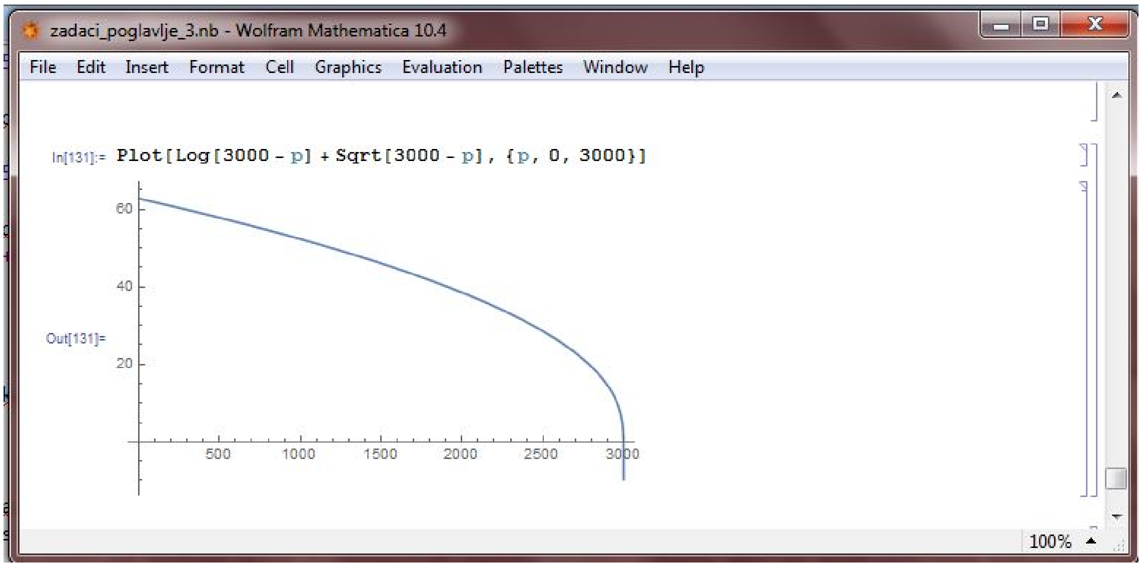


3. Funkcija pokazuje opadajuće prinose



4. *Rješavamo jednadžbu* $\log x + \sqrt{x} = 4$. *Slijedi da je* $x = 5.37459$, *pa grupa mora kupiti barem* 6 *tableta.*

5. $u(x) = \log(3000 - p) + \sqrt{3000 - p}$. *Korisnost pada s porastom cijene. Ispočetka sporo, pa sve brže.*



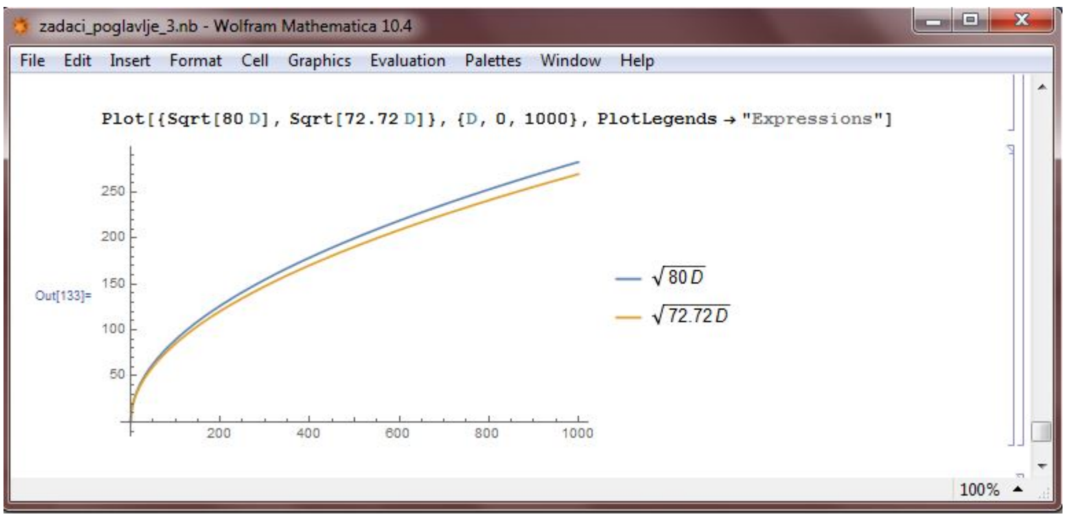
Zadatak 4.13 *Supermarket naručuje raznu robu, između ostalog i sokove. Da bi minimizirao troškove naručivanja i držanja zaliha, koristi model optimalne količine naručivanja.*

1. *Uz pretpostavku da je trošak jedne narudžbe* 600, *a jedinični trošak držanja zaliha* 15, *izvedite model optimalne količine naručivanja u ovisnosti o godišnjoj potražnji za sokovima u tom supermarketu.*

2. *Ukoliko je godišnja potražnja* 10000 *kutija, koliko kutija sokova treba naručiti u svakoj pošiljci?*
3. *Koliko će puta u roku od godine dana supermarket naručiti sokove ako je godišnja potražnja* 10000 *kutija?*
4. *Ukoliko se trošak držanja zaliha poveća za* 10%, *izvedite model optimalne količine naručivanja u ovisnosti o godišnjoj potražnji za sokovima.*
5. *Na istoj slici grafički prikažite modele optimalne količine naručivanja uz trošak držanja zaliha* 15 *i izračunati trošak iz (4). Komentirajte.*

Rješenje.

1. $EOQ = \sqrt{80D}$
2. 282.84, *tj.*, 283 *kutije*
3. 35.36, *tj.*, *oko* 35 *puta*
4. $EOQ = \sqrt{72.72D}$
5. *Što je trošak držanja zaliha veći, optimalna količina naručivanja je manja.*



Poglavlje 5

Matematičko modeliranje jednostavnim funkcijama više varijabli

5.1 Funkcije dviju i više varijabli

U prvom poglavlju kad smo uvodili pojam funkcije spominjali smo funkcije više varijabli jer je prirodno da mnogi procesi ovise o više ulaznih varijabli. Cijena koju ćete plaćate na blagajni pri kupnji neke robe, funkcija je u kojoj su ulazne vrijednosti cijene proizvoda, količina proizvoda i različiti popusti na cijene određenih proizvoda i na ukupnu cijenu. Brzina titranja čestice vala je funkcija položaja i trenutka. Opstanak neke biološke vrste ovisi o mogućnosti reprodukcije, o izvorima hrane i količini grabežljivaca. U matematičkom modeliranju različitih pojava, pokušavamo pojednostavniti računanje i smanjiti broj varijabli koje utječu na neki proces. Često nije moguće imati samo jednu varijablu u modelu koji barem donekle odgovara stvarnosti. Zbog toga je potrebno znati raditi s funkcijama više varijabli. Mi ćemo se u ovom poglavlju kratko upoznati s nekim jednostavnim funkcijama dviju varijabli.

Funkcije mogu biti zadane na konačnim skupovima, tako da su definirane za svaku pojedinačnu vrijednost ili na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ i njegovim podskupovima. Funkcija dviju varijabli definirana za sve parove brojeva $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ obično se zapisuje

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad z = f(x, y).$$

Skup svih parova realnih brojeva (x, y) označavamo s $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ili $\mathbb{R}^2$. Funkcija triju varijabli definirana za sve trojke brojeva $(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se obično zapisuje

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad u = f(x, y, z).$$

Skup svih trojki realnih brojeva (x, y, z) označavamo s $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ili $\mathbb{R}^3$.

Funkcija n varijabli definirana za sve n-torke brojeva $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se obično zapisuje

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Podsjetimo se funkcija više varijabli koje smo imali u prvom poglavlju.

Primjer 5.1 *Stroj za pravljenje kruha ubacivanjem jedne od 3 vrste brašna, vode i kvasca u stroj, proizvodi pšenični, kukuruzni ili raženi kruh. Funkcioniranje stroja za pravljenje kruha opisano je jednakostima*

$$\begin{aligned} f(psbrasno, voda, kvasac) &= psenicnikruh \\ f(kukbrasno, voda, kvasac) &= kukuruznikruh \\ f(razbrasno, voda, kvasac) &= razenikruh. \end{aligned}$$

Domena ove funkcije f je skup trojki
$\{(psbrasno, voda, kvasac), (kukbrasno, voda, kvasac), (razbrasno, voda, kvasac)\}$,
a kodomena je skup $\{psenicnikruh, kukuruznikruh, razenikruh\}$. U ovom primjeru bi se modeliranje proizvodnje kruha zaista moglo svesti na funkciju jedne varijable, jer ovako definirana funkcija f u biti ovisi samo o jednoj varijabli, vrsti brašna. Sastojci kruha jesu i kvasac i voda, ali oni ne mijenjaju vrstu kruha. To može napraviti samo vrsta brašna.

Primjer 5.2 *Cijene raznih proizvoda su c_1,c_2, c_3. Ako je netko kupio 5 proizvoda cijene c_1, 7 proizvoda cijene c_2, 3 proizvoda cijene c_3, onda je linearnom funkcijom triju varijabli*

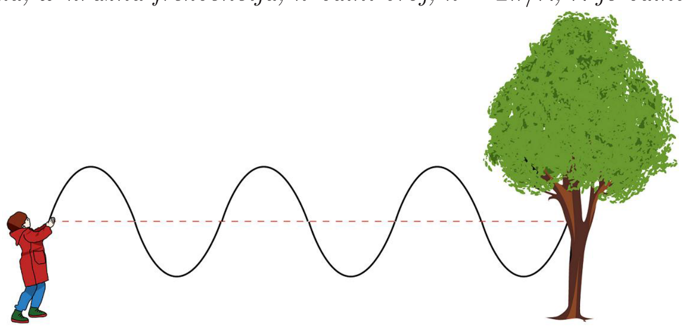
$$f(c_1, c_2, c_3) = 5c_1 + 7c_2 + 3c_3$$

određen ukupan iznos koji treba platiti za sve što je kupljeno. Funkcija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Primjer 5.3 *Sjetimo se primjera iz modeliranja trigonometrijskim funkcijama, u kojem se Maja igra užetom. Maja je na jednom kraju zatitrala uže u vertikalnom smjeru. Taj poremećaj se širio užetom u formi vala koji se može napisati kao funkcija dviju varijabli koje predstavljaju položaj x i vrijeme t*

$$y(x, t) = A \sin(\omega t - kx),$$

gdje je A je amplituda vala, ω kružna frekvencija, k valni broj, $k = 2\pi/\lambda$, λ je valna duljina.



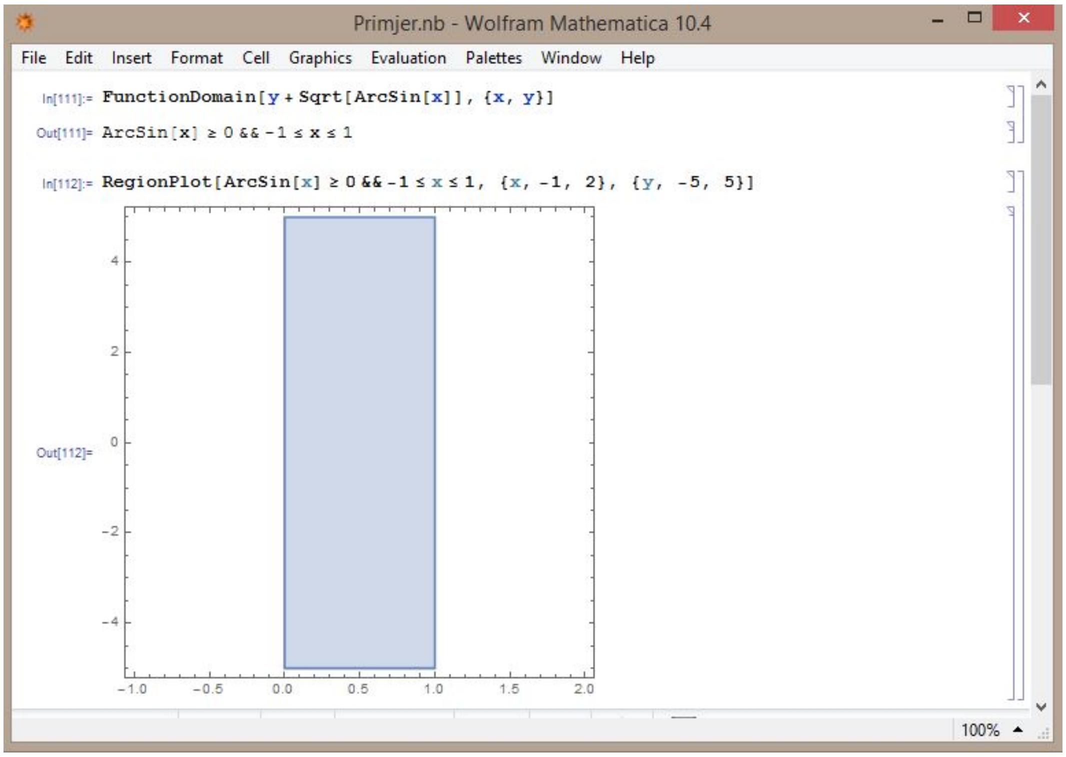
Za neke funkcije više varijabli smo u prvom poglavlju računali područje definicije i kompoziciju funkcije, jer se to prirodno nadovezivalo kad smo te pojmove uveli za funkcije jedne varijable.

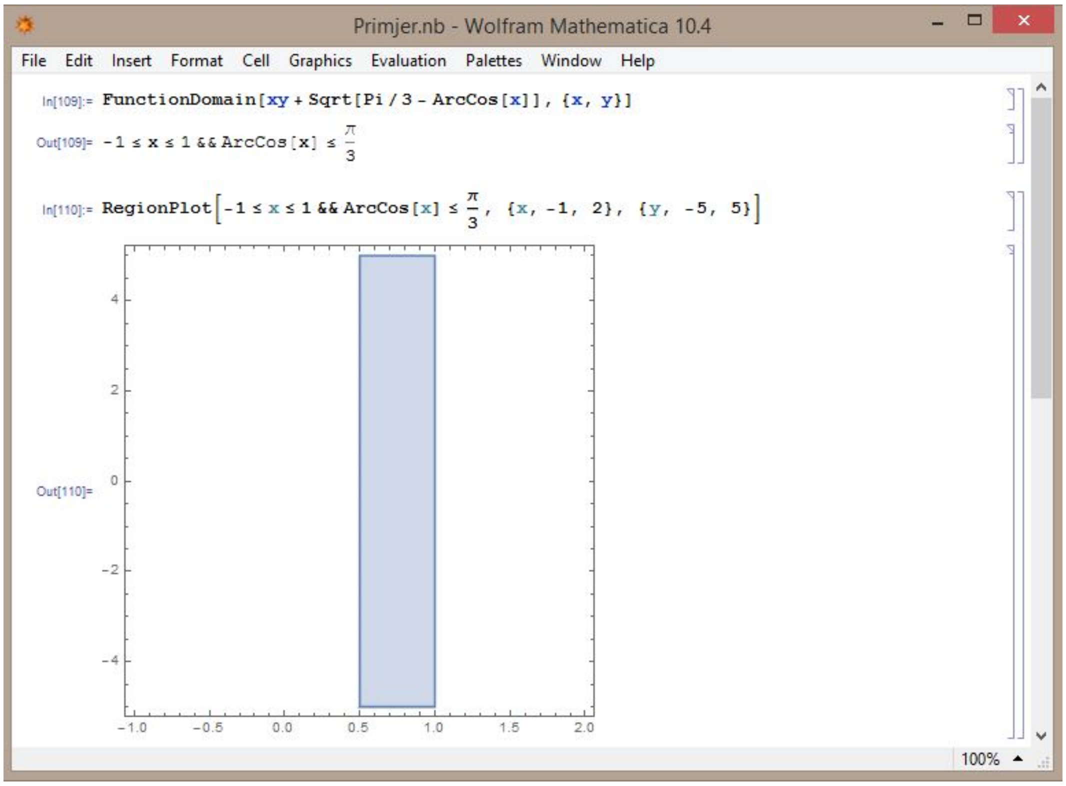
Graf funkcije jedne varijable čine sve točke $(x, f(x))$ za koje je $x \in \mathcal{D}$. Točke $(x, f(x))$ imaju dvije koordinate, pa iz toga zaključujemo da leže u ravnini. Ako imamo dvije ulazne varijable (x, y), onda se graf funkcije sastoji od točaka $(x, y, f(x, y))$. Točke koje imaju 3 koordinate su točke 3−dimenzionalnog prostora. Graf funkcije dviju varijabli nalazi se u 3-dimenzionalnom prostoru, dok se graf funkcije triju varijabli nalazi u 4-dimenzionalnom prostoru, i tako dalje. S obzirom da mi živimo u 3-dimenzionalnom prostoru, lako nam ga je zamisliti, što za prostore s višim dimenzijama nije slučaj.

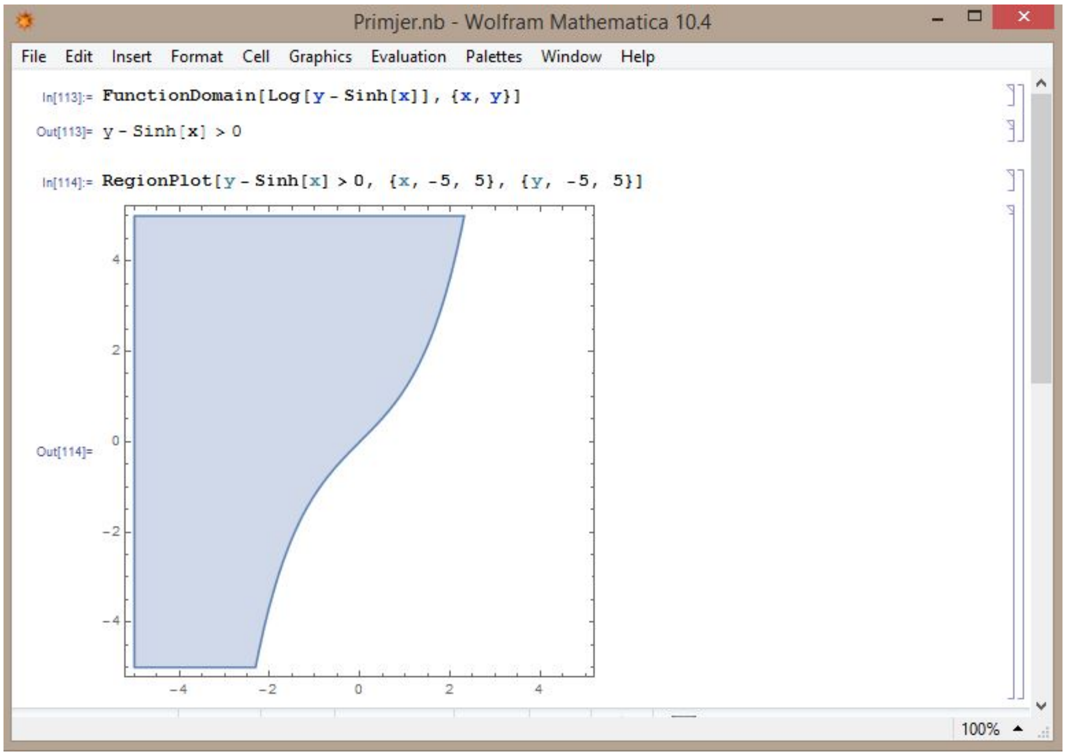
Domena funkcije dviju varijabli leži u $\mathbb{R}^2$, te za nju poštujemo ista pravila kao za računanje domene funkcije jedna varijable. Osnovna pravila kažu da moramo paziti da nazivnik ne bude nula, da izraz pod parnim korijenom bude pozitivan ili nula, te da izraz pod logaritmom bude pozitivan. Osnovnim pravilima treba dodati i područja definicije ciklometrijskih, hiperboličkih i area funkcija.

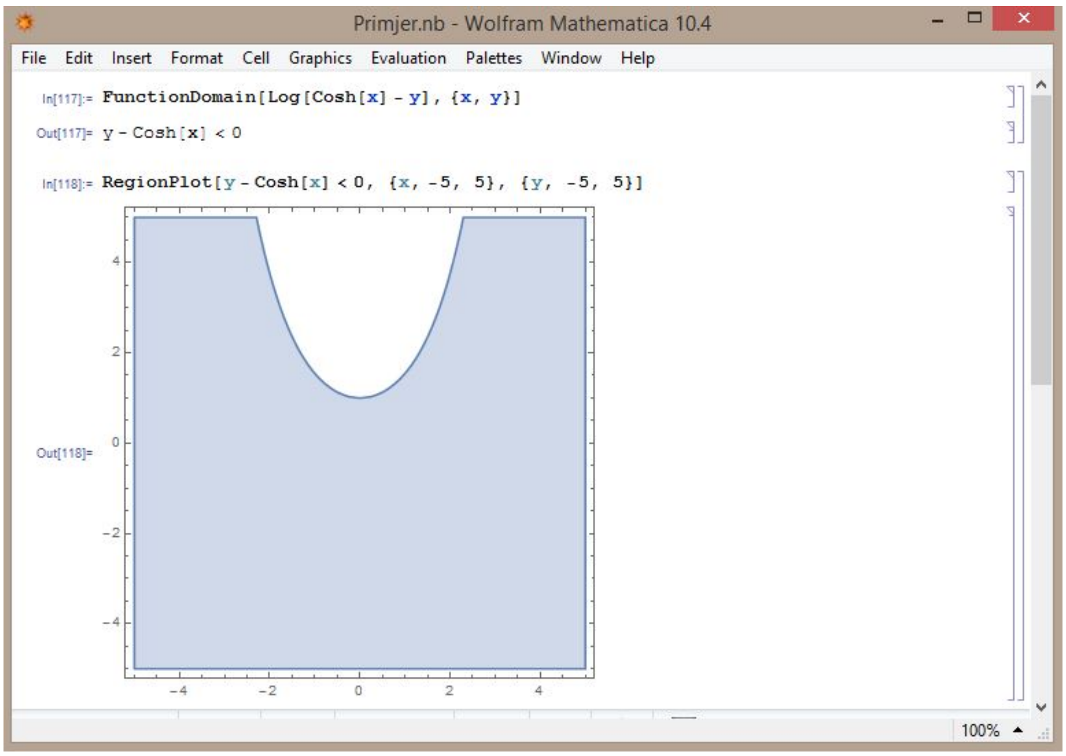
Primjer 5.4 *Odredite domenu funkcije i nacrtajte domenu pomoću Wolframove Mathematice*

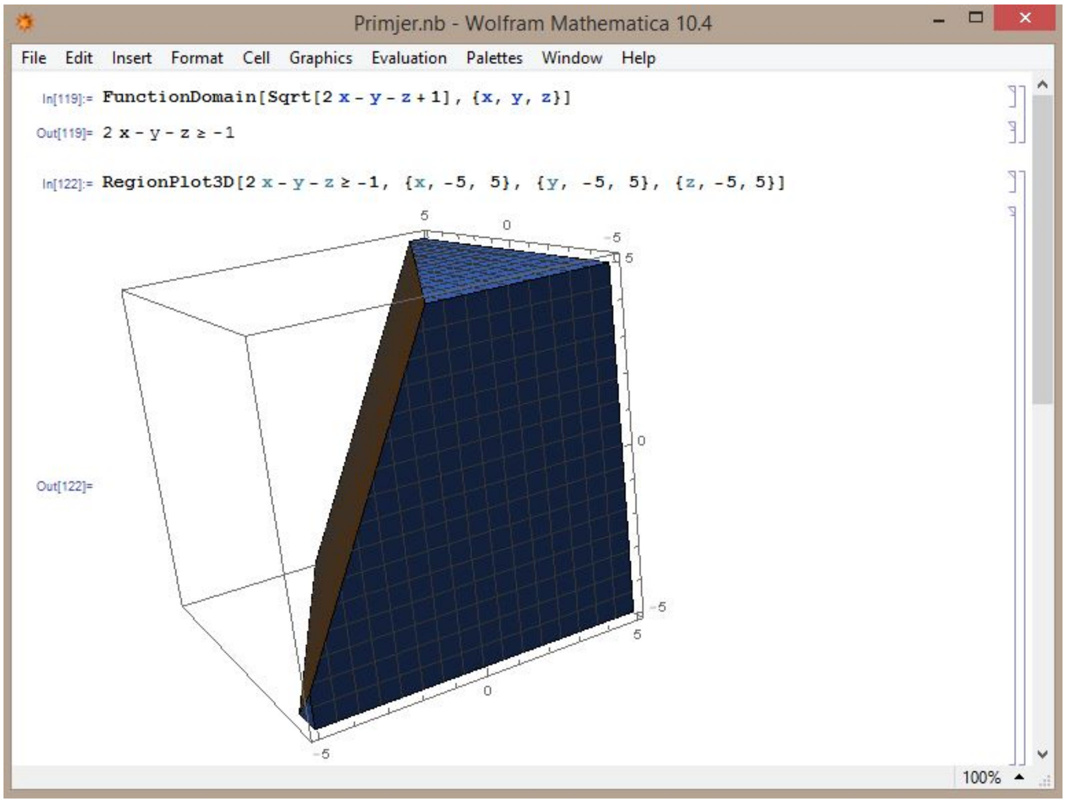
1. $f(x, y) = y + \sqrt{\arcsin x}$
2. $f(x, y) = xy + \sqrt{\frac{\pi}{3} - \arccos x}$
3. $f(x, y) = \ln (y - \operatorname{sh} x)$
4. $f(x, y) = \ln (\operatorname{ch} x - y)$




Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[109]:= FunctionDomain[xy + Sqrt[Pi / 3 - ArcCos[x]], {x, y}]
Out[109]= -1 ≤ x ≤ 1 && ArcCos[x] ≤ π/3
In[110]:= RegionPlot[-1 ≤ x ≤ 1 && ArcCos[x] ≤ π/3, {x, -1, 2}, {y, -5, 5}]
Out[110]=
4
2
0
-2
-4
-1.0
-0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
100%


Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[113]:= FunctionDomain[Log[y - Sinh[x]], {x, y}]
Out[113]= y - Sinh[x] > 0
In[114]:= RegionPlot[y - Sinh[x] > 0, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]
Out[114]=
100%


Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[117]:= FunctionDomain[Log[Cosh[x] - y], {x, y}]
Out[117]= y - Cosh[x] < 0
In[118]:= RegionPlot[y - Cosh[x] < 0, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]
Out[118]=
100%



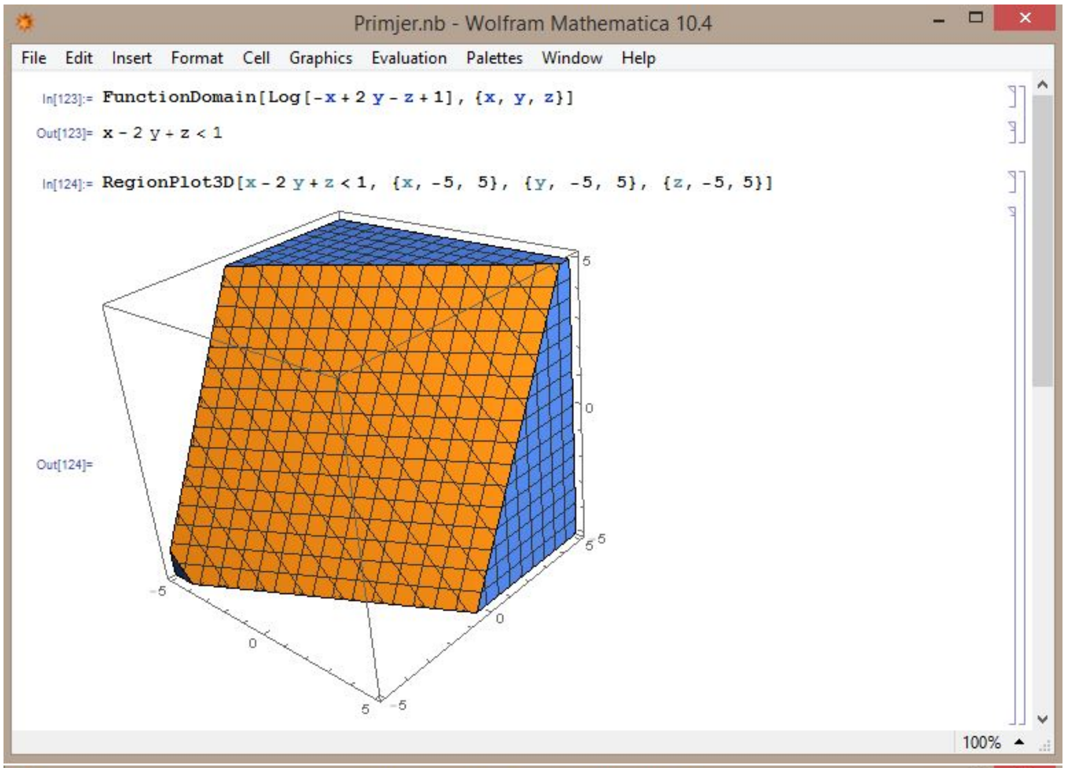
Domena funkcije tri varijable leži u $\mathbb{R}^3$, pa se pri crtanju koristi 3-dimenzionalna grafika. Nakon što pomoću Wolframove Mathematice nacrtate područje koje je domena, okrećite kvadar u kojem se nalazi domena da biste je vidjeli sa svih strana.

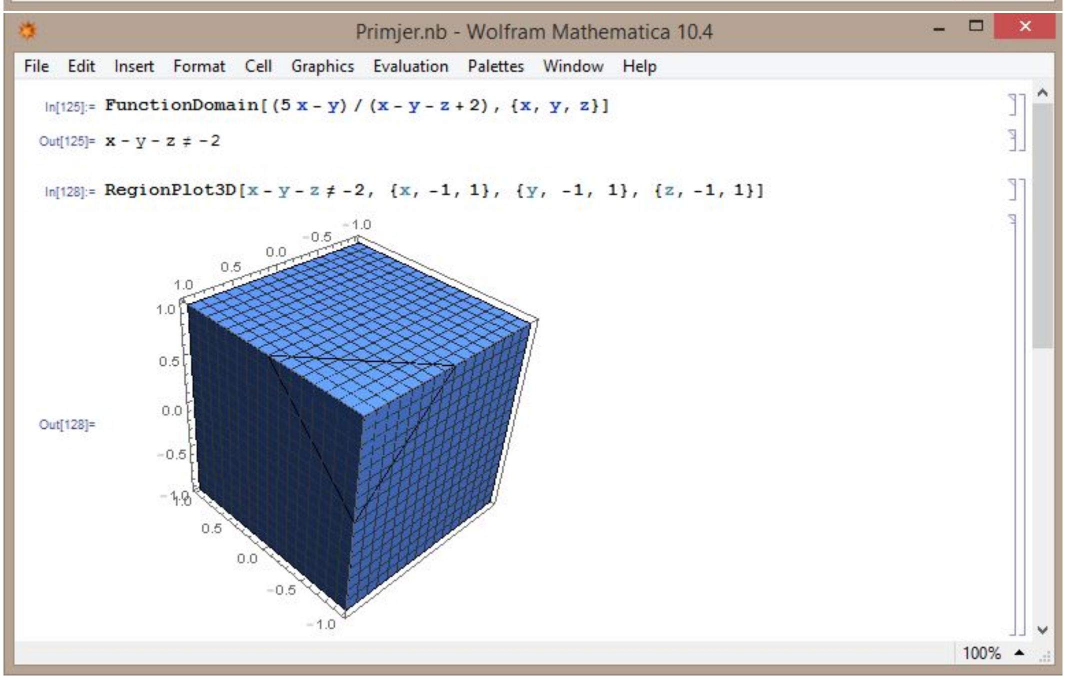
Primjer 5.5 *Odredite domenu funkcije i nacrtajte domenu pomoću Wolframove Mathematice*

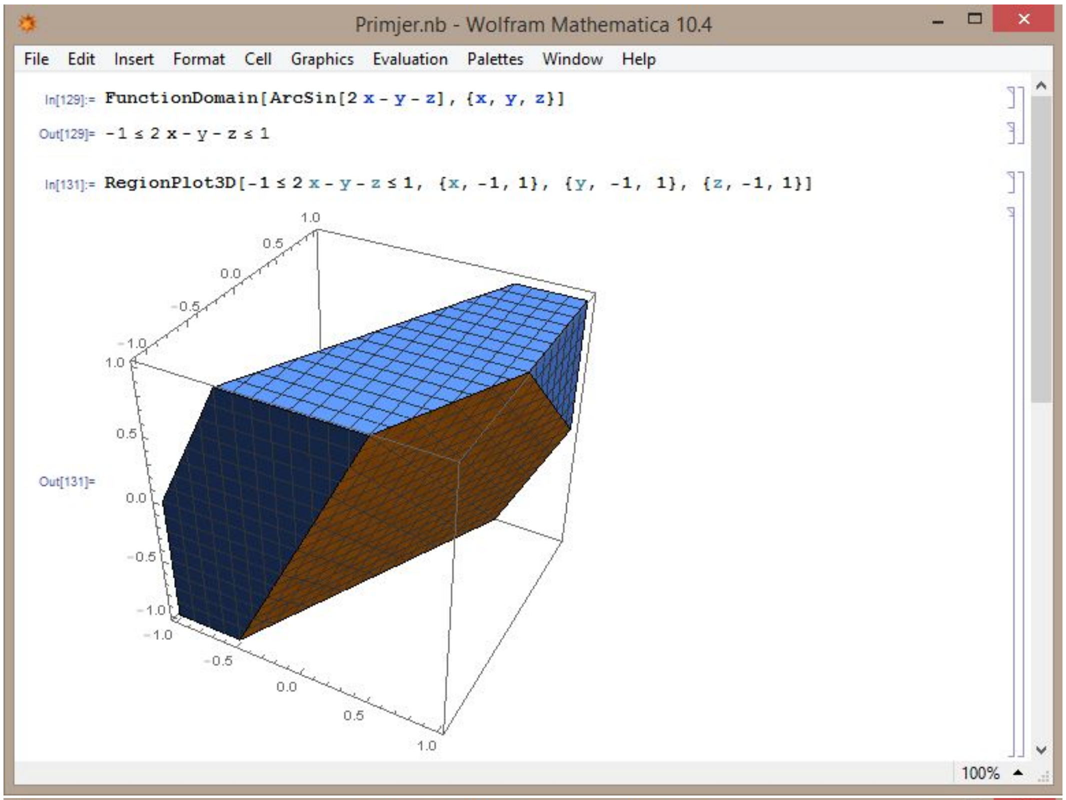
1. $f(x,y,z) = \sqrt{2x-y-z+1}$
2. $f(x,y,z) = \ln(-x+2y-z+1)$
3. $f(x,y,z) = \frac{5x-y}{x-y-z+2}$
4. $f(x,y,z) = \arcsin(2x-y-z)$
5. $f(x,y,z) = \arccos(x-y-z+1)$

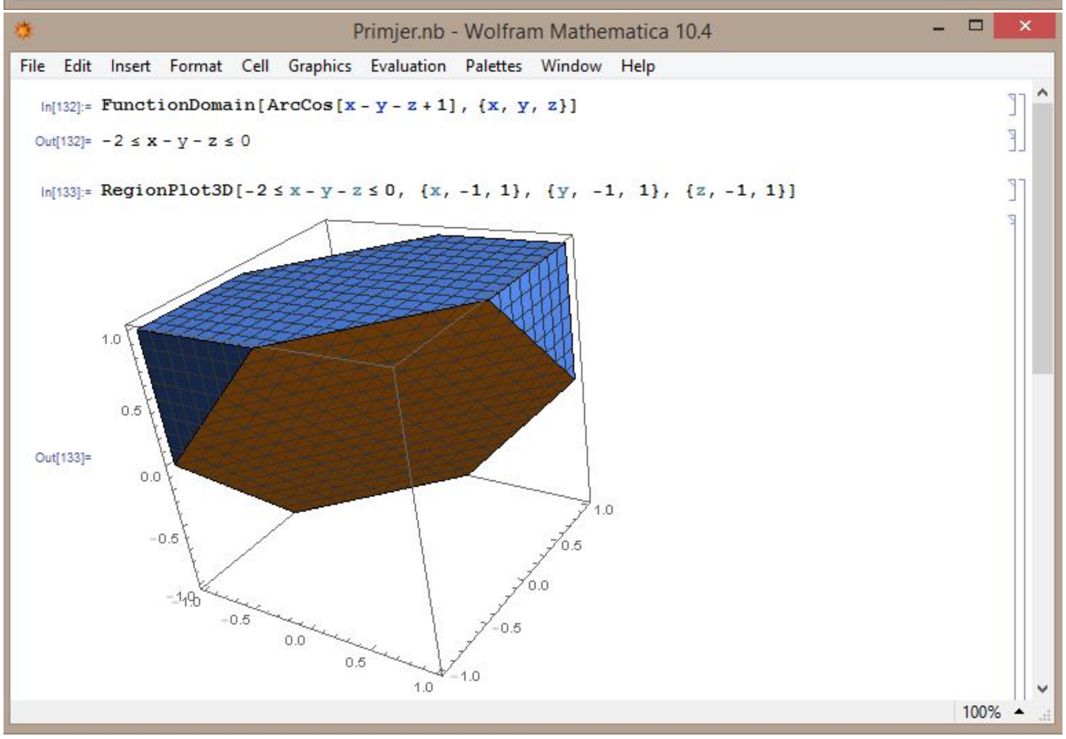
5.2 Jednadžba ravnine kao funkcija 2 varijable

Dobro nam je poznato da je graf linearne funkcije jedne varijable pravac koji leži u ravnini. Graf linearne funkcije dviju varijabli $f(x,y) = ax+by+c$ je ravnina u prostoru. Koordinatni sustav u prostoru ima 3 koordinatne osi, os x je apscisa, os y je ordinata, a os z je aplikata. Dio prostora za koji je $x, y, z > 0$ nazivamo prvim oktantom. Analogno kao što u ravnini imamo 4 kvadranta, tako u prostoru imamo 8

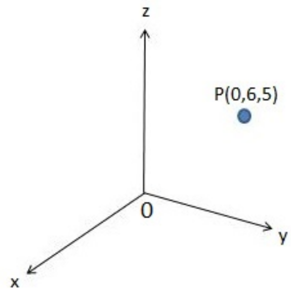

Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[123]:= FunctionDomain[Log[-x + 2 y - z + 1], {x, y, z}]
Out[123]= x - 2 y + z < 1
In[124]:= RegionPlot3D[x - 2 y + z < 1, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, {z, -5, 5}]
Out[124]=
100%


Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[125]:= FunctionDomain[(5 x - y) / (x - y - z + 2), {x, y, z}]
Out[125]= x - y - z ≠ -2
In[128]:= RegionPlot3D[x - y - z ≠ -2, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, -1, 1}]
Out[128]=
100%

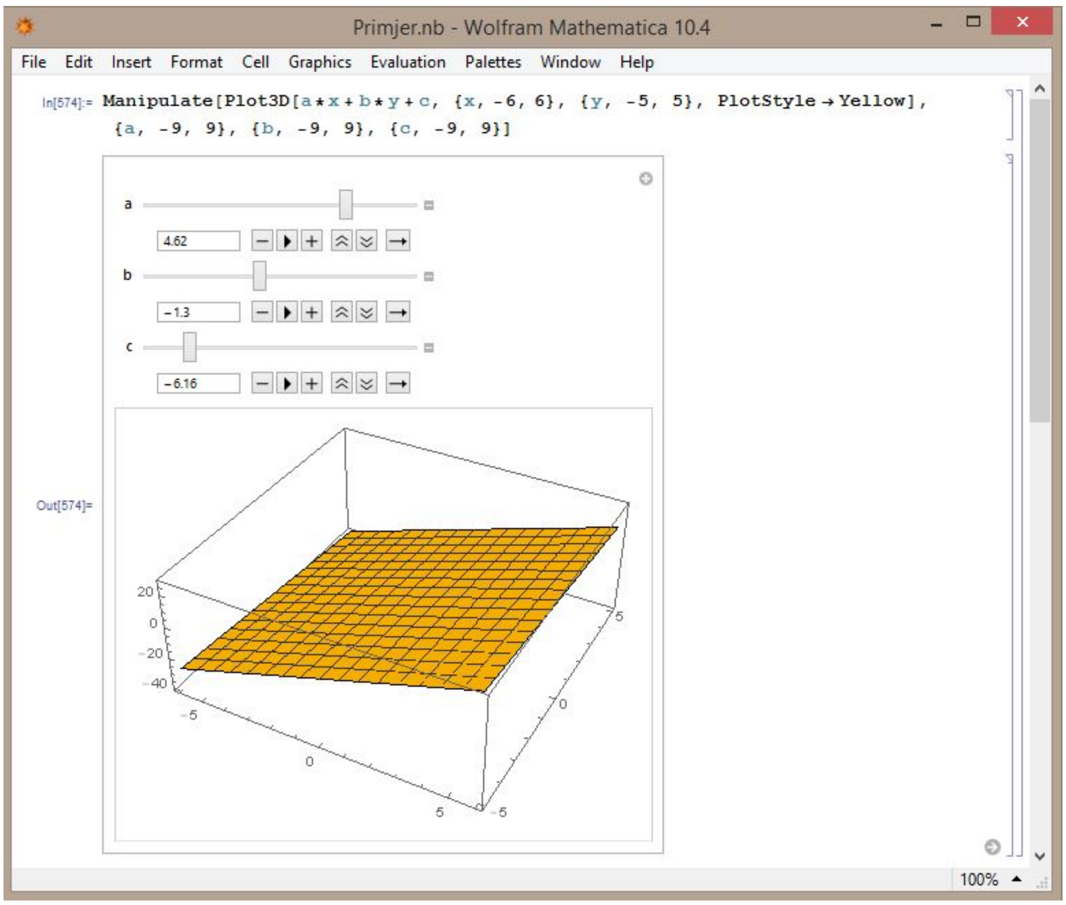

Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[129]:= FunctionDomain[ArcSin[2 x - y - z], {x, y, z}]
Out[129]= -1 ≤ 2 x - y - z ≤ 1
In[131]:= RegionPlot3D[-1 ≤ 2 x - y - z ≤ 1, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, -1, 1}]
Out[131]=
100%


Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[132]:= FunctionDomain[ArcCos[x - y - z + 1], {x, y, z}]
Out[132]= -2 ≤ x - y - z ≤ 0
In[133]:= RegionPlot3D[-2 ≤ x - y - z ≤ 0, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, -1, 1}]
Out[133]=
100%

oktanata. Slično kao u ravnini i u prostoru možemo imati i neki drugi koordinatni sustav, osim ovog kartezijevog pravokutnog sustava. Osim pravokutnog, najčešće se uzima polarni ili cilindrični sustav, što ovisi o tome s kojim objektima želimo raditi. Uvijek želimo imati koordinatni sustav takav da nam je jednadžba našeg objekta što jednostavnija. Mi ćemo se u ovom priručniku ipak zadržati samo na pravokutnom sustavu u prostoru.



Na slici je prikazano kako naredbom Manipulate možemo nacrtati graf linearne funkcije dviju varijabli $f(x, y) = ax + by + c$ za različite a, b, c. Promatrajte kako se graf funkcije mijenja kad mijenjate parametre a, b, c.



S obzirom da često funkciju označavamo $z = ax + by + c$, iz te jednakosti dobivamo jednadžbu ravnine koju obično pišemo u obliku

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

gdje su veze među koeficijentima dane jednakostima

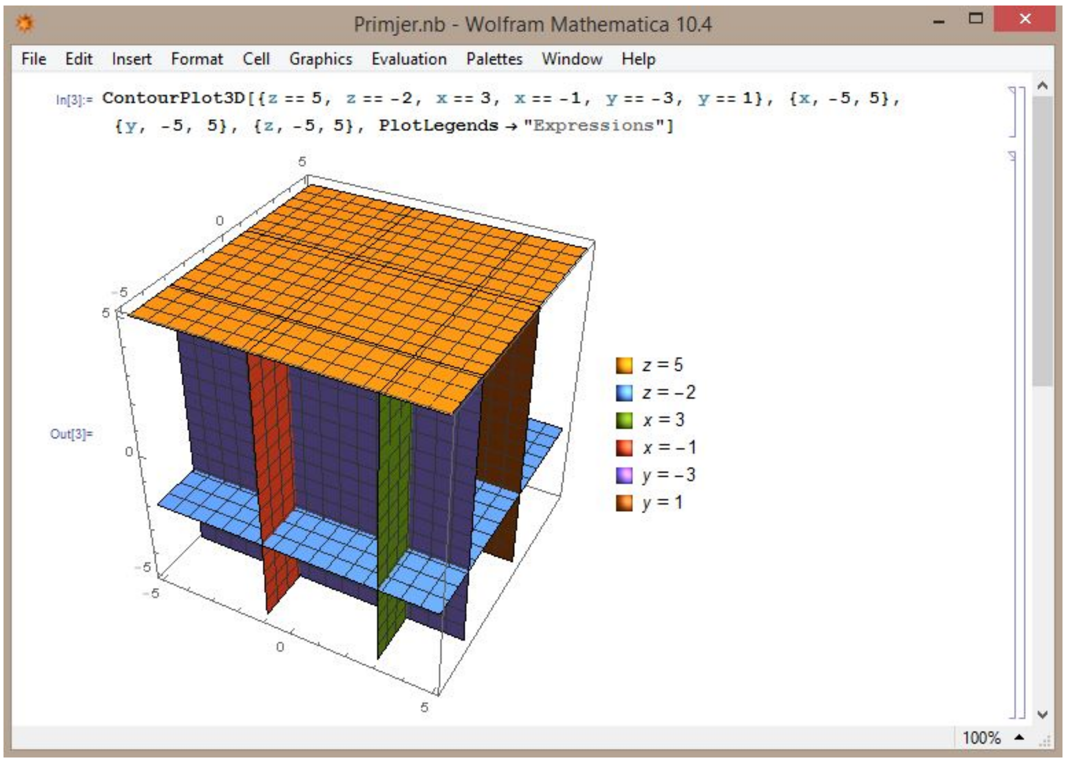
$$a = -\frac{A}{C}, b = -\frac{B}{C}, c = -\frac{D}{C}.$$

Koordinatna ravnina $\langle x, y\rangle$ ima jednadžbu $z = 0$, jer se u njoj nalaze točke oblika $(x, y, 0)$. U koordinatnoj ravnini $\langle x, z\rangle$ se nalaze točke oblika $(x, 0, z)$, pa ima ima jednadžbu $y = 0$. Koordinatna ravnina $\langle y, z\rangle$ ima jednadžbu $x = 0$.

Ravnine $z = const$ paralelene su s koordinatnom ravninom $z = 0$, ravnine $y = const$ paralelene su s ravninom $y = 0$, dok su ravnine $x = const$ paralelene su s koordinatnom ravninom $x = 0$.

Primjer 5.6 *Pomoću Wolframove Mathematice nacrtajte ravnine*

1. $z = 5$
2. $z = -2$
3. $x = 3$
4. $x = -1$
5. $y = -3$
6. $y = 1$



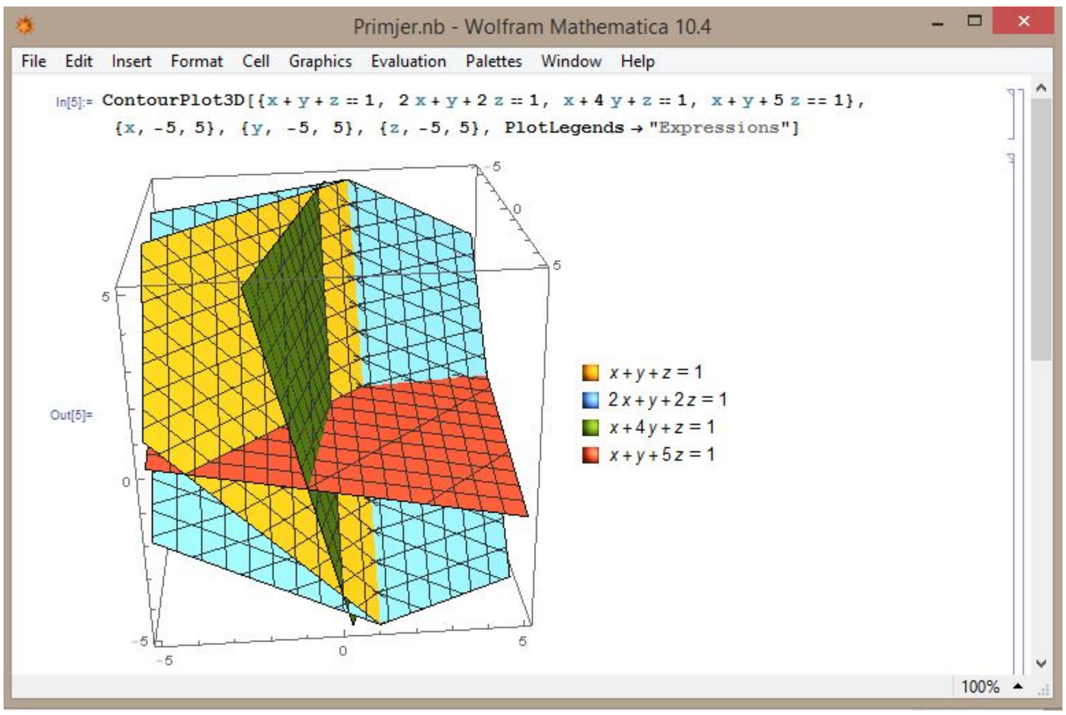
Primjer 5.7 *Pomoću Wolframove Mathematice nacrtajte ravnine*

1. $x + y + z = 1$

2. $2x + y + 2z = 1$

3. $x + 4y + z = 1$

4. $x + y + 5z = 1$



Primjer 5.8 *Na temelju prethodnog primjera zaključite u kojim točkama ravnina $Px + Qy + Rz = 1$ siječe koordinatne osi.*

Rješenje.

$(\frac{1}{P}, 0, 0)$, $(0, \frac{1}{Q}, 0)$,$(0, 0, \frac{1}{R})$

Primjer 5.9 *Izračunajte volumen tetraedra koji omeđuju koordinatne ravnine i zadane ravnine iz primjera 5.7.*

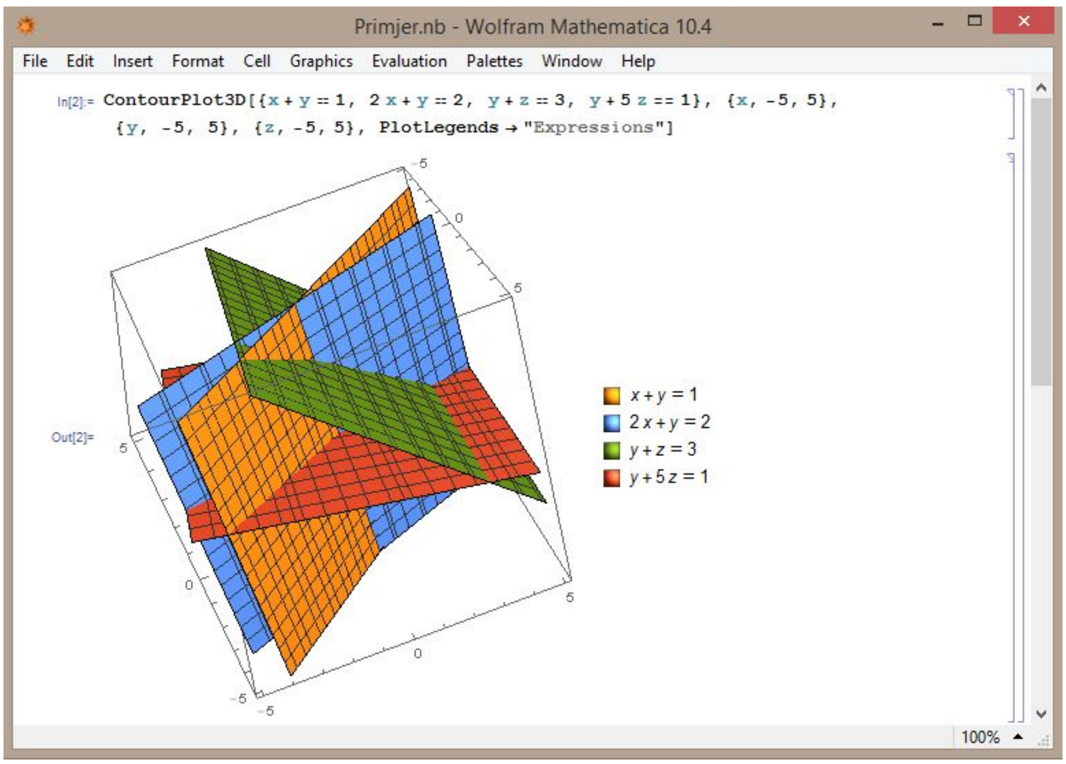
Rješenje.

Volumeni su $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{30}$.

Primjer 5.10 *Napišite jednažbu neke ravnine koja s koordinatnim ravninama omeđuje teteraedar volumena* 30.
Rješenje.
$\frac{x}{6}+\frac{y}{5}+\frac{z}{6}=1$ *ili bilo koja takva da je* $\frac{1}{6PQR}=30$, *u oznakama iz 5.8.*

Primjer 5.11 *Pomoću Wolframove Mathematice nacrtajte ravnine*

1. $x+y=1$
2. $2x+y=2$
3. $y+z=3$
4. $y+5z=1$



Primjer 5.12 *Što je presjek ravnine iz primjera 5.11 i koordinatne ravnine?*
Odredite jednadžbu presjeka ravnine s koordinatnom ravninom $z = 0$*, za prve dvije ravnine iz primjera 5.11.*
Odredite jednadžbu presjeka ravnine s koordinatnom ravninom $x = 0$ *za druge dvije ravnine iz istog primjera.*
Rješenje.

Presjeci su pravci s istim jednadžbama, koji se nalaze u ravnini $z = 0$ *za prve dvije, a u ravnini* $x = 0$ *za druge dvije ravnine.*

5.3 Pojam plohe

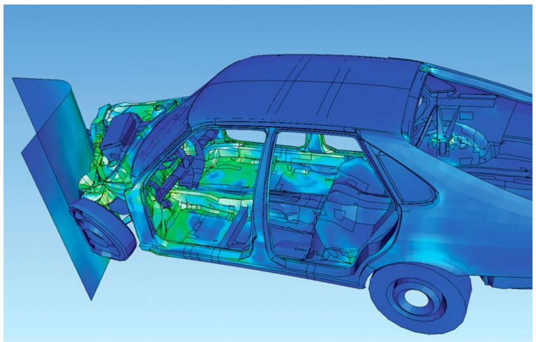
Pojam plohe se javlja često u svakodnevnom govoru. Sigurno ste već čuli kako vam netko od ukućana kaže-makni te stvari s radne plohe u kuhinji, ili ovako-ostale su mrvice na radnoj plohi! Radna ploha u kuhinji je ravnina, ali plohe općenito ne moraju biti ravnine. Ako želimo obojati zidove u našoj kući, moramo moći izračunati površinu koju treba obojati, da bismo mogli kupiti dovoljno boje. Zidovi u kućama uglavnom su ravne plohe, ravnine, ali to ne mora biti uvijek tako. Zidovi u kući mogu biti zakrivljeni, automobil je omeđen zakrivljenim plohama na limu, na prednjem i stražnjem staklu, te na svjetlima.

Potrebno je izračunati površinu zidova koji nisu ravne plohe i površinu automobilskog lima, ako želimo kupiti boju za bojanja. U prometnoj dozvoli za motorno vozilo postoji rubrika volumen vozila, pa bi je bilo potrebno popuniti, iako u pravilu ostaje nepopunjena! Kad bi automobil bio oblika valjka, stožca ili sfere, mogli bismo izračunati volumen jer znamo formule. Svi znamo da su automobili složenijeg oblika. Nije nimalo lagan zadatak izračunati površinu zakrivljene plohe ili volumen koji omeđuje ta zakrivljena ploha.

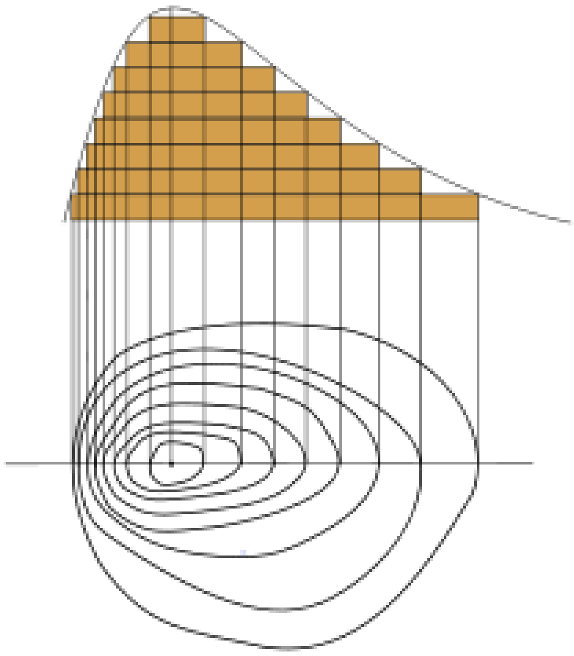
Ipak, ako smo prisiljeni nekako procijeniti te veličine, prirodno ćemo doći na ideju da plohu apriksimiramo nekom ravninom. Ako ploha nije jako zakrivljena, rezultat će biti prilično točan. Ako je ploha jako zakrivljena, onda je možemo isjeckati na manje dijelove, jer su oni onda ravniji, pa pozbrajati površine tih manjih dijelova kao da su dijelovi ravnine. Nogometna lopta je sašivena od komadića kože i svaki komadić je lagano uvijen.

Ideja da se volumen tijela omeđenog zakrivljenim plohama računa tako da se tijelo isiječe na sitnije dijelove, pa se smatra da su ta sitna tijela omeđena ravnim plohama, stara je preko 2000 godina. Grčki matematičar, fizičar i astronom Arhimed (287.-212. pr. Kr.) došao je na tu ideju, koja se smatra početkom integralnog računa. Površine likova omeđenih krivuljama i volumeni tijela omeđenih plohama računaju se dijeljenjem lika ili tijela na male dijelove, te nakon toga njihovim zbrajanjem koje u tom slučaju nazivamo integriranjem. Grci su bili iznimno napredni u arhitekturi i kiparstvu, pa su te aktivnosti išle paralelno sa snažnim razvojem matematike i fizike. Diferencijalni i integralni račun kakav danas poznajemo razvio se tek u 17. stoljeću. Tehnike deriviranja i integriranja funkcija jedne varijable uče u 4. razredu gimnazije. Pomoću inegrala funkcija jedne varijable računaju se površine likova u ravnini i neki jednostavni volumeni. Volumeni i oplošja tijela omeđenih plohama su gradivo sveučilišne matematike.

U današnje vrijeme poznavanje osnovnih tipova ploha i algoritama za njihovo glatko spajanje potrebno je zbog trodimenzionalne kompjuterske grafike, kao i kod dizajniranja proizvoda. Oblik automobila se simulira na računalu, pa se odabere koji od predloženih oblika ide u proizvodnju.



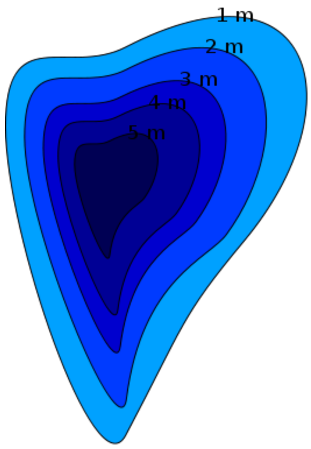
Geografija nam je nepresušan izvor ploha, a kartografija koristi matematičke pojmove vezane uz plohe. Geografski pojmovi izohipse i izobate su u biti matematički pojmovi.



Graf funkcije $z = f(x, y)$ je ploha. Iznad svake točke (x, y) koja se nalazi u ravnini $\langle x, y\rangle$, nalazi se samo jedna točka $(x, y, f(x, y))$ koja se nalazi na grafu funkcije koji je ploha. Naravno, postoje i plohe koje nisu grafovi funkcija.

Plohe možemo proučavati s više pozicija, kao što je upravo spomenuto u uvodu. Naš zadatak će biti upoznati se s nekoliko osnovnih ploha i naučiti kako modeliranje funkcijom više varijabli u nekim slučajevima svesti na modeliranje funkcijom jedne varijable.

Ploha koja je graf funkcije dviju varijabli može izgledati kao brijeg, pa vrh brijega nazivamo maksimumom funkcije. To je najveća vrijednost funkcije, što znači da ako krenemo iz točke maksimuma u svim smjerovima idemo nizbrdo. Treba primijetiti da gorje može imati više brijegova, neki su viši, a neki niži, ali svi su lokalni maksimumi. Ako krenemo s bilo kojeg vrha brijega, možemo ići samo nizbrdo.

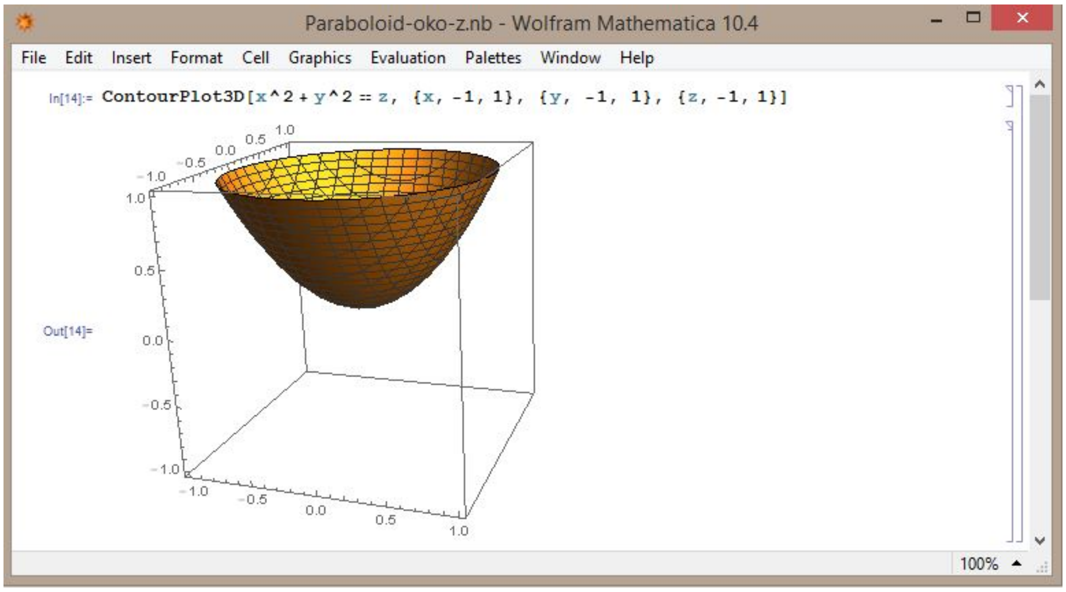


Ploha koja je graf funkcije dviju varijabli može izgledati kao vrtača, pa dno vrtače nazivamo minimumom funkcije. To je najmanja vrijednost funkcije, što znači da ako krenemo iz točke minimuma u svim smjerovima idemo uzbrdo. Dno vrtače je lokalni minimum, jer vrtača može biti više i nisu jednako duboke. Iz svake možemo izaći samo hodanjem uzbrdo.

Maksimume i minimume funkcije jednom riječi zovemo ekstremima funkcije. Ti nazivi se koriste za funkcije jedne varijable i za funkcije više varijabli.

Vrh brijega i dno vrtače su standardni primjeri ekstrema funkije, ali vrh piramide ili dno lijevka su isto ekstremi. Razlika je u tome što su piramida i lijevak šljasti. Mi nećemo praviti razliku između tih ekstrema, ali kad se ekstremi rade pomoću derivacija, razlika postoji.

Plohe mogu još jedan tip posebno istaknute točke, a to je sedlasta točka. Kad hodate po planinskom sedlu, onda gotovo svuda oko sebe imate nizbrdicu. Ipak, postoji smjer kojim možete hodati, a da ne idete nizbrdo. Zbog toga sedlo nije maksimum niti minimum, već je to poseban tip točke.



5.4 Osnovni grafovi funkcija dviju varijabli-paraboloid, stožac, sfera, sedlasta ploha

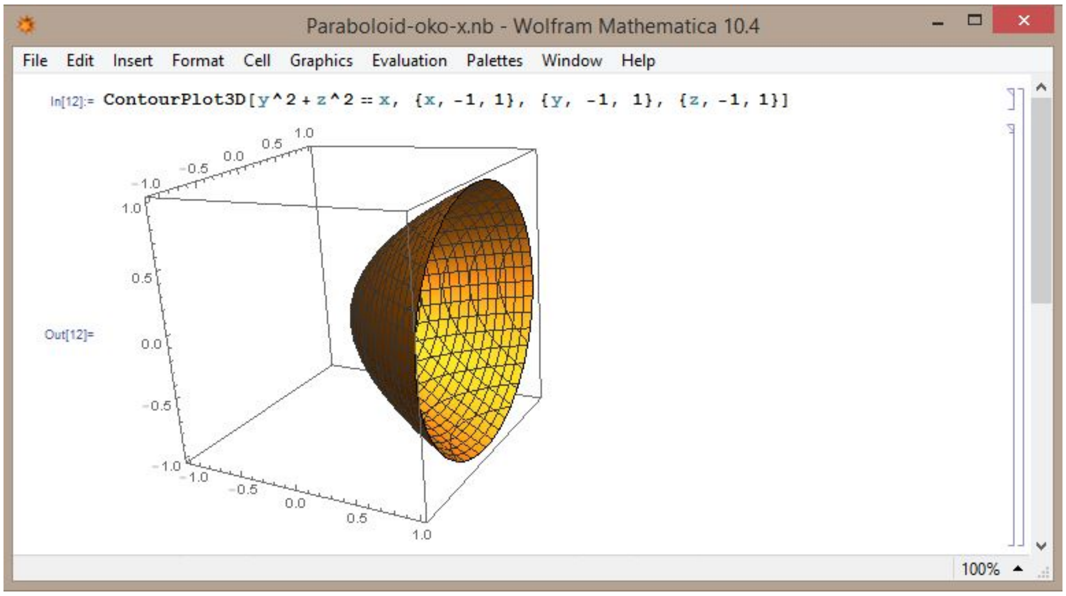
Plohu $z = x^2+y^2$ nazivamo rotacijskim paraboloidom nastalim vrtnjom oko osi z. Slično kao u polarnim koordinatama u ravnini možemo označiti $r^2 = x^2 + y^2$ i nacrtati sustav u kojemu je os r i os z, pa u tom sustavu imamo jednadžbu $z = r^2$, što je jednadžba parabole. Smatramo da je rotacijski paraboloid $z = x^2+y^2$ nastao rotacijom parabole $z = r^2$ oko osi z. Paraboloid ima minimum u ishodištu i to je točka koja odgovara dnu vrtače. Plohu $x = y^2+z^2$ nazivamo rotacijskim paraboloidom nastalim vrtnjom oko osi x, a $y = x^2 + z^2$ je paraboloid nastao vrtnjom oko osi y. Paraboloid $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ ima standardne oznake kakve ima funkcija dviju varijabli. Ova druga dva paraboloida su grafovi funkcija $x = f(y, z) = y^2 + z^2$ i $y = f(x, z) = x^2 + z^2$. Paraboloid $z = -x^2 - y^2$ je okrenut prema dolje i ima vrh brijega u ishodištu.

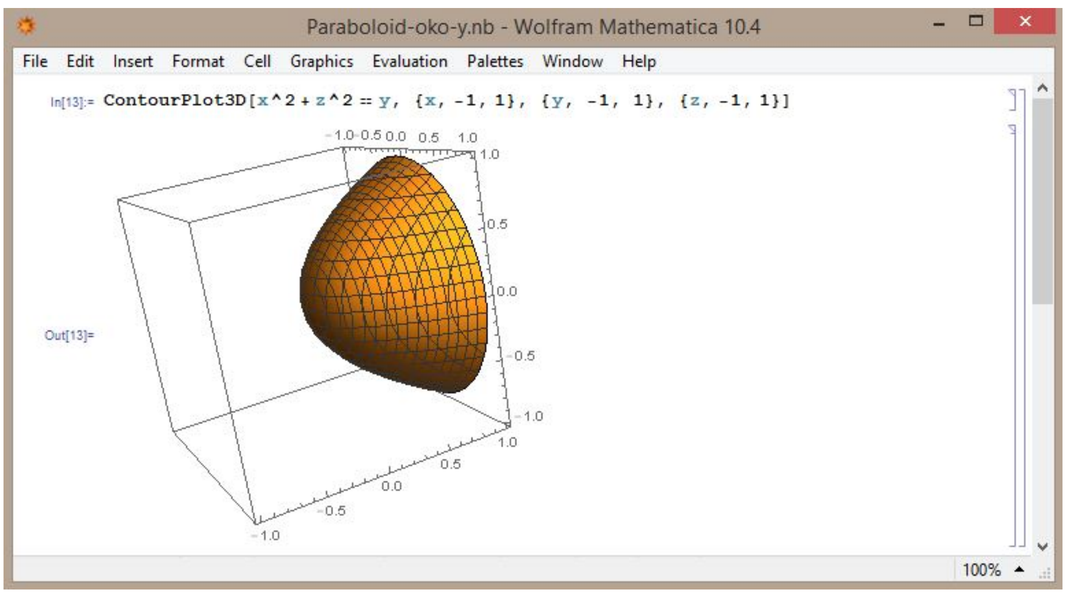
Primjer 5.13 *Pomoću Wolframove Mathematice nacrtajte plohe* 1. $z = -2x^2-2y^2$, 2. $z = 4x^2+4y^2+1$, 3. $z = -x^2 - y^2 + 1$, 4. $x = -2y^2 - 2z^2$, 5. $y = x^2 + z^2 + 1$.

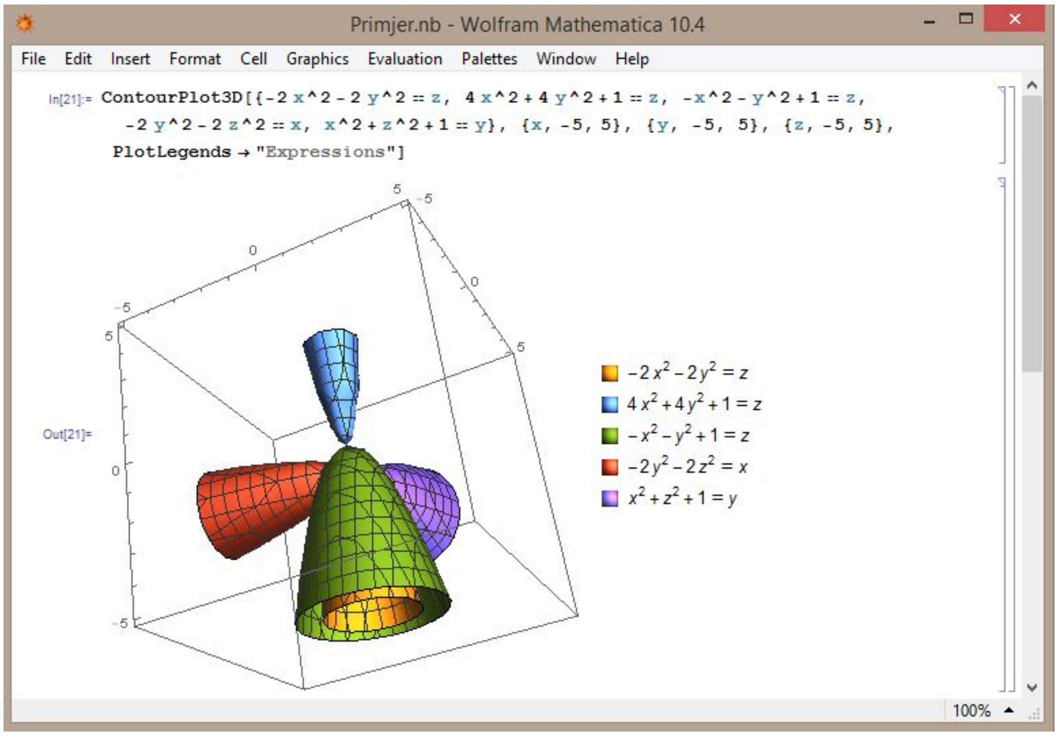
Na računalu okrenite kvadar u kojem se nalaze polohe i dobro ih pogledajte!

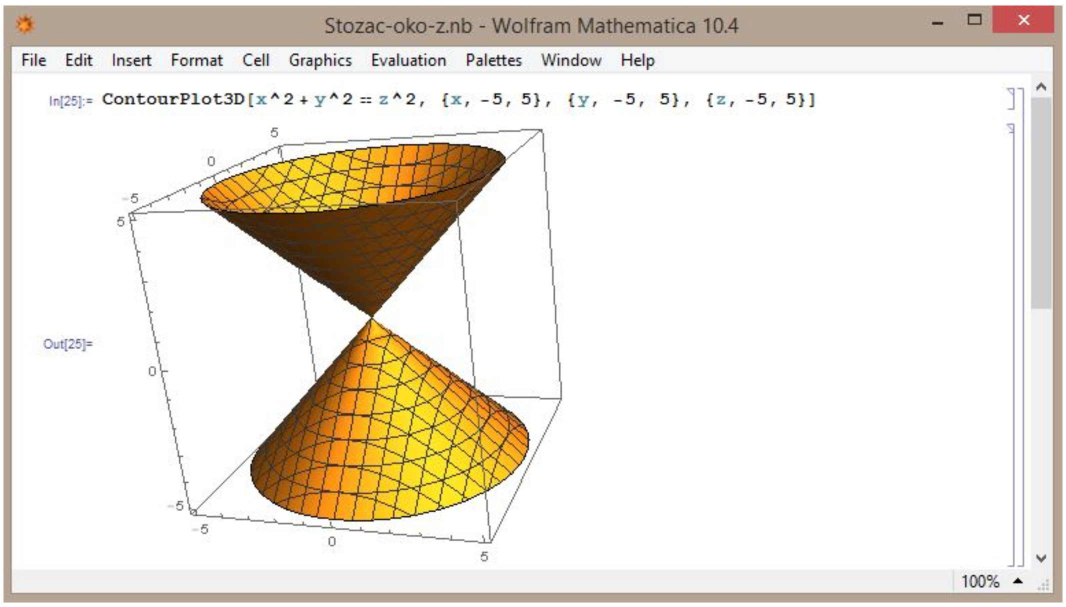
Plohu $z^2 = x^2 + y^2$ nazivamo stošcem nastalim vrtnjom pravca oko osi z. Stožac nije graf funkcije, ali se može rastaviti na grafove dviju funkcija $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ i $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$. Funkcija $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ima minimum u ishodištu i to je točka koja odgovara dnu lijevka, a funkcija $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ ima maksimum u ishodištu.

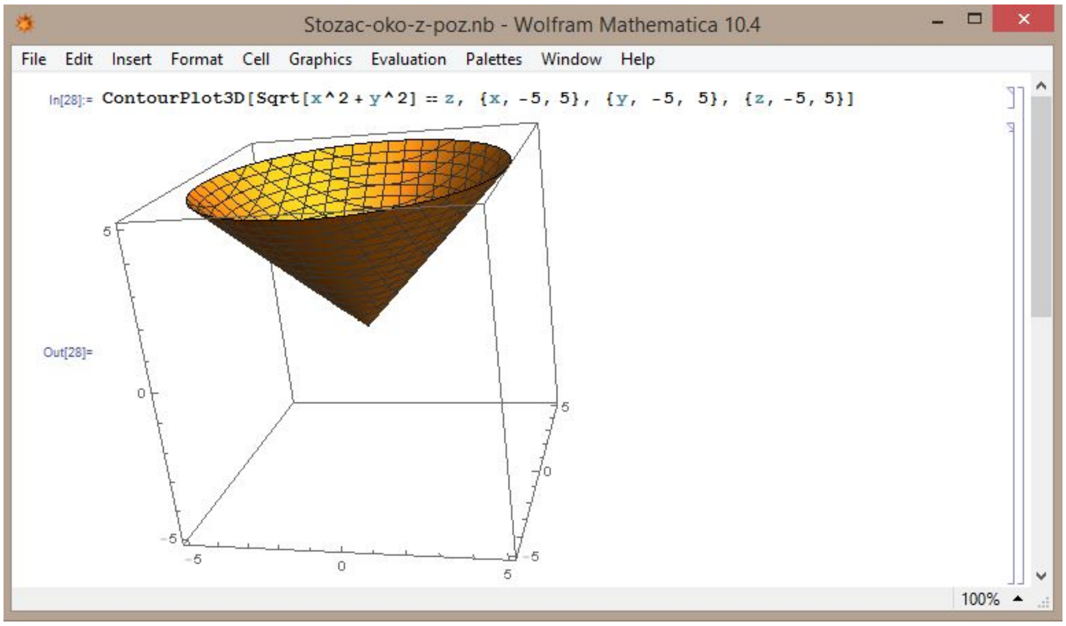
Plohu $x^2 = y^2 + z^2$ nazivamo stošcem oko osi x, a $y^2 = x^2 + z^2$ stošcem oko osi y.

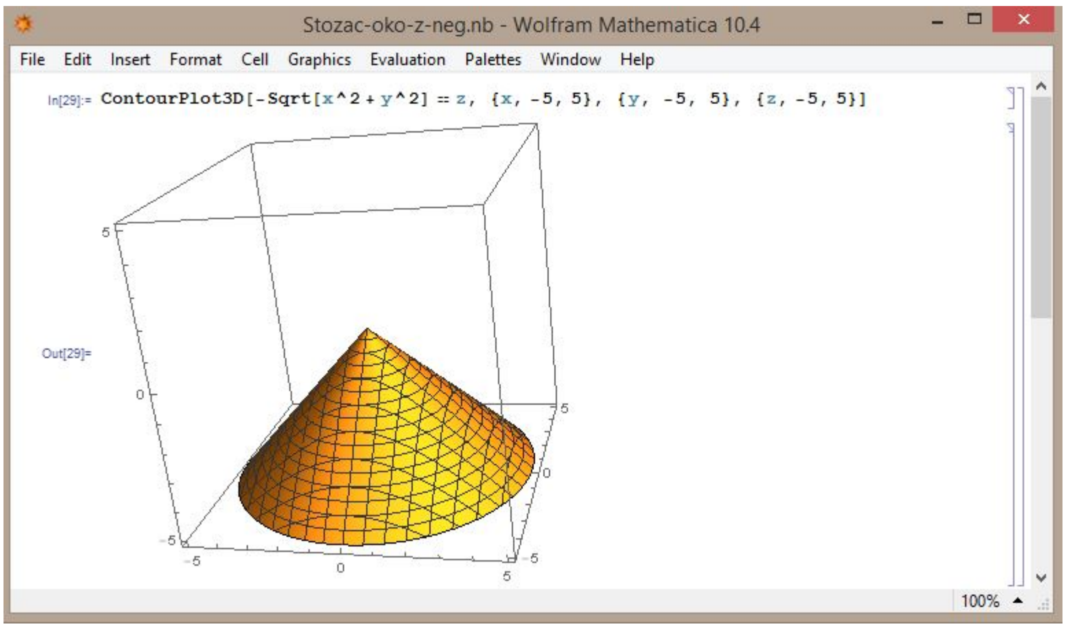

Paraboloid-oko-x.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[12]:= ContourPlot3D[y^2 + z^2 == x, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, -1, 1}]
Out[12]=
100%

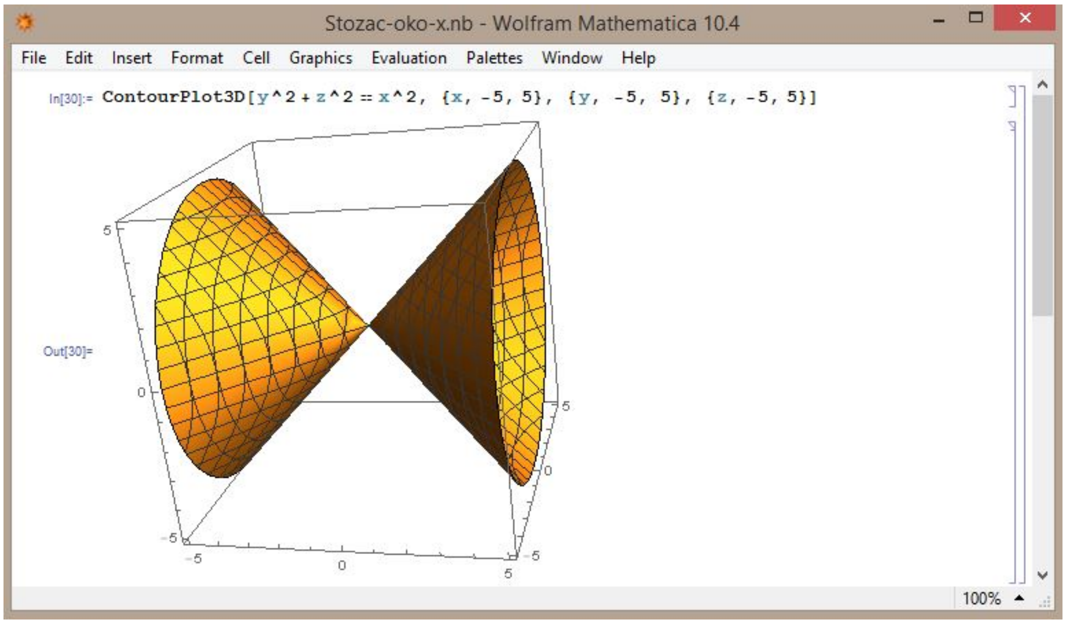

Paraboloid-oko-y.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[13]:= ContourPlot3D[x^2 + z^2 == y, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, -1, 1}]
Out[13]=
100%

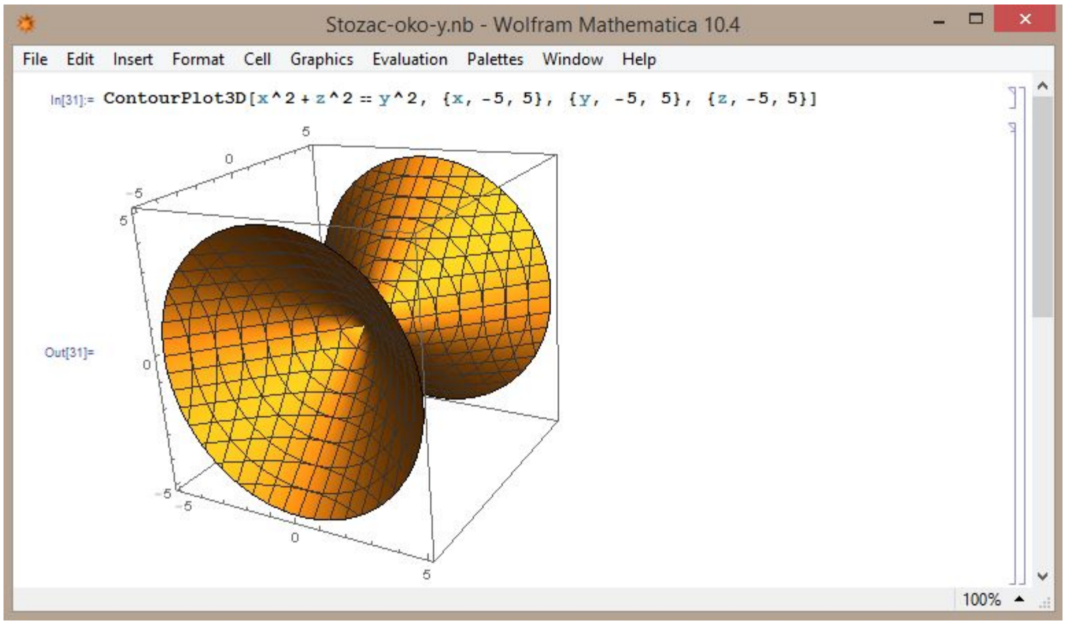

Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[21]:= ContourPlot3D[{-2 x^2 - 2 y^2 == z, 4 x^2 + 4 y^2 + 1 == z, -x^2 - y^2 + 1 == z, -2 y^2 - 2 z^2 == x, x^2 + z^2 + 1 == y}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, {z, -5, 5}, PlotLegends → "Expressions"]
Out[21]=
$-2x^2-2y^2=z$
$4x^2+4y^2+1=z$
$-x^2-y^2+1=z$
$-2y^2-2z^2=x$
$x^2+z^2+1=y$
100%


Stozac-oko-z.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[25]:= ContourPlot3D[x^2 + y^2 == z^2, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, {z, -5, 5}]
Out[25]=
100%

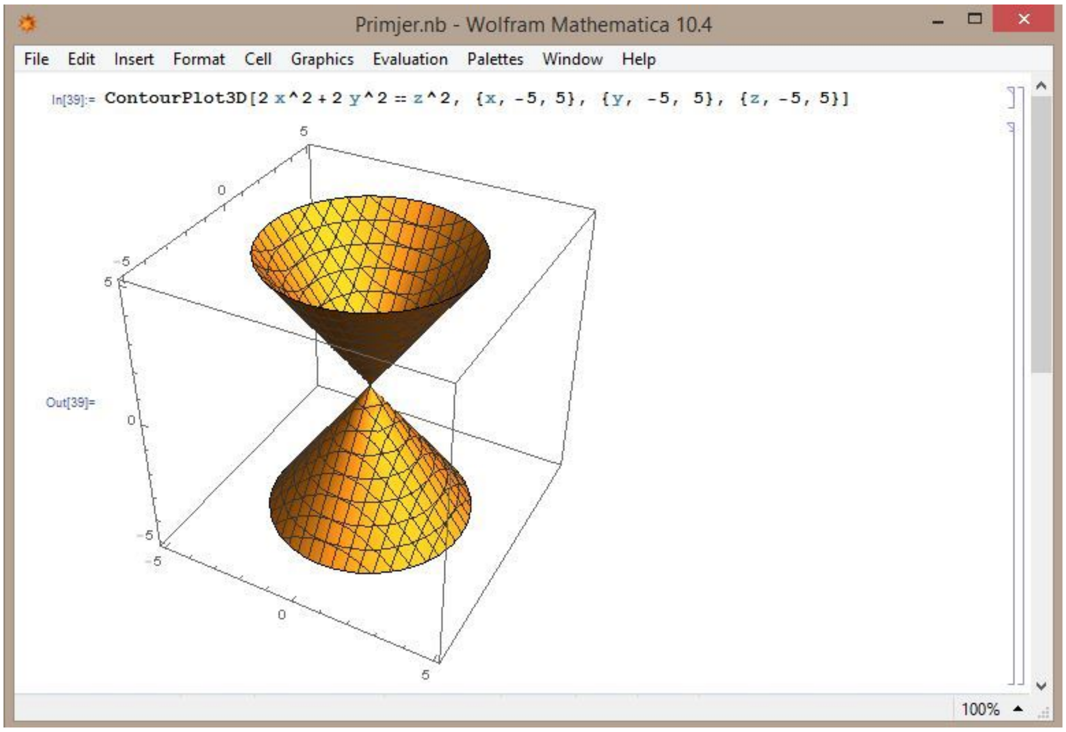

Stozac-oko-z-poz.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[28]:= ContourPlot3D[Sqrt[x^2 + y^2] == z, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, {z, -5, 5}]
Out[28]=
100%

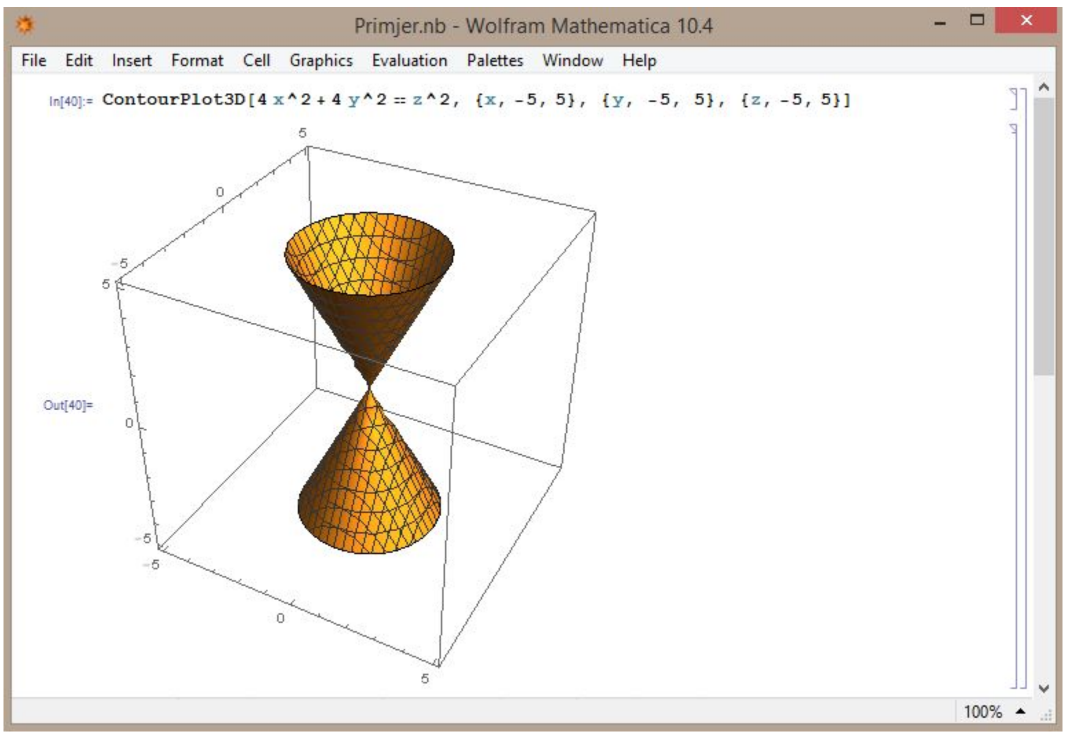

Stozac-oko-z-neg.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[29]:= ContourPlot3D[-Sqrt[x^2 + y^2] == z, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, {z, -5, 5}]
Out[29]=
100%

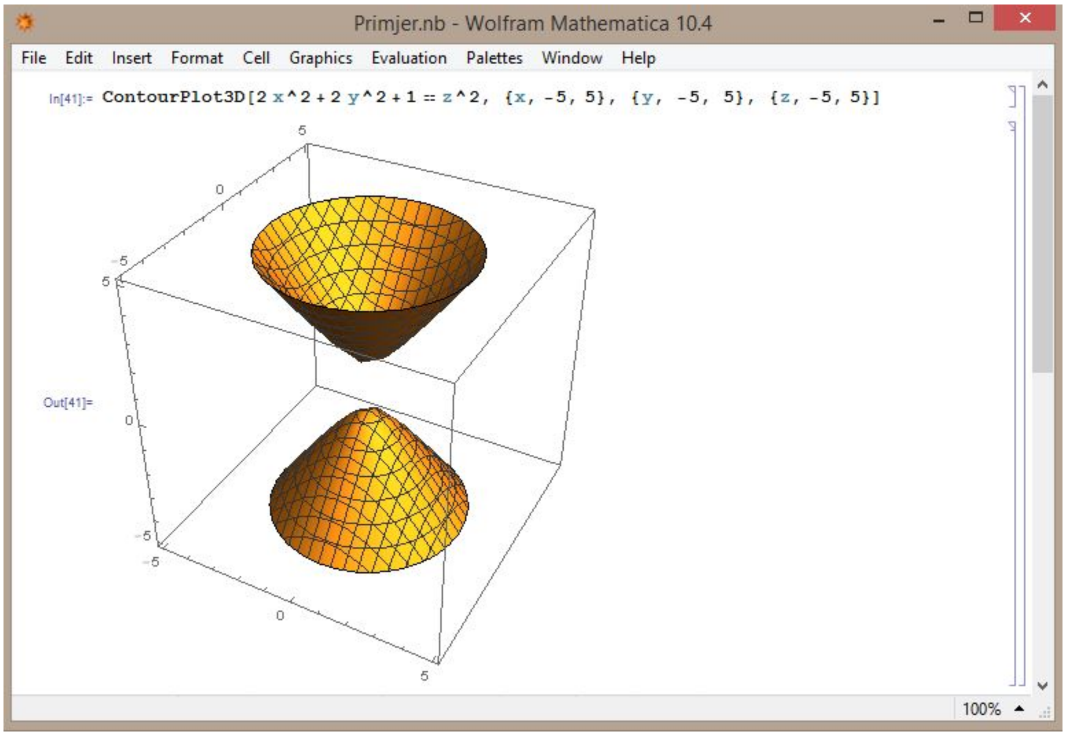


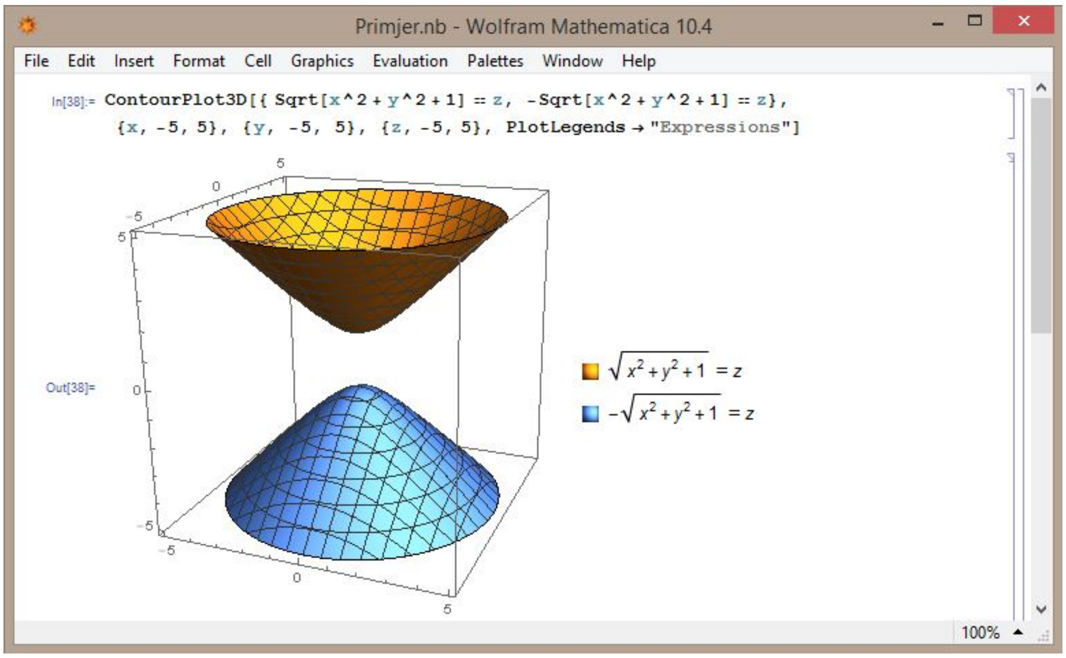


Primjer 5.14 *Pomoću Wolframove Mathematice nacrtajte plohe*
1. $z^2 = 2x^2 + 2y^2$, 2. $z^2 = 4x^2 + 4y^2$, 3. $z^2 = 2x^2 + 2y^2 + 1$, 4. $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$, 5. $z = -\sqrt{x^2 + y^2 + 1}$.

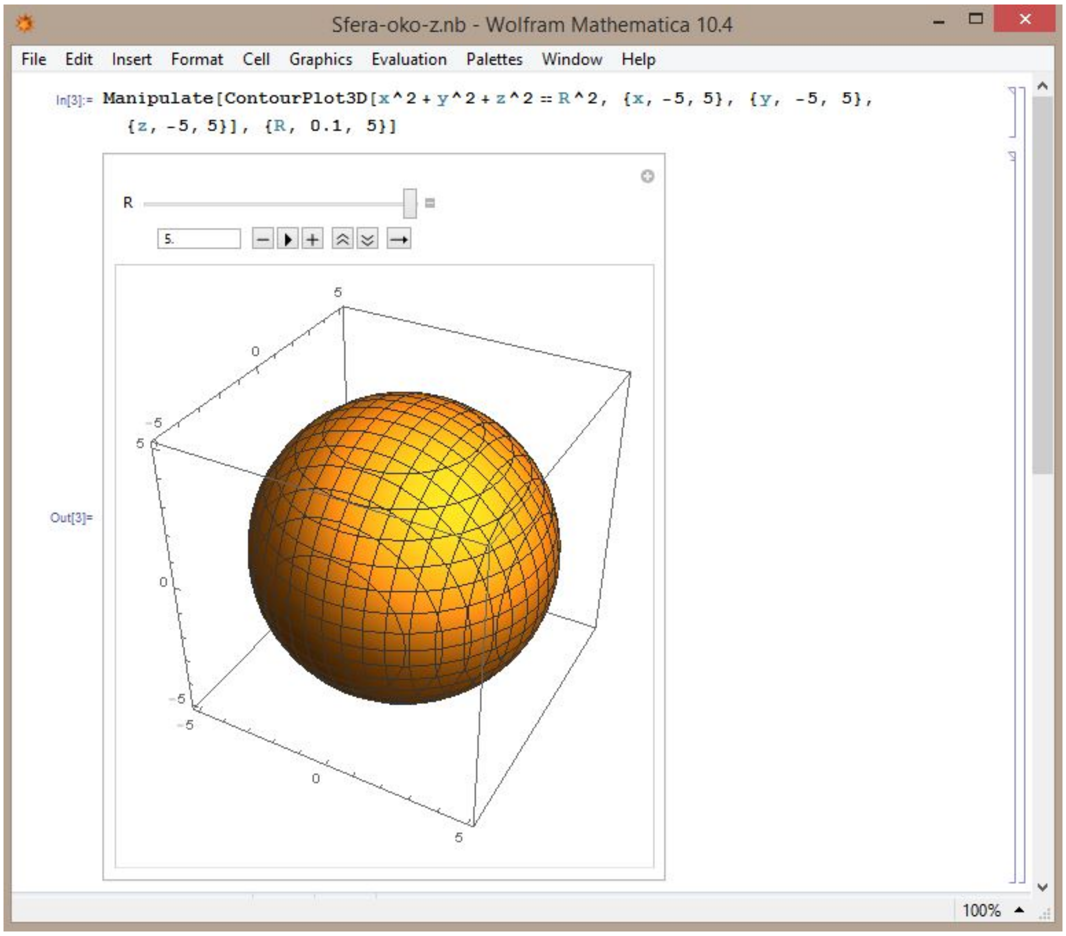

Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[39]:= ContourPlot3D[2 x^2 + 2 y^2 == z^2, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, {z, -5, 5}]
Out[39]=
100%

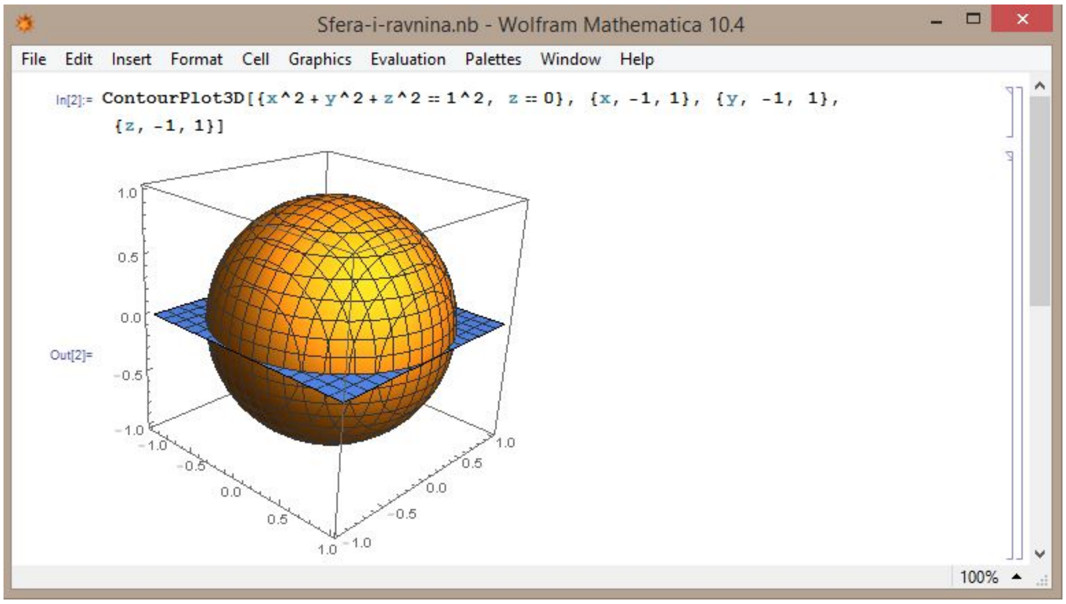

Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[40]:= ContourPlot3D[4 x^2 + 4 y^2 == z^2, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, {z, -5, 5}]
Out[40]=
100%





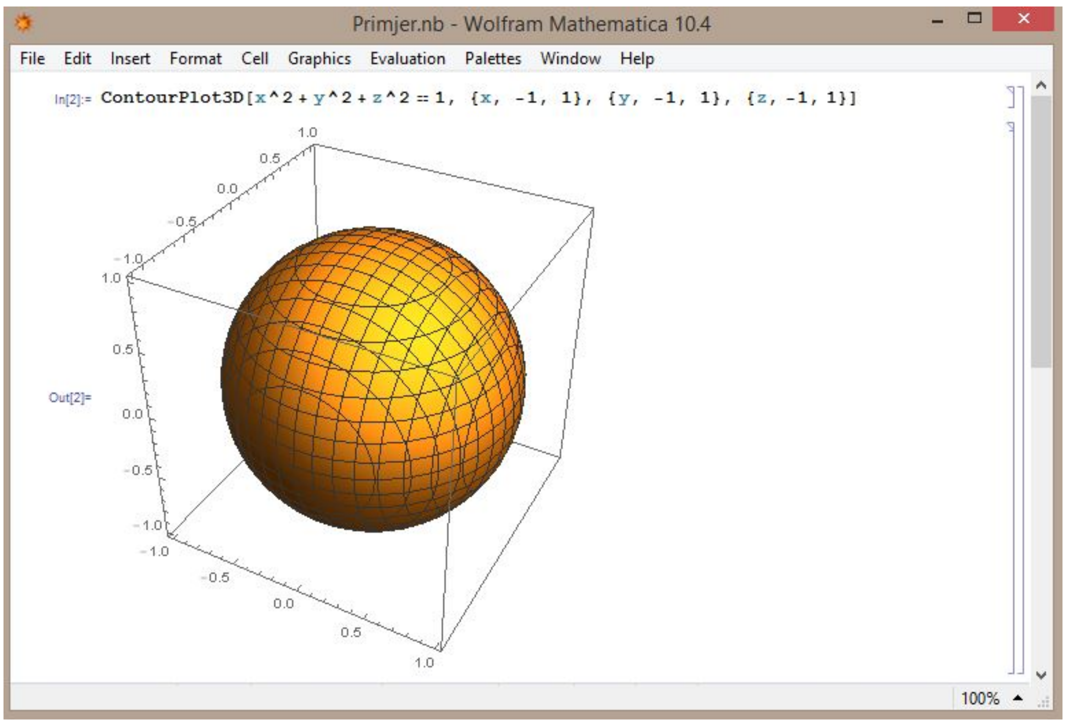
Sfera ima radijusa R sa središtem u ishodištu ima jednadžbu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Sfera nije graf funkcije, ali može se podijeliti na grafove dviju funkcija. Gornja polusfera ima jednadžbu $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, a donja $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

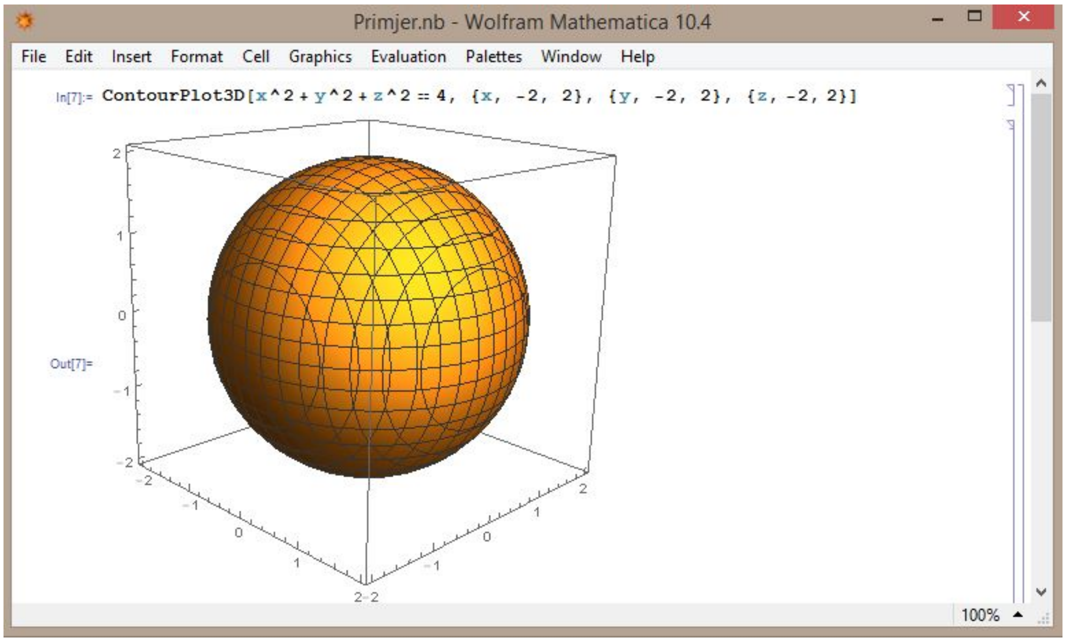

Sfera-oko-z.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[3]:= Manipulate[ContourPlot3D[x^2 + y^2 + z^2 == R^2, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, {z, -5, 5}], {R, 0.1, 5}]
R
5.
Out[3]=
100%



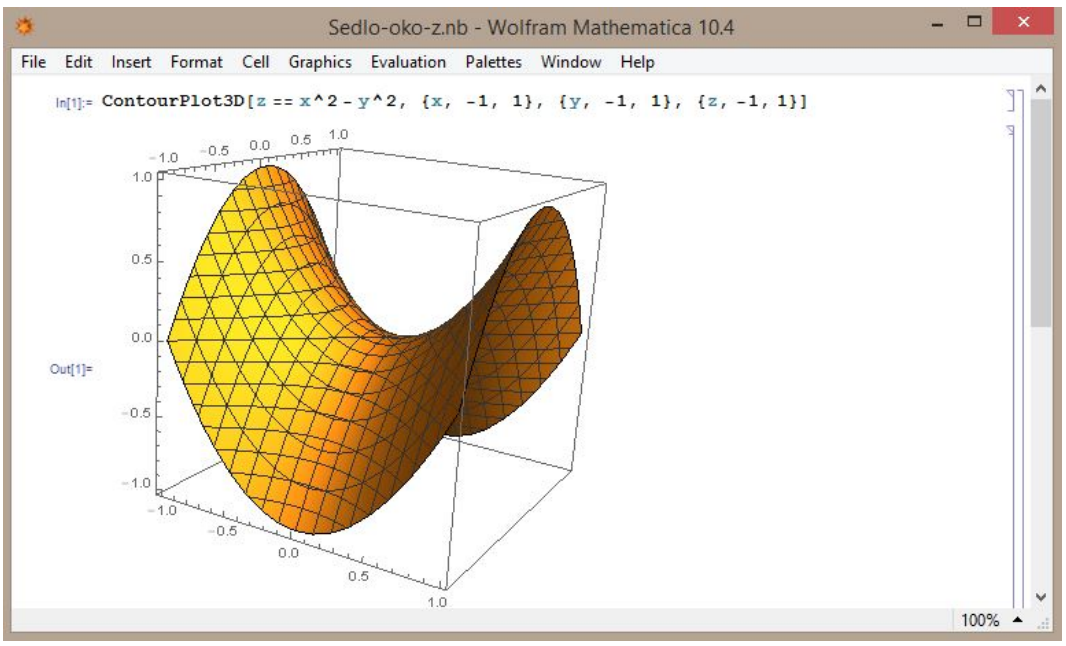
Primjer 5.15 *Pomoću Wolframove Mathematice nacrtajte plohe*

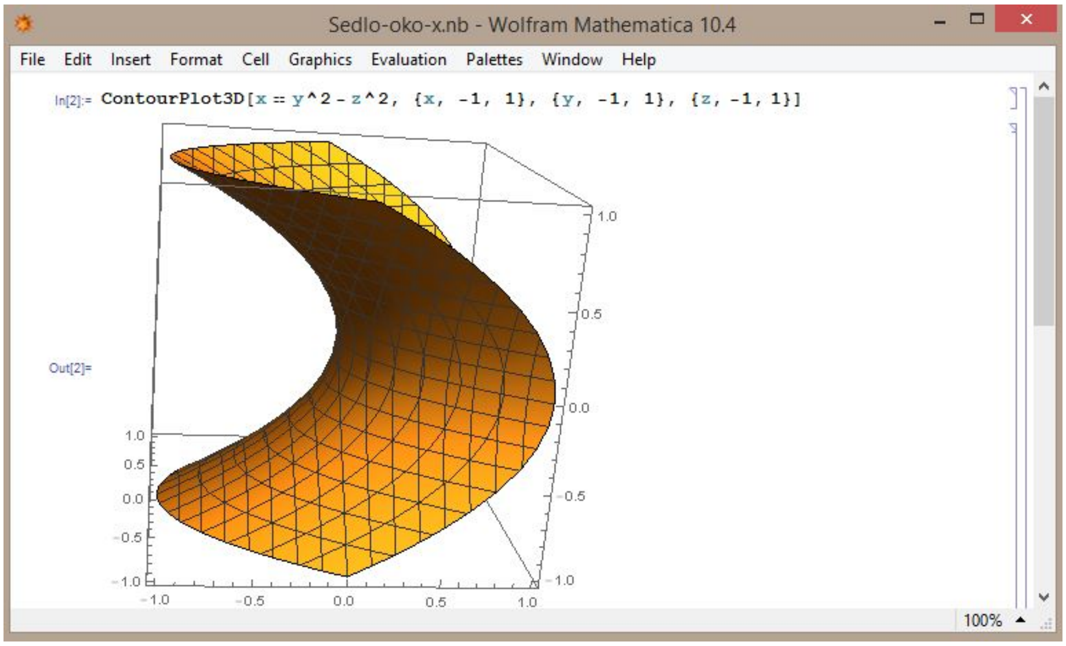
1. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
2. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

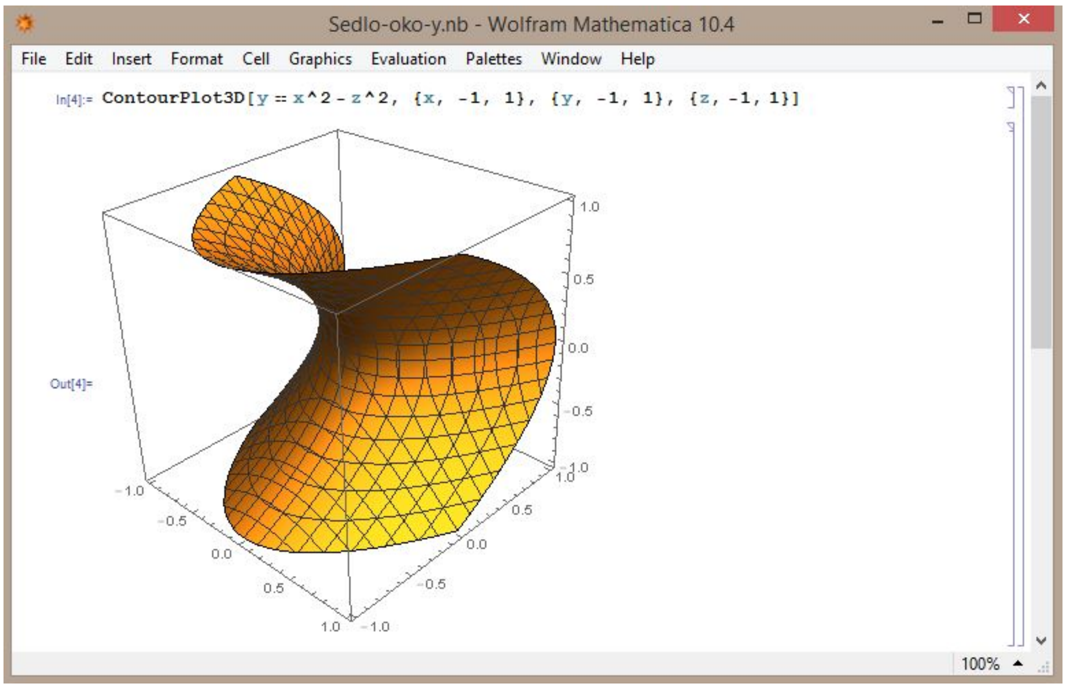




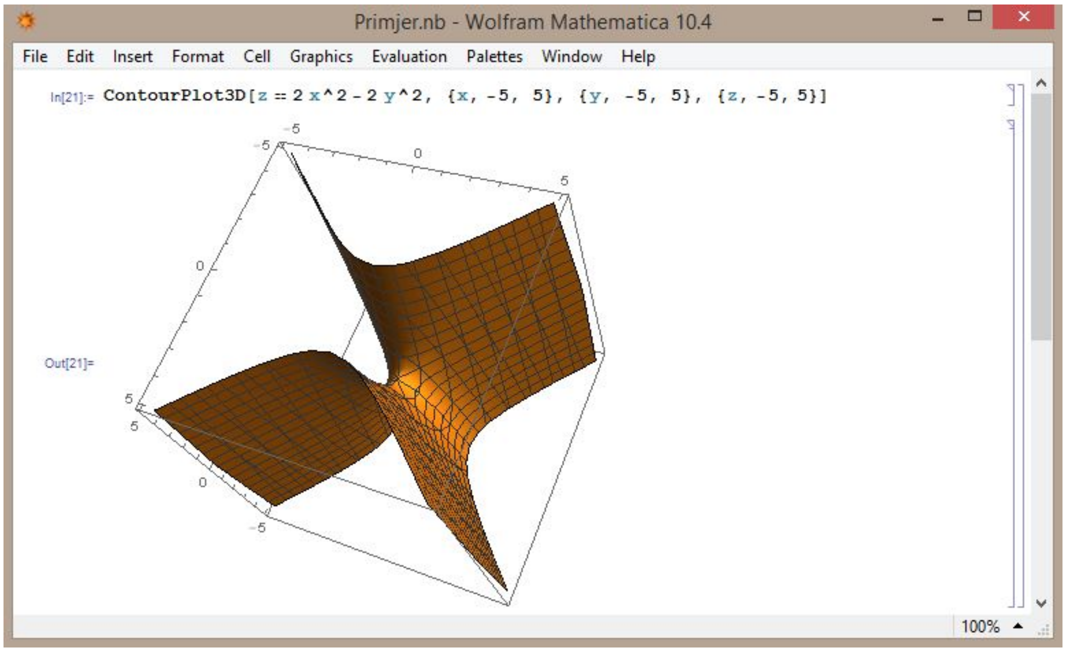
Ploha $z = x^2 - y^2$ ima sedlastu plohu u ishodištu. Slično imaju plohe $x = y^2 - z^2$ i $y = x^2 - z^2$.

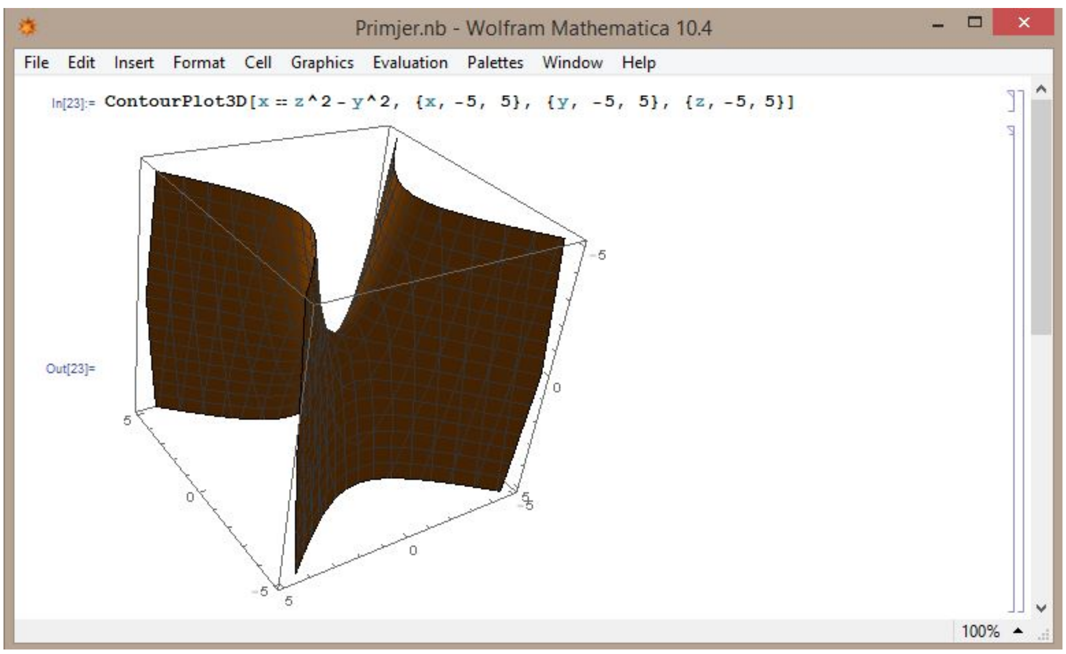


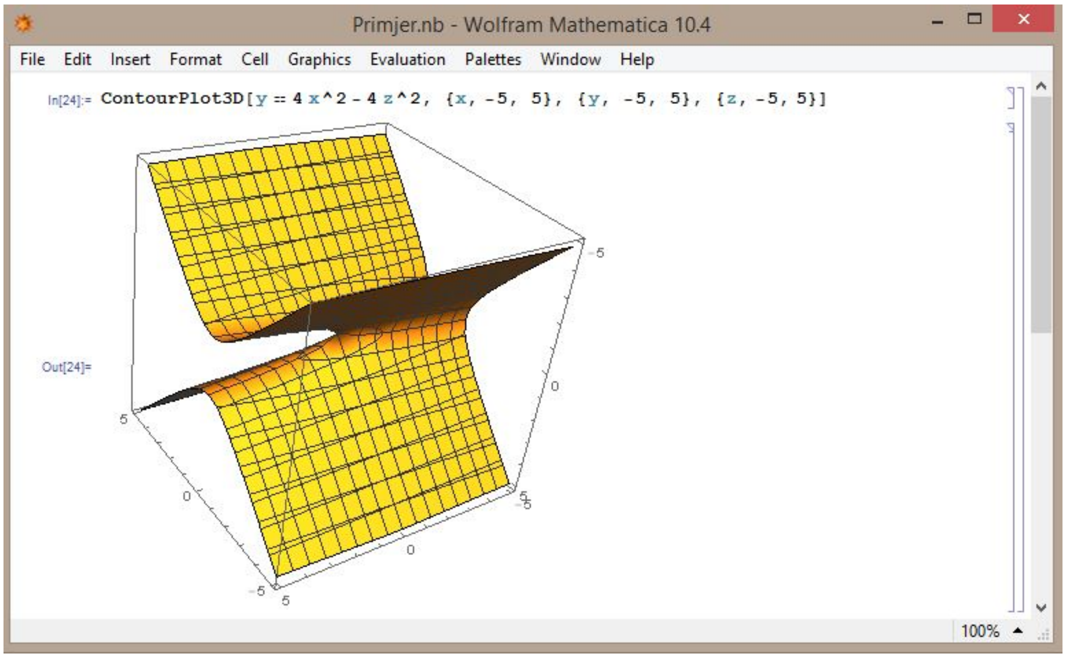




Primjer 5.16 *Pomoću Wolframove Mathematice nacrtajte plohe*
1. $z = 2x^2 - 2y^2$, 2. $x = z^2 - y^2$, 3. $y = 4x^2 - 4z^2$.


Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[21]:= ContourPlot3D[z == 2 x^2 - 2 y^2, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, {z, -5, 5}]
Out[21]=
100%


Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[23]:= ContourPlot3D[x == z^2 - y^2, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, {z, -5, 5}]
Out[23]=
100%



5.5 Presjek plohe ravninom i krivulje drugog reda

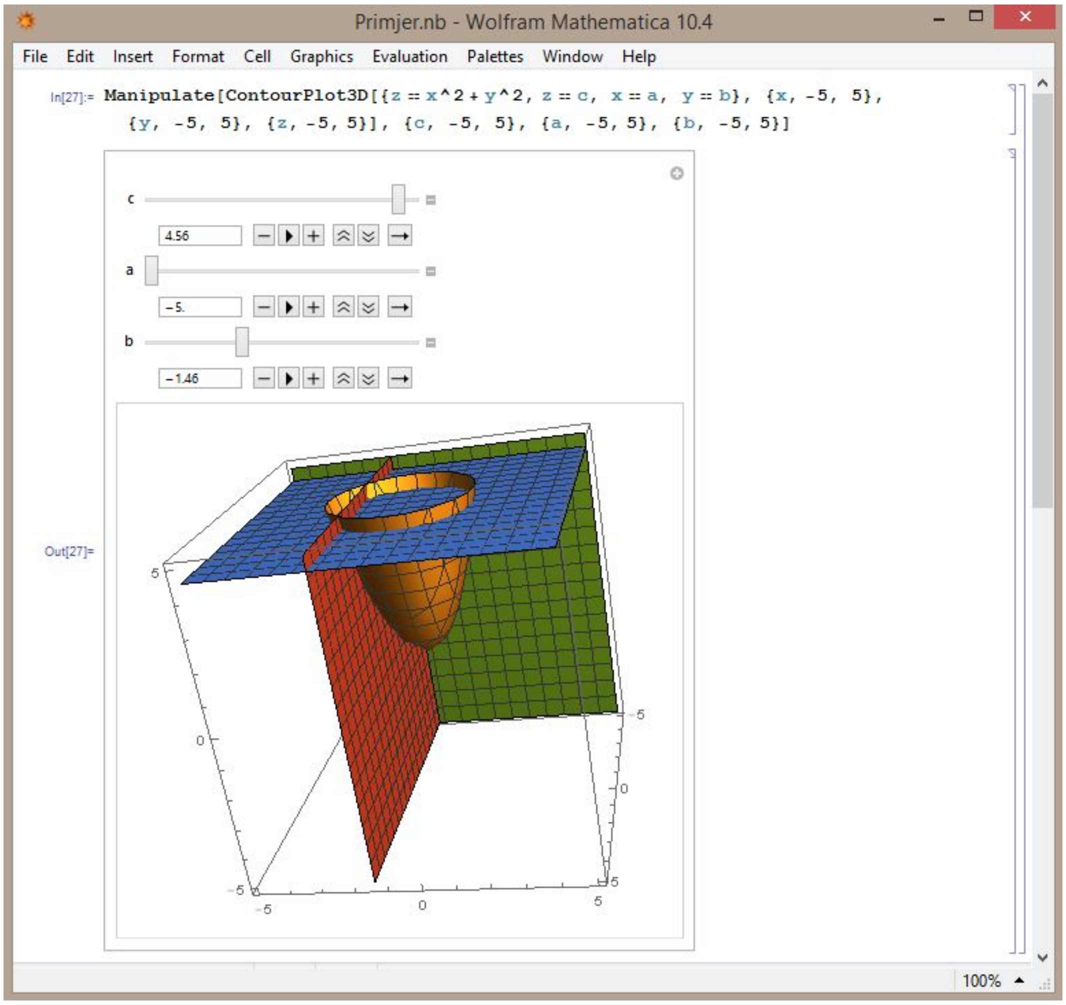
Za modeliranje ćemo koristiti funkcije više varijabli koje se mogu svesti na funkcije jedne varijable, tako da se jedna ili više varijabli fiksira. Ako imamo plohu, $z = f(x, y)$ i fiksiramo $x = c$, onda proučavamo funkciju jedne varijable $z = f(c, y)$. Graf funkcije $z = f(c, y)$ je krivulja u ravnini $x = c$, pa je možemo proučavati kao što smo to naučili za funkcije jedne varijable.

U ovom poglavlju ćemo objasniti kako se poznate krivulje drugog reda pojavljuju kao presjeci nekih osnovnih plohama s ravninama.

Primjer 5.17 *Plohu $z = x^2 + y^2$ presjecimo ravninom $z = c$, pa onda s $x = a$ i na kraju $y = b$.*

Rješenje.

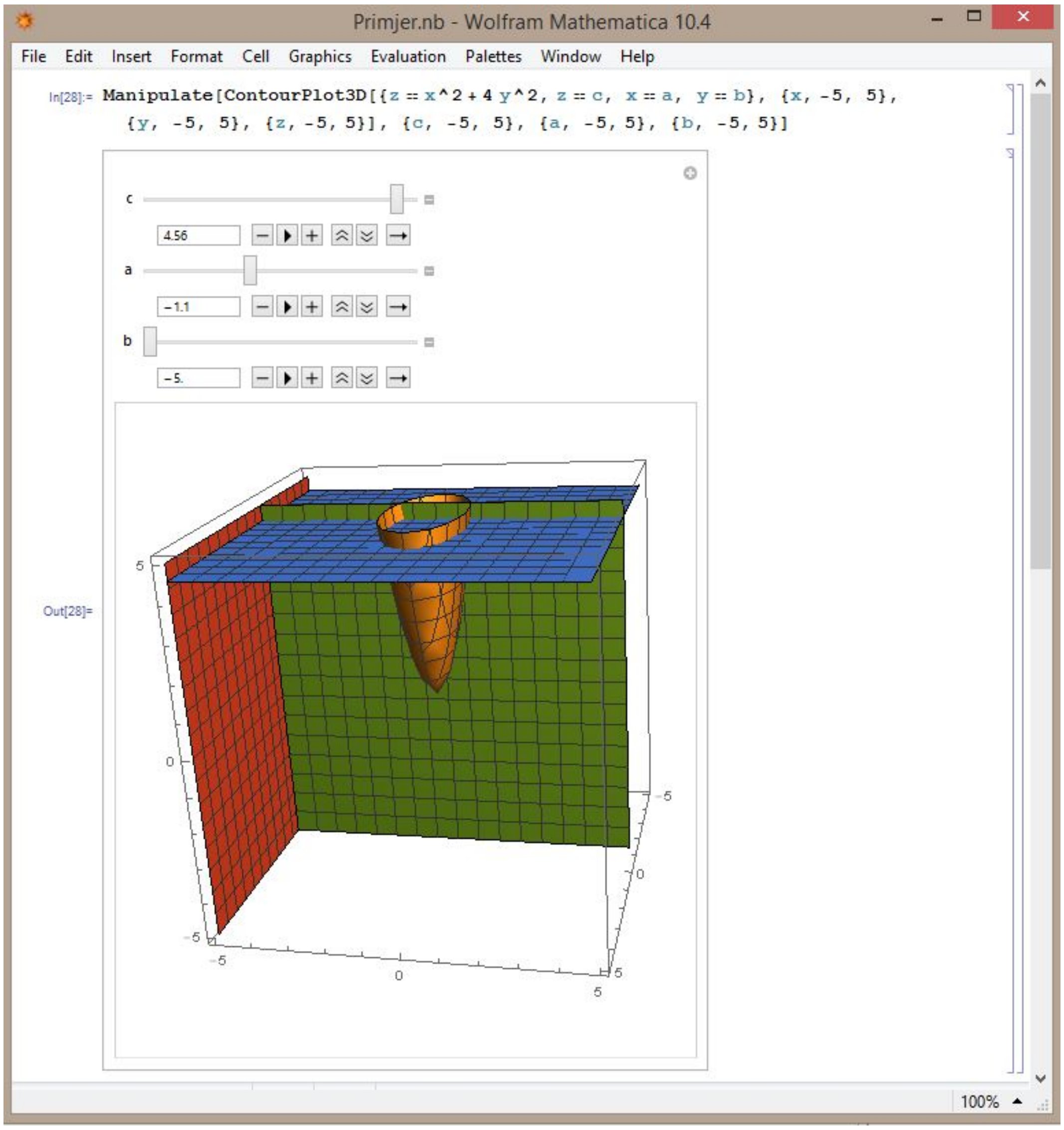
Ako plohu presječemo sa $z = c$ dobivamo kružnice $x^2 + y^2 = c$ za $c > 0$, za $c = 0$ je presjek točka $(0, 0)$, a za negativne c presjeka nema.
Presjeci s $x = a$ su parabole $z = a^2 + y^2$, a s $y = b$ su presjeci parabole $z = x^2 + b^2$.



Primjer 5.18 *Plohu $z = x^2 + 4y^2$ presjecimo ravninom $z = c$, pa onda s $x = a$ i na kraju $y = b$.*

Rješenje.

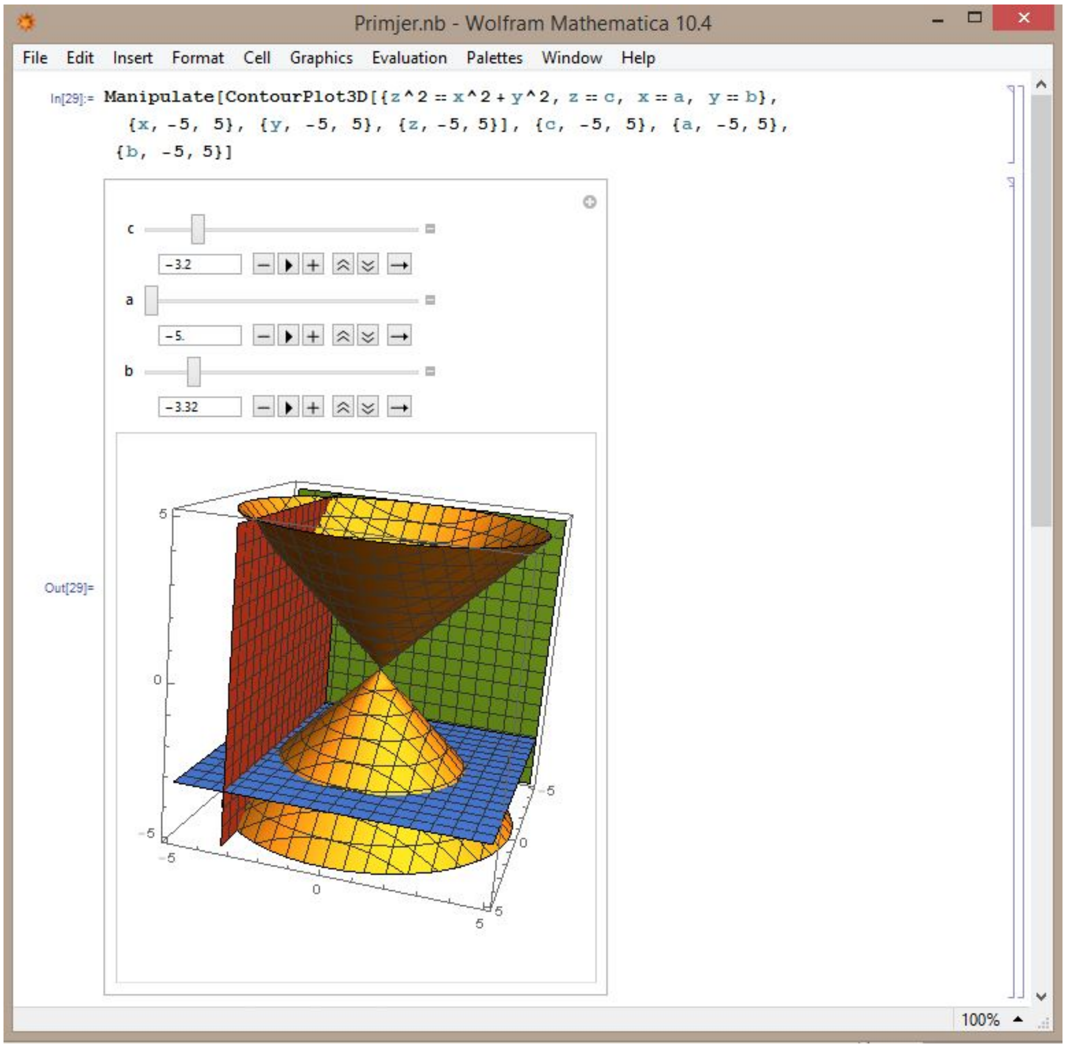
Ako plohu presječemo sa $z = c$ dobivamo elipse $x^2 + 4y^2 = c$ za $c > 0$, za $c = 0$ je presjek točka $(0, 0)$, a za negativne c presjeka nema.
Presjeci s $x = a$ su parabole $z = a^2 + 4y^2$, a s $y = b$ su presjeci parabole $z = x^2 + 4b^2$.



Primjer 5.19 *Plohu $z^2 = x^2 + y^2$ presjecimo ravninom $z = c$, pa onda s $x = a$ i na kraju $y = b$.*

Rješenje.

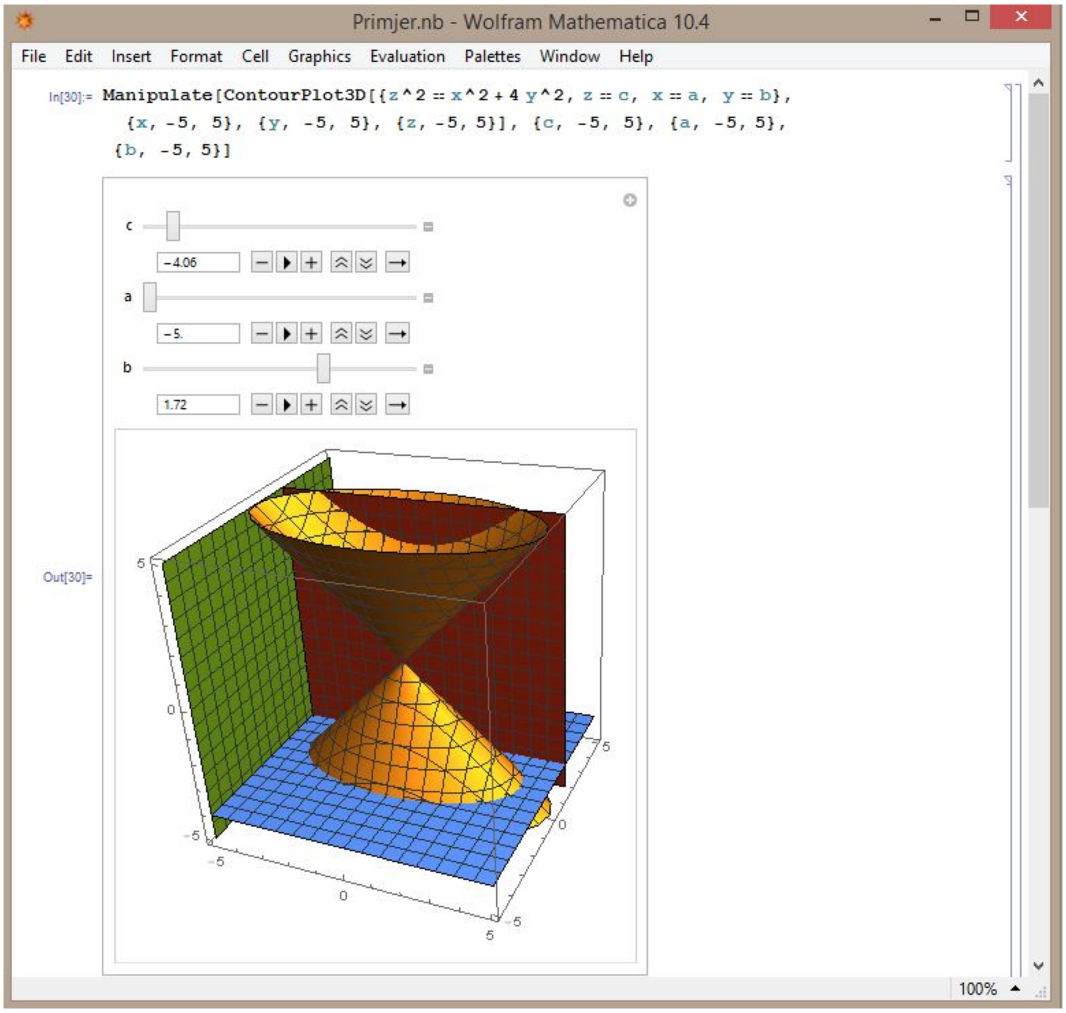
Ako plohu presječemo sa $z = c$ dobivamo kružnice $x^2 + y^2 = c^2$ za $c \neq 0$, a za $c = 0$ je presjek točka $(0, 0)$.
Presjeci s $x = a$ su hiperbole $z^2 = a^2 + y^2$, odnosno $z^2 - y^2 = a^2$.
Presjeci s $y = b$ su presjeci hiperbole $z^2 - x^2 = b^2$.



Primjer 5.20 *Plohu $z^2 = x^2 + 4y^2$ presjecimo ravninom $z = c$, pa onda s $x = a$ i na kraju $y = b$.*

Rješenje.

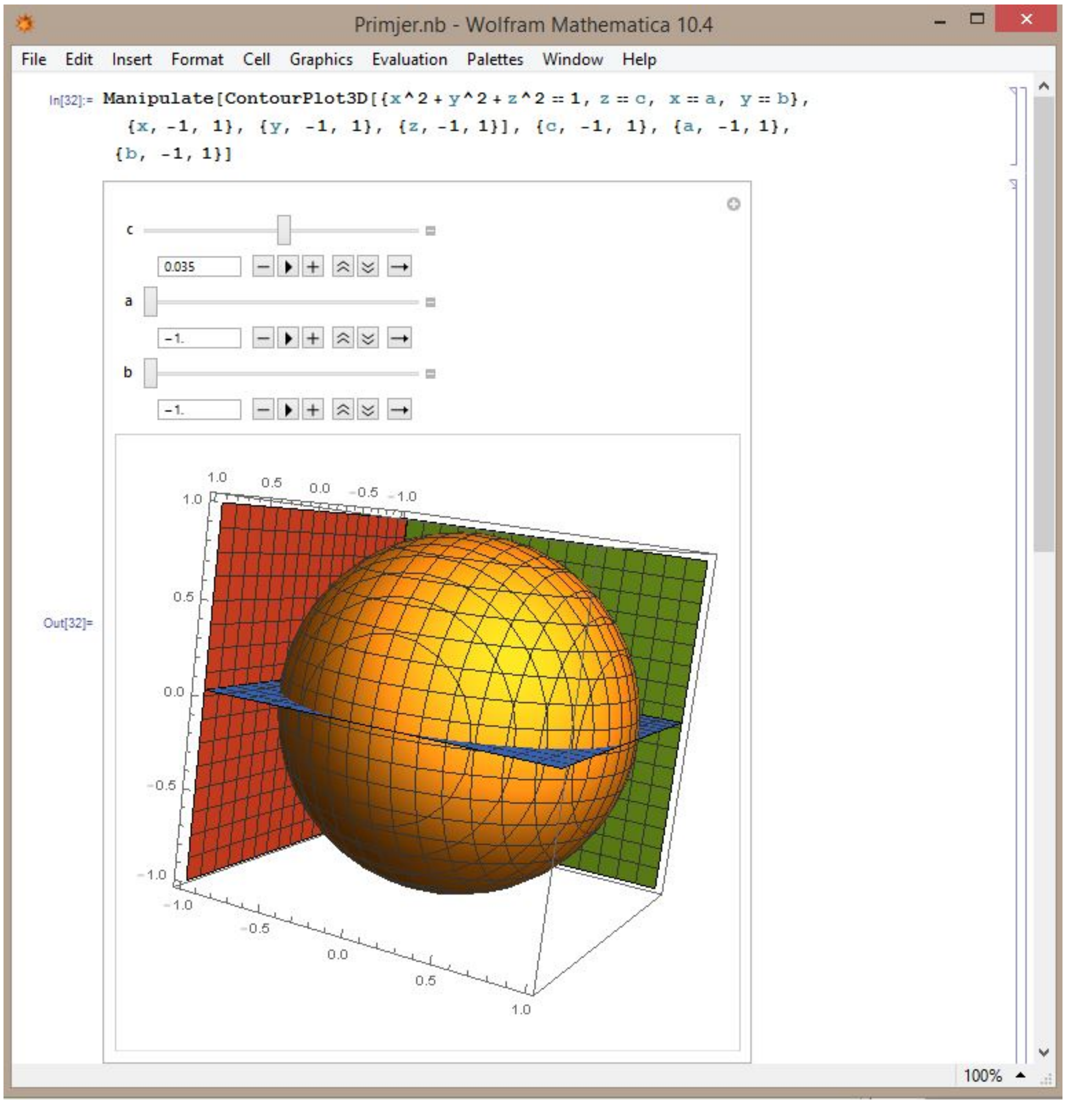
Ako plohu presječemo sa $z = c$ dobivamo elipse $x^2 + 4y^2 = c^2$ za $c \neq 0$, a za $c = 0$ je presjek točka $(0, 0)$.
Presjeci s $x = a$ su hiperbole $z^2 = a^2 + 4y^2$, odnosno $z^2 - 4y^2 = a^2$.
Presjeci s $y = b$ su presjeci hiperbole $z^2 - x^2 = 4b^2$.



Primjer 5.21 *Plohu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ presjecimo ravninom $z = c$, pa onda s $x = a$ i na kraju $y = b$.*

Rješenje.

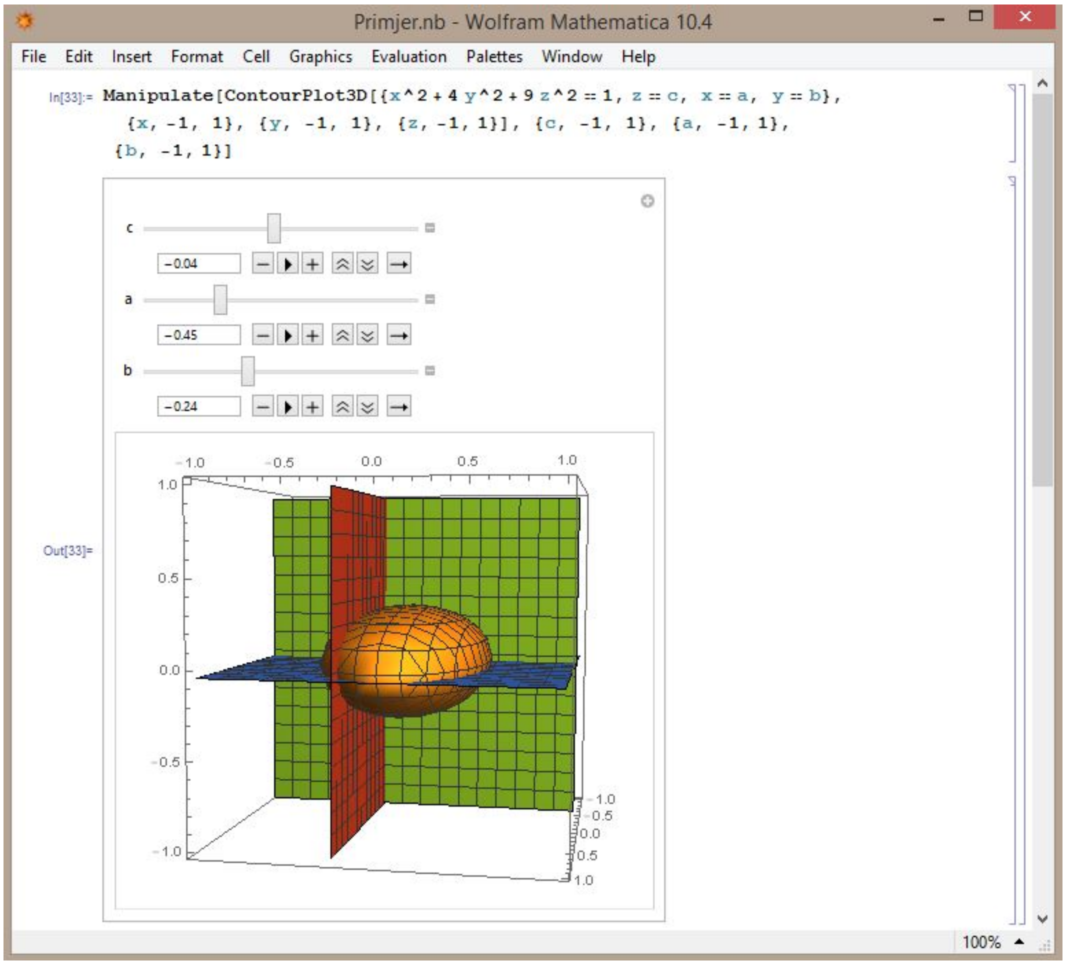
Presjek je kružnica za $|c| < 1$, točka za $c \pm 1$, a prazan skup za $|c| > 1$. Isto vrijedi za a i b.



Primjer 5.22 *Plohu* $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$ *presjecimo ravninom* $z = c$*, pa onda s* $x = a$ *i na kraju* $y = b$*.*

Rješenje.

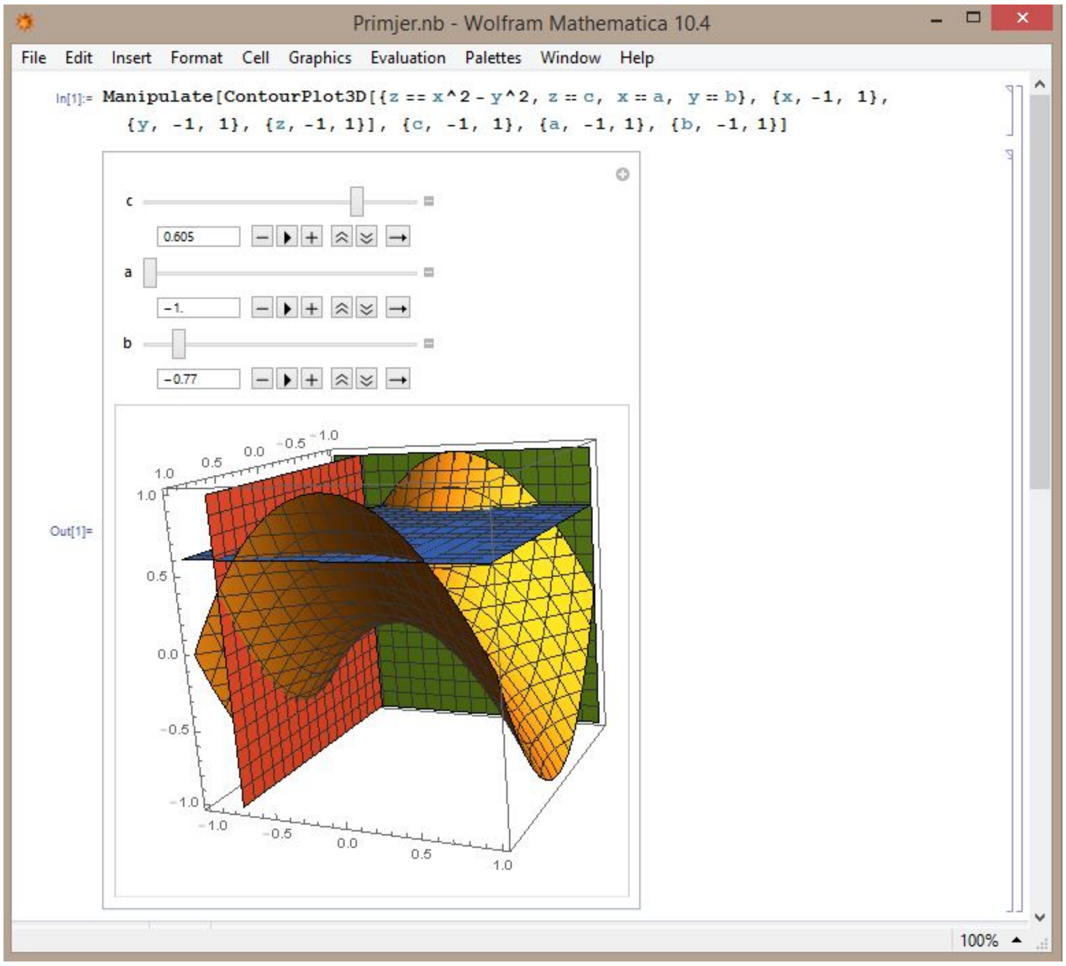
Presjek je elipsa za $|a| < 1$*, točka za* $a \pm 1$*, a prazan skup za* $|a| > 1$*.*
Presjek je elipsa za $|b| < 1/2$*, točka za* $b \pm 1/2$*, a prazan skup za* $|a| > 1/2$*.*
Presjek je elipsa za $|c| < 1/3$*, točka za* $c \pm 1/3$*, a prazan skup za* $|c| > 1/3$*.*



Primjer 5.23 *Plohu $z = x^2 - y^2$ presjecimo ravninom $z = c$, pa onda s $x = a$ i na kraju $y = b$.*

Rješenje.

Ako plohu presječemo sa $z = c$ dobivamo hiperbole $x^2 - y^2 = c$ za $c > 0$, za $c = 0$ je presjek točka $(0, 0)$.
Presjeci s $x = a$ su parabole $z = a^2 - y^2$, a s $y = b$ su presjeci parabole $z = x^2 - b^2$.

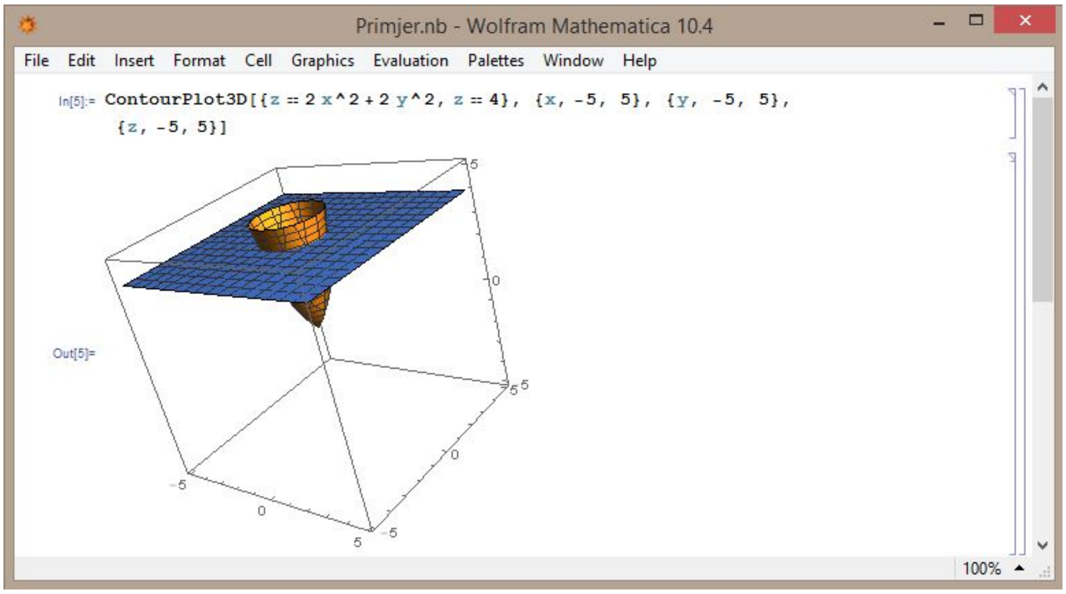


Primjer 5.24 *Pomoću Wolframove Mathematice nacrtajte presjek plohe i ravninu, te odredite jednadžbu njihovog presjeka*

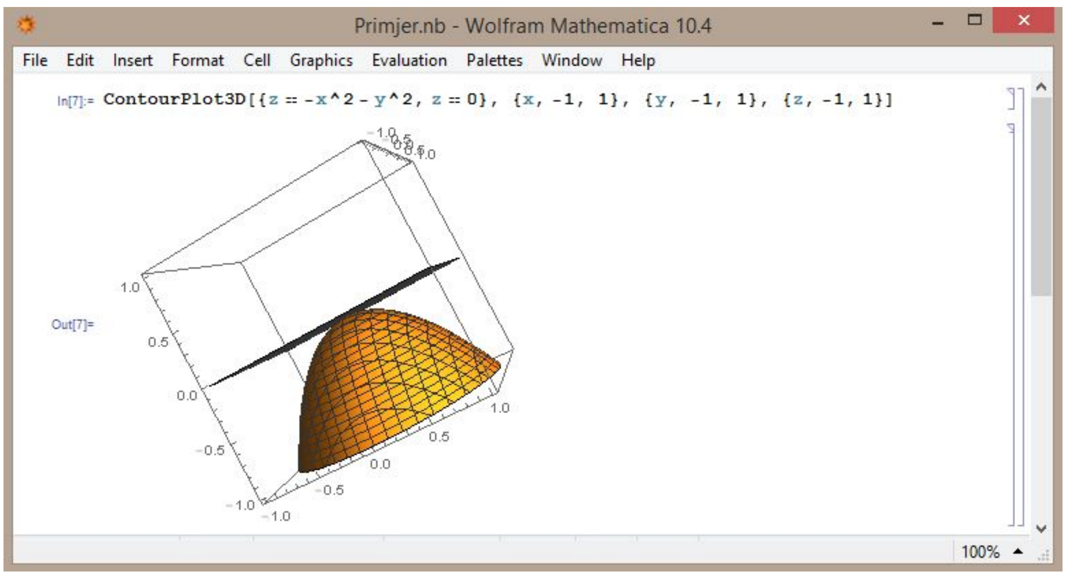
1. $z = 2x^2 + 2y^2, \ z = 4$
2. $z = -x^2 - y^2, \ z = 0$
3. $z = -x^2 - y^2, \ x = 1$
4. $z^2 = x^2 + y^2, \ z = 4$
5. $z^2 = 2x^2 + 2y^2, \ x = 2$
6. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1, \ z = 1$
7. $z = x^2 - y^2, \ z = 1$
8. $z = x^2 - y^2, \ x = 1$
9. $z = x^2 - y^2, \ y = 1$

Rješenje.

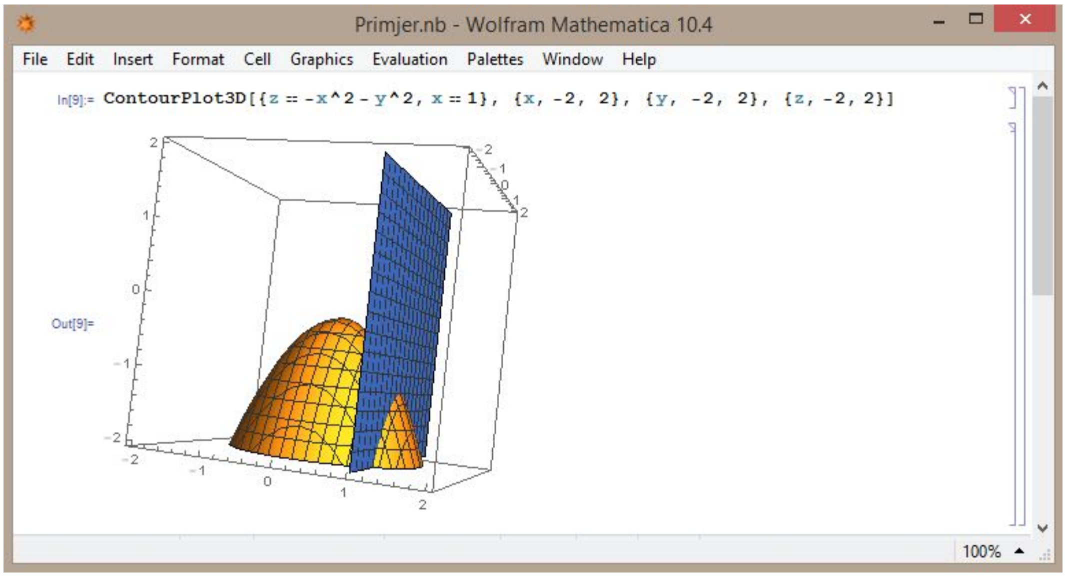
1. $4 = 2x^2 + 2y^2$, *kružnica*



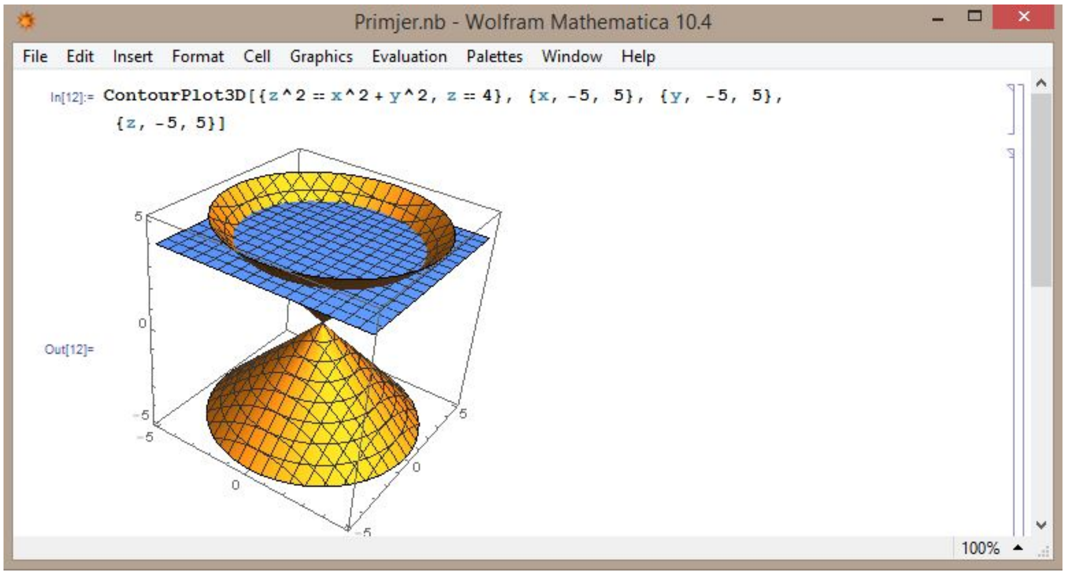
2. *Jednadžbu* $0 = -x^2 - y^2$ *zadovoljava točka* $(0, 0)$



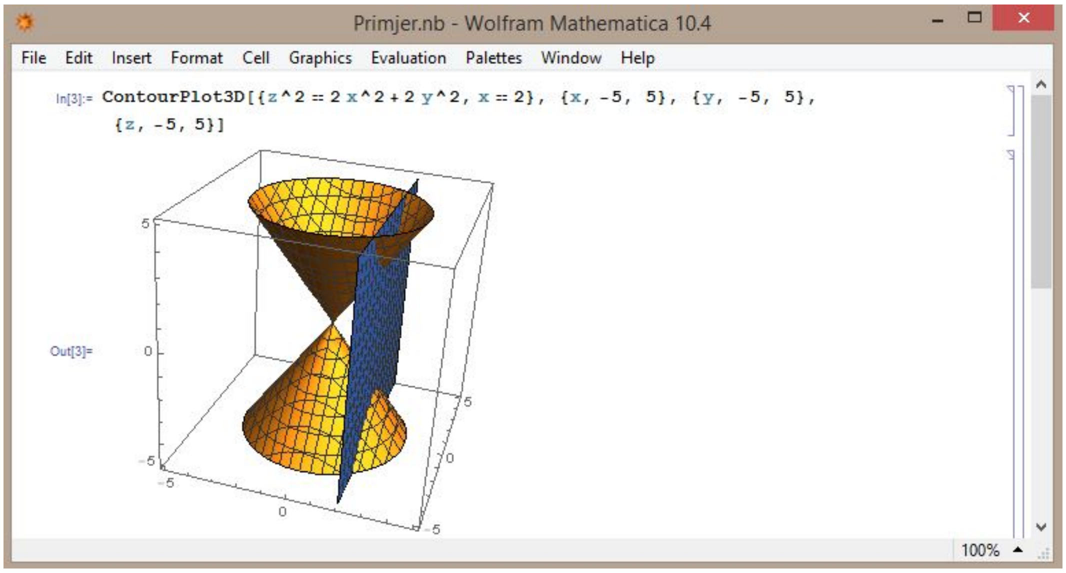
3. $z = -1 - y^2$, *parabola*



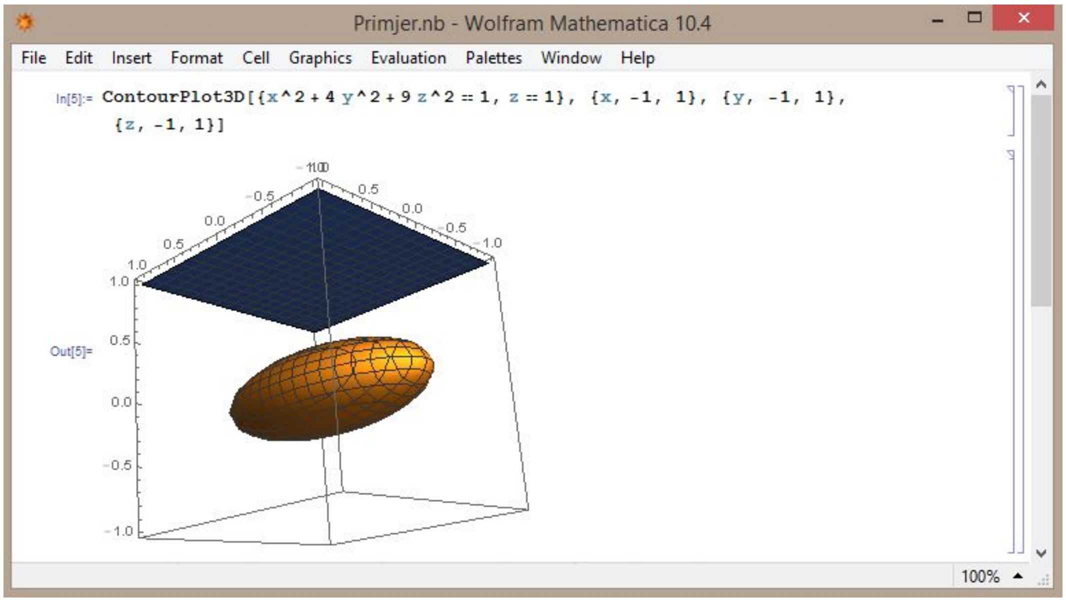
4. $16 = x^2 + y^2$, *kružnica*



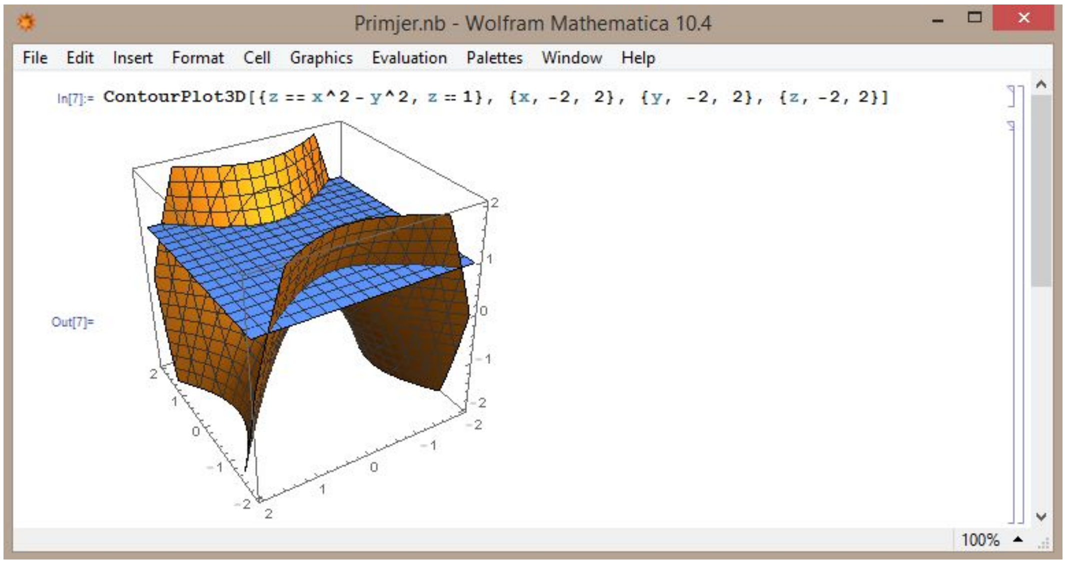
5. $z^2 = 8 + 2y^2$, *hiperbola*



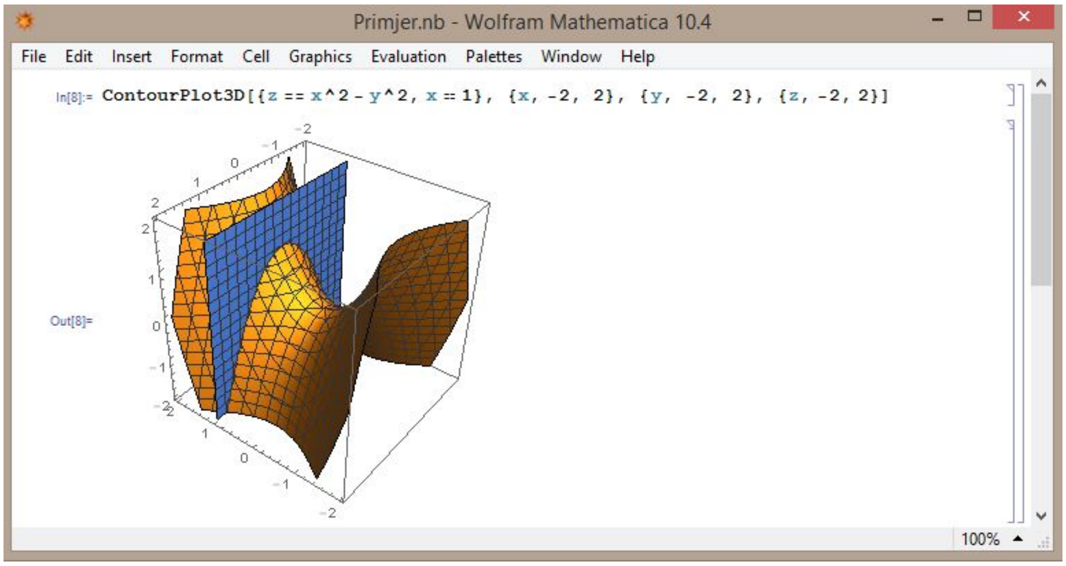
6. *Jednadžbu* $x^2 + 4y^2 = -8$ *ne zadovoljava ni jedna točka. Nema presjeka.*



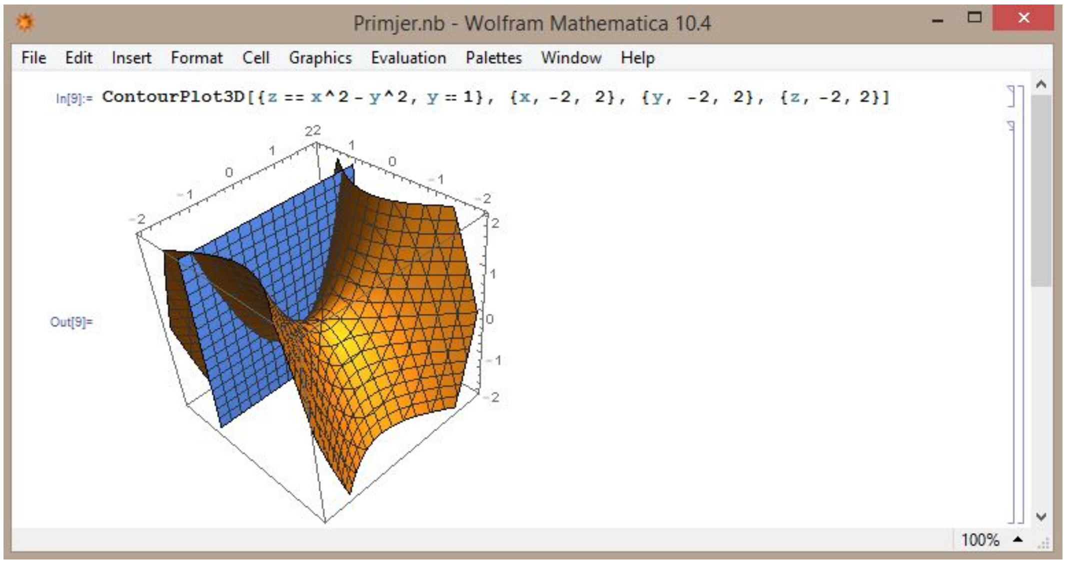
7. $1 = x^2 - y^2$, *hiperbola*



8. $z = 1 - y^2$, *parabola*



9. $z = x^2 - 1$, *parabola*



5.6 Modeliranje funkcijama više varijabli

Primjer 5.25 *Zadane su funkcija potražnje* $Q_d = 150 - 2p + 2Y$ *i funkcija ponude za jedan proizvod,* $Q_s = -14 + 2p$*, gdje je* p *cijena, a* Y *prostor na polici u dućanima dodijeljen tom proizvodu.*

1. *Uvjet čišćenja tržišta zahtjeva da je potražnja jednaka ponudi. Iz uvjeta čišćenja tržišta, izrazite cijenu kao funkciju prostora na polici.*

2. *Komentirajte monotonost funkcije iz (1).*

Rješenje.

1. *Iz uvjeta čišćenja tržišta imamo* $Q_d = Q_s$*. Slijedi da je*
   $150 - 2p + 2Y = -14 + 2p$
   $-4p = -2Y - 164$
   $p = \frac{1}{2}Y + 41$

2. *Cijena je rastuća funkcija prostora na polici jer je koeficijent smjera pravca pozitivan. To znači da za jedinično povećanje prostora na polici cijena raste za* $\frac{1}{2}$ *novčanih jedinica.*

Primjer 5.26 *Da bi poduzeće proizvodilo, treba koristiti repromaterijal (sirovine), rad (zaposlenike) i kapital (strojeve). Količina proizvodnje onda ovisi o ta tri faktora na sljedeći način:*

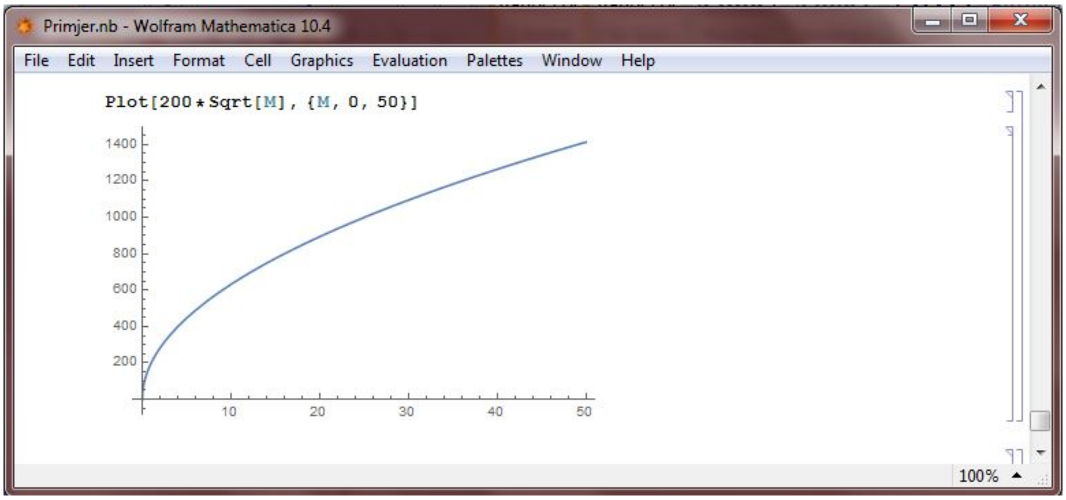
$$Q(M, L, K) = 100M^{0.5}L^{0.4}K^{0.5}$$

gdje je Q količina proizvodnje, M je količina repromaterijala, L je količina uloženog rada i K je količina kapitala.

1. *Izračunajte količinu proizvodnje na razini repromaterijala* 16*, rada* 1 *i kapitala* 4*.*
2. *Kratkoročno, količina rada je fiksirana na* 1*, a količina kapitala na* 4*. Izrazite količinu proizvodnje kao funkciju samo jedne varijable, količine repromaterijala. Nazovimo tu funkciju kratkoročnom proizvodnjom.*
3. *Izračunajte količinu kratkoročne proizvodnje za $M = 9$.*
4. *Izračunajte količinu kratkoročne proizvodnje za $M = 16$.*
5. *Izračunajte količinu kratkoročne proizvodnje za $M = 23$.*
6. *Komentirajte porast nezavisne i zavisne varijable u (3) - (5).*
7. *Nacrtajte graf kratkoročne proizvodnje.*
8. *Prikažite količinu repromaterijala kao funkciju kratkoročne proizvodnje i komentirajte.*

Rješenje.

1. $Q(16, 1, 4) = 100 \cdot 16^{0.5} \cdot 1^{0.4} \cdot 4^{0.5} = 100 \cdot \sqrt{16} \cdot 1 \cdot \sqrt{4} = 100 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 = 800.$
2. $Q(M, 1, 4) = 100M^{0.5}1^{0.4}4^{0.5} = 100M^{0.5} \cdot 1 \cdot \sqrt{4} = 100M^{0.5} \cdot 1 \cdot 2 = 200M^{0.5} = 200\sqrt{M}$. *Dakle, kratkoročna proizvodnja je funkcija jedne varijable, tj., $Q(M) = 200\sqrt{M}$.*
3. $Q(9) = 200\sqrt{9} = 200 \cdot 3 = 600$
4. $Q(16) = 200\sqrt{16} = 200 \cdot 4 = 800$
5. $Q(25) = 200\sqrt{23} = 200 \cdot 4.7958 = 959.17$
6. *Nezavisna varijabla M je oba puta porasla za* 7 *jedinica. Zavisna varijabla Q je prvi put porasla za* 200*, a drugi put za* 159.17 *jedinica. Znači, porastom nezavisne varijable za uvijek isti broj jedinica, zavisna varijabla raste, ali sve sporije. Ta se pojava zove opadajući prinosi.*
7. *Graf funkcije*



8. *Matematički, treba izračunati inverznu funkciju. Dakle,* $Q(M) = 200\sqrt{M}$*, ili* $Q = 200\sqrt{M}$*. Kvadriranjem jednadžbe dobivamo* $Q^2 = 40000M$*. Slijedi da je, tj.,* $M(Q) = \frac{Q^2}{40000}$*. Dakle, ukoliko poduzeće želi odgovor na pitanje K̈oliko je potrebno repromaterijala da bi proizvodnja bila* 1000?̈*jednostavno će izračunati vrijednost funkcije* $M(100) = \frac{1000^2}{40000} = \frac{10000}{40000} = 25$.

Primjer 5.27 *Ivana se priprema za ljeto i odlučila je svoj džeparac potrošiti za odjeću i obuću. U planu joj je kupiti par suknji, majica i nekoliko pari japanki. Označimo li s* x *količinu suknji, s* y *količinu majica i sa* z *količinu japanki, Ivanino je zadovoljstvo kupnjom predstavljeno funkcijom korisnosti* $u(x, y, z) = 0.4 \ln x + 0.2 \ln y + 0.4 \ln z$*. Također, Ivana ima na raspolaganju* 500 *kuna, a cijena suknje je* 110 *kuna, majice* 90 *kuna i jednog para japanki* 50 *kuna (Napomena. U praksi se radi o sličnim proizvodima slične cijene, pa na primjer cijena za suknju od* 110 *kuna može predstavljati neku prosječnu cijenu).*

1. *Ispitajte ima li Ivana dovoljno novaca za kupnju dvije suknje, dvije majice i tri pari japanki. Ukoliko je kupnja moguća, koja je Ivanina korist od te kupnje?*

2. *Ispitajte ima li Ivana dovoljno novaca za kupnju tri suknje, jedne majice i jednog para japanki. Ukoliko je kupnja moguća, koja je Ivanina korist od te kupnje?*

3. *Ispitajte ima li Ivana dovoljno novaca za kupnju jedne suknje, tri majice i dva para japanki. Ukoliko je kupnja moguća, koja je Ivanina korist od te kupnje?*

4. *Ukoliko Ivana odluči kupiti dvije suknje, koliko majica i koliko pari japanki će kupiti da joj korisnost bude maksimalna moguća s obzirom na budžet?*

Rješenje.

1. *Ukoliko Ivana kupi dvije suknje, dvije majice i tri para japanki, potrošit će* $2 \cdot 110 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 50 = 550$*, pa ova kupnja nije moguća.*

2. *Ukoliko Ivana kupi tri suknje, jednu majicu i jedan par japanki, potrošit će* $3 \cdot 110 + 90 + 50 = 470$*, pa je ova kupnja moguća. Korisnost je* $u(3, 1, 1) = 0.4 \ln 3 + 0.2 \ln 1 + 0.4 \ln 1 = 0.4394$.

3. *Ukoliko Ivana kupi jednu suknju, tri majice i dva para japanki, potrošit će* $110+3 \cdot 90+2 \cdot 50 = 480$. *Korisnost je* $u(1, 3, 2) = 0.4 \ln 1 + 0.2 \ln 3 + 0.4 \ln 2 = 0.4970$.

4. *Ukoliko Ivana kupi dvije suknje, potrošit će* 220 *kuna, te će joj budžet za majice i japanke biti* $500 - 220 = 280$ *kuna. Moguće kombinacije kupovine majica i japanki u okviru tog budžeta su:*

   (a) 3 *majice i* 0 *pari japanki – trošak je* $3 \cdot 90 + 0 \cdot 50 = 270$. *Korisnost nije definirana jer je* $z = 0$*, pa logaritam teži u* $-\infty$*. Možemo zaključiti da je Ivanina korisnost jako niska ukoliko ne kupi nijedan komad jednog od tri proizvoda. Dakle, da bi korisnost bila definirana, Ivana mora kupiti barem jedan komad od svakog proizvoda.*

   (b) 2 *majice i* 0 *pari japanki – trošak je* $2 \cdot 90 + 0 \cdot 50 = 180$. *Korisnost nije definirana jer je* $z = 0$*, pa logaritam teži u* $-\infty$.

   (c) 2 *majice i* 1 *par japanki – trošak je* $2 \cdot 90 + 1 \cdot 50 = 230$. *Korisnost je jednaka* $u(2, 2, 1) = 0.4 \ln 2 + 0.2 \ln 2 + 0.4 \ln 1 = 0.415888$

   (d) 2 *majice i* 2 *para japanki – trošak je* $2 \cdot 90 + 2 \cdot 50 = 280$. *Korisnost je jednaka* $u(2, 2, 2) = 0.4 \ln 2 + 0.2 \ln 2 + 0.4 \ln 2 = 0.693147$

   (e) 1 *majica i* 0 *pari japanki – trošak je* $1 \cdot 90 + 0 \cdot 50 = 90$. *Korisnost nije definirana jer je* $z = 0$*, pa logaritam teži u* $-\infty$.

   (f) 1 *majica i* 1 *par japanki – trošak je* $1 \cdot 90 + 1 \cdot 50 = 140$. *Korisnost je jednaka* $u(2, 1, 1) = 0.4 \ln 2 + 0.2 \ln 1 + 0.4 \ln 1 = 0.277259$

   (g) 1 *majica i* 2 *para japanki – trošak je* $1 \cdot 90 + 2 \cdot 50 = 190$. *Korisnost je jednaka* $u(2, 1, 2) = 0.4 \ln 2 + 0.2 \ln 1 + 0.4 \ln 2 = 0.554518$

   (h) 1 *majica i* 3 *para japanki – trošak je* $1 \cdot 90 + 3 \cdot 50 = 240$. *Korisnost je jednaka* $u(2, 1, 3) = 0.4 \ln 2 + 0.2 \ln 1 + 0.4 \ln 3 = 0.716704$

   (i) 0 *majica i* 0 *pari japanki – trošak je* $0 \cdot 90 + 0 \cdot 50 = 0$. *Korisnost nije definirana jer je* $x = 0$*, pa logaritam teži u* $-\infty$.

   (j) 0 *majica i* 1 *par japanki – trošak je* $0 \cdot 90 + 1 \cdot 50 = 50$. *Korisnost nije definirana jer je* $x = 0$*, pa logaritam teži u* $-\infty$.

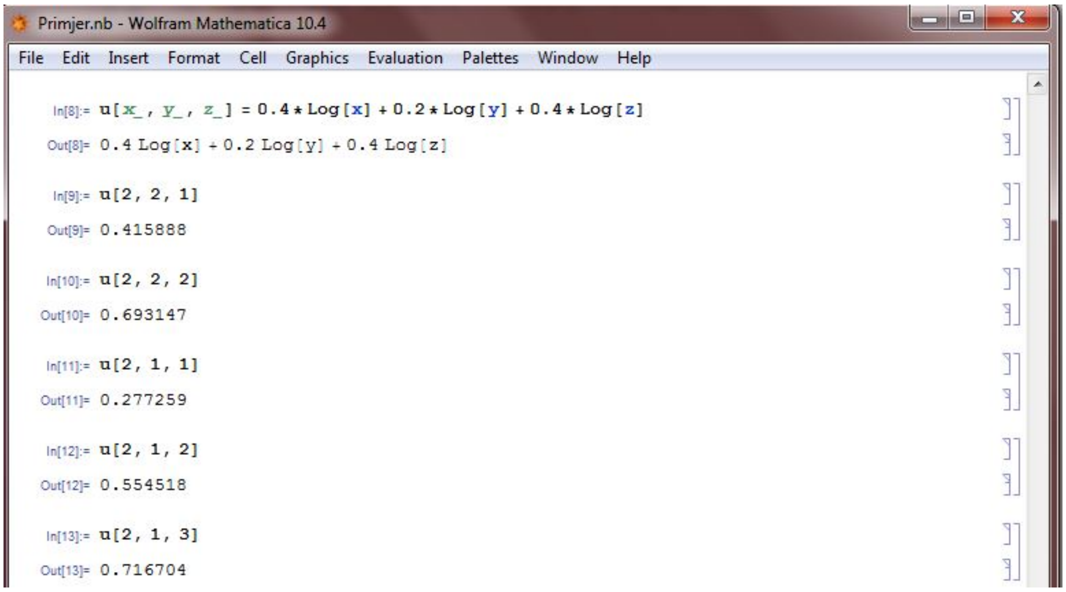
   (k) 0 *majica i* 2 *para japanki – trošak je* $0 \cdot 90 + 2 \cdot 50 = 100$. *Korisnost nije definirana jer je* $x = 0$*, pa logaritam teži u* $-\infty$.

   (l) 0 *majica i* 3 *para japanki – trošak je* $0 \cdot 90 + 3 \cdot 50 = 150$. *Korisnost nije definirana jer je* $x = 0$*, pa logaritam teži u* $-\infty$.

   (m) 0 *majica i* 4 *para japanki – trošak je* $0 \cdot 90 + 4 \cdot 50 = 200$. *Korisnost nije definirana jer je* $x = 0$*, pa logaritam teži u* $-\infty$.

   (n) 0 *majica i* 5 *pari japanki – trošak je* $0 \cdot 90 + 5 \cdot 50 = 250$. *Korisnost nije definirana jer je* $x = 0$*, pa logaritam teži u* $-\infty$.

Maksimalna se korisnost ostvaruje ako Ivana, pored dvije suknje, kupi 1 *majicu i* 3 *para japanki.*



Primjer 5.28 *Luka priprema zabavu i kupuje dvije vrste pića, $P1$ i $P2$. Označimo li s x količinu pića $P1$, a s y količinu pića $P2$, Lukino je zadovoljstvo kupnjom predstavljeno funkcijom korisnosti $u(x, y) = x \cdot y$.*

1. *Izvedite krivulju indiferencije za Luku na razini zadovoljstva $u = 100$, te je grafički prikažite i ekonomski interpretirajte.*

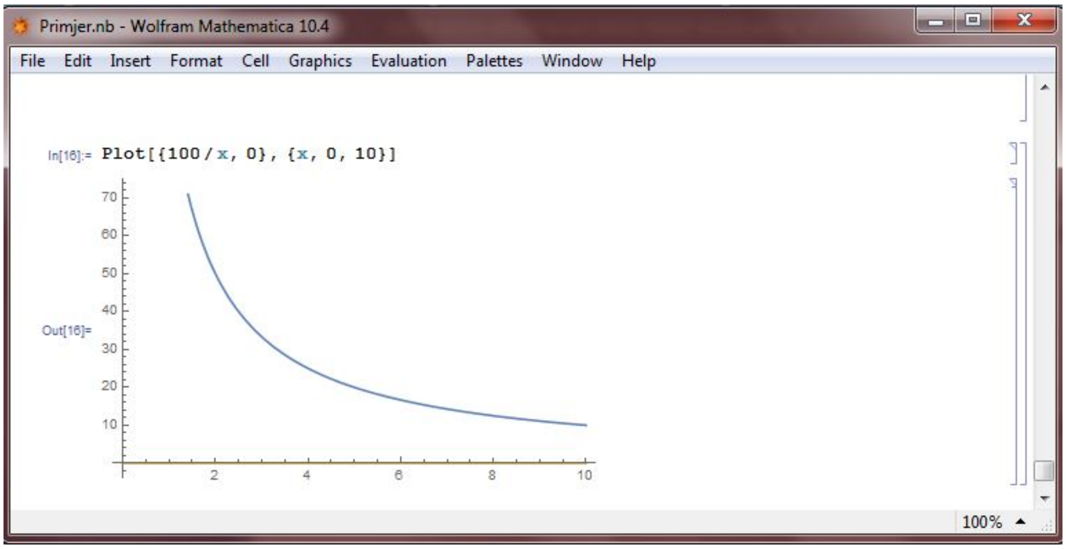
2. *Na istoj slici grafički prikažite krivulje indiferencije za razine korisnosti $u = 20$, $u = 40$, $u = 60$ i $u = 80$. Ekonomski interpretirajte.*

3. *Ukoliko piće $P1$ košta* 8 *kuna po litri, piće $P2$* 10 *kuna po litri, a Luka ima na raspolaganju* 120 *kuna, konstruirajte budžetski pravac i grafički ga prikažite zajedno s korisnostima iz prethodnog podzadatka. Ekonomski interpretirajte.*

Rješenje.

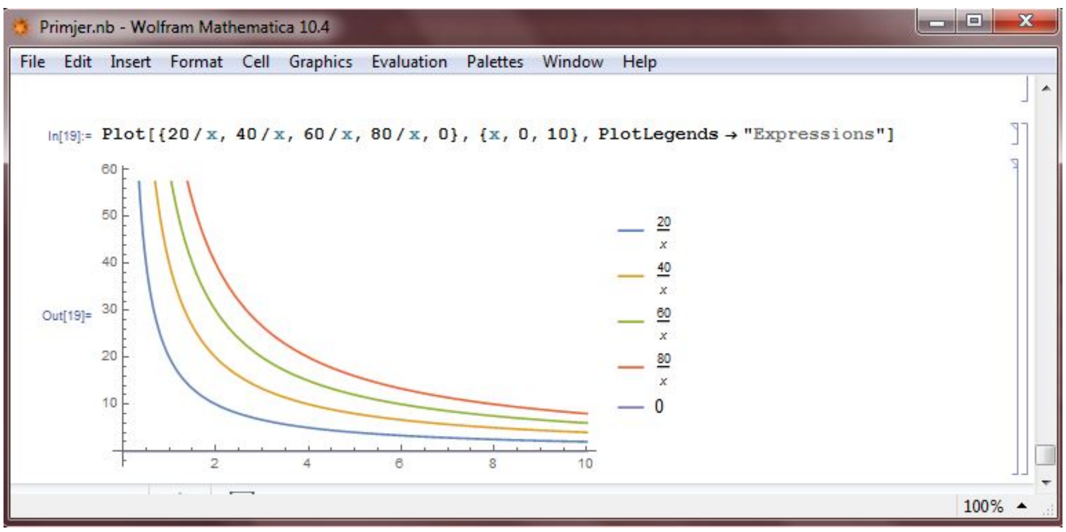
1. *Krivulja indiferencije je skup svih uređenih parova količina pića $P1$ i $P2$ za koje je korisnost konstantna, u ovom slučaju* 100*. Matematički, iz uvjeta $u(x, y) = x \cdot y = 100$ izvodimo y kao*

funkciju od x. Dobivamo: $x \cdot y = 100$
$y = \frac{100}{x}$

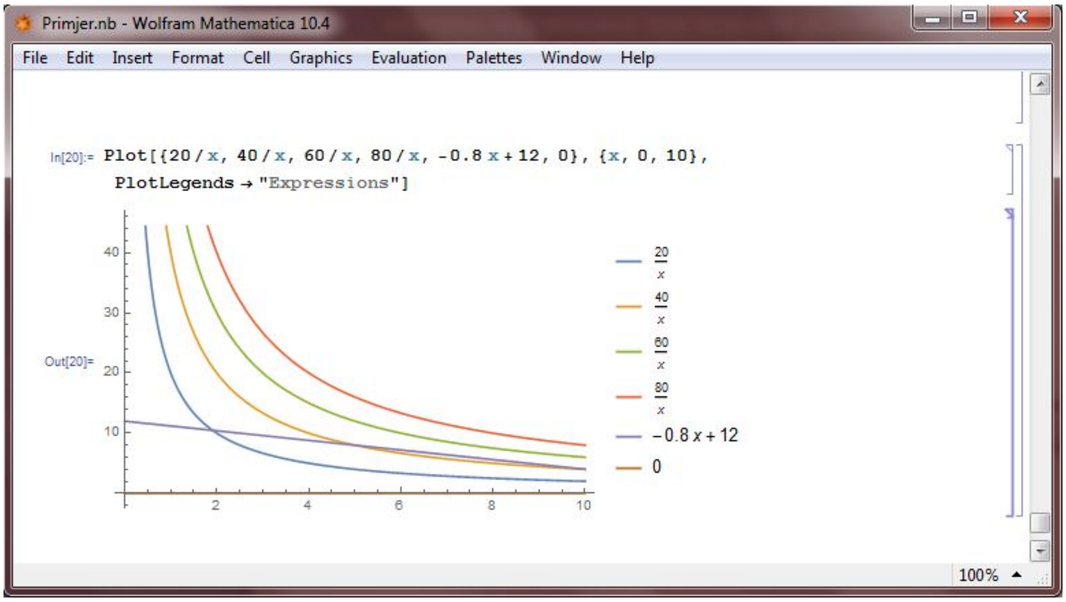


Dakle, Luka kupuje dvije vrste pića, $P1$ i $P2$. Iz slike vidimo da što je količina pića $P1(x)$ veća, da bi Lukino zadovoljstvo bilo na istoj razini, količina pića $P2(y)$ je sve manja. I obrnuto. Jedan se proizvod supstituira drugim, a na istoj razini zadovoljstva. Na primjer, Luka može kupiti 10 *litara pića $P1$ i* 10 *litara pića $P2$, korisnost će biti* 100*. Ukoliko kupi* 5 *litara pića $P1$, da bi mu zadovoljstvo bilo opet* 100*, mora kupiti* 20 *litara pića $P2$.*

2. *Što je razina zadovoljstva veća, krivulja indiferencije je udaljenija od ishodišta. Povećanjem razine zadovoljstva krivulja indiferencije se pomiče prema gore desno.*



3. *Budžetski pravac:* $8x + 10y = 120$ *ili* $y = -0.8x + 12$.



Luka ne može potrošiti više od 120 kuna. Grafički, uređeni parovi iznad pravca $y = -0.8x + 12$ nisu moguće kombinacije kupnji za Luku. Istovremeno, Luka želi maksimizirati zadovoljstvo, pa će nastojati kupiti one kombinacije pića za koje je krivulja indiferencije što je više moguće udaljenija od ishodišta. Dakle, maksimiziramo korisnost uz ograničenje na budžet. Rješenje nam je uređeni par u kojima je budžetski pravac tangenta na krivulju indiferencije.

Primjer 5.29 *Količina proizvodnje određenog poduzeća ovisi o dva faktora na sljedeći način:*

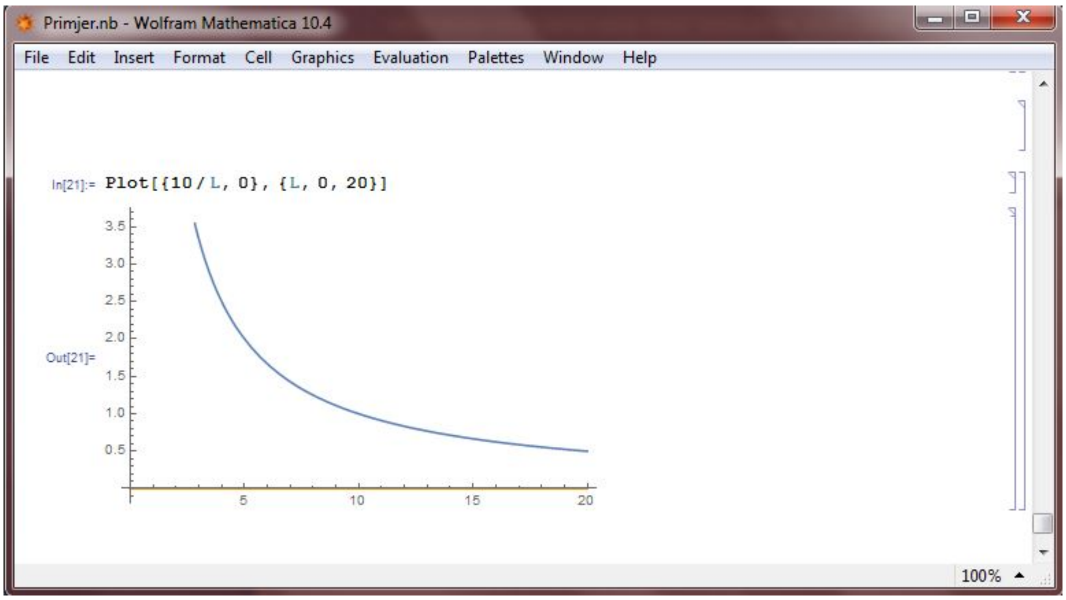
$$Q(L, K) = 100\sqrt{LK}$$

gdje je Q količina proizvodnje, L je količina uloženog rada i K je količina kapitala.

1. *Izvedite izokvantu na razini proizvodnje $Q = 1000$. Grafički je prikažite i ekonomski interpretirajte.*
2. *Na istoj slici grafički prikažite izokvante za razine proizvodnje 100, 200, 300 i 400, te ekonomski interpretirajte.*
3. *Ukoliko je jedinični trošak rada 16, kapitala 20, a poduzeće ima budžet od 1000, grafički prikažite troškovni pravac na istoj slici s izokvantama iz prethodnog podzadatka. Ekonomski interpretirajte.*

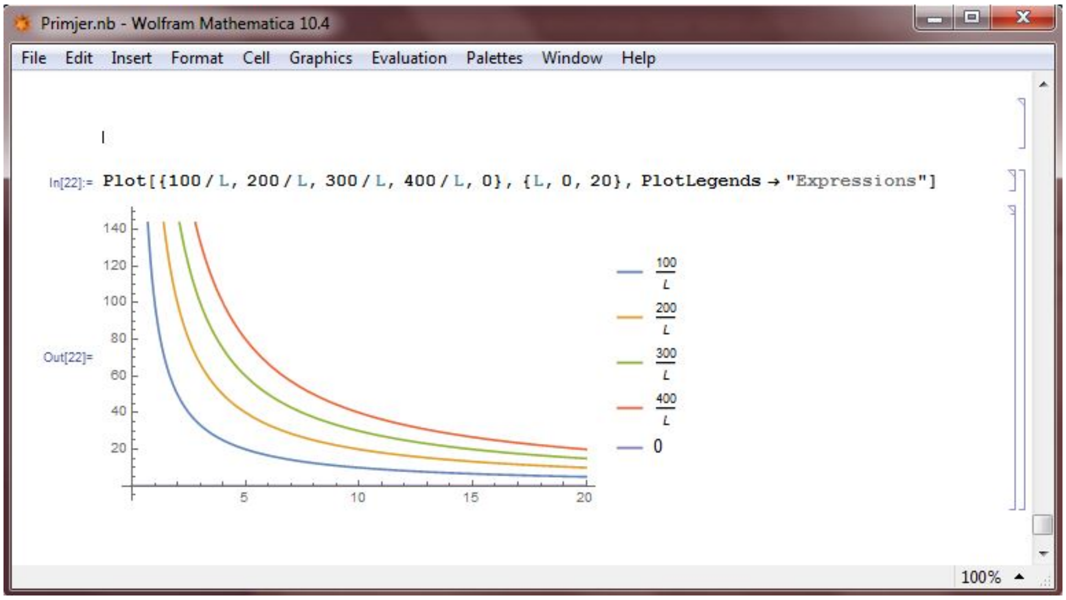
Rješenje.

1. *Izokvanta je krivulja na kojoj se nalaze uređeni parovi (kombinacije) rada i kapitala za koje je količina proizvodnje konstantna. U našem primjeru, jednaka* 1000. *Matematički, iz uvjeta* $Q(L,K) = 100\sqrt{LK} = 1000$ *izvodimo* K *kao funkciju od* L*-a ili obrnuto. Dobivamo:*
   $100\sqrt{LK} = 1000$
   $\sqrt{LK} = 10$
   $L \cdot K = 10$
   $K = \frac{10}{L}$

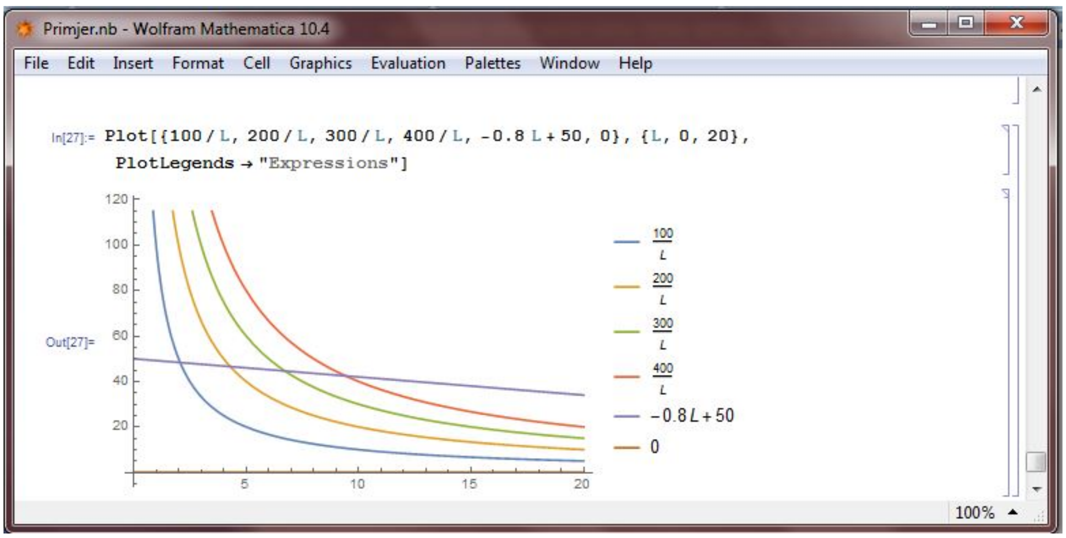


Kako se količina rada povećava, da bi količina proizvodnje ostala na istoj razini, količina kapitala se smanjuje. Dakle, kapital se supstituira radom. I obrnuto. Što je količina rada manja, količina kapitala raste.

2. *Što je količina proizvodnje veća, izokvanta je udaljenija od ishodišta. Dakle, proizvodnja se povećava kako se izokvanta pomiče prema gore desno.*



3. *Troškovni pravac:* $16L + 20K = 1000$ *ili* $K = -0.8L + 50$



Poduzeće koristi dva resursa, rad i kapital. Poduzeće ne može koristiti više od onog što može platiti. Dakle, uređeni parovi iznad troškovnog pravca nisu moguće kombinacije resursa. Istovremeno, poduzeće želi maksimizirati proizvodnju. Grafički, želi uzeti onaj uređeni par resursa za koji je izokvanta najudaljenija od ishodišta uzimajući u obzir troškovni pravac. Poduzeće rješava problem maksimizacije proizvodnje uz ograničenje na budžet. Rješenje je uređeni par resursa za koji je troškovni pravac tangenta na izokvantu.

Primjer 5.30 *Općenito, udaljenost* 1 *za dvije točke* $T_1(x_1, y_1)$ *i* $T_2(x_2, y_2)$ *iz ravnine definira se kao* $d_1(T_1, T_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. *To je zapravo funkcija* 4 *varijable,* $d_1(T_1, T_2) = f(x_1, y_1, x_2, y_2)$. *Također, udaljenost* 2 *je funkcija* 4 *varijable,* $d_2(T_1, T_2) = g(x_1, y_1, x_2, y_2)$ *i definira se kao* $d_2(T_1, T_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Poduzeće treba izabrati lokaciju za gradnju nove tvornice. Kriteriji po kojima bira lokaciju su cijena (u stotinama tisuća kuna) i veličina tržišta (izražena u broju potencijalnih potrošača, u tisućama). Ponude za izgradnju se zapisuju u obliku vektora gdje je prva koordinata vrijednost prvog kriterija cijene, a druga koordinata vrijednost drugog kriterija veličine tržišta. Pristigle ponude su $(2, 10)$, $(4, 14)$ *i* $(1, 8)$. *Izaberite najbolju ponudu na temelju minimalnog odstupanja od idealne ponude.*

1. *Koristite udaljenost* 1.

2. *Koristite udaljenost* 2.

Rješenje.

Idealno rješenje je $I(1, 14)$, *i ono ima najnižu cijenu i najveći udjel na tržištu. No, ta idealna lokacija ne postoji. Izabrat ćemo lokaciju koja je najbliža nepostojećoj, idealnoj. Oznake su* $A(2, 10)$, $B(4, 14)$, $C(1, 8)$.

1. *Udaljenost* 1*:*
   $d_1(A, I) = |2 - 1| + |10 - 14| = 1 + 4 = 5$
   $d_1(B, I) = |4 - 1| + |14 - 14| = 3 + 0 = 3$
   $d_1(C, I) = |1 - 1| + |8 - 14| = 0 + 6 = 6$

2. *Udaljenost* 2*:*
   $$d_2(A, I) = \sqrt{(2-1)^2 + (10-14)^2} = \sqrt{17} = 4.12$$
   $$d_2(B, I) = \sqrt{(4-1)^2 + (14-14)^2} = \sqrt{9} = 3$$
   $$d_2(C, I) = \sqrt{(1-1)^2 + (8-14)^2} = \sqrt{36} = 6$$

Ponuda B je najbolja po oba kriterija jer je njezina udaljenost od idealne ponude minimalna.

5.7 Zadaci za vježbu

Zadatak 5.1 *Zadane su funkcija potražnje* $Q_d = 200 - 4p + \sqrt{Y}$ *i funkcija ponude za jedan proizvod,* $Q_s = -40 + 2p$, *gdje je* p *cijena, a* Y *prostor na polici u dućanima dodijeljen tom proizvodu.*

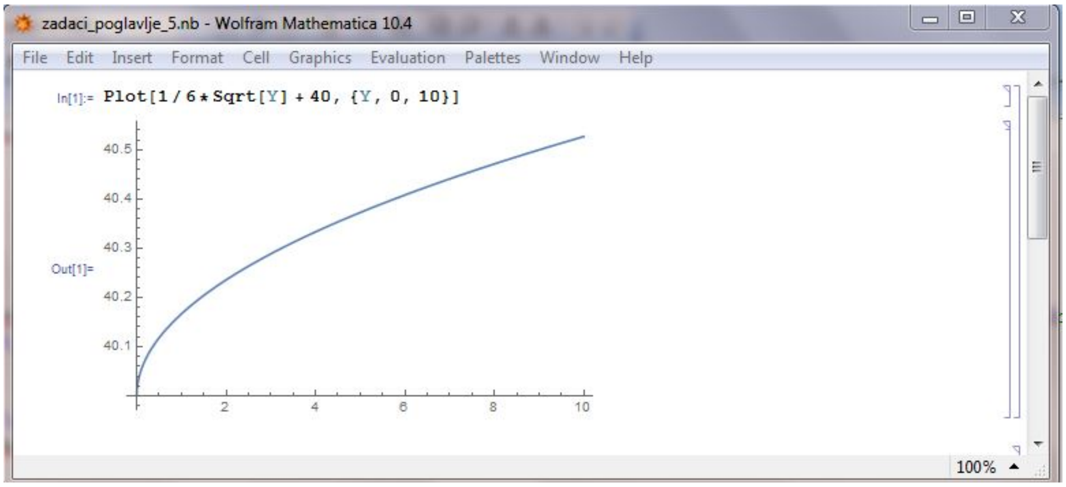
1. *Iz uvjeta čišćenja tržišta, izrazite cijenu kao funkciju prostora na polici. Uputa: vidite primjer 5.25.*

2. *Grafički prikažite i komentirajte prinose funkcije iz (1).*

Rješenje.

1. $p(Y) = \frac{1}{6}\sqrt{Y} + 40$

2. *Cijena raste s porastom prstora na polici, te pokazuje opadajuće prinose.*



Zadatak 5.2 *Lucija kupuje dvije vrste grickalica za tulum. Korisnost koja se ostvaruje u trgovini D1 modelirana je funkcijom $u(x, y) = \log x + \log y$ gdje je x količina prve vrste grickalica, a y druge.*

1. *Izvedite krivulju indiferencije na razini korisnosti $u = 2.3026$. Uputa: vidite primjer 5.28.*

2. *Grafički prikažite krivulju indiferencije i komentirajte odnos grickalica.*

3. *Na istoj slici, grafički prikažite krivulje indiferencije na razinama korisnosti $u = 2.0794$, $u = 2.3026$ i $u = 2.4849$. Komentirajte.*

4. *Ukoliko je jedinična cijena grickalica prve vrste 5 kuna, druge 7 kuna, a Lucija ima na raspolaganju 100 kuna, nacrtaje na istoj slici budžetski pravac i krivulje indiferencije. Komentirajte u skladu s maksimizacijom korisnosti i ograničenjem na budžet.*

5. *Korisnost koja se ostvaruje u drugoj trgovini D2, za Luciju je $u(x, y) = \log x + y$. Na razini $u = 2.3026$, grafički prikažite obje krivulje indiferencije i komentirajte odnos korisnosti za te dvije promatrane trgovine.*

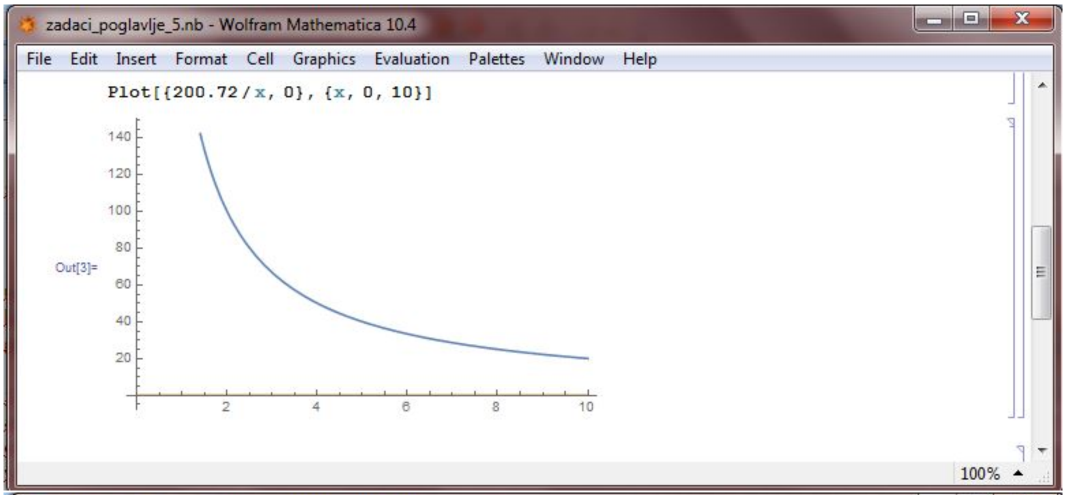
Rješenje.

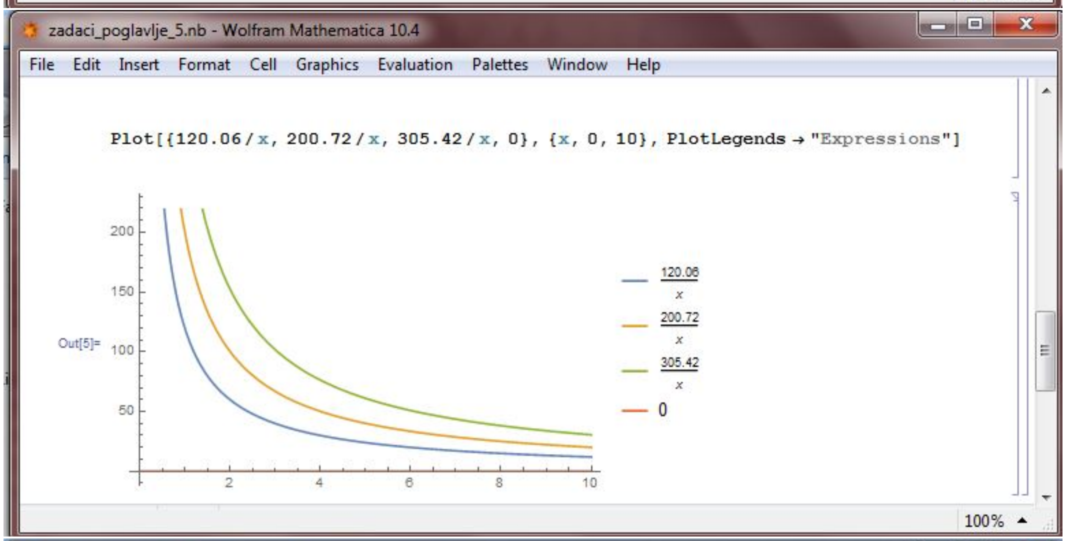
1. $y(x) = \frac{200.72}{x}$

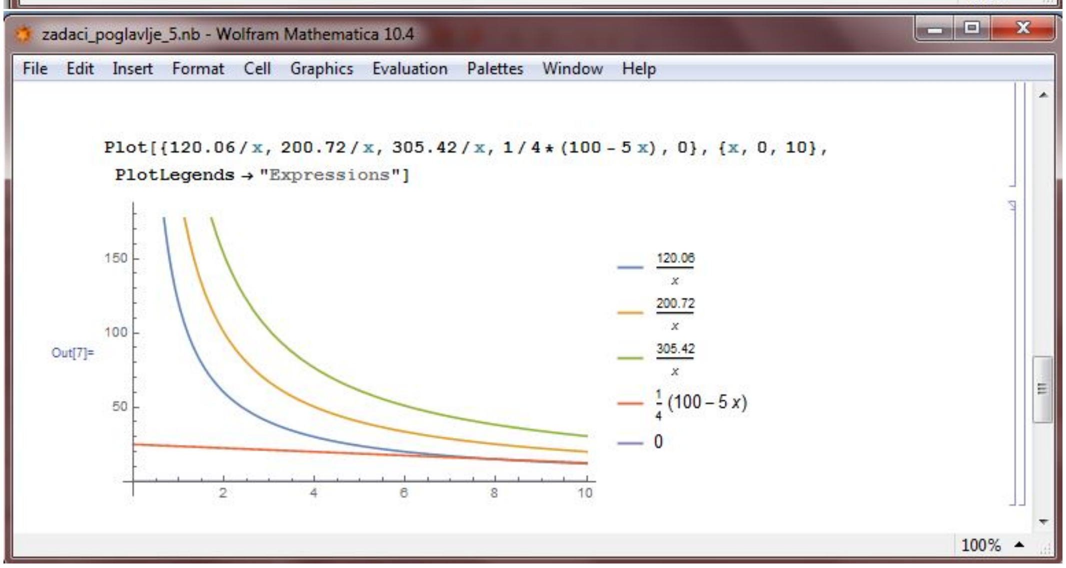
2. *Što je količina grickalica prve vrste veća, količina grickalica druge vrste je manja. Proizvodi su supstituti.*

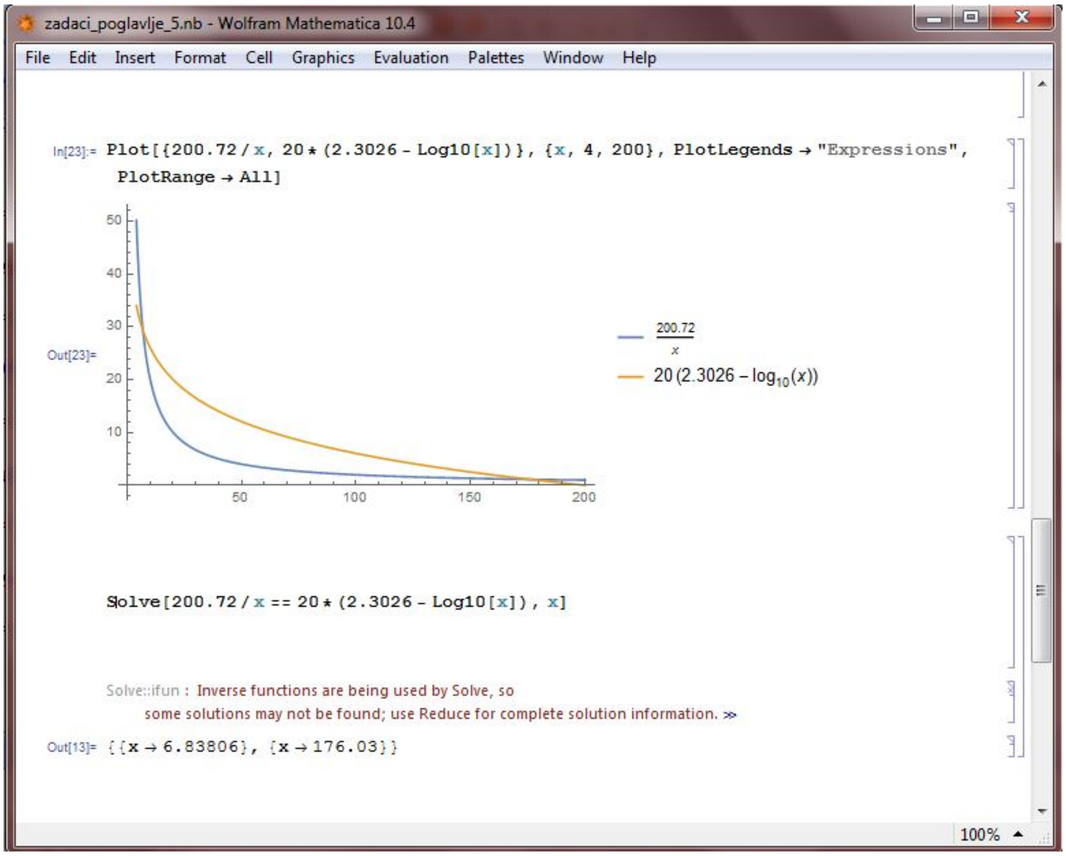
3. *Što je korisnost veća, krivulja indiferencije je udaljenija od ishodišta.*

4. $y = \frac{1}{4}(100 - 5x)$. *Maksimalna korisnost se ostvaruje tamo gdje je budžetski pravac tangenta na krivulju indiferencije.*


zadaci_poglavlje_5.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
Plot[{200.72 / x, 0}, {x, 0, 10}]
Out[3]=
100%


zadaci_poglavlje_5.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
Plot[{120.06 / x, 200.72 / x, 305.42 / x, 0}, {x, 0, 10}, PlotLegends → "Expressions"]
Out[5]=
120.06/x
200.72/x
305.42/x
0
100%


zadaci_poglavlje_5.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
Plot[{120.06 / x, 200.72 / x, 305.42 / x, 1 / 4 * (100 - 5 x), 0}, {x, 0, 10},
PlotLegends → "Expressions"]
Out[7]=
120.06/x
200.72/x
305.42/x
1/4 (100 – 5 x)
0
100%



5. $y = 20(2.3026 - \log x)$. *Za količine grickalica prve vrste iz intervala* $(0, 6.83806)$ *i* $(176.03, +\infty)$, *korisnost je veća u D1, a za ostale količine u D2. Ovdje moramo napomenuti da gornja granica na količine ovisi i o budžetu kojim Lucija raspolaže.*

Zadatak 5.3 *Količina proizvodnje ovisi o dva resursa i modelirana je funkcijom* $Q(x, y) = \log x + \sqrt{y}$ *gdje je* Q *količina proizvodnje,* x *količina prve vrste resursa, a* y *druge. Na primjer, stolovi se mogu proizvesti kombinirajući dvije vrste drva.*

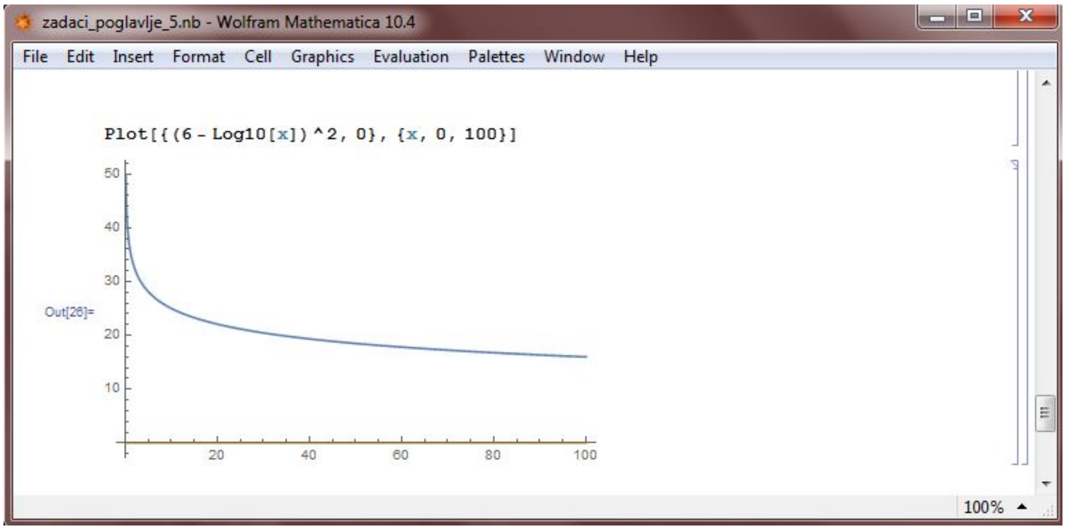
1. *Izvedite izokvantu na razini proizvodnje* $Q = 6$ *i grafički je prikažite. Komentirajte odnos dvaju resursa. Uputa: vidite primjer 5.29.*

2. *Na istoj slici, grafički prikažite izokvante na razinama proizvodnje* $Q = 4$, $Q = 6$ *i* $Q = 8$. *Komentirajte.*

3. *Ukoliko je jedinični trošak prvog resursa* 12, *kapitala* 8, *a poduzeÄ‡e ima budĹľet od* 150, *grafički prikažite troškovni pravac na istoj slici s izokvantama iz prethodnog podzadatka. Ekonomski interpretirajte.*

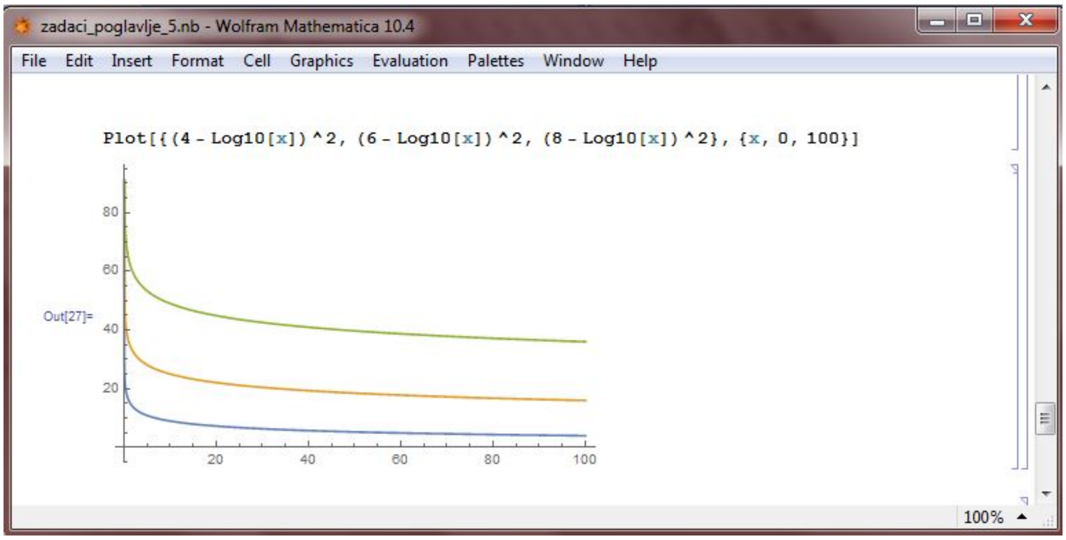
Rješenje.

1. $y(x) = (6 - \log x)^2$

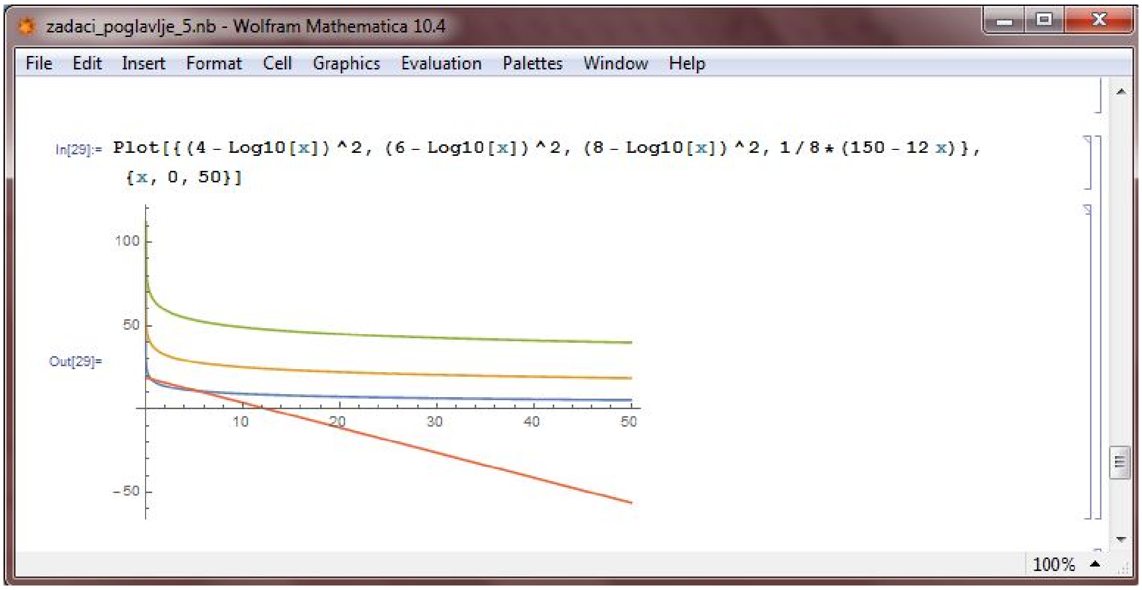


Resursi su supstituti. Što je količina prvog resursa veća, količina drugog je manja.

2. *Što je razina proizvodnje veća, izokvanta je viša.*



3. $y = \frac{1}{8}(150 - 12x)$. *Maksimum proizvodnje ostvaruje se u točki gdje je budžetski pravac tangenta na izokvantu.*



Zadatak 5.4 *Poduzeće treba izabrati dobavljača. Kriteriji po kojima bira dobavljača su cijena (u stotinama tisuća kn) i rok isporuke robe (izražen u broju dana). Ponude se zapisuju u obliku vektora gdje je prva koordinata vrijednost prvog kriterija cijene, a druga koordinata vrijednost drugog kriterija roka isporuke. Pristigle ponude su* $(3, 9)$, $(5, 6)$ *i* $(8, 1)$. *Izaberite najbolju ponudu na temelju minimalnog odstupanja od idealne ponude. (a) Koristite udaljenost* 1, *(b) Koristite udaljenost* 2. *Napomena: ponuda je povoljnija ako je cijena manja, a rok isporuke kraći.*
Rješenje.

Idealno rješenje je $I(3, 1)$, *i ono ima najnižu cijenu i najkraći rok isporuke. No, taj idealan dovaljač ne postoji. Izabrat ćemo dobavljača koji je najbliži nepostojećem, idealnom. Oznake su* $A(3, 9)$, $B(5, 6)$, $C(8, 1)$.

1. *Udaljenost* 1:
   $d_1(A, I) = |3 - 3| + |9 - 1| = 0 + 8 = 8$
   $d_1(B, I) = |5 - 3| + |6 - 1| = 2 + 5 = 7$
   $d_1(C, I) = |8 - 3| + |1 - 1| = 5 + 0 = 5$

2. *Udaljenost* 2:
   $d_2(A, I) = \sqrt{(3-3)^2 + (9-1)^2} = \sqrt{64} = 8$
   $d_2(B, I) = \sqrt{(5-3)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{29} = 5.39$
   $d_2(C, I) = \sqrt{(8-3)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{25} = 5$

   Dobavljač C *je najpovoljniji po obje udaljenosti.*

Zadatak 5.5 *Kupac u određenom razdoblju kupuje tri proizvoda za doručak, sir, salamu i jaja. Funkcija korisnosti za tog kupca je*

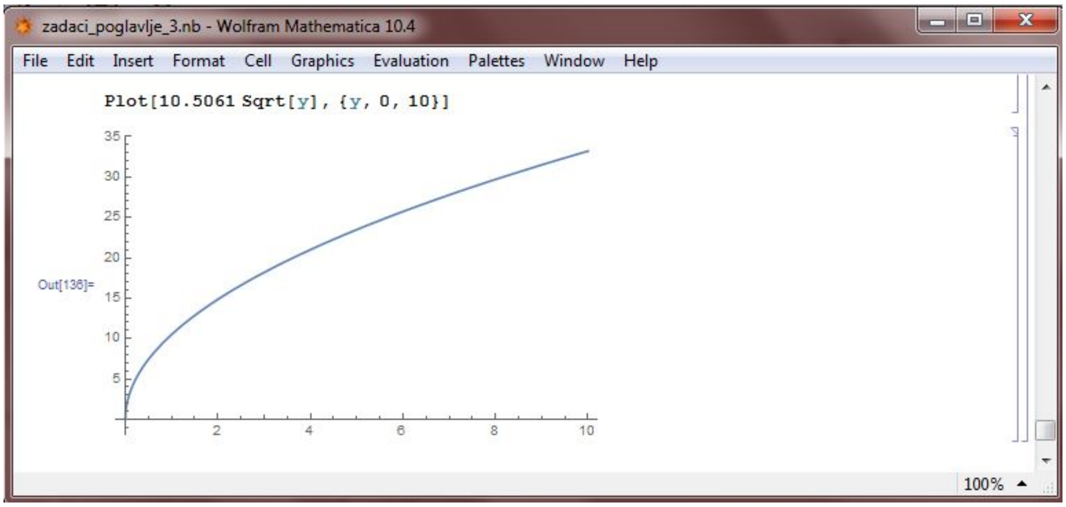
$$u(x, y, z) = 4x^{0.4}y^{0.5}z^{0.2}$$

gdje je u korisnost, x količina sira, y količina salame i z količina jaja.

1. *Izračunajte korisnost na razini $x = 5$, $y = 8$ i $z = 5$.*
2. *Kratkoročno, količina sira je fiksirana na 4, a količina jaja na 2. Izrazite korisnost kao funkciju samo jedne varijable, količine salame. Nazovimo tu funkciju kratkoročnom korisnosti.*
3. *Nacrtajte graf kratkoročne korisnosti.*
4. *Prikažite količinu salame kao funkciju kratkoročne korisnosti i komentirajte.*
5. *Koliko salame treba kupiti da bi kratkoročna korisnost bila 400?*

Rješenje.

1. 29.7158
2. $u(y) = 10.5061\sqrt{y}$
3. *Funkcija pokazuje opadajuće prinose.*



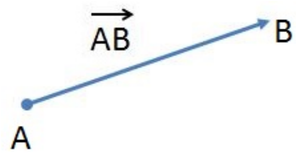
4. $y = 0.00906u^2$
5. 1449.56

Poglavlje 6

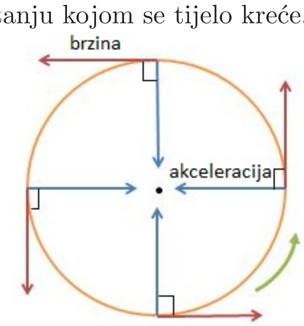
Matematičko modeliranje jednostavnim vektorskim funkcijama

6.1 Zbrajanje i oduzimanje vektora

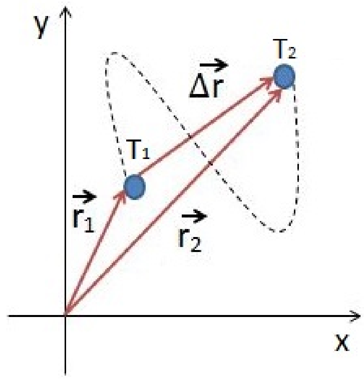
Veličine koje se pojavljuju u životu mogu biti skalarne i vektorske. Skalarne veličine mjerimo skalarima, to su brojevi koji mogu biti prirodni, cijeli, racionalni, iracionalni ili kompleksni. Vektorske veličine mjerimo vektorima, pri čemu je vektor matematički objekt koji je definiran svojim smjerom, orijentacijom i iznosom, odnosno duljinom. Brzina nekog tijela je vektor, jer da bismo znali kako se tijelo kreće trebamo znati po kojem pravcu ide, to je smjer vektora. Koliko brzo se tijelo kréce govori nam iznos vektora brzine. Trebamo znati koju od moguće dvije orijentacije na pravcu ima vektor brzine. Iznos vektora je broj koji govori koliko brzo se tijelo kreće po tom pravcu.



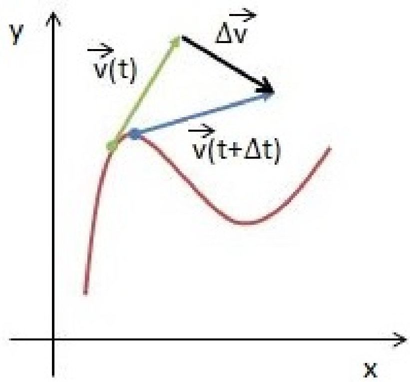
Vektor brzine je tangencijalan na putanju kojom se tijelo kreće.



Vektorom možemo odrediti i položaj nekog tijela u ravnini ili prostoru, pa takve vektore položaja u matematici nazivamo radij vektorima.



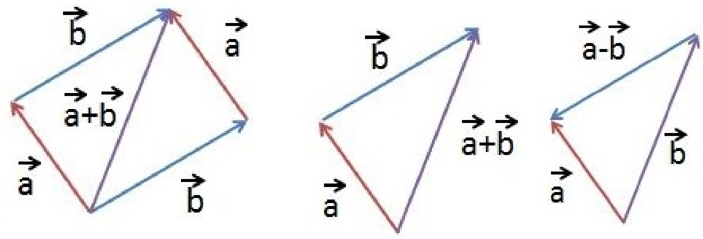
Srednja brzina nekog tijela je promjena položaja u nekom vremenu, pa dolazimo na to da trebamo oduzeti vektore položaja i podijeliti s vremenom, da bismo dobili vektor brzine. Srednja akceleracija tijela je promjena brzine u nekom vremenu, pa razlika vektora brzina podijeljena s nekim vremenom daje vektor akceleracije. Akceleracija je također vektor jer za kompletnu informaciju o akceleraciji potrebno znati njezin smjer, iznos i podatak imamo li ubrzanje ili usporenje.



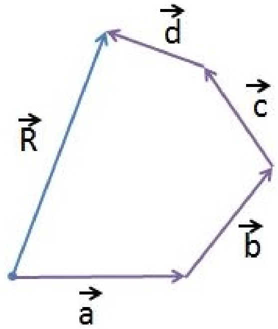
Na tijelo može djelovati i više sila. Kad u odbojci udarimo loptu, na nju djeluje sila u smjeru u kojem smo je udarili, ali i gravitacijska sila. Obje sile su vektori, pa da bismo izračunali rezultantnu silu trebamo naučiti osnovne operacije s vektorima. Osnovne operacije su zbrajanje i množenje skalarom. Oduzimanje vektora možemo shvatiti kao zbrajanje sa suprotnim vektorom, odnosno vektorom koji je pomnožen s -1.

Vektore označavamo malim slovima sa strelicom iznad slova kao $\vec{a}$, a ako želimo naglasiti početnu i krajnju točku onda pišemo $\overrightarrow{AB}$, pri čemu je A početna, a B krajnja točka.

Vektore zbrajamo i oduzimamo po pravilu prikazanom na slikama. Ako shvatimo da su dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ stranice paralelograma, tada je dulja dijagonala $\vec{a}+\vec{b}$, a kraća $\vec{a}-\vec{b}$ pri čemu pazimo da strelica ide prema vektoru od kojeg se oduzima.

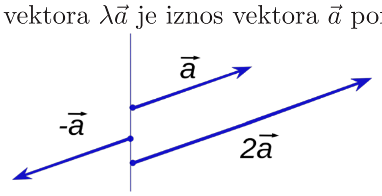


Ako imamo vektore složene tako da je krajnja točka jednog ujedno početna točka drugog, onda sumu vektora dobivamo tako da spojimo početak prvog vektora i kraj zadnjeg vektora kojeg zbrajamo.

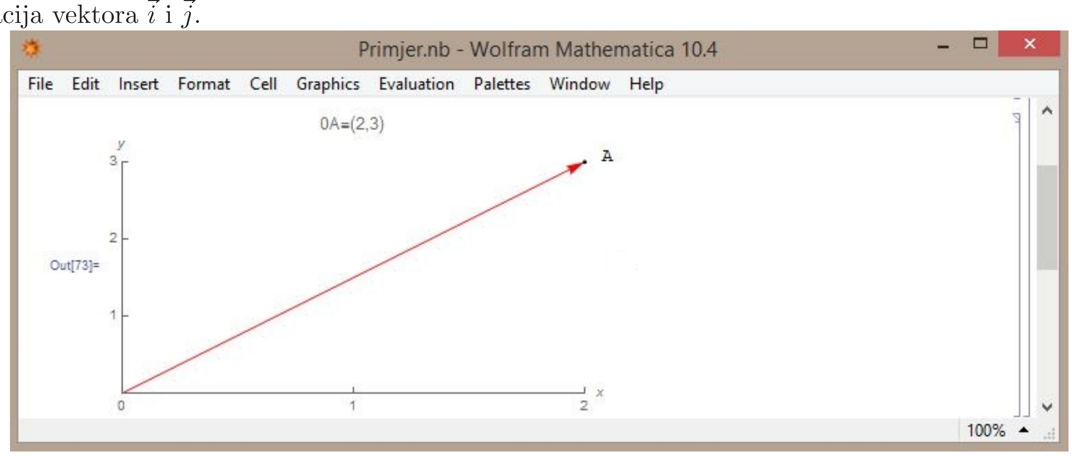


$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$

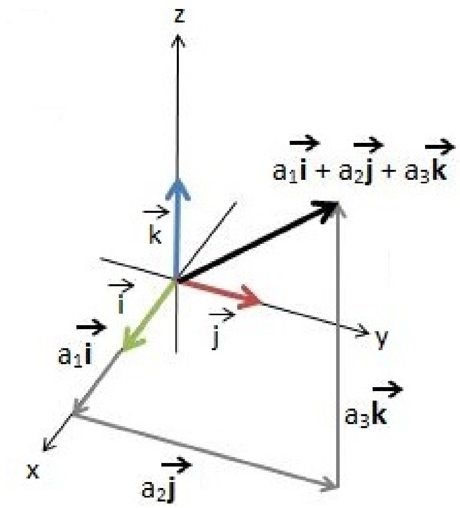
Vektor $\lambda\vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ leži na istom pravcu kao i vektor $\vec{a}$. Oba vektora imaju istu orijentaciju ako je $\lambda > 0$, a suprotnu ako je $\lambda < 0$. Iznos vektora $\lambda\vec{a}$ je iznos vektora $\vec{a}$ pomnožen s $|\lambda|$.

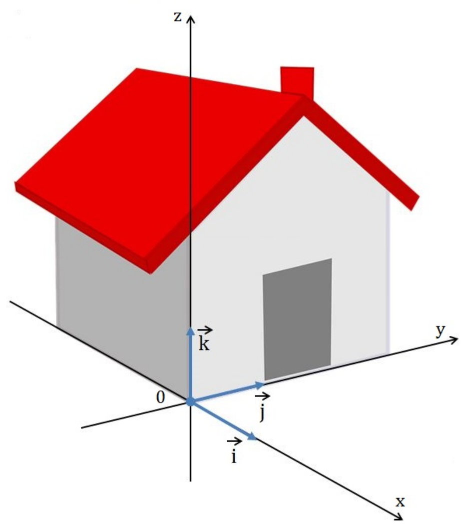


U koordinatnom sustavu u ravnini uvodimo jedinične vektore $\vec{i}$ i $\vec{j}$, pa sve vektore prikazujemo u obliku $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$, gdje su a_1, a_2 realni brojevi. Kažemo da je vektor $\vec{a}$ prikazan kao linearna kombinacija vektora $\vec{i}$ i $\vec{j}$.



U koordinatnom sustavu u prostoru uvodimo jedinične vektore $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ pa sve vektore prikazujemo u obliku $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, gdje su a_1, a_2, a_3 realni brojevi. Kažemo da je vektor $\vec{a}$ prikazan kao linearna kombinacija vektora $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.





Duljina vektora $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ iznosi $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, što se lako dobije kao duljina hipotenuze trokuta kojemu su katete vektori $a_1\vec{i}$ i $a_2\vec{j}$. Analogno vrijedi da je duljina vektora $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ jednaka

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Koordinatni zapis vektora $\lambda\vec{a}$ je

$$\lambda\vec{a} = \lambda a_1\vec{i} + \lambda a_2\vec{j} + \lambda a_3\vec{k}.$$

Primjer 6.1 *Izračunajte duljinu vektora $\frac{\vec{a}}{a}$, ako je $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, a broj a je njegova duljina.*
Rješenje.

Duljina je 1.

Vektor

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{a}$$

nazivamo jediničnim vektorom u smjeru vektora $\vec{a}$.

Koordinatni zapisi vektora $\vec{a}+\vec{b}$ i $\vec{a}-\vec{b}$ su

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b} &= (a_1+b_1)\vec{i}+(a_2+b_2)\vec{j}+(a_3+b_3)\vec{k}\\ \vec{a}-\vec{b} &= (a_1-b_1)\vec{i}+(a_2-b_2)\vec{j}+(a_3-b_3)\vec{k}\end{aligned}$$

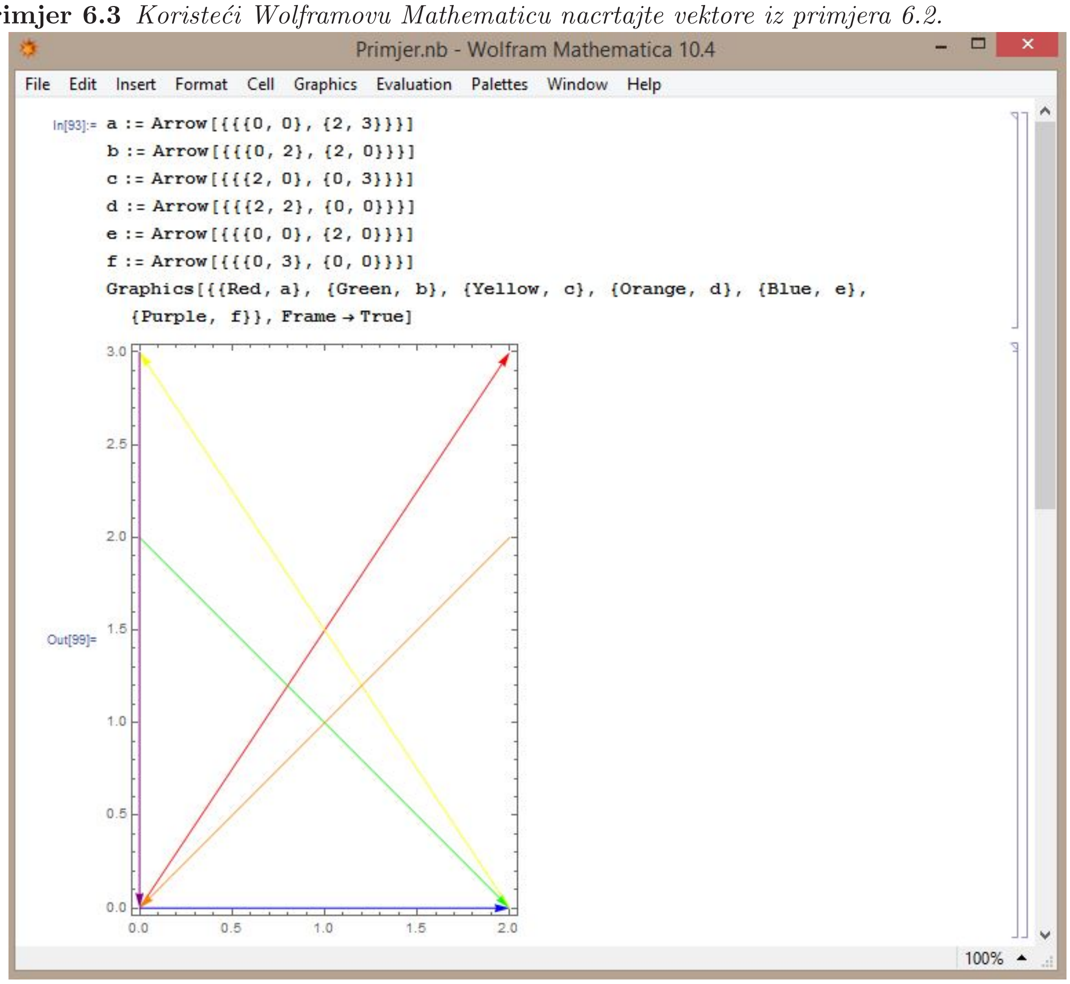
ako je $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ i $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$.

Vektor kojemu je početak u točki $T_1(x_1,y_1,z_1)$, a kraj u točki $T_2(x_2,y_2,z_2)$ ima zapis

$$\overrightarrow{T_1T_2} = (x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}.$$

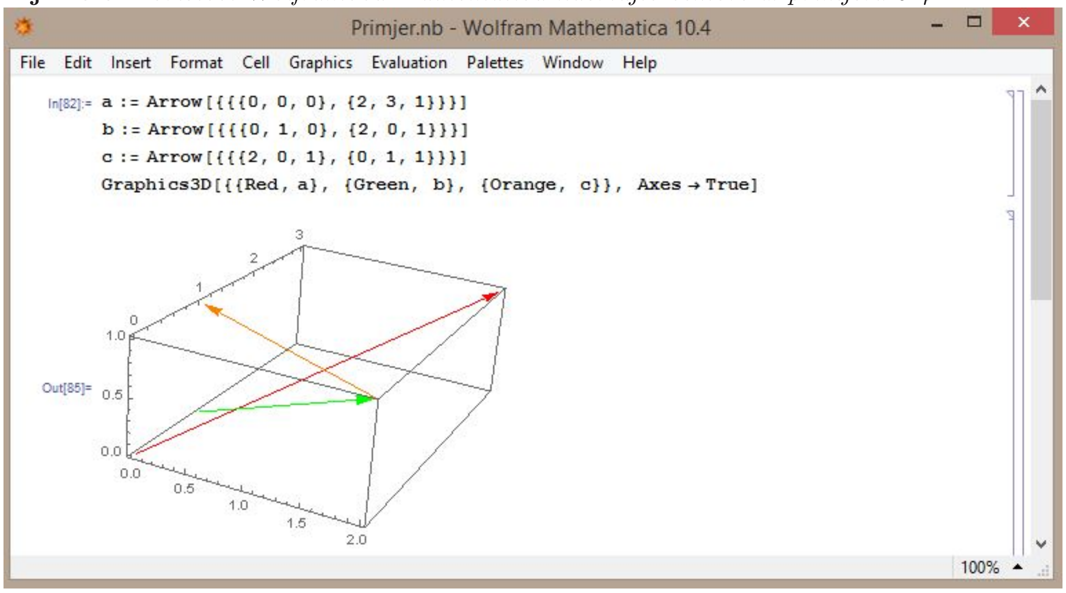
Primjer 6.2 *Nacrtajte vektore*
1. $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}$, 2. $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$, 3. $\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}$, 4. $\vec{a}=-2\vec{i}-3\vec{j}$, 5. $\vec{a}=2\vec{i}$, 6. $\vec{a}=-3\vec{j}$.

Primjer 6.3 *Koristeći Wolframovu Mathematicu nacrtajte vektore iz primjera 6.2.*



Primjer 6.4 *Nacrtajte vektore*
1. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, 2. $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, 3. $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

Primjer 6.5 *Koristeći Wolframovu Mathematicu nacrtajte vektore iz primjera 6.4.*



Primjer 6.6 *Izračunajte* $\vec{a} + \vec{b}$, $\lambda\vec{a}$, *duljinu od* $\vec{a} + \vec{b}$ *i* $\lambda\vec{a}$, *te jedinični vektor* $\vec{a}_0$ *ako su zadani vektori i skalari*

1. $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$, $\lambda = 2$
2. $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{b} = -\vec{i} - 2\vec{j}$, $\lambda = -3$
3. $\vec{a} = -4\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$, $\lambda = -1$
4. $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{k}$, , $\lambda = 0.5$.

Primjer 6.7 *Napišite vektor*

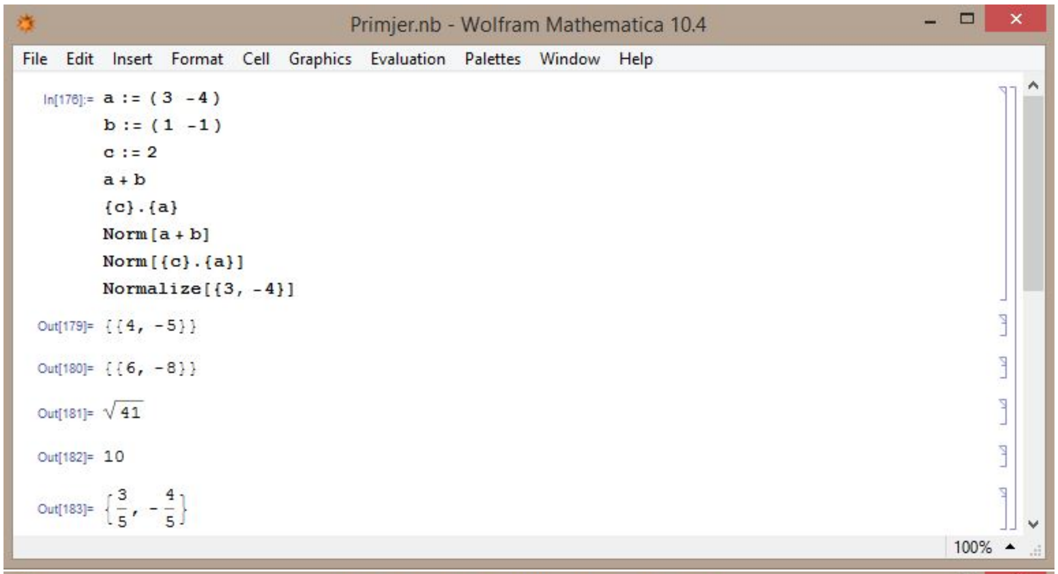
1. *koji je dvostruko dulji od vektora* $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$, *a ima isti smjer i suprotnu orijentaciju.*
2. *čija duljina je pola duljine vektora* $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, *a ima isti smjer i istu orijentaciju kao vektor* $\vec{a}$.

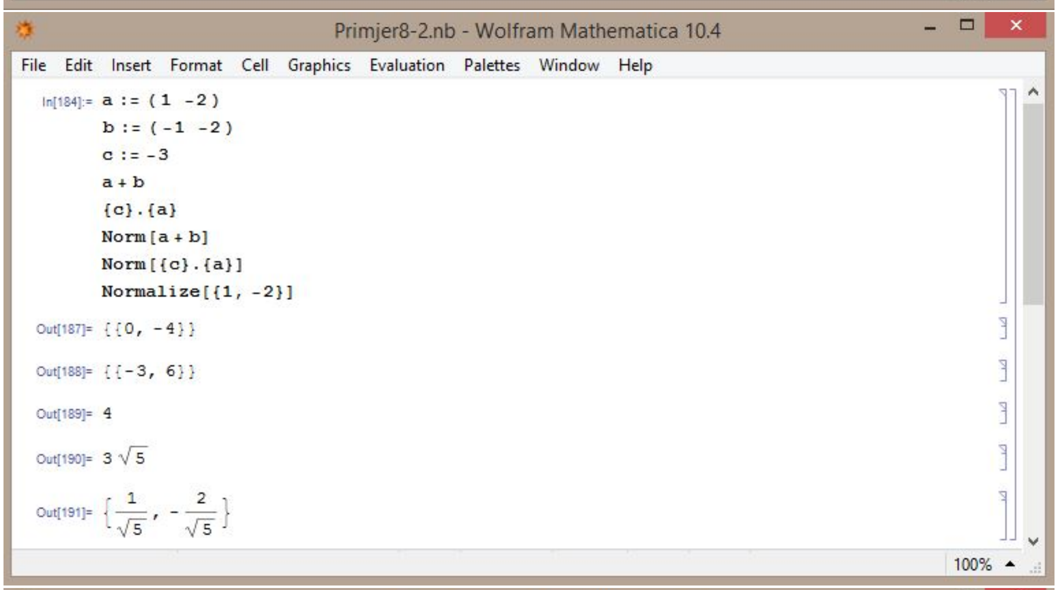
Rješenje.

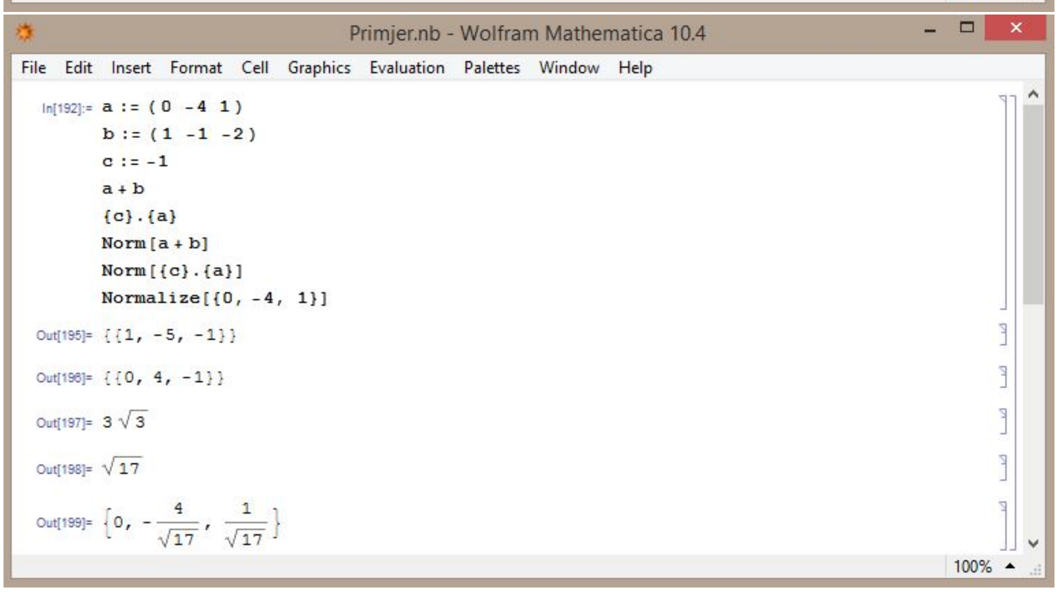
1. $-2(3\vec{i} - 4\vec{j})$
2. $\frac{1}{2}(2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})$

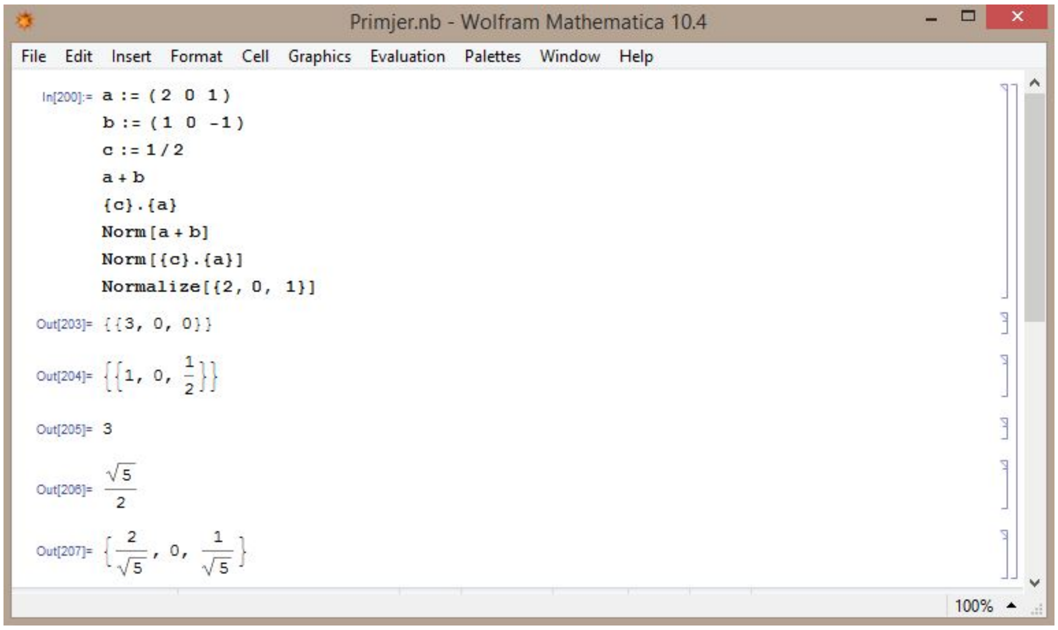
Primjer 6.8 *Koristeći Wolframovu Mathematicu napravi račune iz primjera 6.6.*

Radij vektor točke $T(x, y, z)$ je vektor $\overrightarrow{OT} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, gdje je O ishodište koordinatnog sustava.


Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[176]:= a := (3 -4)
b := (1 -1)
c := 2
a + b
{c}.{a}
Norm[a + b]
Norm[{c}.{a}]
Normalize[{3, -4}]
Out[179]= {{4, -5}}
Out[180]= {{6, -8}}
Out[181]= √41
Out[182]= 10
Out[183]= {3/5, -4/5}
100%


Primjer8-2.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[184]:= a := (1 -2)
b := (-1 -2)
c := -3
a + b
{c}.{a}
Norm[a + b]
Norm[{c}.{a}]
Normalize[{1, -2}]
Out[187]= {{0, -4}}
Out[188]= {{-3, 6}}
Out[189]= 4
Out[190]= 3 √5
Out[191]= {1/√5, -2/√5}
100%


Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[192]:= a := (0 -4 1)
b := (1 -1 -2)
c := -1
a + b
{c}.{a}
Norm[a + b]
Norm[{c}.{a}]
Normalize[{0, -4, 1}]
Out[195]= {{1, -5, -1}}
Out[196]= {{0, 4, -1}}
Out[197]= 3 √3
Out[198]= √17
Out[199]= {0, -4/√17, 1/√17}
100%



Primjer 6.9 *Nacrtajte radij vektore $\vec{r}$ zadanih točaka. Koliko su zadane točke udaljene od ishodišta ako su koordinate zadane u metrima?*
1. $T(1,3)$, 2. $T(-1,3)$, 3. $T(-1,-3)$, 4. $T(1,-3)$, 5. $T(0,-3)$.

Rješenje.

1. $\vec{r} = \vec{i} + 3\vec{j}$, *udaljenost je* $r = \sqrt{10}$ m
2. $\vec{r} = -\vec{i} + 3\vec{j}$, *udaljenost je* $r = \sqrt{10}$ m
3. $\vec{r} = -\vec{i} - 3\vec{j}$, *udaljenost je* $r = \sqrt{10}$ m
4. $\vec{r} = \vec{i} - 3\vec{j}$, *udaljenost je* $r = \sqrt{10}$ m
5. $\vec{r} = -3\vec{j}$, *udaljenost je* $r = 3$ m

6.2 Skalarni i vektorski umnožak

Vektore možemo množiti na dva načina, tako da rezultat množenja dva vektora bude broj ili da bude vektor. Oba tipa množenja imaju svoju primjenu u geometriji, fizici i bilo kojem drugom području u kojem imamo veličine koje su vektori. Skalarni umnožak vektora sile i vektora pomaka tijela je rad sile na putu. Moment sile koja djeluje na neko tijelo je vektorski umnožak radij vektora tijela i vektora sila.

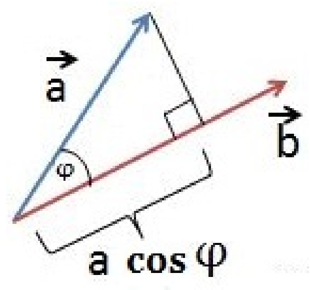
Skalarni umnožak vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiramo kao

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}).$$

S obzirom da je kosinus kuta jednak nula za okomite vektore, vrijedi

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$$

za $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$.



Na slici vidimo da je

$$|\vec{a}| \cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$$

duljina projekcije vektora $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$, što je od goleme važnosti u primjenama kad trebamo silu zadanu vektorom rastaviti na komponente. Ako je $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$ veći od $90°$, onda je duljina projekcije jednaka $|\vec{a}| \cos(\pi - \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})) = -|\vec{a}| \cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$. U oba slučaja vrijedi

$$a_b = |\vec{a}| |\cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})|.$$

Kut između vektora računamo iz jednakosti

$$\cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Za skalarni umnožak vrijedi $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
Koordinatni vektori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ su međusobno okomiti i duljine jedan, pa vrijedi

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{j} &= 0,\ \vec{i} \cdot \vec{k} = 0,\ \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \\ \vec{i} \cdot \vec{i} &= 1,\ \vec{j} \cdot \vec{j} = 1,\ \vec{k} \cdot \vec{k} = 1. \end{aligned}$$

Pomnožmo dva vektora zadana u koordinatama! Množimo vektore $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ kao što inače množimo dvije sume. Zbog okomitosti vektora $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ponište se svi umnošci u kojima se javljaju $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, osim članova gdje dobivamo $\vec{i}^2$, $\vec{j}^2$, $\vec{k}^2$. Ti članovi su jednaki 1, pa imamo

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \cdot (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Primjer 6.10 *Izračunajte skalarni umnožak vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, kut φ između vektora i duljinu projekcije a_b vektora $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$.*

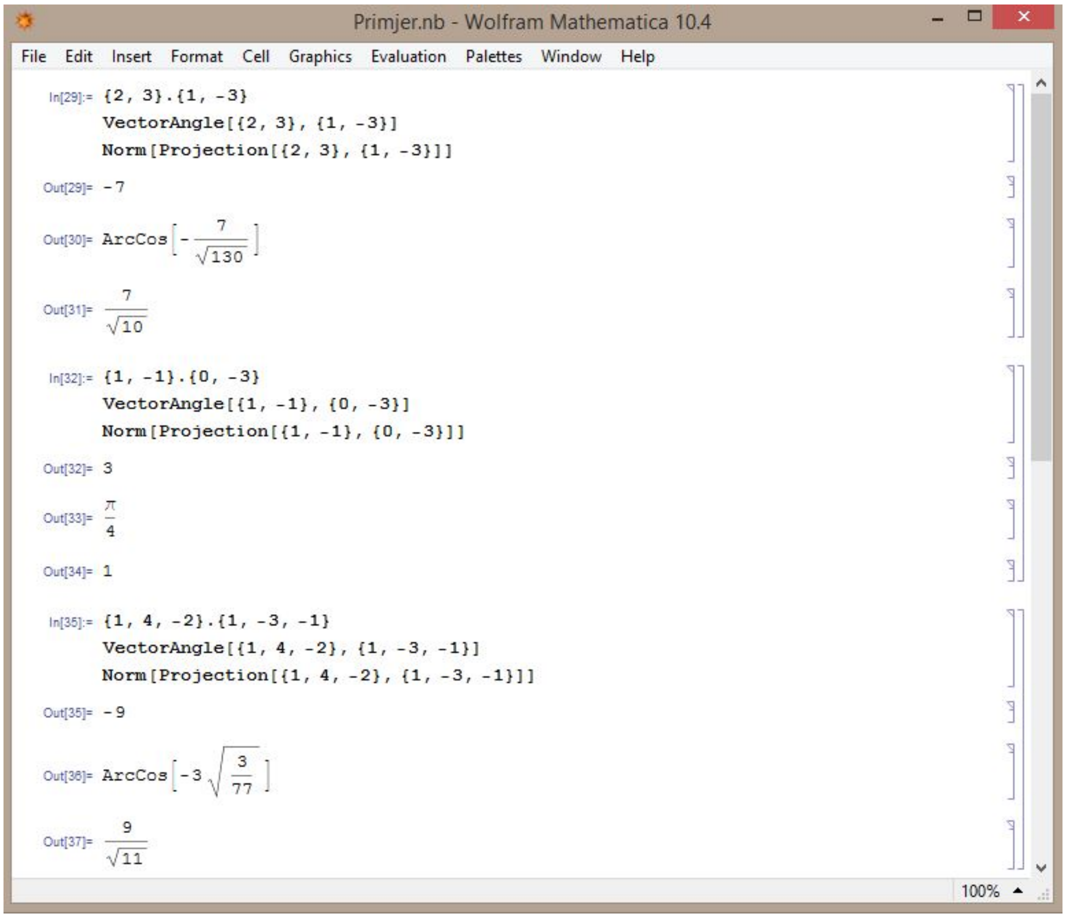
1. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j}$.
2. $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{j}$.
3. $\vec{a} = \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$.

Rješenje.

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -7$, $\cos\varphi = -\frac{7\sqrt{130}}{130}$, $\varphi \approx 2.23$ *radijana*, $a_b = \frac{7\sqrt{10}}{10}$.
2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ *radijana*, $a_b = 1$.

3. $\vec{a}\cdot\vec{b} = -9$, $\cos\varphi = -\frac{3\sqrt{231}}{77}$, $\varphi \approx 2.21$ *radijana,* $a_b = \frac{9\sqrt{11}}{11}$.

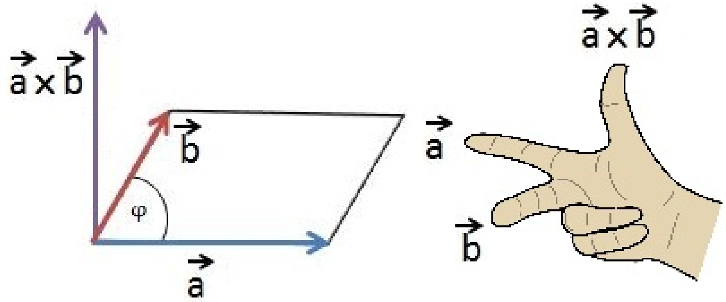
Primjer 6.11 *Koristeći Wolframovu Mathematicu napravi račune iz primjera 6.10.*



Vektorski umnožak vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je vektor $\vec{a}\times\vec{b}$ čija duljina je

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\sin\measuredangle(\vec{a},\vec{b})|,$$

a smjer vektora $\vec{a}\times\vec{b}$ je okomit na $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Orijentacija vektora $\vec{a}\times\vec{b}$ određena je kao na slici, a dobiva se pravilom desne ruke. Ako prstima desne ruke idemo od $\vec{a}$ prema $\vec{b}$ kraćim putem, onda palac pokazuje smjer i orijentaciju od $\vec{a}\times\vec{b}$. Možemo i malo drugačije interpretirati pravilo desne ruke, ako vektor $\vec{a}$ odgovara srednjem prstu, a $\vec{b}$ palcu, tada $\vec{a}\times\vec{b}$ odgovara kažiprstu.



Geometrijski je $|\vec{a} \times \vec{b}|$ površina paralelograma sa stranicama $\vec{a}$ i $\vec{b}$. To dobivamo iz formule za površinu paralelograma

$$P = a \cdot v = a \cdot b \cdot |\sin \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})|,$$

gdje je a duljina osnovice, a v duljina visine na osnovicu. Jasno je da vektori koji leže na istom pravcu imaju vektorski umnožak nula, jer zatvaraju paralelogram površine nula. Specijalno vrijedi

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}.$$

Zbog pravila desne ruke vrijedi

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

Gledajući na prste, možemo provjeriti da vrijedi za koordinatne vektore $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \ \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}.$$

U koordinatama računamo i dobivamo

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \times (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) = \tag{6.1}$$

$$(a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}.$$

Vektorski umnožak dvaju vektora obično računamo pomoću sheme koje se naziva determinanta

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Primjer 6.12 *Izračunajte vektorski umnožak vektora i površinu paralelograma kojemu su zadani vektori stranice, ako su koordinate zadane u metrima.*

1. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j}$.
2. $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{j}$.
3. $\vec{a} = \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$.

Rješenje.

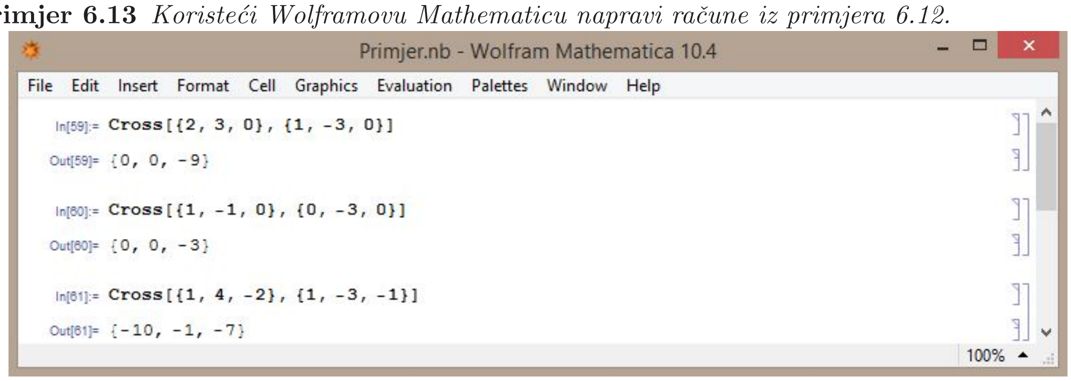
1. $\vec{a} \times \vec{b} = (2\vec{i} + 3\vec{j}) \times (\vec{i} - 3\vec{j}) = -6\vec{i} \times \vec{j} + 3\vec{j} \times i = -9\vec{k}$
   $P = 9 \text{ m}^2$.
2. $\vec{a} \times \vec{b} = (\vec{i} - \vec{j}) \times (-3\vec{j}) = -3\vec{i} \times \vec{j} = -3\vec{k}$
   $P = 3 \text{ m}^2$.

3. Prema (6.1) i zapisu pomoću determinante imamo

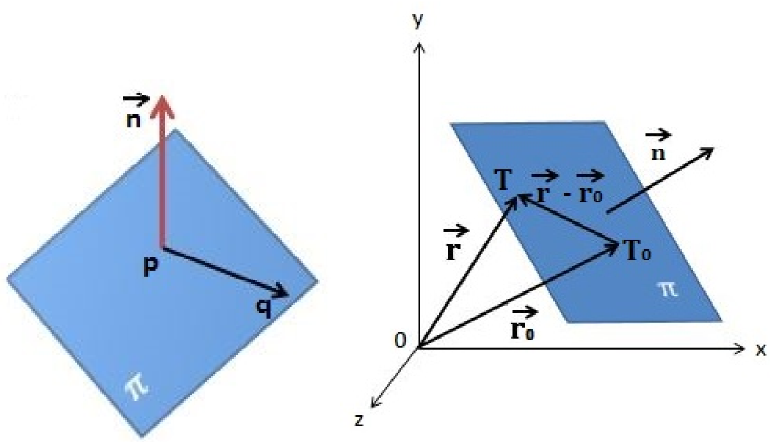
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}.$$

$\vec{a} \times \vec{b} = -10\vec{i} - \vec{j} - 7\vec{k}$
$P = \sqrt{100 + 1 + 49} = \sqrt{150}$ m^2.

Primjer 6.13 *Koristeći Wolframovu Mathematicu napravi račune iz primjera 6.12.*



U poglavlju o funkcijama više varijabli spomenuli smo jednadžbu ravnine, a sad ćemo je obrazložiti sa stanovišta vektorskog računa. Zamislimo vektor $\vec{n}$ koji je okomit na neku ravninu koju ćemo nazvati π. Vektor $\vec{n}$ obično zovemo vektor normale ravnine.



Zamislimo točku $T_0(x_0, y_0, z_0)$ koja leži u ravnini. Neka je vektor normale ravnine $\vec{n} = A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$, a radij vektor točke T_0 pišemo kao $\vec{r}_0 = x_0\vec{i}+y_0\vec{j}+z_0\vec{k}$. Zamislimo neku točku $T(x, y, z)$ s radij vektorom $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ i pitamo se leži li točka T u ravnini π.

Iz slike vidimo da točka T leži u ravnini π ako je vektor $\vec{r} - \vec{r}_0$ okomit na vektor normale $\vec{n}$. Vektori su okomiti ako im je skalarni umnožak jednak nuli.

Primjer 6.14 *Provjerite leži li točka T u ravnini π koja je određena vektorom normale $\vec{n}$ i točkom T_0 ako je*

1. $\vec{n} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $T_0(1, 1, \frac{2}{3})$, $T(0, 1, 1)$
2. $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $T_0(0, 1, -1)$, $T(1, 1, 0)$
3. $\vec{n} = 5\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $T_0(1, 1, 1)$, $T(3, 0, 2)$
4. $\vec{n} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $T_0(1, 1, \frac{2}{3})$, $T(0, 1, 1)$

Rješenje.

1. *Vektori* $(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = (-\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j})(2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}) = -\frac{5}{3}$ *nisu okomiti, pa točka* T_0 *ne leži u ravnini* π.
2. *Vektori* $(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = (\vec{i} + \vec{k})(\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}) = -2$ *nisu okomiti, pa točka* T_0 *ne leži u ravnini* π.
3. *Vektori* $(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = (2\vec{i} + -\vec{j}\vec{k})(5\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) = 13$ *nisu okomiti, pa točka* T_0 *ne leži u ravnini* π.
4. *Vektori* $(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = (-\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{k})(-2\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}) = 3$ *nisu okomiti, pa točka* T_0 *ne leži u ravnini* π.

U prethodnom primjeru smo provjeravali jesu li vektori $\vec{r} - \vec{r}_0 = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$ i $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ okomiti, odnosno je li njihov skalarni umnožak jednak nuli.

Uvjet da točka $T(x, y, z)$ leži u ravnini je okomitost vektora, odnosno jednakost

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{6.2}$$

Ovaj izraz je jednadžba ravnine, koju možemo zapisati i u obliku koji smo već spomenuli kod funkcija više varijabli

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

gdje je $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.

U prvom poglavlju smo spomenuli funkciju dviju varijabli $z = f(x, y) = ax + by + c$, onda smo shvatili da je graf te funkcije ravnina, a sad smo ravninu povezali s vektorima.

Primjer 6.15 *Odredite vektor normale ravnine i napišite bilo koju točku koja leži u ravnini*

1. $x + y + z = 1$
2. $2x + y + 2z = 1$
3. $x + 4y - z = 1$
4. $x - y + 5z = 1$

Rješenje.

Vektori normale su $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}, 2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}, \vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}, \vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$, *a koordinate točke moraju zadovoljavati zadane jednadžbe.*

Primjer 6.16 *Odredite jednadžbu ravnine kojoj je zadan vektor normale i jedna točka*

1. $\vec{n} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, $P(4, 2, -1)$
2. $\vec{n} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $P(0, 1, -1)$
3. $\vec{n} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $P(1, 2, 5)$

Uputa. U jednadžbu (6.2) uvrstite vektor normale i jednu od točaka A, B, C.
Rješenje.

1. $2(x-4)+y-2+3(z+1)=0,\ 2x+y+3z-7=0$
2. $-x+2(y-1)+z+1=0,\ -x+2y+z-1=0$
3. $4(x-1)+3(y-2)+2(z-5)=0,\ 4x+3y+2z-20=0$

Riješite sada primjer 6.14 na drugi način. Napišite jednadžbu ravnine, pa onda provjerite zadovoljava li zadana točka jednadžbu ravnine. Jednadžbe ravnina iz primjera 6.14 su $2x+y-3z-1=0$, $x+y-3z-5=0$, $5x-y+2z-6=0$, $-2x-2y+3z+2=0$.

Primjer 6.17 *Odredite jednadžbu ravnine koja prolazi točkama*

1. $A(-1,0,1), B(-1,2,-1), C(4,2,-1)$
2. $A(1,1,3), B(0,0,-1), C(0,2,-1)$
3. $A(2,2,1), B(-0,2,-1), C(0,0,-1)$.

Uputa. Izračunajte vektor normale kao vektorski umnožak bilo kojih dvaju vektora iz ravnine, na primjer $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$, a onda u jednadžbu 6.2 uvrstite vektor normale i jednu od točaka A, B, C.
Rješenje.

1. $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(2\vec{j}-2\vec{k})\times(5\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k})$. *Vektorski umnožak možemo računati direktnim množenjem vektora kao u formuli (6.1) ili pomoću determinante*
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -2 \\ 5 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$
$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\vec{j}+\vec{k}$.
Jednadžba ravnine s vektorom normale $\vec{n}=\vec{j}+\vec{k}$ koja prolazi točkom $A(-1,0,1)$ je $y+z-1=0$.

2. $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-\vec{i}-\vec{j}-4\vec{k})\times(-\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k})$
Računamo
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$
$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=8\vec{i}-2\vec{k}$.
Za vektor normale ćemo uzeti vektor s istim smjerom $\vec{n}=4\vec{i}-\vec{k}$, jer nam za vektor normale ravnine nije važna njegova duljina i orijentacija. Važan je samo smjer, pa biramo najjednostavniji vektor s tim smjerom.
Jednadžba ravnine s vektorom normale $\vec{n}=4\vec{i}-\vec{k}$ koja prolazi točkom $A(1,1,3)$ je $4x-z-1=0$.

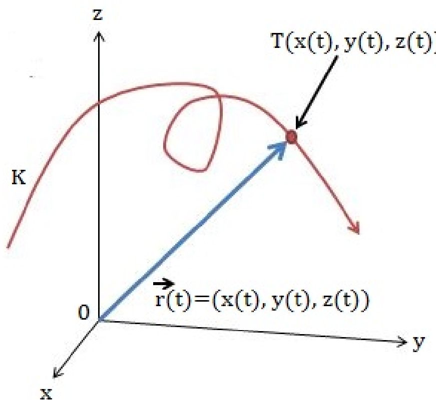
3. $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-2\vec{i}-2\vec{k})\times(-2\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k})$
Računamo
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=-\vec{i}+\vec{k}$.
Jednadžba ravnine s vektorom normale $\vec{n}=-\vec{i}+\vec{k}$ koja prolazi točkom $A(2,2,1)$ je $x-z-1=0$.

6.3 Vektor ovisan o jednoj varijabli

Radij vektor točke koji određuje položaj točke, može biti ovisan o nekom parametru. Vrh vektora

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \text{ za } t \in \mathbb{R}$$

se pomiče po krivulji kad se mijenja parametar t.



Primjer 6.18 *Sitno tijelo se pomaknulo iz točke $T_1(1,2,1)$ u točku $T_2(2,3,4)$ za 2 sekunde. Izračunaj iznos srednje brzine tijela ako su koordinate točaka u metrima.*
Rješenje.
Vektor je

$$\frac{1}{2}\cdot(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \frac{1}{2}\cdot(\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}),$$

a iznos brzine je $\frac{\sqrt{11}}{2}$ m/s.

Primjer 6.19 *Sila u Newtonima je zadana vektorom ovisnim o vremenu t koje je izraženo u sekundama*

$$\vec{F}(t) = F_1(t)\vec{i} + F_2(t)\vec{j} + F_3(t)\vec{k}, \text{ za } t \in [0,100]$$

Izračunajte vektor sile u trenutku t_0 ako je zadano

1. $F_1(t) = 2t,\ F_2(t) = 3t^2,\ F_3(t) = 2t,\ t_0 = 5$
2. $F_1(t) = \sin t,\ F_2(t) = 3\cos t,\ F_3(t) = 2t^2,\ t_0 = \pi$
3. $F_1(t) = \cos 3t,\ F_2(t) = 3t^2,\ F_3(t) = 2\sin 2t,\ t_0 = \frac{\pi}{4}$.

Rješenje.

1. $\vec{F}(5) = 10\vec{i} + 75\vec{j} + 10\vec{k}$ N
2. $\vec{F}(\pi) = -3\vec{j} + 2\pi^2\vec{k}$ N
3. $\vec{F}(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{3}{16}\pi^2\vec{j} + 2\vec{k}$ N

6.4 Grafički prikaz vektora ovisnog o jednoj varijabli

Rekli smo da radij vektor točke koji određuje položaj točke, može biti ovisan o nekom parametru. Radij vektor točke ili vektor položaja točke

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \text{ za } t \in \mathbb{R}$$

možemo zapisati po koordinatama

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t). \end{aligned}$$

Usporedimo to sada s tekstom iz prvog poglavlja koji je govorio o parametarski zadanim funkcijama. Nakon što smo se bavili funkcijama jedne varijable $y = f(x)$, spomenuli smo da funkcije mogu biti zadane pomoću nekog parametra t u obliku

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t), \end{aligned}$$

čime je određen radij vektor u ravnini

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}.$$

Kod modeliranja smo već susreli ovakve primjere, gdje je parametar t vrijeme, a x, y su koordinate položaja tijela koje se kreće. U našim primjerima se mogao eliminirati parametar t i funkciju smo napisali na standardni način kao $y = f(x)$. Općenito to nije moguće i tada se graf funkcije može nacrtati korištenjem naredbe ParametricPlot.

Sada imamo sličnu situaciju, samo u prostoru što je teži slučaj. Ne možemo uzeti jednadžbe 6.3 i eliminacijom parametra dobiti jednu jednadžbu koja određuje krivulju u prostoru. Krivulja u prostoru ostaje zapisana u obliku (6.3), jer se to smatra najzgodnijim oblikom za dalja računanja. Krivulja moqv ze biti zadana i kao presjek dviju ploha. U poglavlju o funkcijama više varijabli promatrali smo koje krivulje dobivamo kad presječemo paraboloid, stožac, sferu ili sedlastu plohu ravninom.

Primjer 6.20 *Napišite radij vektor točke za $t \in \mathbb{R}$ ako je zadano*

$$\begin{aligned} x(t) &= 7t \\ y(t) &= 2t^2 + 3t + 5. \end{aligned}$$

Pogledajte primjer 1.101 iz prvog poglavlja i provjerite koja krivulja je zadana ovim jednadžbama.
Rješenje.
$\vec{r}(t) = 7t\vec{i} + (2t^2 + 3t + 5)\vec{j}.$

Primjer 6.21 *Napišite radij vektor točke za $t \in \mathbb{R}$ ako je zadano*

$$\begin{aligned} x(t) &= 7t \\ y(t) &= 3t + 5. \end{aligned}$$

Rješenje.
$\vec{r}(t) = 7t\vec{i} + (3t + 5)\vec{j}.$

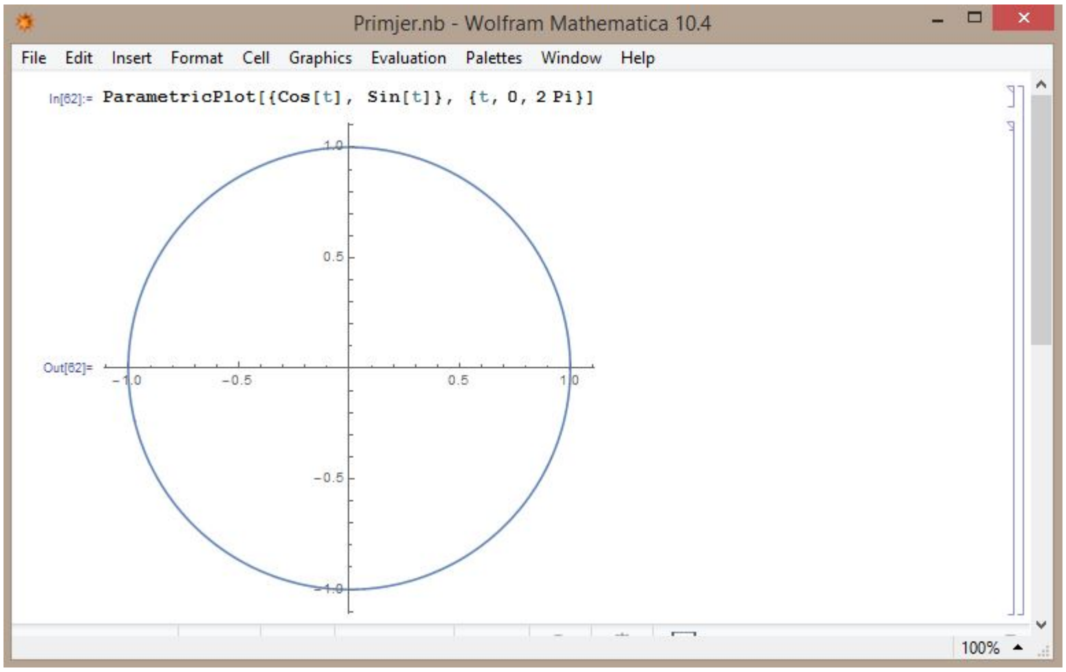
Primjer 6.22 *Napišite radij vektor točke i pomoću Wolframove Mathematice korištenjem naredbe ParametricPlot nacrtajte graf ako je*

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \end{aligned}$$

za $t \in [0, 2\pi)$. *Koju krivulju ste dobili?*

Rješenje.

$\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}$. *Dobili smo kružnicu.*



Ove jednadžbe nazivamo parametarskim jednadžbama kružnice i vrlo se često koriste u primjenama, jer izbjegavamo jednadžbu kružnice $x^2 + y^2 = 1$ u kojoj se javlja pozitivan i negativan korijen kad želimo izraziti y.

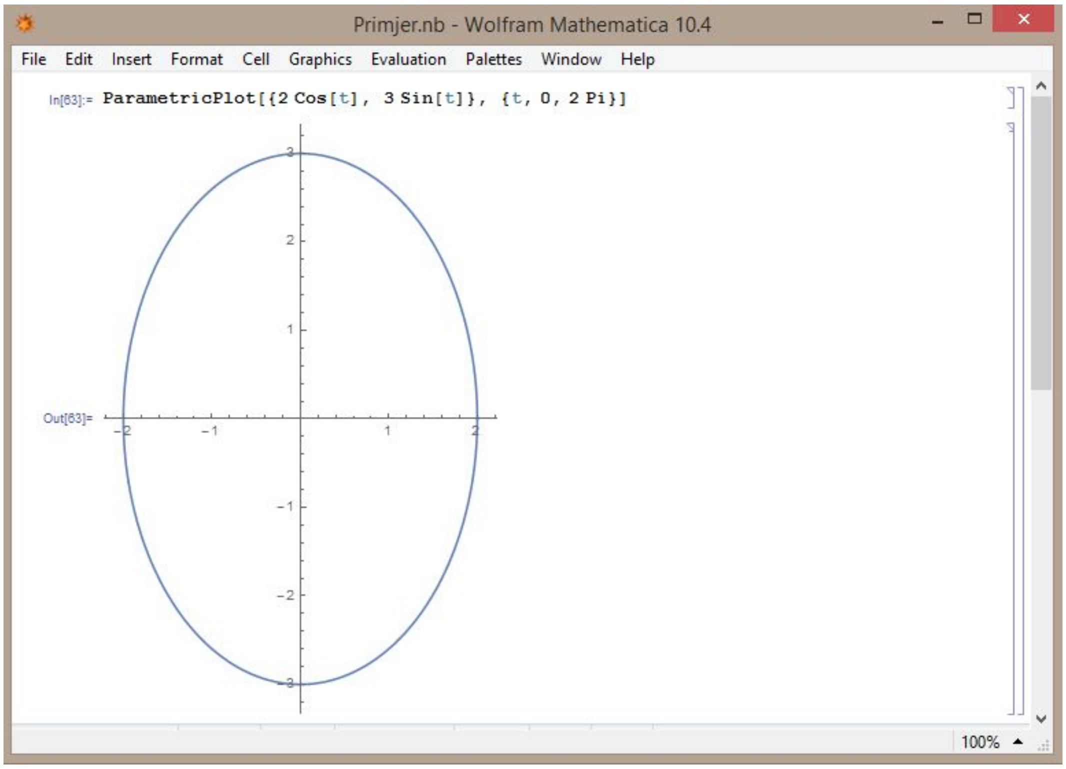
Primjer 6.23 *Napišite radij vektor točke i pomoću Wolframove Mathematice korištenjem naredbe ParametricPlot nacrtajte graf ako je*

$$\begin{aligned} x &= 2\cos t \\ y &= 3\sin t \end{aligned}$$

za $t \in [0, 2\pi)$. *Koju krivulju ste dobili?*

Rješenje.

$\vec{r}(t) = 2\cos t\vec{i} + 3\sin t\vec{j}$. *Dobili smo elipsu.*



Ove jednadžbe nazivamo parametarskim jednadžbama elipse i vrlo se često koriste u primjenama, jer slično kao kod kružnice izbjegavamo jednadžbu elipse u kojoj se javlja pozitivan i negativan korijen kad želimo izraziti y. Parametarske jednadžbama elipse s poluosima a i b su

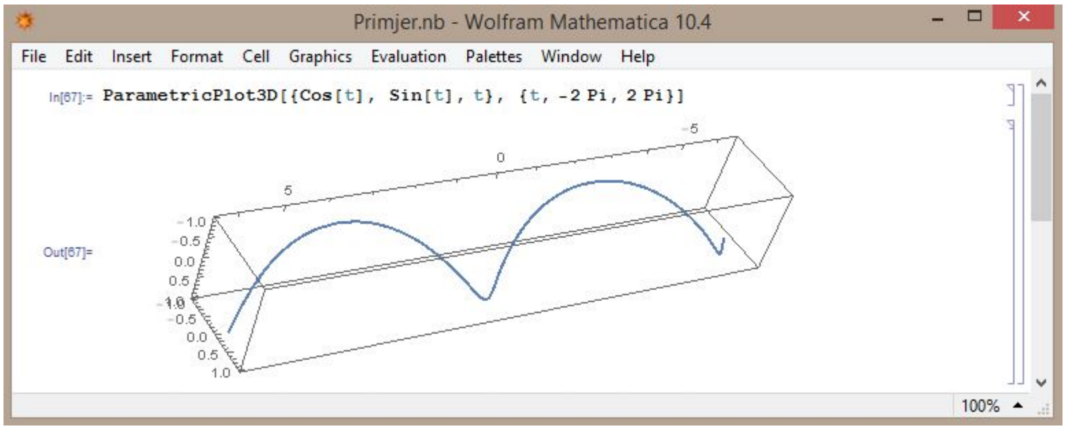
$$\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= b\sin t. \end{aligned}$$

Primjer 6.24 *Napišite radij vektor točke i pomoću Wolframove Mathematice korištenjem naredbe ParametricPlot3D nacrtajte graf ako je*

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \\ z &= t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Rješenje.

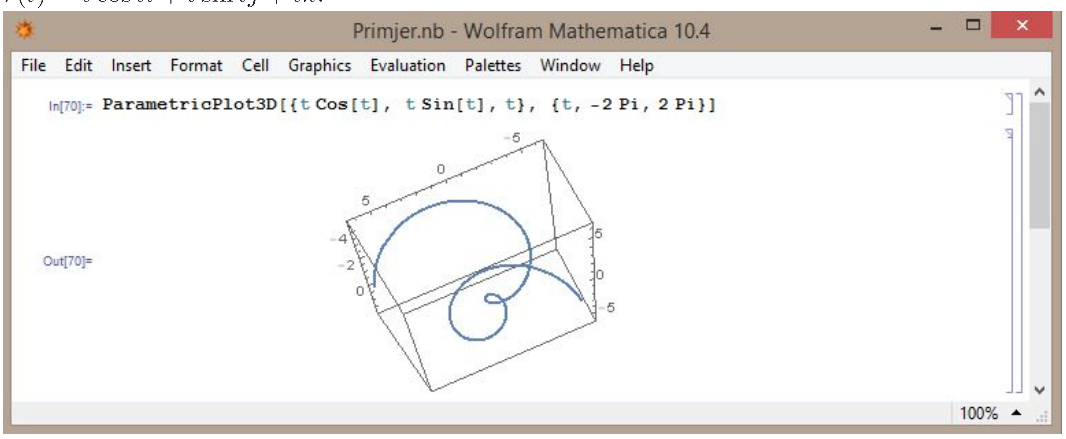
$\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + t\vec{k}.$



Primjer 6.25 *Napišite radij vektor točke i pomoću Wolframove Mathematice korištenjem naredbe ParametricPlot3D nacrtajte graf ako je*

$$\begin{aligned} x &= t\cos t \\ y &= t\sin t \\ z &= t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Rješenje.
$\vec{r}(t) = t\cos t\vec{i} + t\sin t\vec{j} + t\vec{k}$.



Uočite da se u primjeru 6.25 krivulja zadana s $\vec{r}(t) = t\cos t\vec{i} + t\sin t\vec{j} + t\vec{k}$ namata na stožac.
U trećem poglavlju smo krivulje u polarnim koordinatama zapisali parametarski.
Podsjetimo se da smo krivulje zapisane u polarnim koordinatama

1. $r = 1 + \cos\varphi$
2. $r = 1 + \sin\varphi$
3. $r = \sin 2\varphi$
4. $r = \sin 3\varphi$

zapisali parametarski

1. $x(\varphi) = (1 + \cos\varphi)\cos\varphi,\ y(\varphi) = (1 + \cos\varphi)\sin\varphi$
2. $x(\varphi) = (1 + \sin\varphi)\cos\varphi,\ y(\varphi) = (1 + \sin\varphi)\sin\varphi$
3. $x(\varphi) = (\sin 2\varphi)\cos\varphi,\ y(\varphi) = (\sin 2\varphi)\sin\varphi$
4. $x(\varphi) = (\sin 3\varphi)\cos\varphi,\ y(\varphi) = (\sin 3\varphi)\sin\varphi$.

Mogli bismo za svaku od ovih krivulja zapisati radij vektor $\vec{r}(\varphi) = x(\varphi)\vec{i} + y(\varphi)\vec{j}$.

6.5 Jednadžba pravca kao funkcija jednog parametra

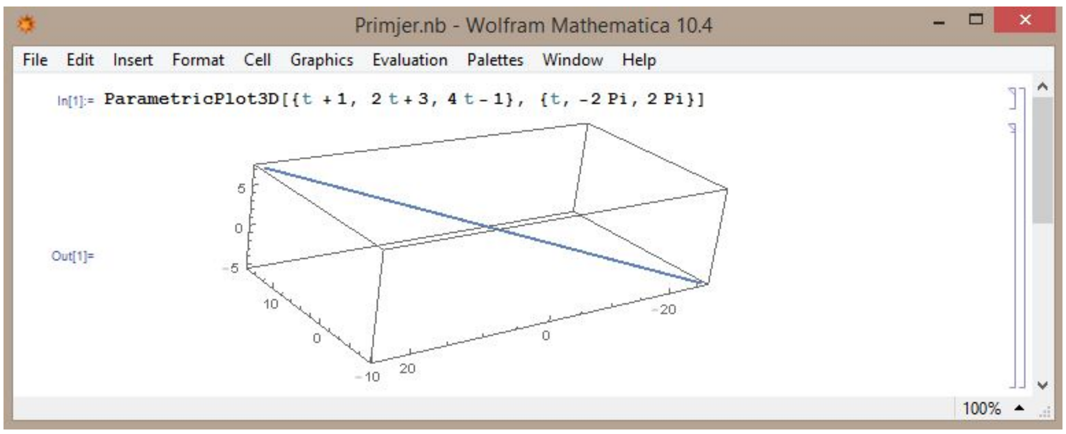
U primjeru 6.21 imali smo jednadžbe

$$\begin{aligned} x(t) &= 7t \\ y(t) &= 3t + 5, \end{aligned}$$

iz kojih eliminacijom parametra t dobivamo jednadžbu $y = \frac{3}{7}x + 5$. Kad su obje parametarske jednadžbe linearne dobivamo pravac. To vrijedi i u prostoru, pa ako su sve tri parametarske jednadžbe linearne dobivamo pravac.

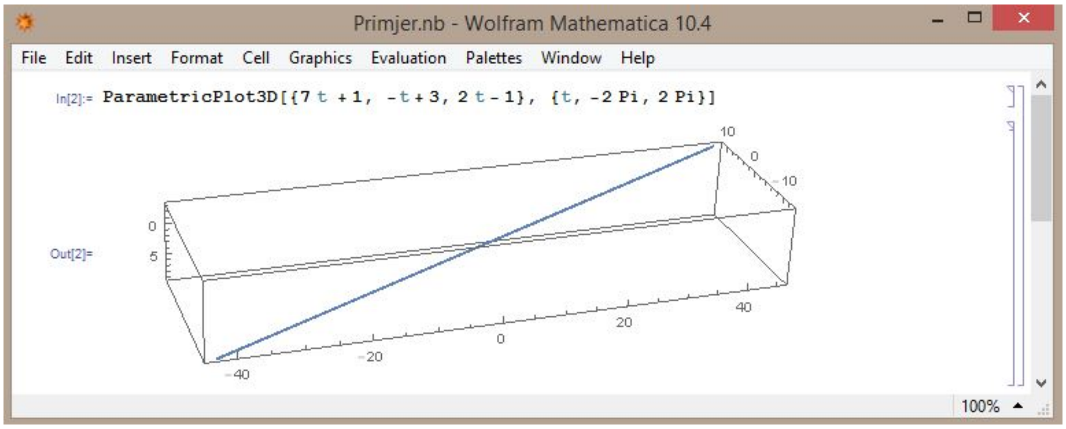
Primjer 6.26 *Napišite radij vektor točke i pomoću Wolframove Mathematice korištenjem naredbe ParametricPlot nacrtajte graf ako je*

$$\begin{aligned} x &= t + 1 \\ y &= 2t + 3 \\ z &= 4t - 1, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$



Primjer 6.27 *Napišite radij vektor točke i pomoću Wolframove Mathematice korištenjem naredbe ParametricPlot nacrtajte graf ako je*

$$\begin{aligned} x &= 7t + 1 \\ y &= -t + 3 \\ z &= 2t - 1, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$



Primjer 6.28 *Istražite koje koordinate imaju vektori koji leže na pravcu*

$$\begin{aligned} x &= 7t+1 \\ y &= -t+3 \\ z &= 2t-1, \quad t\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Rješenje.
const $\cdot\, (7\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})$.

Primjer 6.29 *Istražite koje koordinate imaju vektori koji leže na pravcu*

$$\begin{aligned} x &= lt+x_0 \\ y &= mt+y_0 \\ z &= nt+z_0, \quad t\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Rješenje.
const $\cdot\, (l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k})$.

Parametarske jednadžbe pravca kojemu je vektor smjera $\vec{s} = l\vec{i}+m\vec{j}+n\vec{k}$ i prolazi točkom $T_0(x_0, y_0, z_0)$ su

$$\begin{aligned} x &= lt+x_0 \\ y &= mt+y_0 \\ z &= nt+z_0. \end{aligned}$$

Primjer 6.30 *Napišite parametarske jednadžbe pravca kroz točke*

1. $A(0,2,3)$ *i* $B(2,-1,1)$
2. $A(1,0,3)$ *i* $B(6,-1,1)$
3. $A(1,-2,-6)$ *i* $B(2,5,3)$.

Rješenje.
Izračunamo vektor smjera pravca $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$, *uzmemo točku* A *ili* B, *pa uvrstimo u jednadžbu pravca (6.3).*

1. $x = 2t, \; y = -3t + 2, \; z = -2t + 3,$

2. $x = 5t + 1, \; y = -t, \; z = -2t + 3,$

3. $x = t + 1, \; y = 7t - 2, \; z = 9t - 6.$

Primjer 6.31 *Odredite presjek ravnina $x - 2y - z = 2$ i $x - y = 0$. Što ste dobili kao presjek ravnina?*
Rješenje.

Iz zadanih jednadžbi svaku varijablu izrazimo preko jedne, pa dobivamo parametarske jednadžbe pravca koji je presjek ravnina.

$$\begin{aligned} x &= y \\ y &= y \\ z &= -y + 2 \end{aligned}$$

Primjer 6.32 *Zapišite presjek ravnina $x - y - 4z = 2$ i $2x - z = 1$ u parametarskom obliku. Što ste dobili kao presjek ravnina?*
Rješenje.

Iz zadanih jednadžbi svaku varijablu izrazimo preko jedne, pa dobivamo parametarske jednadžbe pravca koji je presjek ravnina.

$$\begin{aligned} x &= x \\ y &= -7x + 2 \\ z &= 2x - 1 \end{aligned}$$

6.6 Pojam vektorske funkcije jedne varijable

Radij vektor točke

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \text{ za } t \in \mathbb{R}$$

možemo smatrati funkcijom jedne varijable, jer zaista ovisi o jednoj varijabli $t \in \mathbb{R}$. Domena ove funkcije je skup realnih brojeva ili neki njegov podskup. Mi varijabli t pridružujemo vektor $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$. To je razlika u odnosu na realne funkcije jedne varijable kojima smo se bavili do sada i koje su imale domenu i kodomenu u skupu realnih brojeva. Vektor $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ je vektor iz 3-dimenzionalnog prostora, pa zapisujemo

$$\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3.$$

Funkciju $\vec{r}$ nazivamo vektorskom funkcijom skalarnog argumenta.

Vektorskim funkcijama skalarnog argumenta su zadane krivulje, odnosno put po kojemu se kreće neko tijelo. Promjena položaja u vremenu je brzina, a promjena brzine je akceleracija. Rad sile na putu možemo računati za neke jednostavnije slučajeve. Ako je sila funkcija položaja, a tijelo se giba po krivulji koja je vektorska funkcija skalarnog argumenta, za izračun rada sile trebat će nam jači matematički aparat od onoga koji se uči u srednjoj školi. Poznavanje najosnovnijih stvari o vektorskim funkcijama pomoći će pri svladavanju složenijih koncepata vezanih uz vektorske funkcije.

Primjer 6.33 *Neka je $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + t^2\vec{k}$. Izracčunajte kut između vektora $\vec{r}(\pi)$ i $\vec{r}(\frac{\pi}{3})$.*
Rješenje.

$\vec{r}(\pi) = -\vec{i} + \pi^2\vec{k}$
$\vec{r}(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} + \frac{\pi^2}{9}\vec{k}$

$$\cos\measuredangle(\vec{r}(\pi), \vec{r}(\frac{\pi}{3})) = \frac{\vec{r}(\pi)\cdot\vec{r}(\frac{\pi}{3})}{|\vec{r}(\pi)|\cdot|\vec{r}(\frac{\pi}{3})|}$$

$$\cos\measuredangle(\vec{r}(\pi), \vec{r}(\frac{\pi}{3})) \approx 0.7$$

Kut $\measuredangle(\vec{r}(\pi), \vec{r}(\frac{\pi}{3})) \approx 0.79$ *radijana.*

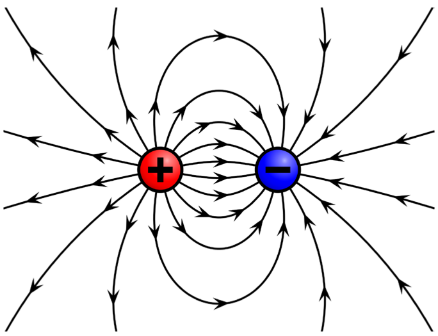
Primjer 6.34 *Odredite sve parametare t za koje je vektor $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + t^2\vec{k}$ okomit na vektor $\vec{a} = 2\vec{j} + t^{-2}\vec{k}$, $t \in [0, 2\pi)$.*
Rješenje.
$t = \pm\frac{\pi}{6}$.

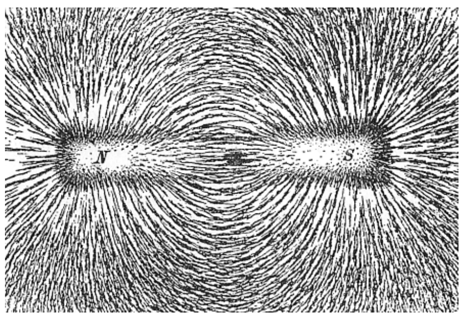
6.7 Vektor ovisan o dvije varijable

Moderna elektrotehnika i komunikacijske tehnologije koje su se iz nje razvile, temelje se na 4 Maxwellove jednadžbe.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

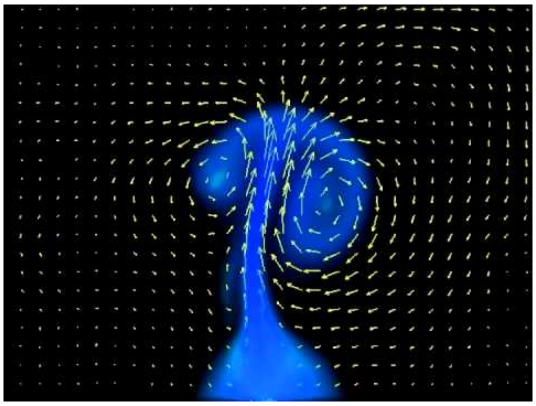
Mi u ovoj fazi poznavanja matematike i fizike ne možemo objasniti Maxwellove jednadžbe, ali možemo prepoznati da se u tim jednadžbama javlja skalarni i vektorski umnožak vektora, među kojima se javlja vektor $\vec{E}$ koji predstavlja električno polje, vektor $\vec{B}$ koji predstavlja magnetsko polje i vektor $\vec{J}$ koji predstavlja gustoću struje. Ovo su Maxwellove jednadžbe u vakuumu, pa se javljaju konstante koje opisuju vakuum. Oznaka $\vec{\nabla}$ predstavlja vektor koji je ujedno i derivacija funkcije!





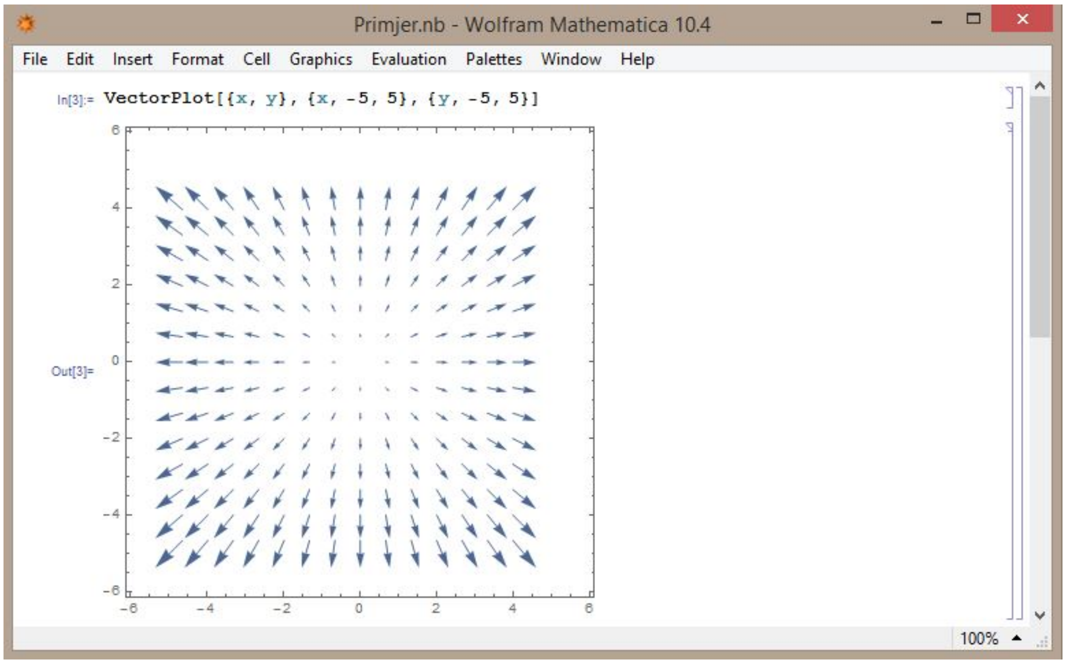
Neophodno je dobro upoznati vektore koji se mijenjaju s vremenom i položajem da bi se moglo razumjeti Maxwellove jednadžbe, zato nastavimo s matematikom koja leži iza svega toga. Vektor $\vec{f}(x,y) = f_1(x,y)\vec{i} + f_2(x,y)\vec{j}$, za $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ćemo zvati vektorskom funkcijom ili vektorskim poljem u ravnini, a funkcije $f_1(x,y)$ i $f_2(x,y)$ nazivamo koordinatnim funkcijama.

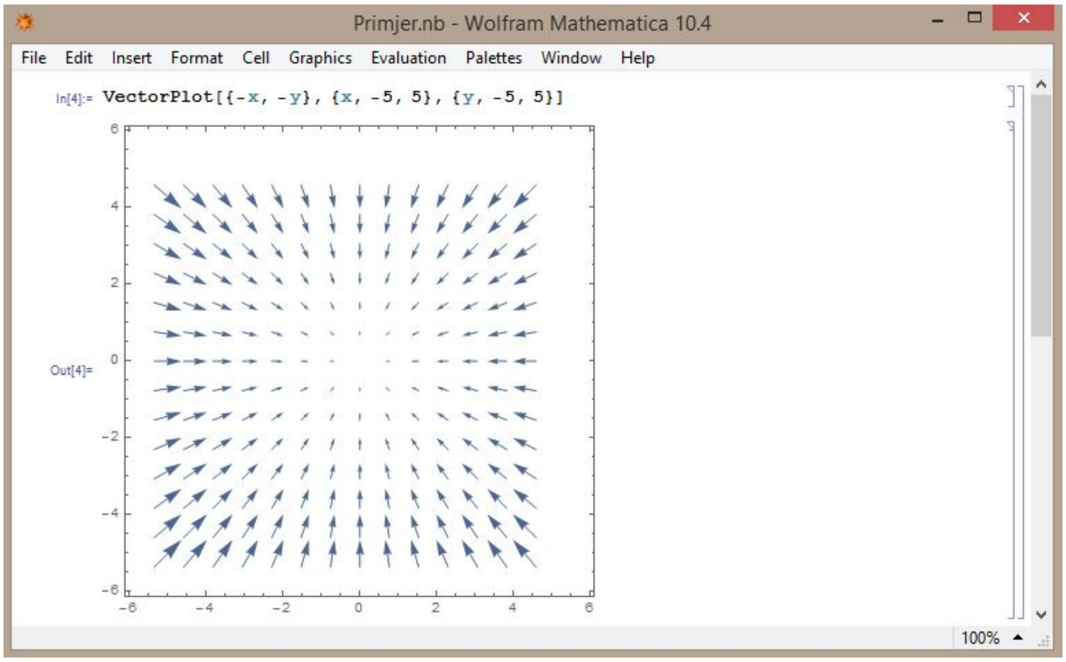
U mehanici fluida koja se bavi protokom tekućina također je važno poznavati vektore koji se kreću u vremenu u prostoru.

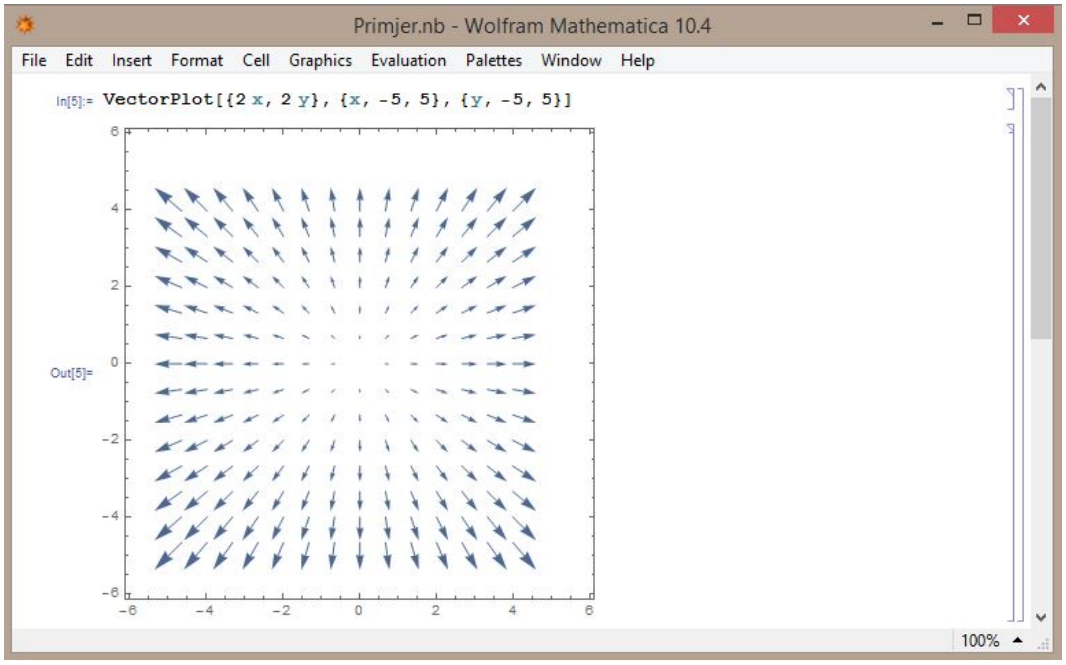


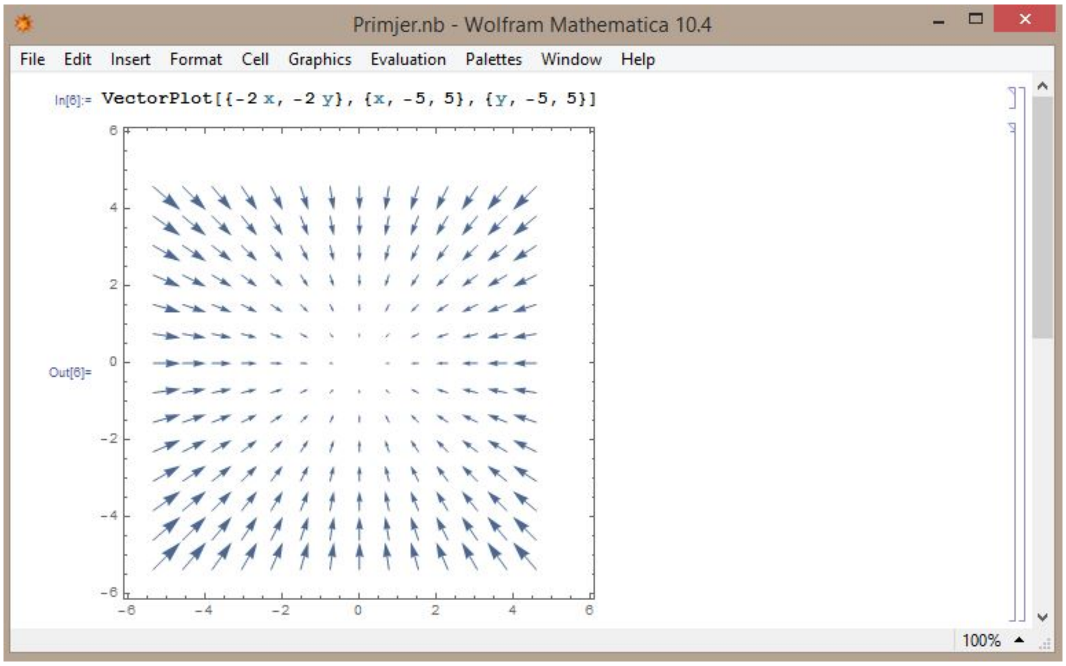
6.8 Grafički prikaz vektora ovisnog o dvije varijabli

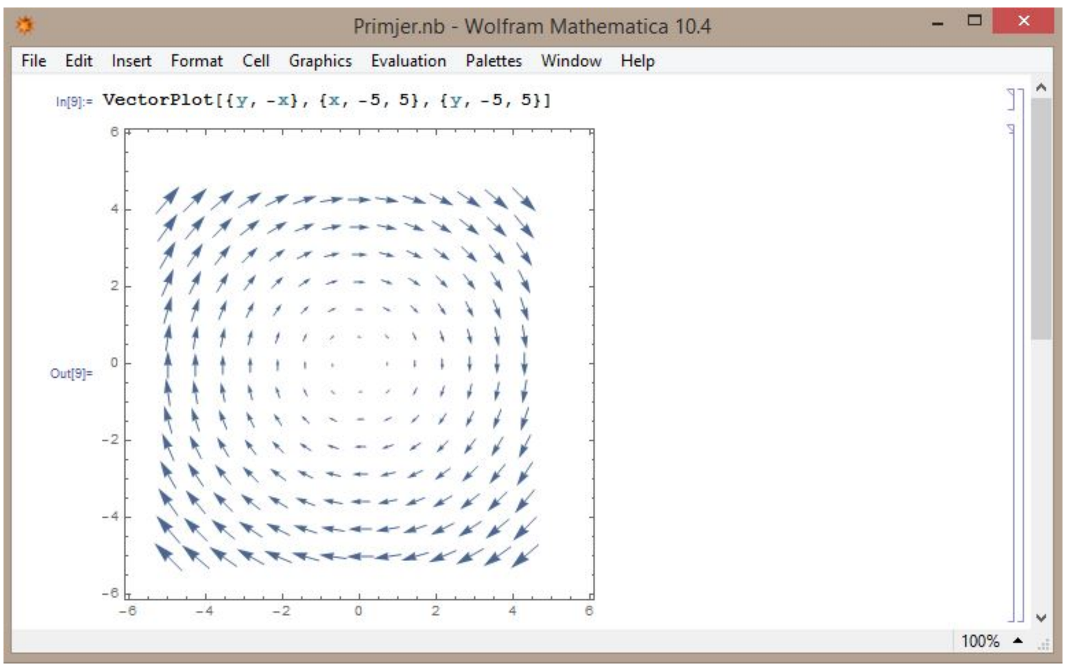
Primjer 6.35 *Pomoću naredbe VectorPlot u Wolframovoj Mathematici nacrtajte vektore ovisne o* (x, y)
1. $\vec{f} = x\vec{i} + y\vec{j}$, 2. $\vec{g} = -x\vec{i} - y\vec{j}$, 3. $\vec{h} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}$, 4. $\vec{F} = -2x\vec{i} - 2y\vec{j}$, 5. $\vec{G} = y\vec{i} - x\vec{j}$, 6. $\vec{H} = 4y\vec{i} - x\vec{j}$.

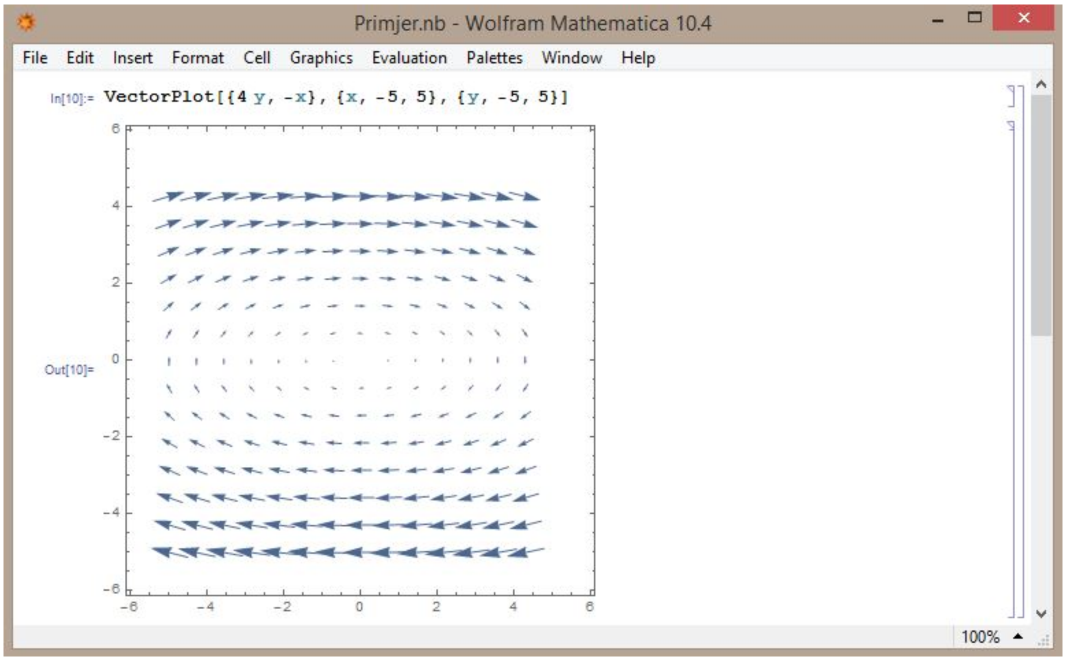



Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[4]:= VectorPlot[{-x, -y}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]
Out[4]=
100%


Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[5]:= VectorPlot[{2 x, 2 y}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]
Out[5]=
100%

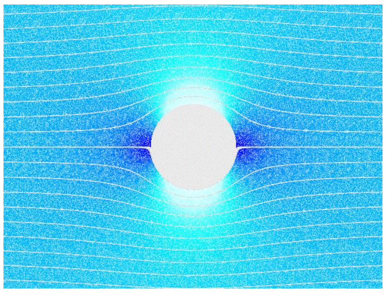

Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[6]:= VectorPlot[{-2 x, -2 y}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]
Out[6]=
100%


Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[9]:= VectorPlot[{y, -x}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]
Out[9]=
100%



Primjer 6.36 *U primjeru 6.35 su zadana vektorska polja koja možemo opisati riječima-izvor, ponor i centar. Za koja vektorska polja biste upotrijebili koju od ovih riječi? Rješenje.*

Izvori su $\vec{f}$, $\vec{h}$, *ponori* $\vec{g}$, $\vec{F}$, *a centri* $\vec{G}$, $\vec{H}$.

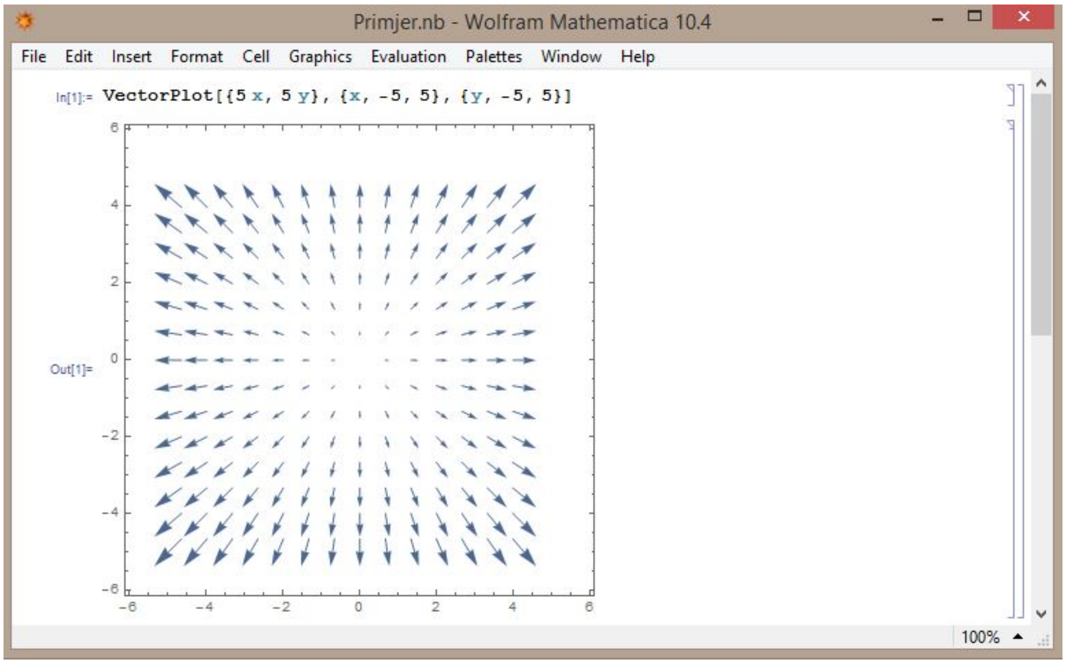


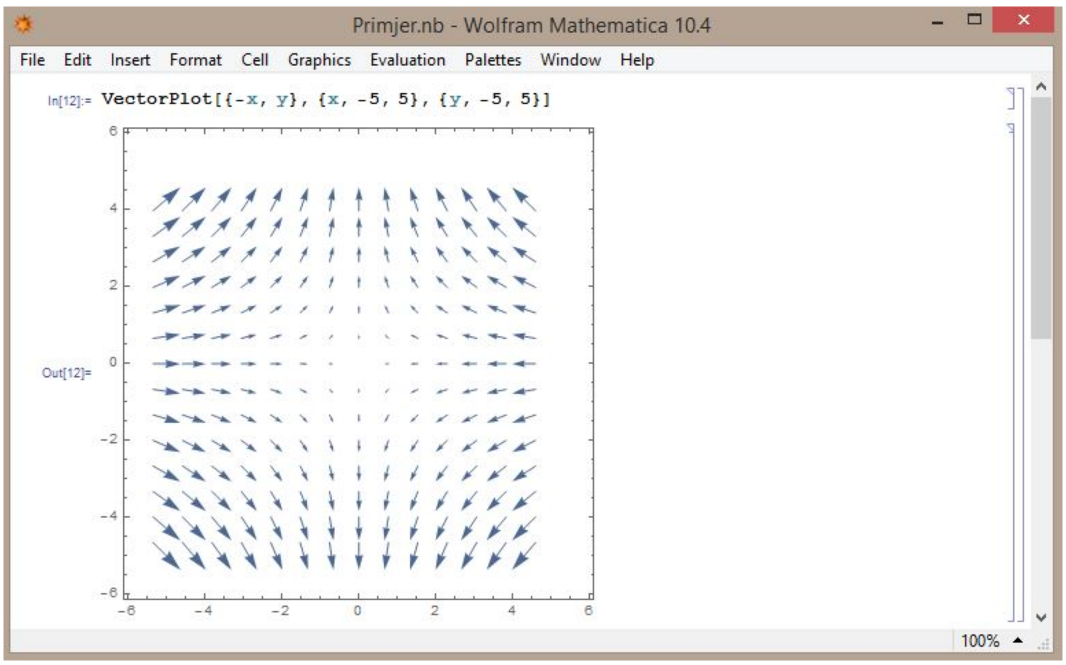
Silnice magnetskog i električnog polja mogu se prikazati pomoću matematičkog pojma vektorskog polja.

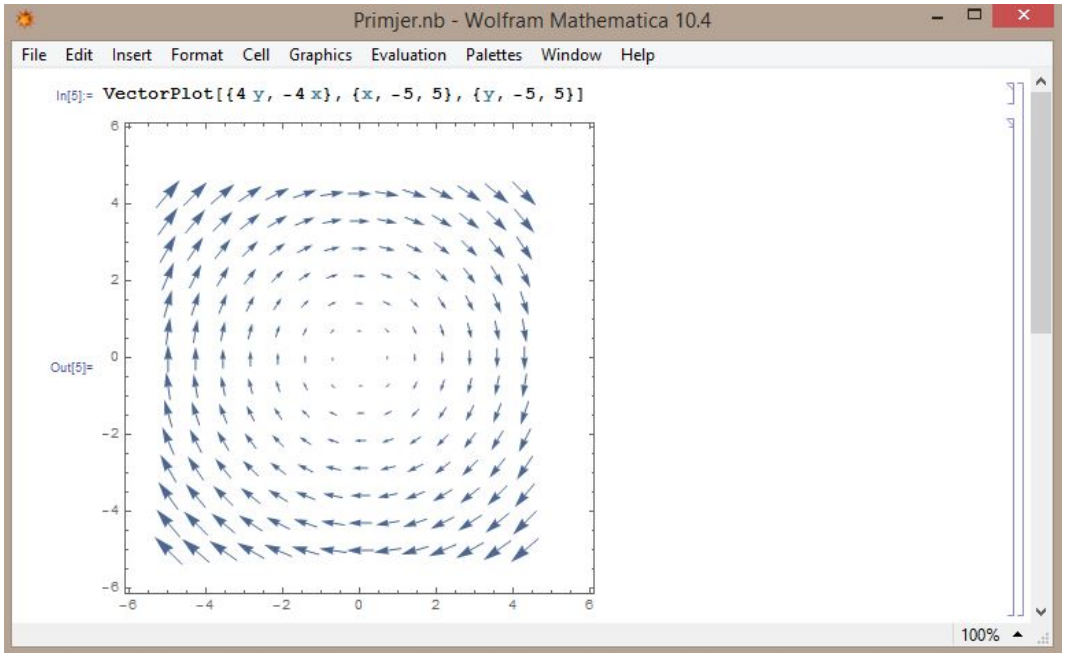
Važno je znati imamo li u ravnini ili prostoru točku u koju ulaze strelice našeg polja, to su ponori ili imamo točku izvora iz koje izlaze vektori. Kod centra imamo rotaciju, to su vrtložna polja.

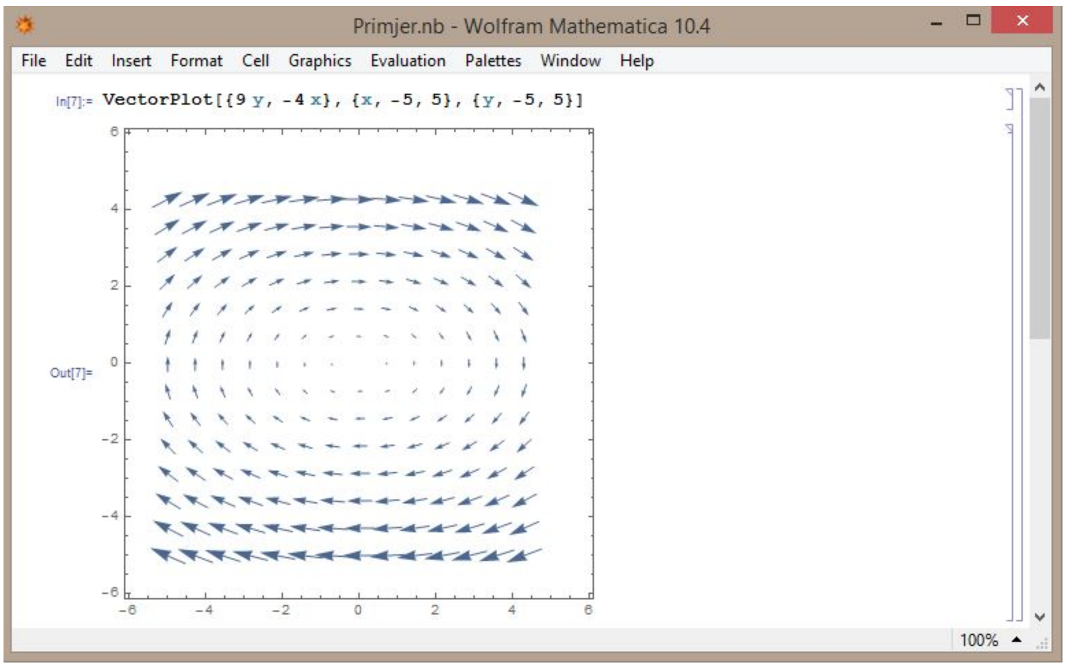
Primjer 6.37 *Pomoću naredbe VectorPlot u Wolframovoj Mathematici nacrtajete vektore ovisne o* (x, y)

1. $\vec{f} = 5x\vec{i} + 5y\vec{j}$, 2. $\vec{g} = -x\vec{i} + y\vec{j}$, 3. $\vec{G} = 4y\vec{i} - 4x\vec{j}$, 4. $\vec{H} = 9y\vec{i} - 4x\vec{j}$.


Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[1]:= VectorPlot[{5 x, 5 y}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]
Out[1]=
6
4
2
0
-2
-4
-6
-6 -4 -2 0 2 4 6
100%


Primjer.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[12]:= VectorPlot[{-x, y}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]
Out[12]=
6
4
2
0
-2
-4
-6
-6 -4 -2 0 2 4 6
100%





Primjer 6.38 *U primjeru 6.37 su zadana vektorska polja tangencijalna na krivulje. Te krivulje su kružnica, elipsa, hiperbola, a u jednom primjeru vektori leže na pravcu. Gledajući slike dobivene u u Wolframovoj Mathematici pokušajte odrediti koja polja su tangencijalna na koje krivulje.*
Rješenje.

Kružnica $\vec{G}$, elipsa $\vec{H}$, hiperbola $\vec{g}$, a na pravcu $\vec{f}$.

6.9 Pojam vektorske funkcije dviju varijabli

Vektor

$$\vec{f}(x,y) = f_1(x,y)\vec{i} + f_2(x,y)\vec{j}, \text{ za } t \in \mathbb{R}$$

je funkcija dviju varijabli, jer ovisi o dvjema varijablama $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Domena ove funkcije je podskup skupa $\mathbb{R}^2$ uređenih parova realnih brojeva. Mi paru $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pridružujemo vektor $\vec{f}(x,y) = f_1(x,y)\vec{i} + f_2(x,y)\vec{j}$. Za vektorske funkcije imamo

$$(x,y) \mapsto \vec{f}(x,y) = f_1(x,y)\vec{i} + f_2(x,y)\vec{j} \in \mathbb{R}^2$$

Funkcije više varijabli iz poglavlja 5 nazivamo i skalarnim funkcijama da naglasimo da paru ili trojci brojeva pridružujemo jedan broj. Realni ili kompleksni broj nazivamo i skalarom. Za skalarne funkcije imamo

$$(x,y) \mapsto z = f(x,y) \in \mathbb{R}.$$

Vektor $\vec{f}(x,y) = f_1(x,y)\vec{i} + f_2(x,y)\vec{j}$ je vektor iz 2-dimenzionalnog prostora, pa zapisujemo

$$\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2.$$

Funkciju $\vec{f}$ nazivamo vektorskom funkcijom dviju varijabli ili vektorskim poljem. Analogno možemo imati vektorske funkcije triju i više varijabli.

Primjer 6.39 *Odredite područje definicije funkcije*
$\vec{f}(x,y) = \frac{1}{x-y}\vec{i} + \sqrt{1-x^2-y^2}\,\vec{j}.$
Rješenje.
Domena funkcije je jedinični krug $x^2+y^2 \leq 1$ bez pravca $y = x$.

Primjer 6.40 *Odredite područje definicije funkcije $\vec{f}(x,y) = y\vec{i} + \sqrt{\sin x}\,\vec{j}$.*
Rješenje.
Domena funkcije su točke $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ takve da je $x \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$ za $k \in \mathbb{Z}$.

Primjer 6.41 *Odredite područje definicije funkcije*
$\vec{f}(x,y) = y\vec{i} + \sqrt{\frac{\pi}{6} - \arcsin x}\,\vec{j}.$
Rješenje.
Domena funkcije su točke $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ takve da je $x \in [-1, \frac{1}{2}]$.

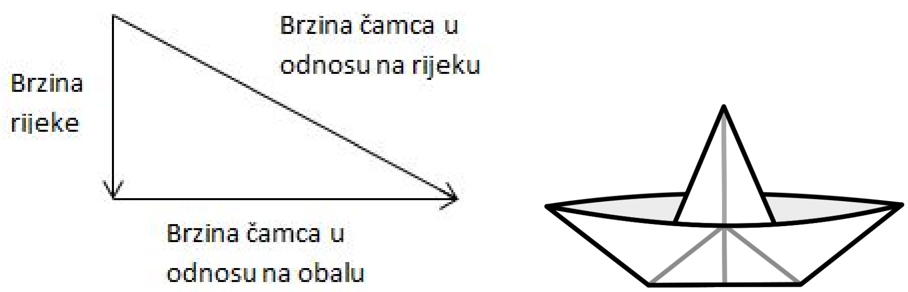
6.10 Modeliranje vektorskim funkcijama

Primjer 6.42 *Kapetan čamca prevozi ljude preko rijeke široke* 150 *metara. Kapetan može veslati brzinom* 1 m/s *kroz vodu, a rijeka teče brzinom* 0.5 m/s.

1. *Nacrtajte vektorski prikaz brzine rijeke, brzine čamca u odnosu na rijeku i brzinu čamca u odnosu na obalu.*
2. *Izračunajte vrijeme potrebno da čamac stigne na mjesto preko puta početne točke.*

Rješenje.

1. *Vektorski prikaz*



2. *Vrijeme potrebno da čamac stigne na odredište*

   $\vec{v}_{č-o} + \vec{v}_r = \vec{v}_{č-r}$
   $v_{č-o}^2 + v_r^2 = v_{č-r}^2$
   $v_{č-o}^2 + (0.5)^2 = (1)^2$
   $v_{č-o} = 0.866 \text{ m/s}$
   $t = \frac{s}{v_{č-o}} = \frac{150}{0.866} = 173.21 \text{ s}$

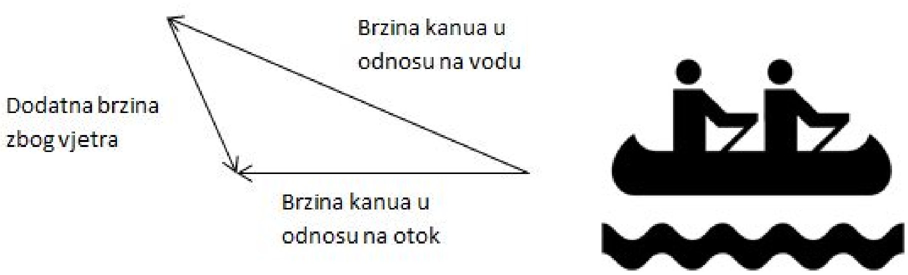
Primjer 6.43 *Veslač kanua želi doći do otoka udaljenog zapadno* 2 *kilometra. U uvjetima kada je voda mirna, veslač može ići brzinom* 3 km/h, *ali kada vjetar puše sa sjeverozapada dolazi od odstupanja željenog puta veslača pri čemu da bi dospio do otoka mora na trenutnu brzinu dodati* 2 km/h.

1. *Nacrtajte vektorski prikaz dodatne brzine zbog vjetra, brzine kanua u odnosu na vjetar i brzinu kanua u odnosu na otok.*

2. *Izračunajte vrijeme potrebno da kanu stigne na otok.*

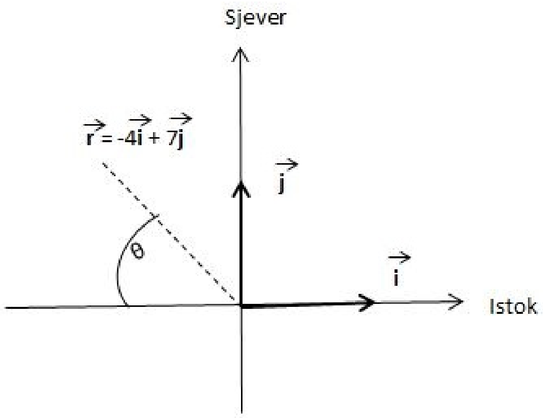
Rješenje.

1. *Vektorski prikaz*



2. *Vrijeme potrebno da kanu stigne na otok*

   $\vec{v}_{k-v} = \vec{v}_{k-o} + \vec{v}_d$
   $v_{k-v}^2 = v_{k-o}^2 + v_d^2 - 2v_{k-o}v_d\cos\gamma$
   $3^2 = v_{k-o}^2 + 2^2 - 2v_{k-o} \cdot 2\cos 135°$
   $5 = v_{k-o}^2 + 2\sqrt{2}v_{k-o}$
   $v_{k-o} = 1.23 \text{ km/h}$
   $t = \frac{s}{v_{k-o}} = \frac{2}{1.23} = 1.63 \text{ h}$



Slika 6.1: Položaj svjetionika i jedrilice u koordinatnom sustavu

Primjer 6.44 *Svjetionik se nalazi u ishodištu koordinatnog sustava, a položaj jedrilice je određen vektorom* $\vec{r} = -4\vec{i} + 7\vec{j}$ *. Udaljenosti su izražene u kilometrima, a jedinični vektori* $\vec{i}$ *i* $\vec{j}$ *su u smjeru istoka i sjevera analogno.*

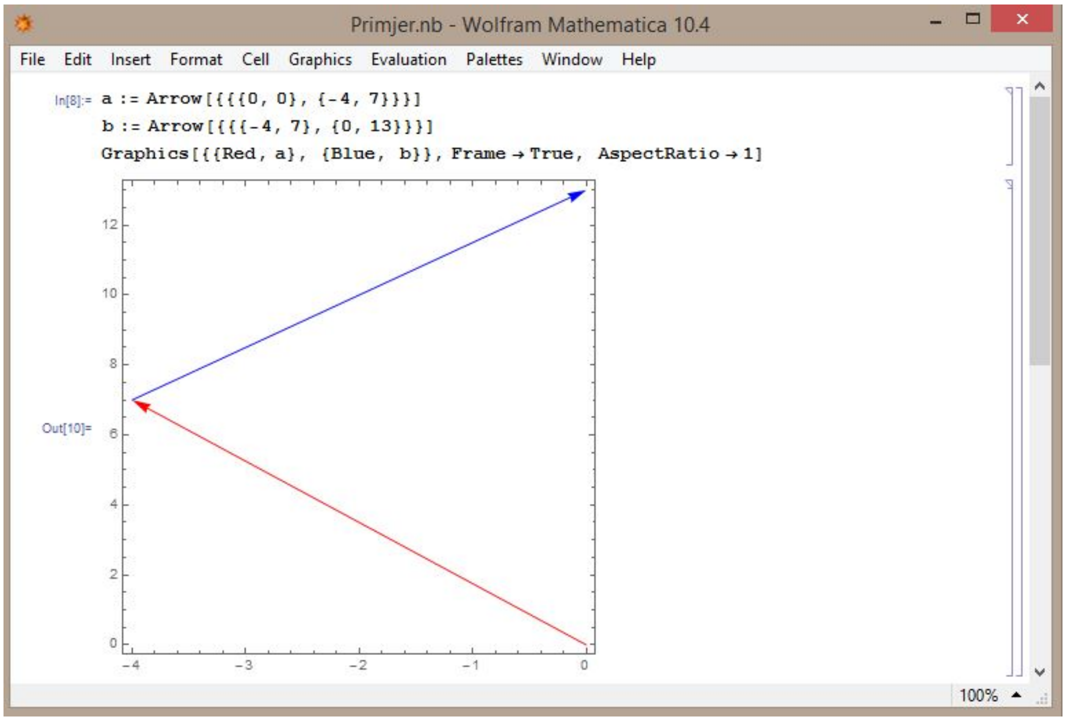
1. *Nacrtajte koordinatni sustav i položaje svjetionika i jedrilice.*
2. *Izračunajte udaljenost jedrilice od svjetionika.*
3. *U podne jedrilica je zaplovila vektorom brzine* $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ km/h. *Izračunajte vrijeme potrebno da jedrilica dođe na os ordinata te udaljenost između novog položaja jedrilice i ishodišta.*
4. *Nacrtajte na računalu stari i novi položaj jedrilice.*

Rješenje.

1. *Položaj svjetionika i jedrilice u koordinatnom sustavu vidi se na slici 6.1.*
2. *Udaljenost se računa pomoću Pitagorinog teorema*

   $|\vec{r}| = \sqrt{(-4)^2 + 7^2} = \sqrt{65} = 8.06$ km
   $\theta = 180° - \text{arctg}\frac{r_j}{|r_i|} = 180° - \text{arctg}(\frac{7}{4}) = 119.74°$
3. *Novi vektor položaja jedrilice u vremenu t može se prikazati*

   $\vec{r}_c = (-4 + 2t)\,\vec{i} + (7 + 3t)\,\vec{j}$.
   Jedrilica će biti točno na sjeveru kada je jedinični vektor $\vec{i}$ *jednak nuli, stoga slijedi* $-4+2t = 0$; $t = 2$ *tj. u 2 sata popodne.*
   $r_c^2 = (-4 + 2t)^2 + (7 + 3t)^2 = 16 - 16t + 4t^2 + 49 + 42t + 9t^2 = 13t^2 + 26t + 65 = 13\left(t^2 + 2t + 5\right)$
   $t = 2$ *pa je* $r_c = \sqrt{13\,(4 + 4 + 5)} = 13$ km
4. *Položaj jedrilice*



Primjer 6.45 *Zmaj leti brzinom* 20 m/s, *s točke* A *određena vektorom* $\vec{r}_A = 47\vec{i} + 111\vec{j}$ *do točke* B *određena vektorom* $\vec{r}_B = 101\vec{i} + 505\vec{j}$. *Udaljenosti su izražene u metrima, a jedinični vektori* $\vec{i}$ *i* $\vec{j}$ *su u smjeru istoka i sjevera analogno.*

1. *Nacrtajte koordinatni sustav i početni i krajnji položaj zmaja.*

2. *Izračunajte udaljenost koju je zmaj prešao od točke* A *do točke* B, *kut* θ, *vrijeme trajanja leta i vektor brzine.*

3. *Nacrtajte na računalu početni i krajnji položaj zmaja.*

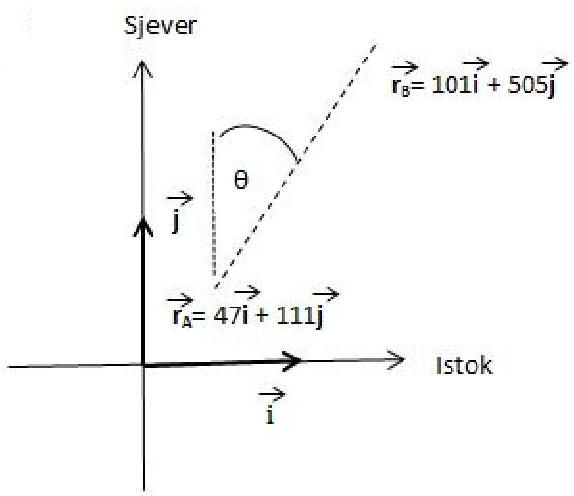
Rješenje.

1. *Položaj zmaja vidi se na slici 6.2.*

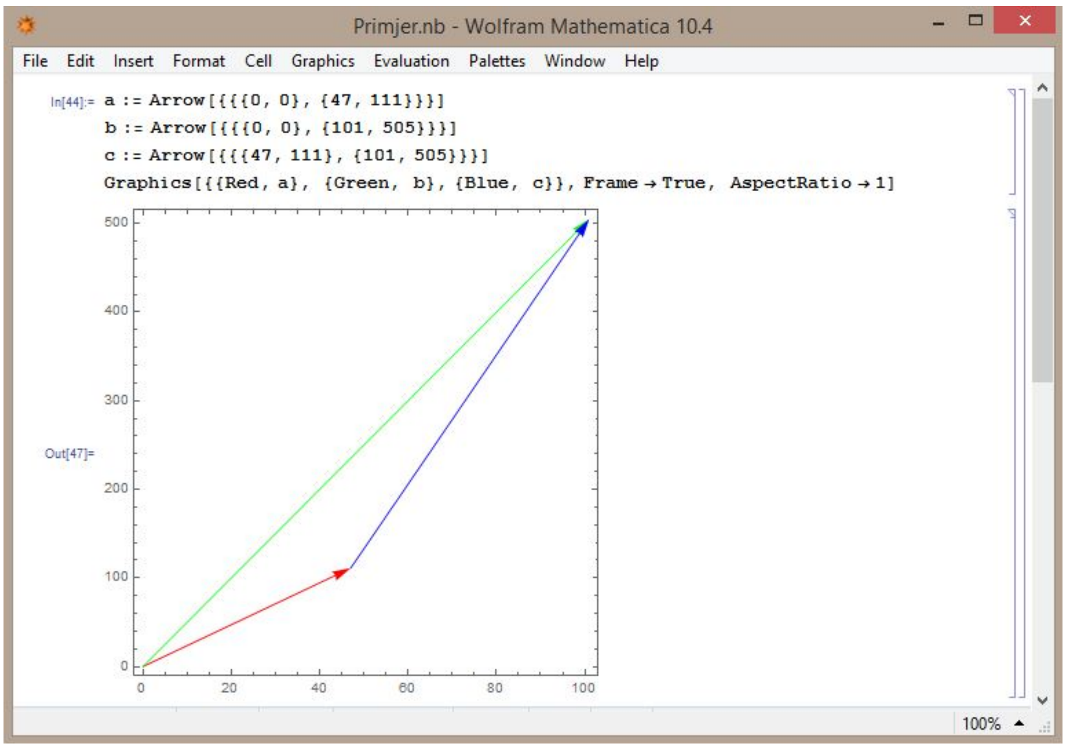
2. *Dobivamo vektor puta*

$$\vec{r}_c = (101\vec{i} + 505\vec{j}) - (47\vec{i} + 111\vec{j}) = 54\vec{i} + 394\vec{j}$$
$$|\vec{r}_c| = \sqrt{54^2 + 394^2} = \sqrt{158152} = 397.68 \text{ m}$$
$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{r_{cj}}{|r_{ci}|} = \operatorname{arctg}\frac{394}{54} = 82.2^\circ$$
$$t = \frac{s}{v} = \frac{397.68}{20} = 19.884 \text{ s}$$
$$\vec{v} = \frac{54\vec{i}+394\vec{j}}{19.884} = 2.72\vec{i} + 19.81\vec{j} \text{ m/s}$$

3. *Položaj zmaja*



Slika 6.2: Položaj zmaja



Primjer 6.46 *Lopta se kotrlja horizontalno brzinom* 5 m/s *dok ne dođe do ruba igrališta.*

1. *U odnosu na ishodište na rubu igrališta, gdje će se nalaziti lopta tri sekunde poslije?*

2. *Odredite vektor brzine.*

Rješenje.

1. *Jednoliko ubrzano gibanje na pravcu*

   $\vec{s} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 = 5\vec{i} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot (-9.8\vec{j}) \cdot 3^2 = 15\vec{i} - 44.1\vec{j}$ m

2. $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t = 5\vec{i} - 29.4\vec{j}$ m/s

Primjer 6.47 *Lopta A mase* 0.4 *kilograma i vektora brzine* $\vec{v}_A = 0.5\vec{i}$ *m/s sudara se s mirnom loptom B jednake mase. Nakon sudara, lopta B ima vektor brzine* $\vec{u}_B = 0.2\vec{i} - 0.1\vec{j}$ m/s.

1. *Koristeći zakon očuvanja količine gibanja odredite vektor brzine lopte A.*

2. *Izračunajte brzine svake lopte nakon sudara.*

3. *Izračunajte kut između vektora položaja lopti A i B.*

4. *Nacrtajte vektore brzine obiju lopti prije i poslije sudara.*

5. *Kolika je Q vrijednost sudara?*

Napomena. Vrijedi zakon očuvanja količine gibanja $m\vec{v}_A + m\vec{v}_B = m\vec{u}_A + m\vec{u}_B$ *i zakon očuvanja energije* $E_p = E_k + Q$.
Rješenje.

1. *Vektor brzine lopte A*

   $m\vec{v}_A + m\vec{v}_B = m\vec{u}_A + m\vec{u}_B$
   $(0.5\vec{i} + 0\vec{j}) + (0\vec{i} + 0\vec{j}) = (x\vec{i} + y\vec{j}) + (0.2\vec{i} - 0.1\vec{j})$
   $0.5 = x + 0.2;\ x = 0.3$
   $0 = y - 0.1;\ y = 0.1$
   $\vec{u}_A = 0.3\vec{i} + 0.1\vec{j}$ m/s

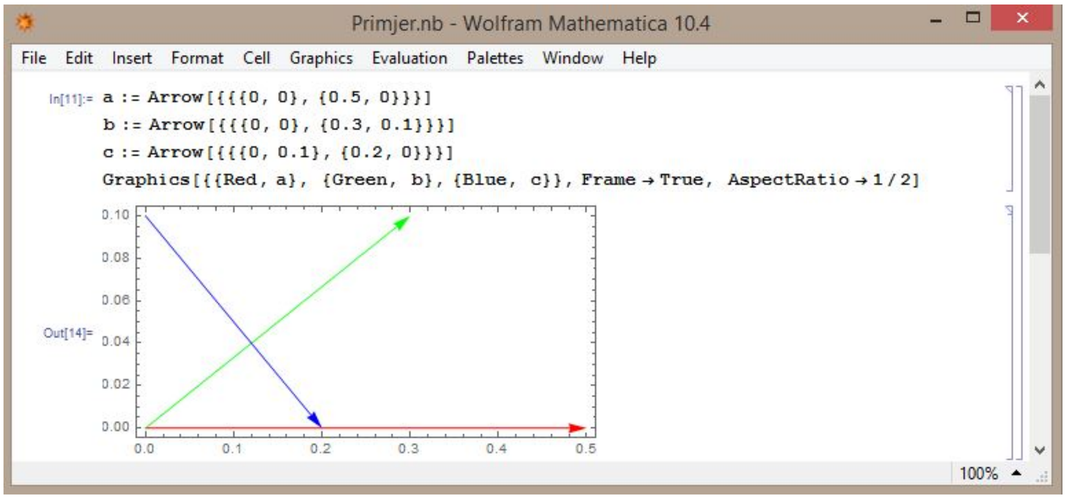
2. *Brzine lopte A i B*

   $|\vec{u}_A| = \sqrt{0.3^2 + 0.1^2} = 0.32$ m/s
   $|\vec{u}_B| = \sqrt{0.2^2 + 0.3^2} = 0.13$ m/s

3. *Kut izmeđđu vektora lopti A i B*

   $\theta_A = \text{arctg}\frac{u_j}{|u_i|} \ = \text{arctg}(\frac{0.3}{0.1}) \ = 71.56°$
   $\theta_B = \text{arctg}\frac{u_j}{|u_i|} \ = \text{arctg}(\frac{0.2}{0.3}) \ = 33.69°$
   Kut između vektora A i B je $71.56° + 33.69° = 105.25°$

4. *Vektori brzina lopti*



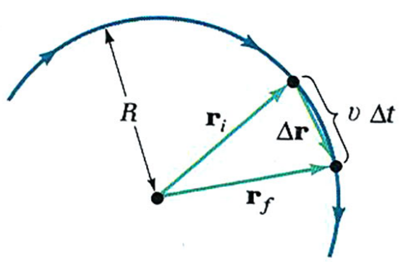
5. *Gubitak kinetičke energije*
   $E_{Ap} = \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2} \cdot 0.4 \cdot 0.5^2 = 0.05$ J
   $E_{Bp} = 0$ J
   $E_p = 0.05$ J
   $E_{Az} = \frac{1}{2}mu_A^2 = \frac{1}{2} \cdot 0.4 \cdot 0.32^2 = 0.02048$ J
   $E_{Bz} = \frac{1}{2}mu_B^2 = \frac{1}{2} \cdot 0.4 \cdot 0.13^2 = 0.026$ J
   $E_z = 0.02048 + 0.026 = 0.04648$ J
   $Q = E_p - E_z = 0.05 - 0.04648 = 0.00352$ J
   Q vrijednost iznosi 7.04% od E_p.

Primjer 6.48 *Rukometna loptu mase* 0.2 *kilograma giba se brzinom* $\vec{v}_h = 23\vec{i} + 23\vec{j}$ m/s, *gdje je* $\vec{i}$ *jedinični vektor usmjeren duž igrališta, a jedinični vektor* $\vec{j}$ *okomit na površinu igrališta. Rukometaš udara loptu i u kratkom vremenu brzina lopte postane* $\vec{v}_b = -17\vec{i}$ m/s. *Odredite impuls sile. Uputa: impuls sile* $\vec{I} = m\vec{v}_h - m\vec{v}_b$.
Rješenje.
Impuls sile $\vec{I} = m\vec{v}_h - m\vec{v}_b = 0.2(23\vec{i} + 23\vec{j} + 17\vec{i}) = 0.2(40\vec{i} + 23\vec{j})$
$I = 0.2\sqrt{40^2 + 23^2} = 9.23$ Ns

Primjer 6.49 *Položaj sitnog tijela (materijalne točke) opisuje se vektorom položaja. Početni položaj točke opisan je vektorom položaja,* $\vec{r}_i(3\vec{i} + 4\vec{j}$ m, *a položaj nakon* 2 *sekunde vektorom* $\vec{r}_f = (5\vec{i} + 2\vec{j})$ m.

1. *Odredite kolika je srednja brzina gibanja.*

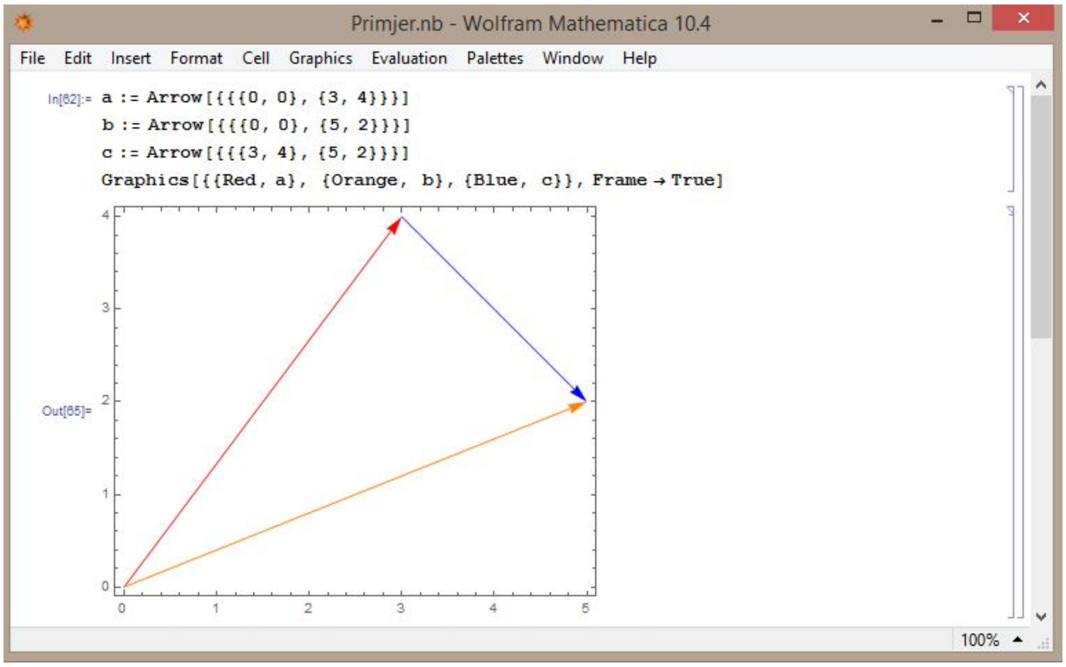
2. *Nacrtajte početni i krajnji položaj točke.*



Rješenje.

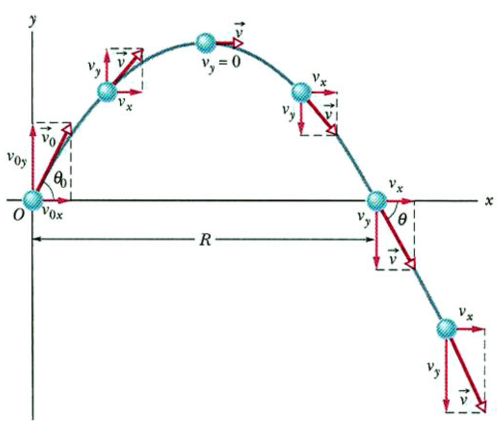
1. *Srednja brzina je promjena vektora položaja u vremenu:* $\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$
   Promjena položaja $\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$ m
   Vektor brzine je: $\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{i} - \vec{j}$ m/s, *iznos brzine* $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{2} = 1.41$ m/s.

2. *Položaj točke*



Primjer 6.50 *Lopta je bačena početnom brzinom* $\vec{v}_0 = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ m/s. *Odredite:*

1. *iznos početne brzine i kut pod kojim je lopta bačena u odnosu na horizontalnu os (x os)*
2. *iznos brzine u najvišoj točki putanje* ($g = 10$ m/s^2).
3. *Nacrtajte vektor brzine na računalu.*



Rješenje.

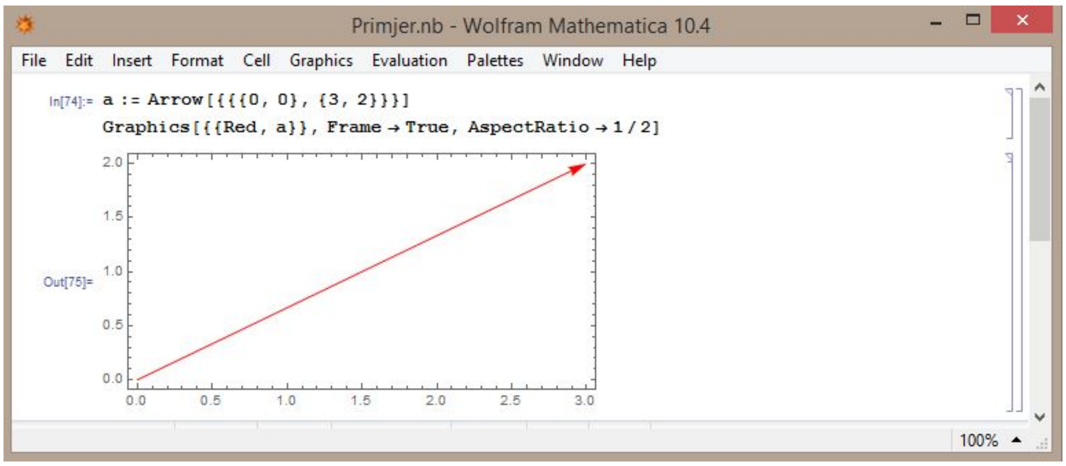
1. *početna brzina lopte* $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, *iznos brzine je* $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{13} = 3.6$ m/s. *Komponente brzine se mogu napisati:* $v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$, $v_{0y} = v_0 \sin\theta_0$,

$$\operatorname{tg}\theta_0 = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \frac{2}{3},$$

$\theta_0 = 33.7°$.

2. *brzina lopte* $\vec{v} = \vec{v}_0 - \vec{g}t$, *u najvišoj točki putanje* $v_{0y} = 0$ m/s, $v = v_{0x} = 3$ m/s.

3. *Vektor brzine*



Primjer 6.51 *Na tijelo mase* $m = 2$ *kilograma istovremeno djeluju dvije sile* $\vec{F}_1 = -4\vec{i} + 6\vec{j}$ N *i* $\vec{F}_2 = 8\vec{i} - 10\vec{j}$ N. *Odredite:*

1. *rezultantnu silu*

2. *iznos i smjer ubrzanja*

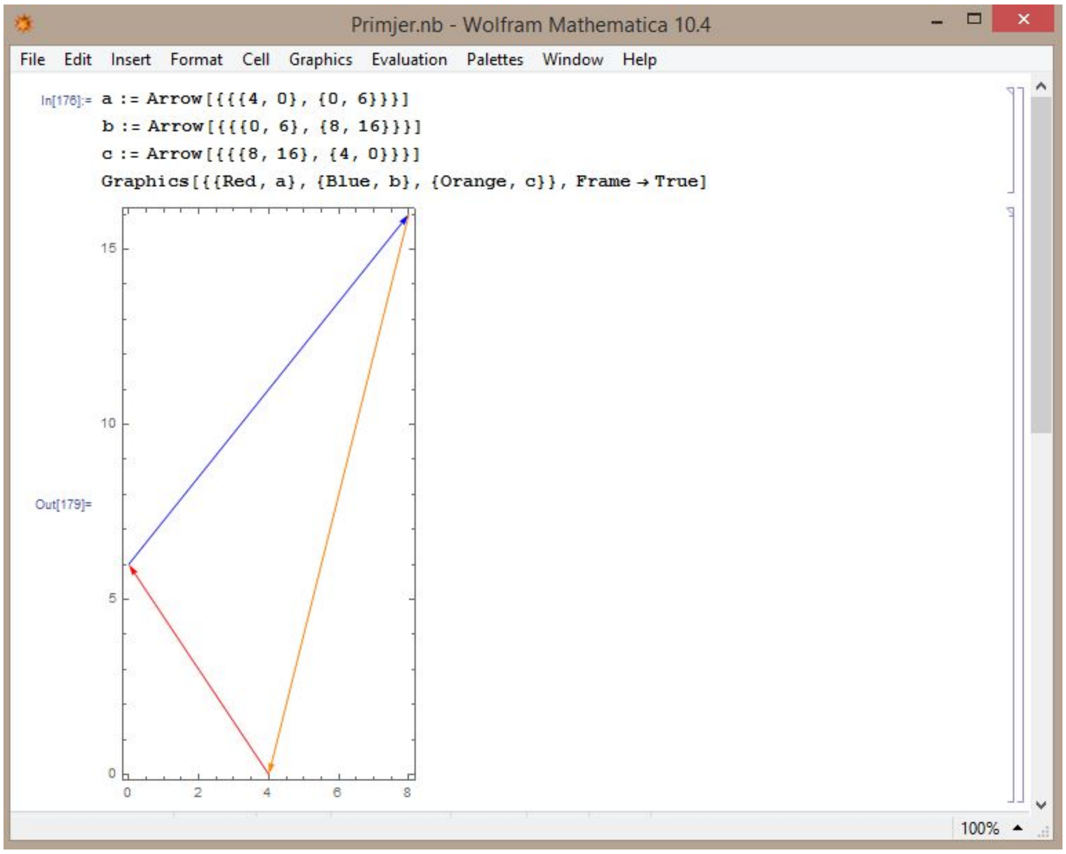
3. *Nacrtajte zbroj sila na računalu.*

Rješenje.

1. *Ukupna sila je* $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$,$\vec{F} = 4\vec{i} - 4\vec{j}$ N, *iznos sile je* $F = 5.66$ N.

2. *Ukupna sila daje tijelu mase* m *ubrzanje* $\vec{a}$. $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m \cdot \vec{a}$, $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$, $a = 2.83$ m/s^2, $\operatorname{tg}\theta = \frac{a_y}{a_x} = -1$, *kut* $\theta = -45°$.

3. *Zbroj sila*



Primjer 6.52 *Na tijelo koje se giba stalnom brzinom istovremeno djeluju tri sile. Dvije poznate sile su* $\vec{F}_1 = -6\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}$ N *i* $\vec{F}_2 = -8\vec{i} - 10\vec{j} + 9\vec{k}$ N.

1. *Odredite silu* $\vec{F}_3$.
2. *Nacrtajte te tri sile.*

Rješenje.

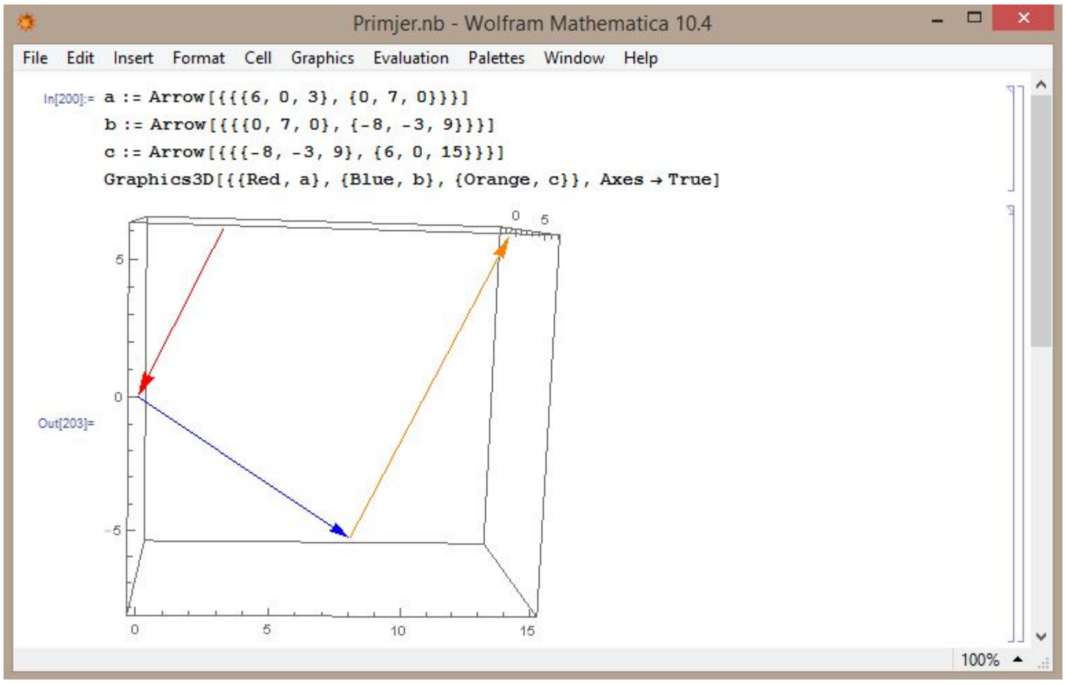
1. *Ako se tijelo giba konstantnom brzinom ukupna sila je nula.*
   $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$, $\vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$, $\vec{F}_3 = 14\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ N.
2. *Prikaz sila je na slici 6.3.*

Primjer 6.53 *Nabijeno tijelo u ishodištu koordinatnog sustava djeluje silom* $\vec{F} = 3\vec{i} + 1.5\vec{j} + 2\vec{k}$ μN *na česticu naboja* $q = 80$ nC.

1. *Odredite električno polje u točki u kojoj je naboj* q.
2. *Nacrtajte vektor* $\vec{E}$.

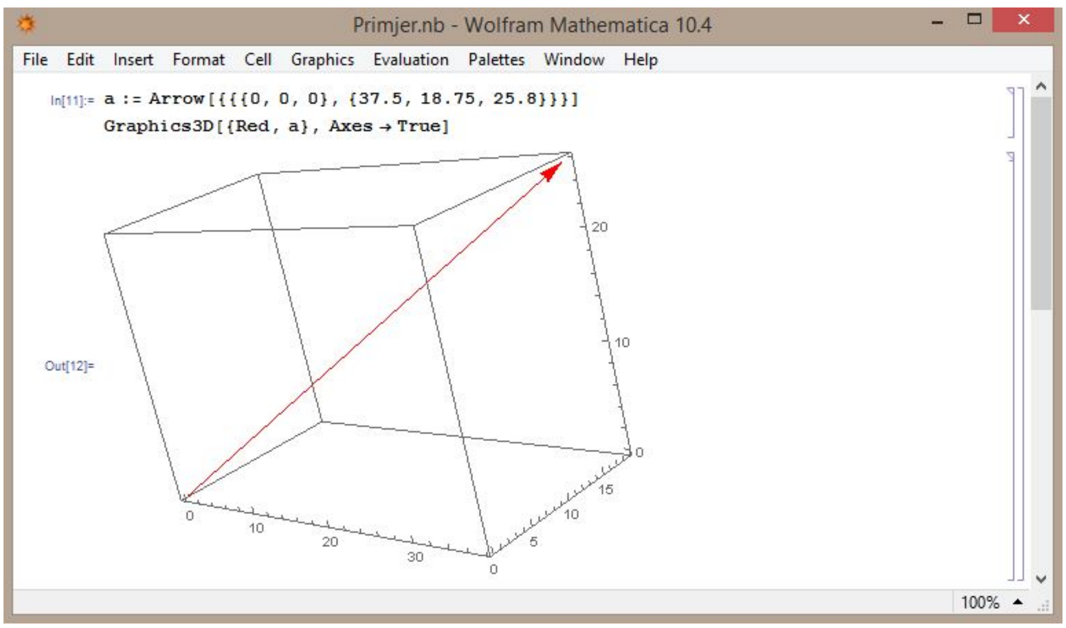
Rješenje.

1. $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$, $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = 37.5\vec{i} + 18.75\vec{j} + 25.8\vec{k}$ N/C.



Slika 6.3: Prikaz sila

2. *Prikaz vektora* $\vec{E}$



Primjer 6.54 *Pomak kolica pod utjecajem sile* $\vec{F} = 8.0\vec{i} - 8.0\vec{j}$ N *dan je vektorom* $\vec{s} = 3.0\vec{i} - 4.0\vec{j}$ m. *Odredite iznos sile, pomak, rad sile te kut između vektora sile i pomaka.*

Rješenje.

Iznos sile $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 11.3$ N, *iznos pomaka* $s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = 5.0$ m

Rad sile je $W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F_x \cdot s_x + F_y \cdot s_y$, $W = 8 \cdot 3 - 8 \cdot 4 = -8.0$ J

Rad sile možemo odrediti iz skalarnog produkta vektora sile i pomaka: $W = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs\cos\vartheta$, ϑ *je kut između vektora sile i pomaka.*

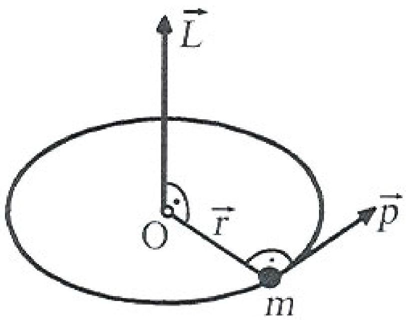
$\cos\theta = \frac{W}{Fs} = \frac{-8\ \mathrm{J}}{11.3\ \mathrm{N} \cdot 5\ \mathrm{m}} = -0.14$, *kut* $\theta = 98°$.

Primjer 6.55 *U točki opisanoj vektorom položaja* $\vec{r}_A = \vec{i} - 2\vec{j}$ m *djeluje sila* $\vec{F}_2 = 10\vec{i} + 20\vec{j} - 15\vec{k}$ N. *Odredite zakretni moment sile s obzirom na ishodište.*

Rješenje.

Moment sile: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, $\vec{M} = (\vec{i} - 2\vec{j}) \times (10\vec{i} + 20\vec{j} - 15\vec{k}) = 30\vec{i} + 15\vec{j} + 40\vec{k}$ Nm.

Primjer 6.56 *Odredite zakretni moment čestice mase* $m = 1$ *kilogram u trenutku kada joj je položaj opisan* $\vec{r} = -3\vec{i} + \vec{\mathrm{j}} - 5\vec{\mathrm{k}}$ m, *a brzina je* $\vec{v} = -2\vec{i} - 6\vec{\mathrm{j}}$ m/s.



Rješenje.

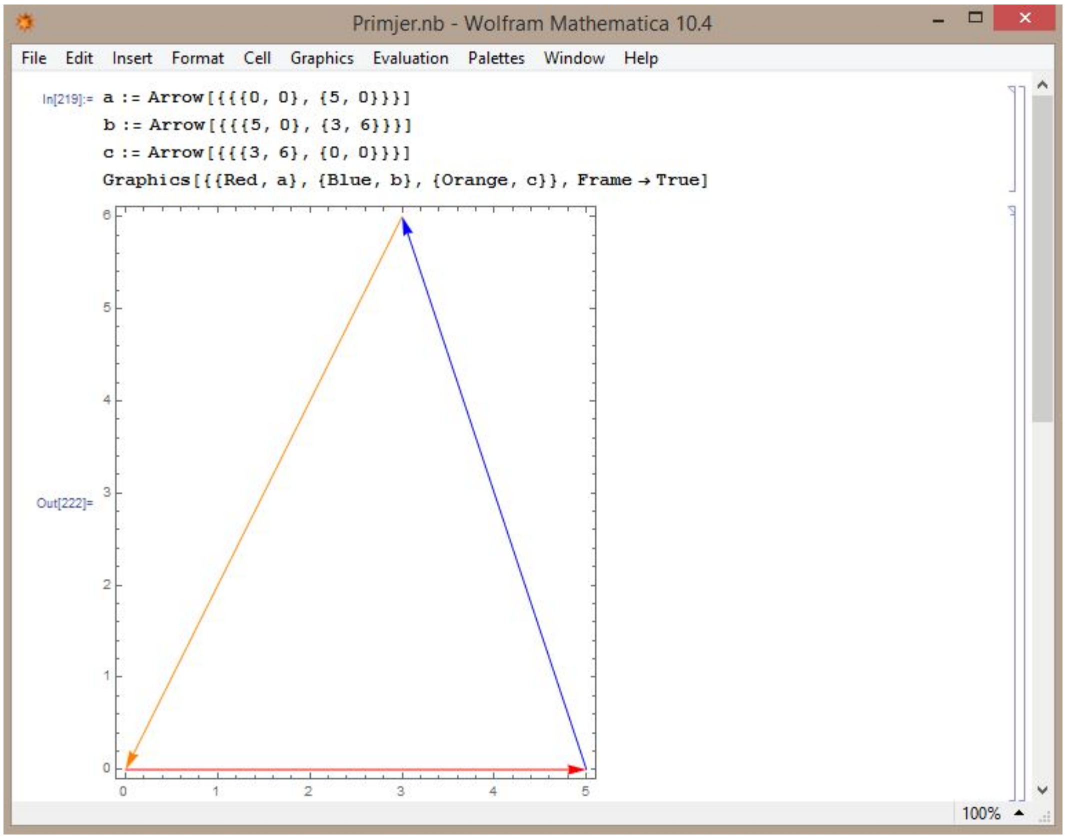
Zakretni moment je: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$, $\vec{L} = -30\vec{i} + 10\vec{\mathrm{j}} + 20\vec{\mathrm{k}}$ kgm^{2}s.

Primjer 6.57 *U točki* $A(2\ \mathrm{m}, 1\ \mathrm{m}, 0\ \mathrm{m})$ *djeluju 2 sile* $\vec{F}_1 = 5\vec{i}$ N *i* $\vec{F}_2 = -2\vec{i} + 6\vec{j}$ N. *Odredite:*

1. *vektor položaja točke A,*
2. *rezultantnu silu.*
3. *Nacrtajte na računalu te tri sile.*
4. *Odredite rezultantni moment sile s obzirom na ishodište.*

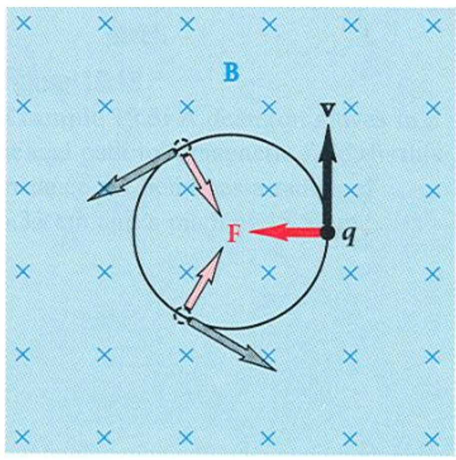
Rješenje.

1. *Vektor položaja točke A:* $\vec{r}_A = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = 2\vec{i} + \vec{j}$ m.
2. *Rezultantna sila:* $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 3\vec{i} + 6\vec{j}$ N.
3. *Prikaz sila*



4. Moment sile: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, $\vec{M} = (2\vec{i} + \vec{j}) \times (3\vec{i} + 6\vec{j}) = 9\vec{k}$ Nm.

Primjer 6.58 *Elektron (naboj* $q = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C*) ulazi u magnetsko polje* $B = 0.4$ T *brzinom* $v = 6 \cdot 10^{7}$ m/s*. Smjer brzine i magnetskog polja (gleda u papir) prikazan je na slici:* $\vec{v} = (6 \cdot 10^{7}\vec{\mathrm{j}})$ m/s, $\vec{B} = (-0.24\vec{k})$ T*. Odredite magnetsku silu na elektron.*



Rješenje.

Magnetska sila je $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$, $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$, $\vec{F}_m = 2.3 \cdot 10^{-12}$ N.

6.11 Zadaci za vježbu

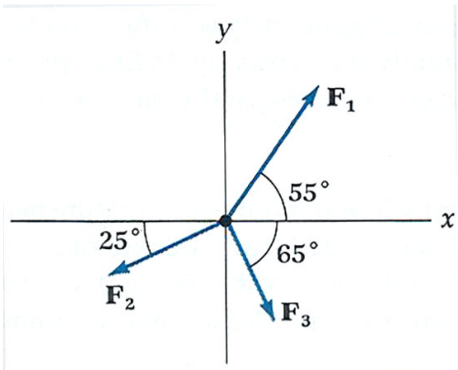
Zadatak 6.1 *Ako je početni položaj točke opisan vektorom položaja* $\vec{r}_i = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ m, *a položaj nakon* 3 *sekunde vektorom* $\vec{r}_f = 9\vec{i} + 2\vec{j} + 10\vec{k}$ m *kolika je srednja brzina gibanja?*
Rješenje.

$\vec{v} = 4\vec{i} + 6\vec{k}$ m/s, *iznos brzine* $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{52} = 7.2$ m/s.

Zadatak 6.2 *Proton se giba brzinom* $\vec{v}_1 = -3\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ m/s, *a* 5 *sekundi kasnije brzina je* $\vec{v}_2 = 6\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ m/s. *Odredite prosječno ubrzanje.*
Rješenje.

$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = 9\vec{i} + 2\vec{k}$, *iznos brzine* $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{52} = 7.2$ m/s.

Zadatak 6.3 *Na tijelo smješteno u ishodištu istovremeno djeluju* 3 *sile (slika):* $F_1 = 44$ N, $F_2 = 36$ N *i* $F_3 = 32$ N.



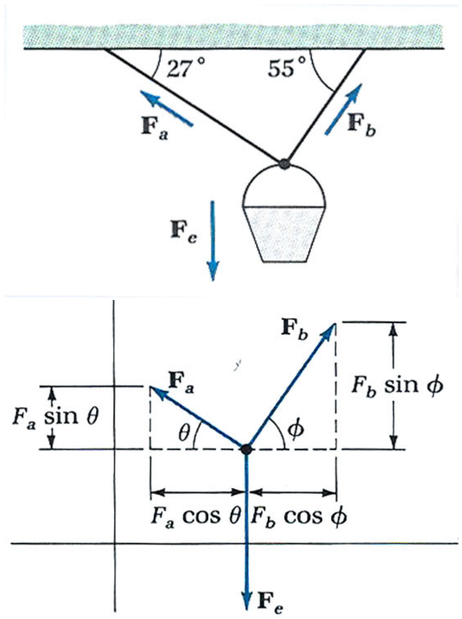
Odredite:

1. *rezultantnu silu pomoću jediničnih vektora*
2. *iznos i smjer rezultante sile u odnosu na* x *os.*

Rješenje.

1. *komponente sile su:* $F_x = F_1 \cos 55° - F_2 \cos 25° + F_3 \cos 65°$, $F_x = 5.76$ N, $F_y = F_1 \sin 55° - F_2 \sin 25° - F_3 \sin 65°$, $F_y = -8.16$ N
   $\vec{F} = 5.76\vec{i} - 8.16\vec{j}$ N
2. $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{99.77} = 10$ N, $\operatorname{tg}\theta = \frac{F_y}{F}$, $\theta = -54.78°$.

Zadatak 6.4 *Posuda s vodom mase* $m = 10$ *kilograma obješena je na uže (zanemarive mase) kao na slici. U ravnoteži je ukupna sila na posudu nula. Odredite u tom slučaju sile napetosti užeta* F_a *i* F_b $(g = 10 \text{ m/s}^2)$.



Rješenje.

U ravnoteži je ukupna sila nula pa vrijedi: $F_e = mg$
$-F_a \cos\theta + F_b \cos\phi = 0$ *i* $F_a \sin\theta + F_b \sin\phi - mg = 0$
$F_a = 58.3$ N, $F_b = 89.9$ N.

Zadatak 6.5 *Pomak tijela pod utjecajem sile* $\vec{F} = 8\vec{i} - 8\vec{j} - 8\vec{k}$ N *opisan je vektorom* $\vec{s} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$ m. *Odredite:*

1. *rad sile*
2. *kut između vektora sile i pomaka.*

Rješenje.

1. $W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F_x \cdot s_x + F_y \cdot s_y + F_z \cdot s_z$, $W = 32$ N
2. $\cos\theta = \frac{W}{Fs} = \frac{32 \text{ J}}{13.68 \text{ N} \cdot 6.16 \text{ m}} = 0.37$, $\theta = 68.28°$.

PROJEKT STEM GENIJALCI

Korisnik projekta: Gimnazija Matija Mesić

Vrijednost projekta: 2.474.286,40 kuna.

Trajanje projekta: 12 mjeseci (listopad 2015. – listopad 2016.)

Partneri u projektu: Strojarski fakultet Slavonski Brod i Gimnazija Nova Gradiška

Ciljevi projekta:
Opći cilj projekta je doprinijeti povećanju broja učenika koji upisuju STEM (Science, Technology, Engineering, and Mathematics) studijske programe i povećanju njihovog uspjeha na studiju te konkurentnosti na tržištu rada omogućavanjem stjecanja dodatnih kompetencija iz STEM i ICT područja.

Specifični ciljevi projekta:
- Razvijeni inovativni kurikulumi usmjereni na stjecanje kompetencija iz STEM i ICT područja.
- Osigurani uvjeti za uvođenje novorazvijenih kurikuluma u sustav obrazovanja u Gimnaziji Matija Mesić i Gimnaziji Nova Gradiška i promoviran značaj STEM kompetencija.

Aktivnosti na projektu:
I. Unaprjeđenje nastavničkih kompetencija za izradu i implementaciju kurikuluma
- Formiranje 5 radnih skupina za izradu 5 fakultativnih kurikuluma
- Edukacija nastavnika o izradi kurikuluma i formuliranju ishoda učenja
- Studijski posjet Italiji radi upoznavanja primjera dobre prakse
- Studijski posjet Institutu Ruđer Bošković
- Edukacija o obnovljivim izvorima energije
- Edukacija nastavnika o inovativnim nastavnim metodama rada "Čitanje i pisanje za kritičko mišljenje"

II. Razvoj fakultativnih kurikuluma iz područja STEM-a i ICT-a
- Analiza postojećih kurikuluma
- Razvoj fakultativnog kurikuluma iz područja biologije
- Razvoj fakultativnog kurikuluma iz područja kemije
- Razvoj fakultativnog kurikuluma iz područja fizike
- Razvoj fakultativnog interdisciplinarnog kurikuluma iz područja matematike i informatike
- Razvoj fakultativnog interdisciplinarnog kurikuluma iz područja obnovljivih izvora energije
- Izrada 5 priručnika za nastavu s ispitima za provjeru usvojenosti ishoda učenja
- Izrada digitalnih sadržaja za provedbu kurikuluma
- Edukacija za primjenu digitalnih sadržaja
- Studijsko putovanje u Amsterdam radi upoznavanja primjera dobre prakse i iskustva u razvoju tehnologija obnovljivih izvora energije i njihovog povezivanja s gimnazijskim kurikulumima iz STEM područja

III. Unaprjeđenje materijalnih uvjeta za implementaciju novorazvijenih kurikuluma
- Opremanje praktikuma za kemiju
- Opremanje praktikuma za biologiju
- Opremanje praktikuma za matematiku i informatiku
- Opremanje praktikuma za fiziku
- Nabavka opreme za provedbu interdisciplinarnog kurikuluma Obnovljivi izvori energije.

IV. Diseminacija novorazvijenih kurikuluma i promocija STEM kompetencija
- Izrada portala za E-učenje
- Okrugli stol – STEM – budućnost Europske unije
- Izrada brošure za promociju STEM kompetencija
- Sajam ideja na Fakultetu Kemijskog inženjerstva u Zagrebu
- Osnivanje STEM kluba
- Dan otvorenih vrata STEM kluba

Promidžba i vidljivost
- Uvodna konferencija
- Promocija u medijima
- Promotivni materijali
- Završna konferencija

Upravljanje projektom i administracija
- Sastanci projektnog tima
- Sastanci s partnerima
- Izvještavanje prema Ugovornom tijelu

BILJEŠKE

BILJEŠKE