Lekcija iz priručnika

Vesna Županović, Kristina Šorić

Primijenjena matematika podržana računalom

Tema

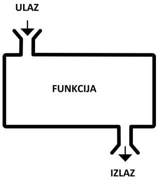
Pojam funkcije u životu

poglavlje 1. Osnovni pojmovi o funkcijama

potpoglavlje 1.2. Pojam funkcije u životu i matematici

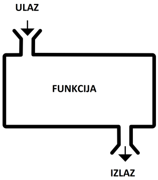
Sadržaj

Funkcija kao stroj



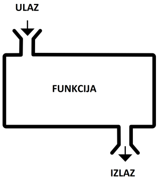
- Funkciju možemo zamisliti kao stroj u koji ubacujemo neke sirovine (input), a iz stroja izlazi neki proizvod (output).

Funkcija kao stroj



- Funkciju možemo zamisliti kao stroj u koji ubacujemo neke sirovine (input), a iz stroja izlazi neki proizvod (output).
- Matematičim jezikom sirovinu bi nazvali varijablom x, stroj bi nazvali funkcijom f, a proizvod bi bio $y = f(x)$.

Funkcija kao stroj



- Funkciju možemo zamisliti kao stroj u koji ubacujemo neke sirovine (input), a iz stroja izlazi neki proizvod (output).
- Matematičim jezikom sirovinu bi nazvali varijablom x, stroj bi nazvali funkcijom f, a proizvod bi bio $y = f(x)$.
- Proizvod $y = f(x)$ još nazivamo vrijednost funkcije u x.

Funkcija kao proces

- U inženjerstvu se često procesi prikazuju pomoću dijagrama.

Funkcija kao proces

- U inženjerstvu se često procesi prikazuju pomoću dijagrama.
- U proces ulaze varijable $x_1, x_2, \ldots x_n$, proces se prikazuje kao neki pravokutnik f u kojem se nešto događa, a iz pravokutnika izlazi kao rezultat $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Funkcija kao proces

- U inženjerstvu se često procesi prikazuju pomoću dijagrama.
- U proces ulaze varijable $x_1, x_2, \ldots x_n$, proces se prikazuje kao neki pravokutnik f u kojem se nešto događa, a iz pravokutnika izlazi kao rezultat $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
- Stroj, odnosno proces, ispravno radi ako ubacivanjem istih sirovina uvijek dobivamo isti proizvod.

Ulazne i izlazne vrijednosti

- Aparat Kačakak radi na patrone, ako se stavi crna patrona, onda pravi kavu, od zelene patrone se dobije čaj, a od smeđe kakao.

Ulazne i izlazne vrijednosti

- Aparat Kačakak radi na patrone, ako se stavi crna patrona, onda pravi kavu, od zelene patrone se dobije čaj, a od smeđe kakao.
- **Skup ulaznih varijabli je $\{c, z, s\}$, gdje c predstavlja crnu patronu, z zelenu, a s smeđu.**

Ulazne i izlazne vrijednosti

- Aparat Kačakak radi na patrone, ako se stavi crna patrona, onda pravi kavu, od zelene patrone se dobije čaj, a od smeđe kakao.
- **Skup ulaznih varijabli je $\{c, z, s\}$, gdje c predstavlja crnu patronu, z zelenu, a s smeđu.**
- **Skup izlaznih vrijednosti je $\{kav, caj, kak\}$, gdje kav predstavlja kavu, caj je čaj, a kak je kakao.**

Definicija funkcije

Jednakostima

$$\begin{aligned} f(c) &= kav \\ f(z) &= caj \\ f(s) &= kak \end{aligned}$$

je definirana funkcija jedne varijable.

- **Skup $\{c, z, s\}$ nazivamo područjem definicije funkcije ili domenom funkcije.**

Definicija funkcije

Jednakostima

$$\begin{aligned} f(c) &= kav \\ f(z) &= caj \\ f(s) &= kak \end{aligned}$$

je definirana funkcija jedne varijable.

- **Skup $\{c, z, s\}$ nazivamo područjem definicije funkcije ili domenom funkcije.**
- **Skup izlaznih vrijednosti je $\{kav, caj, kak\}$ slika funkcije.**

Definicija funkcije

Jednakostima

$$\begin{aligned} f(c) &= kav \\ f(z) &= caj \\ f(s) &= kak \end{aligned}$$

je definirana funkcija jedne varijable.

- **Skup $\{c, z, s\}$ nazivamo područjem definicije funkcije ili domenom funkcije.**
- **Skup izlaznih vrijednosti je $\{kav, caj, kak\}$ slika funkcije.**
- U slučaju da se dogodi da nakon ubacivanja zelene patrone iz aparata izađe kava, reći ćemo da nešto ne funkcionira.

Definicija funkcije

Jednakostima

$$
\begin{aligned}
f(c) &= kav \\
f(z) &= caj \\
f(s) &= kak
\end{aligned}
$$

je definirana funkcija jedne varijable.

- **Skup $\{c, z, s\}$ nazivamo područjem definicije funkcije ili domenom funkcije.**
- **Skup izlaznih vrijednosti je $\{kav, caj, kak\}$ slika funkcije.**
- U slučaju da se dogodi da nakon ubacivanja zelene patrone iz aparata izađe kava, reći ćemo da nešto ne funkcionira.
- Znamo da je $f(z) = caj$ i ne može biti $f(z) = kav$!!!

Je li funkcija dobro definirana?

- **Da bi funkcija bila dobro definirana svakoj ulaznoj varijabli se pridružuje samo jedna izlazna vrijednost!**

Je li funkcija dobro definirana?

- **Da bi funkcija bila dobro definirana svakoj ulaznoj varijabli se pridružuje samo jedna izlazna vrijednost!**
- Patroni z je pridružen samo čaj. U suprotnom imamo kvar, a matematičkim jezikom kažemo da funkcija nije dobro definirana.

Je li funkcija dobro definirana?

- **Da bi funkcija bila dobro definirana svakoj ulaznoj varijabli se pridružuje samo jedna izlazna vrijednost!**
- Patroni z je pridružen samo čaj. U suprotnom imamo kvar, a matematičkim jezikom kažemo da funkcija nije dobro definirana.
- Slično je i u slučaju da stavimo neku patronu, a iz aparata ne poteče nikakva tekućina.

Je li funkcija dobro definirana?

- **Da bi funkcija bila dobro definirana svakoj ulaznoj varijabli se pridružuje samo jedna izlazna vrijednost!**
- Patroni z je pridružen samo čaj. U suprotnom imamo kvar, a matematičkim jezikom kažemo da funkcija nije dobro definirana.
- Slično je i u slučaju da stavimo neku patronu, a iz aparata ne poteče nikakva tekućina.
- U pitanju je kvar, odnosno, nije dobro definirana funkcija jer svakoj ulaznoj varijabli trebamo pridružiti neku izlaznu vrijednost.

Aparat za pravljenje kruha

- Promotrimo kako bismo opisali rad stroja za pravljenje kruha.

Aparat za pravljenje kruha

- Promotrimo kako bismo opisali rad stroja za pravljenje kruha.
- Ubacivanjem jedne od 3 vrsta brašna, vode i kvasca u stroj, nakon pritiska tipke f, trebamo dobiti jednu od 3 vrste kruha.

Aparat za pravljenje kruha

- Promotrimo kako bismo opisali rad stroja za pravljenje kruha.
- Ubacivanjem jedne od 3 vrsta brašna, vode i kvasca u stroj, nakon pritiska tipke f, trebamo dobiti jednu od 3 vrste kruha.
- Na raspolaganju su nam 3 vrste brašna, pšenično, kukuruzno i raženo.

Definicija funkcije

Funkcioniranje stroja za pravljenje kruha je opisano jednakostima

$$f(psbrasno, voda, kvasac) = psenicnikruh$$
$$f(kukbrasno, voda, kvasac) = kukuruznikruh$$
$$f(razbrasno, voda, kvasac) = razenikruh$$

- Ako stroj ovako radi, smatramo da dobro funkcionira tj. da je funkcija f dobro definirana.

Definicija funkcije

Funkcioniranje stroja za pravljenje kruha je opisano jednakostima

$$
\begin{aligned}
f(psbrasno, voda, kvasac) &= psenicnikruh \\
f(kukbrasno, voda, kvasac) &= kukuruznikruh \\
f(razbrasno, voda, kvasac) &= razenikruh
\end{aligned}
$$

- Ako stroj ovako radi, smatramo da dobro funkcionira tj. da je funkcija f dobro definirana.
- U slučaju da se dogodi da stroj nakon ubacivanja kukuruznog brašna izbaci pšenični kruh, reći ćemo da nešto ne funkcionira.

Je li funkcija dobro definirana?

- Spomenuli smo da funkcija nije dobro definirana, ali možemo jednostavno reći da nije definirana funkcija.

Je li funkcija dobro definirana?

- Spomenuli smo da funkcija nije dobro definirana, ali možemo jednostavno reći da nije definirana funkcija.
- Stroj ne predstavlja funkciju ako radi što ga je volja, ponekad izbaci kruh od nekog drugog brašna, a ponekad ništa.

Je li funkcija dobro definirana?

- Spomenuli smo da funkcija nije dobro definirana, ali možemo jednostavno reći da nije definirana funkcija.
- Stroj ne predstavlja funkciju ako radi što ga je volja, ponekad izbaci kruh od nekog drugog brašna, a ponekad ništa.
- Jasno je da s takvim strojevima ne želimo imati posla.

Je li funkcija dobro definirana?

- Spomenuli smo da funkcija nije dobro definirana, ali možemo jednostavno reći da nije definirana funkcija.
- Stroj ne predstavlja funkciju ako radi što ga je volja, ponekad izbaci kruh od nekog drugog brašna, a ponekad ništa.
- Jasno je da s takvim strojevima ne želimo imati posla.
- Želimo strojeve koji su dobro definirane funkcije, ili kraće, strojeve koji jesu funkcije.

Trgovina živežnih namirnica

- Trgovina živežnih namirnica Brodo iz Slavonskog Broda uvela je dostavu u kuću.

Trgovina živežnih namirnica

- Trgovina živežnih namirnica Brodo iz Slavonskog Broda uvela je dostavu u kuću.
- Zaposlenik trgovine donio je četveročlanoj obitelji Horvat kutiju u kojoj su bile sljedeće namirnice:

Trgovina živežnih namirnica

- Trgovina živežnih namirnica Brodo iz Slavonskog Broda uvela je dostavu u kuću.
- Zaposlenik trgovine donio je četveročlanoj obitelji Horvat kutiju u kojoj su bile sljedeće namirnice:
- sir, jogurt, kobasice, naranče, jabuke, maline, sok, pivo, čips, čokolada, keksi i kikiriki.

Trgovina živežnih namirnica

- Trgovina živežnih namirnica Brodo iz Slavonskog Broda uvela je dostavu u kuću.
- Zaposlenik trgovine donio je četveročlanoj obitelji Horvat kutiju u kojoj su bile sljedeće namirnice:
- sir, jogurt, kobasice, naranče, jabuke, maline, sok, pivo, čips, čokolada, keksi i kikiriki.
- Mama, tata, kći i sin došli su po stvari. Nakon kraćeg dogovora, stvari su raspoređene na sljedeći način:

Definicija funkcije

Raspored stvari:

$$
\begin{aligned}
f(sir) &= mama \\
f(jogurt) &= kci \\
f(kobasice) &= tata \\
f(narance) &= tata \\
f(jabuke) &= sin \\
f(maline) &= sin \\
f(sok) &= kci \\
f(pivo) &= mama \\
f(cips) &= tata \\
f(cokolada) &= tata \\
f(keksi) &= kci \\
f(kikiriki) &= sin.
\end{aligned}
$$

Domena i slika funkcije

Ovim jednadžbama je definirana funkcija iz skupa

$$\{sir, jogurt, kobasice, narance, jabuke, maline, sok,$$
$$piva, cips, cokolada, keksi, kikiriki\},$$

koji je domena funkcije, u skup

$$\{mama, tata, kci, sin\}$$

koji je slika funkcije.

Možemo imati više stvari x koji idu istim ljudima y

- Mama je dobila 2 namirnice, tata 4, a kći i sin po 3.

Možemo imati više stvari x koji idu istim ljudima y

- Mama je dobila 2 namirnice, tata 4, a kći i sin po 3.
- Ova funkcija je po tome drugačija od funkcija u prethodnim primjerima.

Možemo imati više stvari x koji idu istim ljudima y

- Mama je dobila 2 namirnice, tata 4, a kći i sin po 3.
- Ova funkcija je po tome drugačija od funkcija u prethodnim primjerima.
- Tamo su različite ulazne varijable išle različitim izlaznim vrijednostima.

Možemo imati više stvari x koji idu istim ljudima y

- Mama je dobila 2 namirnice, tata 4, a kći i sin po 3.
- Ova funkcija je po tome drugačija od funkcija u prethodnim primjerima.
- Tamo su različite ulazne varijable išle različitim izlaznim vrijednostima.
- Nismo prekršili pravilo da se svakoj ulaznoj varijabli pridružuje samo jedna izlazna vrijednost!

Možemo imati više stvari x koji idu istim ljudima y

- Mama je dobila 2 namirnice, tata 4, a kći i sin po 3.
- Ova funkcija je po tome drugačija od funkcija u prethodnim primjerima.
- Tamo su različite ulazne varijable išle različitim izlaznim vrijednostima.
- Nismo prekršili pravilo da se svakoj ulaznoj varijabli pridružuje samo jedna izlazna vrijednost!
- Mi smo u ovom primjeru stvarima pridružili ljude pomoću funkcije f.

Možemo li definirati funkciju koja ljudima y pridružuje stvari x?

- Možemo li definirati neku funkciju g koja bi išla obrnuto, da ljudima pridružimo stvari?

Vrijedi za mamu

$$\begin{aligned} f(sir) &= mama \\ f(pivo) &= mama. \end{aligned}$$

Kako bismo definirali $g(mama)$?

Možemo li definirati funkciju koja ljudima y pridružuje stvari x?

Ne može biti

$$\begin{aligned} g(mama) &= sir \\ g(mama) &= pivo, \end{aligned}$$

jer to nije funkcija.

- Moramo odlučiti hoćemo li mami dati sir ili pivo, jer ne može oboje.

Možemo li definirati funkciju koja ljudima y pridružuje stvari x?

Ne može biti

$$\begin{aligned} g(mama) &= sir \\ g(mama) &= pivo, \end{aligned}$$

jer to nije funkcija.

- Moramo odlučiti hoćemo li mami dati sir ili pivo, jer ne može oboje.
- To je problem ako želimo definirati obrnutu, obično kažemo inverznu, funkciju od f.

Možemo li definirati funkciju koja ljudima y pridružuje stvari x?

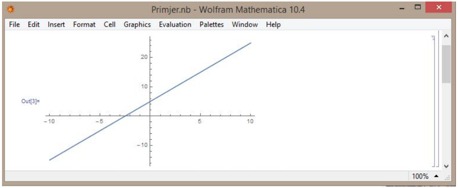
Ne može biti

$$\begin{aligned} g(mama) &= sir \\ g(mama) &= pivo, \end{aligned}$$

jer to nije funkcija.

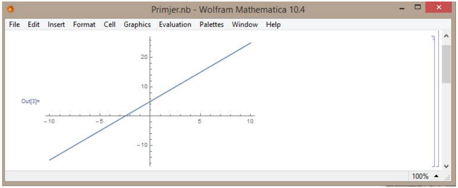
- Moramo odlučiti hoćemo li mami dati sir ili pivo, jer ne može oboje.
- To je problem ako želimo definirati obrnutu, obično kažemo inverznu, funkciju od f.
- Da bismo mogli definirati inverznu funkciju, uvest ćemo matematičke pojmove koji nam pomaže u prepoznavanju funkcija kod kojih se različitim ulaznim varijablama pridružuju različite izlazne vrijednosti.

Graf, domena i kodomena linearne funkcije



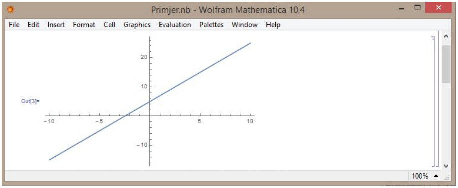
- Linearna funkcija je zadana formulom $f(x) = ax + b$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$ neki fiksni realni brojevi, a x je varijabla.

Graf, domena i kodomena linearne funkcije



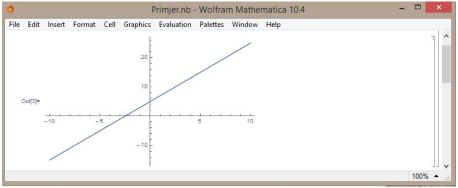
- Linearna funkcija je zadana formulom $f(x) = ax + b$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$ neki fiksni realni brojevi, a x je varijabla.
- Za svaki $x \in \mathbb{R}$ postoji $f(x)$, pa je **slika funkcije** $\mathcal{R}(f)$ cijeli skup realnih brojeva.

Graf, domena i kodomena linearne funkcije



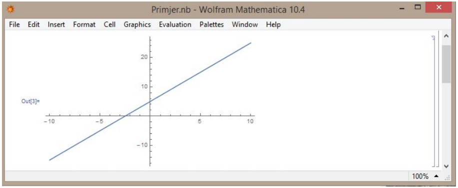
- Linearna funkcija je zadana formulom $f(x) = ax + b$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$ neki fiksni realni brojevi, a x je varijabla.
- Za svaki $x \in \mathbb{R}$ postoji $f(x)$, pa je **slika funkcije** $\mathcal{R}(f)$ cijeli skup realnih brojeva.
- **Područje definicije** $\mathcal{D}(f)$, odnosno **domena** linearne funkcije je skup realnih brojeva $\mathbb{R}$.

Graf, domena i kodomena linearne funkcije



- Linearna funkcija je zadana formulom $f(x) = ax + b$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$ neki fiksni realni brojevi, a x je varijabla.
- Za svaki $x \in \mathbb{R}$ postoji $f(x)$, pa je **slika funkcije** $\mathcal{R}(f)$ cijeli skup realnih brojeva.
- **Područje definicije** $\mathcal{D}(f)$, odnosno **domena** linearne funkcije je skup realnih brojeva $\mathbb{R}$.
- Područje definicije čine svi brojevi za koje je neka funkcija definirana.

Graf, domena i kodomena linearne funkcije

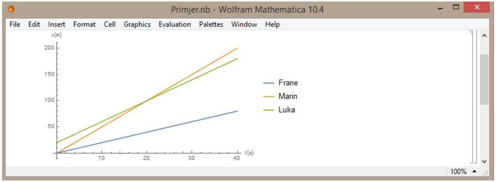


- Linearna funkcija je zadana formulom $f(x) = ax + b$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$ neki fiksni realni brojevi, a x je varijabla.
- Za svaki $x \in \mathbb{R}$ postoji $f(x)$, pa je **slika funkcije** $\mathcal{R}(f)$ cijeli skup realnih brojeva.
- **Područje definicije** $\mathcal{D}(f)$, odnosno **domena** linearne funkcije je skup realnih brojeva $\mathbb{R}$.
- Područje definicije čine svi brojevi za koje je neka funkcija definirana.
- **Graf funkcije** čine sve točke $(x, f(x))$ za koje je $x \in \mathcal{D}$. Graf linearne funkcije je pravac.

Jednoliko gibanje biciklom-primjer

Marin i Frane su krenuli biciklima na izlet. Luka je krenuo nešto ranije.

Grafički prikaz njihovog puta u ovisnosti o vremenu prikazan je na slici:

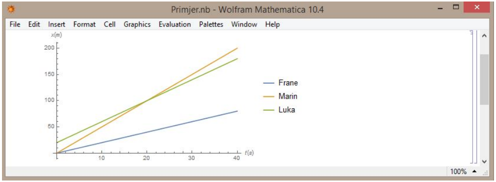


- Iz grafa odredite način gibanja svakog od dječaka.

Jednoliko gibanje biciklom-primjer

Marin i Frane su krenuli biciklima na izlet. Luka je krenuo nešto ranije.

Grafički prikaz njihovog puta u ovisnosti o vremenu prikazan je na slici:

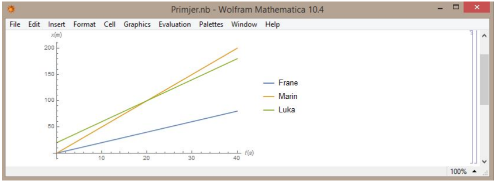


- Iz grafa odredite način gibanja svakog od dječaka.
- Koji vozi bicikl najvećom brzinom, a koji najmanjom?

Jednoliko gibanje biciklom-primjer

Marin i Frane su krenuli biciklima na izlet. Luka je krenuo nešto ranije.

Grafički prikaz njihovog puta u ovisnosti o vremenu prikazan je na slici:

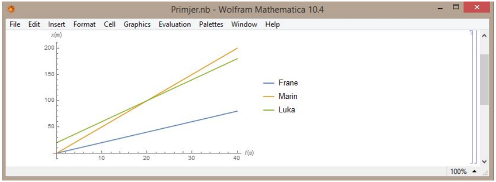


- Iz grafa odredite način gibanja svakog od dječaka.
- Koji vozi bicikl najvećom brzinom, a koji najmanjom?
- Koliki je put prešao Luka u času kada su Marin i Frane tek krenuli?

Jednoliko gibanje biciklom-primjer

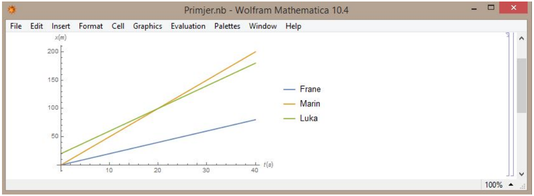
Marin i Frane su krenuli biciklima na izlet. Luka je krenuo nešto ranije.

Grafički prikaz njihovog puta u ovisnosti o vremenu prikazan je na slici:



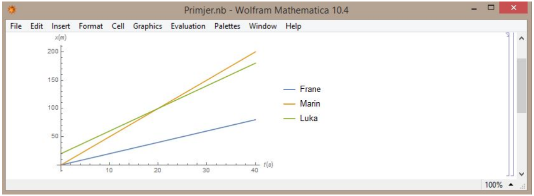
- Iz grafa odredite način gibanja svakog od dječaka.
- Koji vozi bicikl najvećom brzinom, a koji najmanjom?
- Koliki je put prešao Luka u času kada su Marin i Frane tek krenuli?
- U kojem trenutku će put koji su prošli Luka i Marin biti jednak?

Jednoliko gibanje biciklom-rješenje



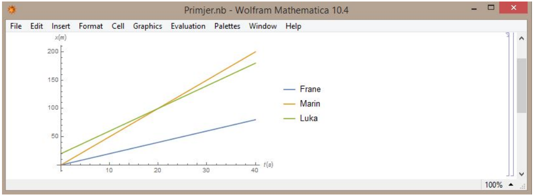
- Iz grafa je vidljivo da je put linearno ovisan o vremenu pa se može napisati kao: $x(t) = vt$, gibanje je jednoliko, nagib pravca jednak je brzini gibanja v.

Jednoliko gibanje biciklom-rješenje



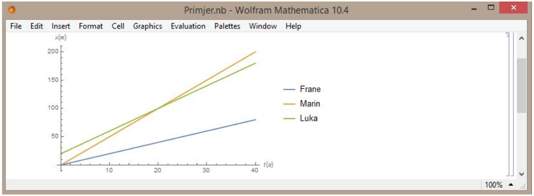
- Iz grafa je vidljivo da je put linearno ovisan o vremenu pa se može napisati kao: $x(t) = vt$, gibanje je jednoliko, nagib pravca jednak je brzini gibanja v.
- Iz nagiba pravca se vidi da Marin vozi najvećom brzinom, a Frane najmanjom.

Jednoliko gibanje biciklom-rješenje



- Iz grafa je vidljivo da je put linearno ovisan o vremenu pa se može napisati kao: $x(t) = vt$, gibanje je jednoliko, nagib pravca jednak je brzini gibanja v.
- Iz nagiba pravca se vidi da Marin vozi najvećom brzinom, a Frane najmanjom.
- Luka je prešao 20 m u času kad su Marin i Frane tek krenuli.

Jednoliko gibanje biciklom-rješenje



- Iz grafa je vidljivo da je put linearno ovisan o vremenu pa se može napisati kao: $x(t) = vt$, gibanje je jednoliko, nagib pravca jednak je brzini gibanja v.
- Iz nagiba pravca se vidi da Marin vozi najvećom brzinom, a Frane najmanjom.
- Luka je prešao 20 m u času kad su Marin i Frane tek krenuli.
- Nakon 20 s vožnje Luka i Marin su prošli jednaki put od 100 m.

Zaključak

- Pojam funkcije jedan je od najvažnijih pojmova u matematici.

Zaključak

- Pojam funkcije jedan je od najvažnijih pojmova u matematici.
- Za funkciju koristimo i riječ preslikavanje.

Zaključak

- Pojam funkcije jedan je od najvažnijih pojmova u matematici.
- Za funkciju koristimo i riječ preslikavanje.
- Stavljamo naglasak na matematičko modeliranje pomoću funkcija.

Zaključak

- Pojam funkcije jedan je od najvažnijih pojmova u matematici.
- Za funkciju koristimo i riječ preslikavanje.
- Stavljamo naglasak na matematičko modeliranje pomoću funkcija.

Zaključak

- Pojam funkcije jedan je od najvažnijih pojmova u matematici.
- Za funkciju koristimo i riječ preslikavanje.
- Stavljamo naglasak na matematičko modeliranje pomoću funkcija.
- Jako je važno razumjeti pojam funkcije na apstraktnom nivou i naučiti primjenjivati funkcije u konkretnim situacijama.

Zaključak

- Pojam funkcije jedan je od najvažnijih pojmova u matematici.
- Za funkciju koristimo i riječ preslikavanje.
- Stavljamo naglasak na matematičko modeliranje pomoću funkcija.
- Jako je važno razumjeti pojam funkcije na apstraktnom nivou i naučiti primjenjivati funkcije u konkretnim situacijama.
- Treba naučiti kako odabrati prikladan tip funkcije koji se može primijeniti na određeni problem koji dolazi iz stvarnog života, fizike, ekonomije, kemije, biologije i inženjerstva.