Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

1. travnja 2011.

1. Odredi x_{1006} ako je
$$\frac{x_1}{x_1+1}=\frac{x_2}{x_2+3}=\frac{x_3}{x_3+5}=\ldots=\frac{x_{1006}}{x_{1006}+2011},$$
$$x_1+x_2+\ldots+x_{1006}=503^2.$$

2. Izvan pravilnog mnogokuta $A_1A_2\ldots A_n$ nalazi se točka B takva da je trokut A_1A_2B jednakostraničan. Odredi sve n za koje su točke B, A_2 i A_3 uzastopni vrhovi nekog pravilnog mnogokuta.

3. Četiri prirodna broja a, b, c, d zadovoljavaju jednakosti
$$a+b=c, \qquad a+d=2c.$$
Pokaži da postoji pravokutni trokut površine $abcd$ kojem su duljine svih stranica prirodni brojevi.

4. Dan je tetivni četverokut $ABCD$. Simetrala dužine $\overline{BC}$ siječe dužinu $\overline{AB}$ u točki E. Kružnica koja prolazi točkom E, vrhom C i polovištem F stranice $\overline{BC}$ siječe dužinu $\overline{CD}$ u točki G. Dokaži da su pravci AD i FG međusobno okomiti.

5. Supružnici Ana i Tomislav došli su na zabavu na kojoj su sudjelovala još četiri para. Prilikom dolaska dogodio se izvjestan broj rukovanja. Pritom se nitko nije rukovao sa svojim bračnim drugom niti sa samim sobom. Kada je kasnije Tomislav upitao sve prisutne s koliko su se osoba rukovali, dobio je devet različitih odgovora. S koliko se osoba rukovala Ana?

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

1. travnja 2011.

1. Odredi sve parove (m, n) prirodnih brojeva takve da n dijeli $2m-1$ i m dijeli $2n-1$.

2. Neka su a i b realni brojevi takvi da su sve nultočke polinoma

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 8$$

realne. Dokaži da vrijedi $a^2 \geqslant 2b + 12$.

3. Odredi sve vrijednosti parametra a za koje sustav

$$\begin{aligned} 2^{|x|} + |x| &= x^2 + y + a \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

ima točno jedno rješenje $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

4. U trokutu ABC vrijedi $|AB| = |AC|$, a simetrala kuta $\sphericalangle ABC$ siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki D tako da je $|BC| = |BD| + |AD|$. Odredi kutove tog trokuta.

5. U vreći se nalazilo 255 kuglica označenih brojevima $1, 2, \ldots, 255$, a onda je svaki od N učenika uzeo je iz vreće po jednu kuglicu. Pokazalo se da nijedan od izvučenih brojeva nije točno dvostruko veći od nekog drugog izvučenog broja. Odredi najveći mogući N.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

1. travnja 2011.

1. Dan je pravokutan trokut ABC s pravim kutom pri vrhu C, u kojem je M polovište katete $\overline{BC}$. Dokaži da je $\sin(\sphericalangle MAB) \leqslant \frac{1}{3}$. Kada se postiže jednakost?

2. Odredi sve parove (x, y) cijelih brojeva koji zadovoljavaju jednadžbu

$$x^2(y-1) + y^2(x-1) = 1.$$

3. U trokutu ABC vrijedi $|AB| = |AC|$. Na stranici $\overline{AC}$ nalazi se točka D takva da je $|AD| < |CD|$, a na dužini $\overline{BD}$ točka P takva da je $\sphericalangle APC$ pravi kut. Ako je $\sphericalangle ABP = \sphericalangle BCP$, odredi $|AD| : |CD|$.

4. Neka su a, b, c različiti prirodni brojevi i k prirodan broj takav da vrijedi

$$ab + bc + ca \geqslant 3k^2 - 1.$$

Dokaži da je $\frac{1}{3}\left(a^3 + b^3 + c^3\right) \geqslant abc + 3k.$

5. Svako polje ploče 1000×1000 obojano je crnom ili bijelom bojom. Ukupan broj crnih polja na ploči je za 2012 veći od ukupnog broja bijelih polja. Dokaži da postoji kvadrat 2×2 koji sadrži tri polja jedne boje i jedno polje druge boje.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

1. travnja 2011.

1. Dokaži da je za svaki $k \in \mathbb{N}_0$ moguće odabrati $4 \cdot 2^k$ različitih prirodnih brojeva koji nisu veći od $5 \cdot 3^k$, tako da među njima ne postoje tri uzastopna člana aritmetičkog niza.

2. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$f(x^2 + f(y)) = y - x^2.$$

3. Na koliko načina se broj $\dfrac{2011}{2010}$ može prikazati kao umnožak dvaju razlomaka oblika $\dfrac{n+1}{n}$, gdje je n prirodan broj? Poredak faktora nije bitan.

4. Upisana kružnica šiljastokutnog trokuta ABC dodiruje stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ redom u točkama D, E i F. Središte te kružnice je točka S, a pravac DS siječe dužinu $\overline{EF}$ u točki P. Ako je M polovište stranice $\overline{BC}$, dokaži da su točke A, P i M kolinearne.

5. Neka je P_1, P_2, ..., P_{2n} permutacija vrhova pravilnog $2n$-terokuta. Dokaži da zatvorena poligonalna linija koja se sastoji od dužina

$$\overline{P_1P_2},\ \overline{P_2P_3},\ \ldots,\ \overline{P_{2n-1}P_{2n}},\ \overline{P_{2n}P_1}$$

sadrži barem jedan par paralelnih dužina.