DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

Opatija, 1. travnja 2011.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1. Riješite jednadžbu:

$$|x - |x - |x + 1||| = x.$$

Rješenje.

Kako je x jednak lijevoj strani jednakosti koja je nenegativna, mora biti $x \geq 0$.

Stoga je i $x + 1 \geq 0$. Slijedi da je

$$x = |x - |x - (x + 1)|| = |x - |-1|| = |x - 1|\,.$$

Sada imamo dva slučaja:

(a) $x - 1 \geq 0$, tj. $x \geq 1$. Tada je $x = x - 1$ odakle slijedi da je $0 = -1$ što znači da u ovom slučaju nema rješenja.

(b) $x - 1 < 0$, tj. $0 \leq x < 1$ (zbog početnog uvjeta da je x nenegativan). Tada je $x = -x + 1$ odakle dobivamo rješenje $x = \frac{1}{2}$ koje zadovoljava uvjet.

Zadatak B-1.2. Koristeći znamenke 1, 3, 4, 5, a, gdje je a također neka od znamenki (ne nužno različita), napišite najveći mogući peteroznamenkasti broj koji je djeljiv s 12. Svaku od znamenki 1, 3, 4, 5, a treba upotrijebiti.

Rješenje.

Neka je traženi broj n. Ako je n djeljiv s 12, djeljiv je s 3 i 4.

Da bi n bio djeljiv s 3, zbroj njegovih znamenaka mora biti djeljiv s 3.

Tada je $1 + 3 + 4 + 5 + a = 13 + a$ djeljivo s 3.

Kako je $a \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, zaključujemo da a može biti jedan od brojeva 2, 5 ili 8.

Dakle, znamenke su 1, 3, 4, 5, 2 ili 1, 3, 4, 5, 5 ili 1, 3, 4, 5, 8.

Broj n je paran pa na kraju može imati 2, 4 ili 8. Da bi broj bio djeljiv s 4, njegov dvoznamenkasti završetak treba biti djeljiv s 4.

U prvom slučaju završetci su 12, 24, 32, 52 pa je najveći takav broj 54312.

U drugom slučaju niti jedan nije djeljiv s 4.

U trećem slučaju završetci su 48, 84, a najveći takav je broj 53184.

Prema tome, najveći traženi broj je 54312.

Zadatak B-1.3. Dokažite da je u tablici

$$\begin{array}{l} 1 \\ 2,3,4 \\ 3,4,5,6,7 \\ 4,5,6,7,8,9,10 \\ \ldots \end{array}$$

zbroj svih članova u svakom retku jednak kvadratu srednjeg broja.

Rješenje.

U svakom retku imamo redom $1,3,5,7,\ldots,2k-1$ brojeva.

To znači da je u k–tom retku prvi broj k, a posljednji broj je $k+2k-2=3k-2$.

Srednji broj u retku je aritmetička sredina prvog i posljednjeg broja u retku, a to je

$$\frac{k+3k-2}{2}=\frac{4k-2}{2}=2k-1.$$

Dakle, u k–tom retku su redom brojevi

$$k,k+1,k+2,k+3,\ldots,2k-1,\ldots,3k-1,3k-2.$$

Označimo njihov zbroj sa S i zapišimo ga jednom u rastućem, a jednom u padajućem poretku:

$$\begin{array}{lrrrrrrr} S= & k+ & (k+1)+ & (k+2)+ & \ldots+ & (3k-4)+ & (3k-3)+ & (3k-2) \\ S= & (3k-2)+ & (3k-3)+ & (3k-4)+ & \ldots+ & (k+2)+ & (k+1)+ & k. \end{array}$$

Zbrojimo li ove dvije jednakosti, dobivamo:

$$2S=(4k-2)+(4k-2)+(4k-2)+\ldots+(4k-2)+(4k-2)+(4k-2),$$

odnosno $2k-1$ puta isti pribrojnik.

Tada je $2S=(2k-1)(4k-2)$ ili

$$S=\frac{1}{2}(2k-1)\cdot 2\cdot(2k-1)=(2k-1)^2$$

što je i trebalo dokazati.

Napomena. Ako učenik primjeni formulu za zbroj n uzastopnih brojeva, priznati predviđene bodove za izračunavanje traženog zbroja.

Zadatak B-1.4. Kralj Hijeron iz Siracuse dao je 16 funti zlata i 4 funte srebra, da mu iz tog materijala izliju krunu. Kad je kruna bila gotova, težila je 20 funti, ali je kralj ipak dao velikom matematičaru Arhimedu da ispita, nije li možda određena količina zlata zamijenjena srebrom iste težine.

Arhimed je vagnuo krunu u vodi i ustanovio da je izgubila na težini $1\frac{1}{4}$ funte. Znajući pri tom da 20 funti zlata izgubi u vodi 1 funtu svoje težine, a 21 funta srebra izgubi 2 funte svoje težine, Arhimed je utvrdio računski da je doista jedna količina zlata zamijenjena srebrom. Kolika je ta količina zlata?

Rješenje.

Neka je x količina zlata (u funtama) u izlivenoj kruni, a y količina srebra u izlivenoj kruni. Tada je $x+y=20$.

x funti zlata izgubi u vodi $\frac{x}{20} \cdot 1$ funti, a y funti srebra izgubi $\frac{y}{21} \cdot 2$ funte.

To mora ukupno dati $1\frac{1}{4}$ funti izgubljene težine krune.

Pišemo

$$\frac{x}{20}+\frac{2y}{21}=1\frac{1}{4}.$$

Treba riješiti sustav jednadžbi

$$\begin{cases} x+y & =20 \\ \frac{x}{20}+\frac{2y}{21} & =\frac{5}{4}, \end{cases}$$

odnosno

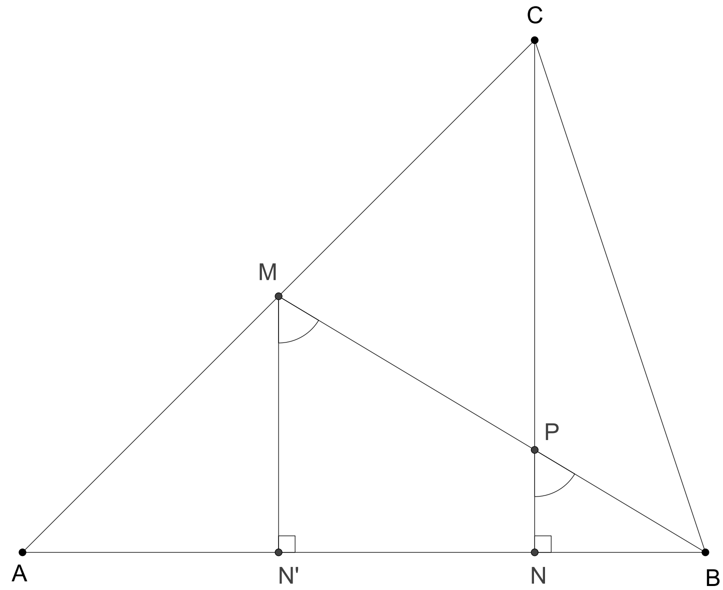
$$\begin{cases} x+y & =20 \\ 21x+40y & =525. \end{cases}$$

Rješenje je $x=\frac{275}{19}=14\frac{9}{19}$, $y=\frac{105}{19}=5\frac{10}{19}$.

Prema tome, $\frac{29}{19}$ funti zlata zamijenjeno je srebrom.

Zadatak B-1.5. U šiljastokutnom trokutu ABC duljina težišnice $\overline{BM}$ jednaka je duljini visine $\overline{CN}$. Neka je P sjecište pravaca CN i BM. Dokažite da je $|BP| = 2 \cdot |PN|$.

Prvo rješenje.



Spustimo visinu MN' iz točke M na stranicu AB. Vrijedi da je $|MN'| = \frac{1}{2}|CN|$.

Trokuti BNP i $BN'M$ su slični. Slijedi da je

$$\frac{|BP|}{|PN|} = \frac{|BM|}{|MN'|} = \frac{|CN|}{|MN'|} = 2$$

što je i trebalo dokazati.

Drugo rješenje.

Produljimo li dužinu $\overline{BM}$ preko točke M za duljinu težišnice do točke D, dobit ćemo paralelogram $ABCD$. Tada je kut $\angle CDP = \angle NBP$, a kut $\angle BPN = \angle DPC$ pa su trokuti BPN i DPC slični.

Njihove stranice su proporcionalne pa vrijedi

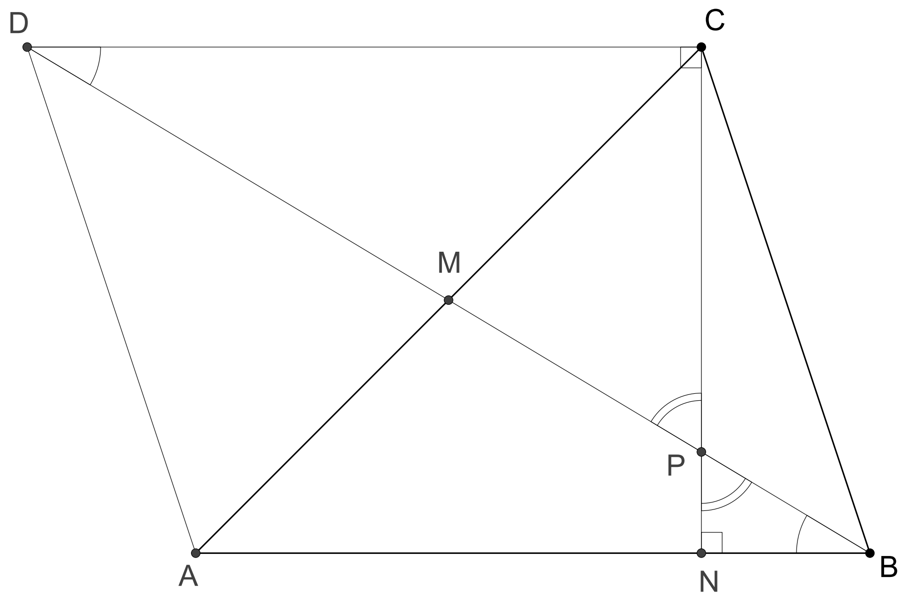
$$\frac{|BP|}{|DP|} = \frac{|PN|}{|PC|}.$$

Nadalje,

$$\frac{|BP|}{2\,|BM| - |BP|} = \frac{|PN|}{|CN| - |PN|}.$$

Kako je $|BM| = |CN|$, vrijedi

$$\frac{|BP|}{2\,|CN| - |BP|} = \frac{|PN|}{|CN| - |PN|},$$



a odatle

$$|BP| \cdot |CN| - |BP| \cdot |PN| = 2|PN| \cdot |CN| - |BP| \cdot |PN|.$$

Odatle slijedi tvrdnja zadatka $|BP| = 2 \cdot |PN|$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

Opatija, 1. travnja 2011.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1. Nacrtajte u kompleksnoj ravnini skup točaka (x, y), pridruženih kompleksnim brojevima $z = x + yi$, za koje vrijedi

$$\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z < 0 \quad \text{i} \quad |z|^2 \leq \operatorname{Im}\left(z^2\right) + 1.$$

Izračunajte površinu tog skupa točaka.

Rješenje.

Iz prve nejednakosti slijedi $x \cdot y < 0$, što znači da tražene točke leže u drugom ili četvrtom kvadrantu.

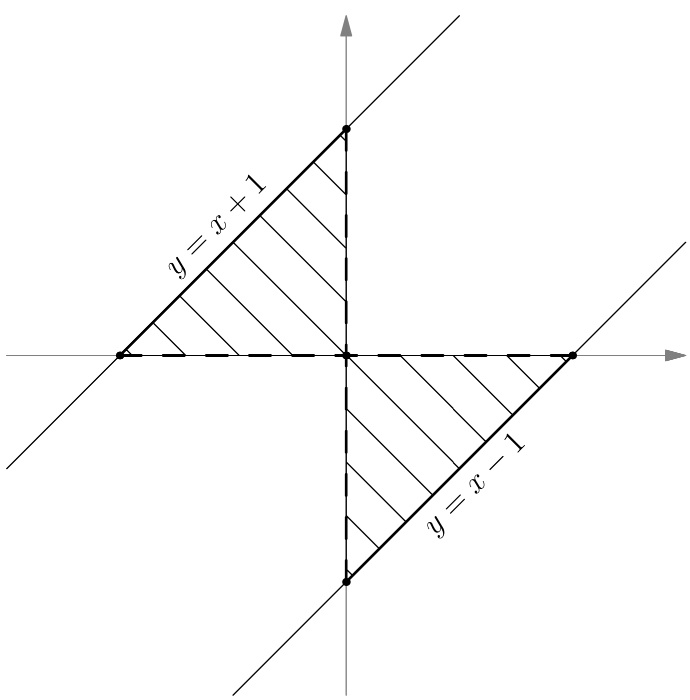
Iz druge nejednakosti slijedi

$$x^2 + y^2 \leq 2xy + 1,$$

odnosno $(x - y)^2 \leq 1$ ili $|x - y| \leq 1$.

Odatle je $-1 \leq x - y \leq 1$, odnosno $y \leq x + 1$ i $y \geq x - 1$.

Traženi skup točaka je dio ravnine između pravaca $y = x + 1$ i $y = x - 1$, a unutar drugog i četvrtog kvadranta kao što je prikazano na slici.



Sa slike se vidi da je

$$P = 2 \cdot \frac{1 \cdot 1}{2} = 1.$$

Zadatak B-2.2. Veslajući ujednačeno ribar je uzvodno prešao onoliko kilometara koliko iznosi rješenje jednadžbe $\sqrt{5x} - \dfrac{4}{\sqrt{3x+1}} = \sqrt{3x+1}$, a vratio se, bez zadržavanja, u pristanište za 1 sat i 20 minuta. Kojom je brzinom veslao ako je brzina rijeke 2 km/h?

Rješenje.

Riješimo prvo danu jednadžbu

$$\sqrt{5x} - \frac{4}{\sqrt{3x+1}} = \sqrt{3x+1}.$$

Pomnožimo je s nazivnikom.

$$\begin{aligned} \sqrt{5x(3x+1)} - 4 &= 3x+1 \\ \sqrt{5x(3x+1)} &= 3x+5. \end{aligned}$$

Kvadriramo li obje strane, slijedi

$$\begin{aligned} 15x^2 + 5x &= 9x^2 + 30x + 25 \\ 6x^2 - 25x - 25 &= 0. \end{aligned}$$

Jedino pozitivno rješenje ove jednadžbe koje zadovoljava i početnu jednadžbu je $x = 5$ km.

Ribar je put od 5 km prešao uzvodno i isto toliko nizvodno za ukupno 1 h i 20 min, što je $\dfrac{4}{3}$ h.

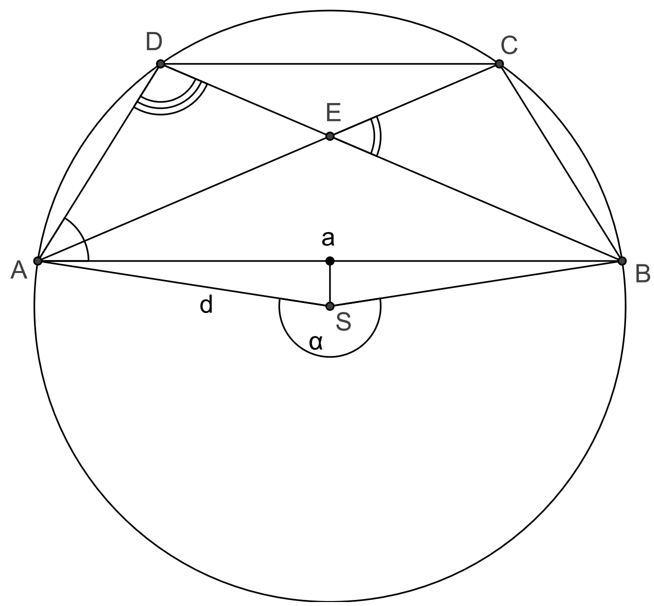
Ako je brzina kojom ribar vesla v, tada je

$$\begin{aligned} \frac{5}{v-2} + \frac{5}{v+2} &= \frac{4}{3} \;/ \cdot 3(v-2)(v+2) \\ 15(v+2) + 15(v-2) &= 4(v^2-4) \\ 2v^2 - 15v - 8 &= 0. \end{aligned}$$

Pozitivno rješenje ove jednadžbe je $v = 8$. Ribar je veslao brzinom od 8 km/h.

Zadatak B-2.3. Četiri brata žive na imanju u obliku jednakokračnog trapeza kojemu je duljina veće osnovice a, kut uz osnovicu $50°$ i kut među dijagonalama $76°$. Kuće su im pri vrhovima trapeza. Odlučili su napraviti bunar jednako udaljen od sve četiri kuće, točnije, od vrhova trapeza. Koliko bi bunar trebao biti udaljen od vrhova trapeza? Može li se bunar napraviti na njihovom imanju?

Rješenje.



Da bi bunar bio jednako udaljen od svake kuće, mora biti u središtu trapezu opisane kružnice.

Zadano je da je $\angle CEB = 76°$ ili $\angle AEB = 76°$. No, $\angle AEB$ ne može biti jednak $76°$ jer bi u protivnom kutovi $\angle EAB$ i $\angle EBA$ iznosili $52°$ (trokut ABE je jednakokračan). To je nemoguće jer su to kutovi unutar trapeza, unutar kutova $\angle DAB$ ili $\angle CBA$ pa moraju biti manji od $50°$. Dakle,

$$\angle CEB = 76° \quad \Rightarrow \quad \angle AEB = 180° - 76° = 104°$$

$$\angle ABE = \frac{180° - \angle AEB}{2} = 38°$$

$$\angle ADB = 180° - (\angle DAB + \angle ABE) = 92° \text{ (obodni kut nad tetivom } AB\text{)}$$

Tada je pripadni središnji kut $\angle ASB = 2\angle ADB = 184° > 180°$

Slijedi da je središte opisane kružnice S izvan trapeza.

To znači da se bunar ne može napraviti na njihovom imanju, a da bude jednako udaljen od svih kuća.

Vrijedi da je $\angle BAS = 2°$ pa je $\cos 2° = \frac{\frac{a}{2}}{d}$ odakle slijedi $d = \frac{a}{2\cos 2°}$. Bunar bi trebao biti udaljen od kuća za

$$d = \frac{a}{2\cos 2°}.$$

Zadatak B-2.4. Neka je $ABCD$ paralelogram i neka su P i Q redom polovišta stranica BC i CD. Dokažite da je površina trokuta APQ jednaka $\frac{3}{8}$ površine paralelograma.

Prvo rješenje.

Sa P označimo površinu paralelograma $ABCD$.

Kako je $2|CP| = |BC|$ i $2|CQ| = |CD|$ i $\angle PCQ = \angle BCD$, onda je

$$P_{\triangle PCQ} = \frac{1}{4} P_{\triangle BCD} = \frac{1}{8} P.$$

Kako je $2|BP| = |BC|$ i $\angle ABC = \angle ABP$, onda je

$$P_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} P_{\triangle ABC} = \frac{1}{4} P.$$

Kako je $2|DQ| = |CD|$ i $\angle CDA = \angle QDA$, onda je

$$P_{\triangle QDA} = \frac{1}{2} P_{\triangle ACD} = \frac{1}{4} P.$$

Sada je

$$P_{\triangle APQ} = P - P_{\triangle ABP} - P_{\triangle AQD} - P_{\triangle PCQ} = P - \frac{1}{4}P - \frac{1}{4}P - \frac{1}{8}P = \frac{3}{8}P.$$

Drugo rješenje. Analitička geometrija.

Smjestimo paralelogram u pravokutni koordinatni sustav tako da vrhovi paralelograma imaju sljedeće koordinate: $A = (0,0)$, $B = (a,0)$, $C = (a+x, v)$, $D = (x, v)$.

Tada polovišta imaju koordinate $P = \left(a + \frac{x}{2}, \frac{v}{2}\right)$, $Q = \left(\frac{a}{2} + x, v\right)$.

Tada površina trokuta APQ iznosi

$$P_{\triangle APQ} = \frac{1}{2} \left| 0 \cdot \left(\frac{v}{2} - v\right) + \left(a + \frac{x}{2}\right) \cdot v + \left(\frac{a}{2} + x\right) \cdot \left(-\frac{v}{2}\right) \right| = \frac{3}{8} av = \frac{3}{8} \cdot P.$$

Zadatak B-2.5. U kutiji se nalaze kuglice označene brojevima od 1 do 10. Petar izvlači po jednu kuglicu te na ploči zapisuje zbroj broja na kuglici i rednog broja izvlačenja. Dokažite da nakon izvlačenja svih kuglica, među brojevima zapisanim na ploči postoje barem dva broja kojima su zadnje znamenke jednake.

Rješenje.

Na ploči je zapisano 10 brojeva. Dobiveni su zbrajanjem dva broja od kojih je svaki iz skupa $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Njihov zbroj je jednak: $S = 2(1 + 2 + \ldots + 10) = 10 \cdot 11 = 110$.

Kada bi svaki od zapisanih brojeva završavao različitim znamenkama, te znamenke bi bile 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. U tom slučaju pri zbrajanju svih takvih brojeva dobili bismo $0 + 1 + 2 + \ldots + 9 = 45$,

tj. kao zadnju znamenku zbroja svih brojeva na ploči dobili bismo broj 5, a to je kontradikcija s činjenicom da je zbroj brojeva na ploči 110.

Zaključujemo da ne mogu svi zapisani brojevi imati različite znamenke, tj. kod barem dva od njih se zadnje znamenke podudaraju.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

Opatija, 1. travnja 2011.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1. Ako su a, b, c duljine stranica proizvoljnog trokuta te α kut kojeg zatvaraju stranice s duljinama b i c, dokažite da vrijedi:

$$a^2 = (b+c)^2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} + (b-c)^2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Rješenje.

Primjenimo na desnoj strani dane jednakosti formulu za polovični kut

$$\begin{aligned}
(b+c)^2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} + (b-c)^2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} &= (b+c)^2 \cdot \frac{1-\cos\alpha}{2} + (b-c)^2 \cdot \frac{1+\cos\alpha}{2} = \\
&= \frac{1}{2}\left[(b+c)^2 - (b+c)^2\cos\alpha + (b-c)^2 + (b-c)^2\cos\alpha\right] = \\
&= \frac{1}{2}\left[2b^2 + 2c^2 - \cos\alpha\left(b^2 + 2bc + c^2 - b^2 + 2bc - c^2\right)\right] = \\
&= \frac{1}{2}\left[2b^2 + 2c^2 - 4bc\cos\alpha\right] = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha.
\end{aligned}$$

Kako je u danom trokutu prema kosinusovom poučku $b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = a^2$, tvrdnja je dokazana.

Zadatak B-3.2. Riješite nejednadžbu:

$$\log_{\frac{x+4}{2}} \log_2 \frac{2x-1}{1+x} < 0.$$

Rješenje.

Odredimo uvjete za koje je izraz na lijevoj strani nejednadžbe definiran:

$$\frac{2x-1}{1+x} > 0 \tag{1}$$

$$\log_2 \frac{2x-1}{1+x} > 0, \text{ tj. } \frac{2x-1}{1+x} > 1 \tag{2}$$

$$\frac{x+4}{2} > 0, \ \frac{x+4}{2} \neq 1, \text{ tj. } x > -4, \ x \neq -2 \tag{3}$$

Iz (1) i (2) slijedi da je $\frac{2x-1}{1+x} > 1$. Slijedi $\frac{x-2}{1+x} > 0$, odnosno $x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle$, što zajedno s (3) daje konačan uvjet $x \in (\langle -4, -1\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle) \setminus \{-2\}$.

Nadalje, rješavanje nejednadžbe dijelimo na dva slučaja, kada je baza $0 < \frac{x+4}{2} < 1$ i kada je $\frac{x+4}{2} > 1$.

U prvom slučaju $0 < \frac{x+4}{2} < 1$, tj. za $-4 < x < -2$ vrijedi

$$\begin{aligned} \log_2 \frac{2x-1}{1+x} &> \left(\frac{x+4}{2}\right)^0 \\ \frac{2x-1}{1+x} &> 2 \\ \frac{-3}{1+x} &> 0. \end{aligned}$$

Tada je $x+1 < 0$, tj. $x < -1$ pa je rješenje ovog slučaja $x \in \langle -4, -2\rangle$.

U drugom slučaju za $\frac{x+4}{2} > 1$, odnosno za $x > -2$ vrijedi

$$\begin{aligned} \log_2 \frac{2x-1}{1+x} &< \left(\frac{x+4}{2}\right)^0 \\ \frac{2x-1}{1+x} &< 2 \\ \frac{-3}{1+x} &< 0. \end{aligned}$$

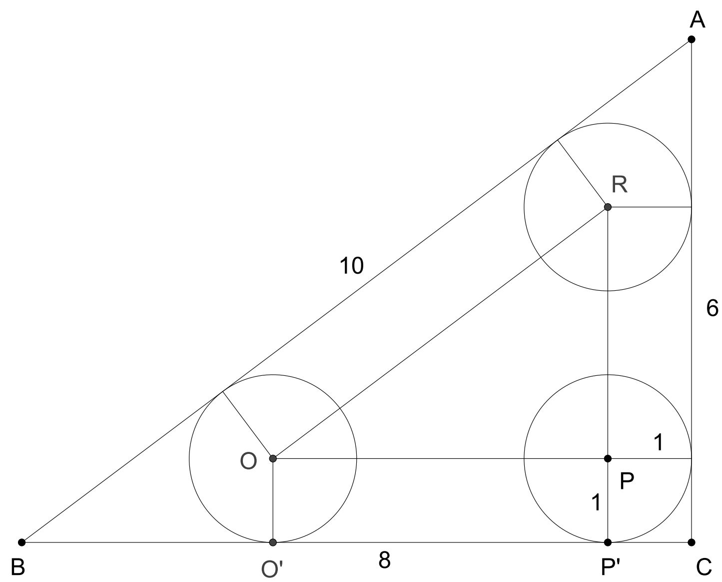
Rješenje ovog slučaja su brojevi $x > -1$.

Konačno je rješenje unija rješenja prethodna dva slučaja, a presjek s početnim uvjetima. To je $x \in \langle -4, -2\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle$.

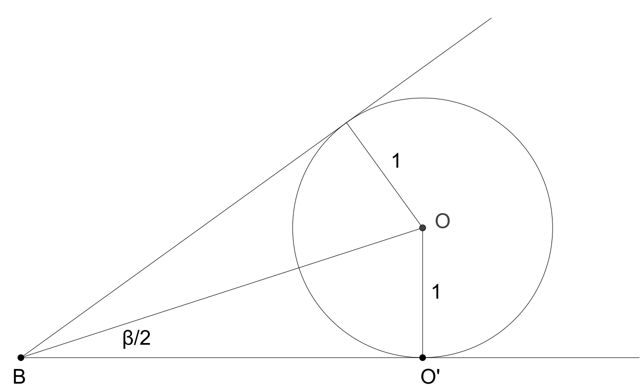
Zadatak B-3.3. Dan je pravokutni trokut s katetama duljina 6 i 8 metara. Kotač polumjera 1 metar nalazi se unutar trokuta i dirajući jednu njegovu stranicu počne se kotrljati po stranicama trokuta (unutar trokuta i uvijek u istom smjeru), tako da uvijek dira barem jednu stranicu trokuta. Koliki put opiše središte kotača dok se ne vrati u početni položaj?

Rješenje.

Neka je početni položaj središta kotača u točki P. Trokut OPR koji određuje trag točke P sličan je s trokutom BCA te se njihovi opsezi odnose kao odgovarajuće stranice.



Duljina jedne katete trokuta OPR jednaka je duljini dužine $\overline{O'P'}$, a $|O'P'| = |BC| - 1 - |BO'|$. Izračunajmo prvo $|BO'|$.



Točka O je na simetrali kuta β jer je za 1 udaljena od oba njegova kraka. Tada je kut $\angle OBO' = \dfrac{\beta}{2}$.

Iz trokuta OBO' slijedi $\operatorname{ctg} \dfrac{\beta}{2} = \dfrac{|BO'|}{1} = |BO'|$.

$$\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}}{\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}}}=\frac{\sqrt{1+\cos\beta}}{\sqrt{1-\cos\beta}}.$$

$$\cos\beta=\frac{8}{10}=\frac{4}{5},\quad \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\frac{\sqrt{1+\frac{4}{5}}}{\sqrt{1-\frac{4}{5}}}=\sqrt{9}=3.$$

Dakle, $|BO'|=3$ pa je $|O'P'|=8-1-3=4$.

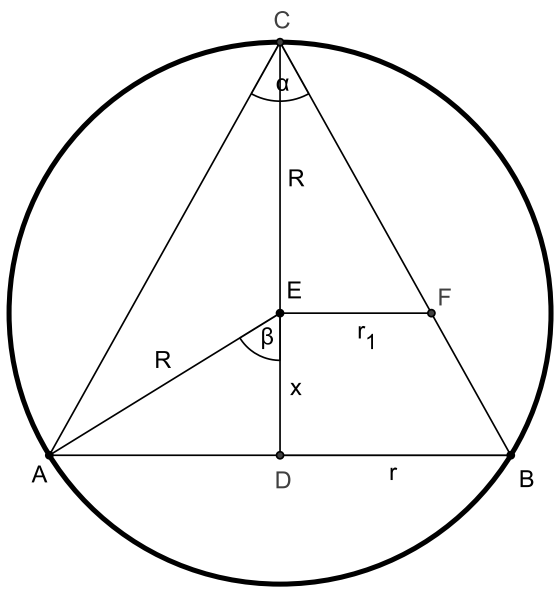
Koeficijent sličnosti promatranih trokuta je $\dfrac{|OP|}{|BC|}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$.

Zaključujemo da je duljina puta koji prijeđe središte kotača dok se ne vrati u početni položaj jednaka polovini opsega trokuta ABC.

$$d=\frac{10+6+8}{2}=12 \text{ m}.$$

Zadatak B-3.4. Uspravnom kružnom stošcu opisana je kugla. Ravnina koja sadrži središte te kugle, a paralelna je s bazom stošca dijeli stožac na dva dijela jednakih obujmova. Odredite kosinus kuta pri vrhu osnog presjeka stošca.

Rješenje.



$$\frac{r^2\pi(R+x)}{3} = 2 \cdot \frac{r_1^2\pi R}{3}$$
$$r^2\pi(R+x) = 2 \cdot r_1^2\pi R.$$

Iz sličnosti trokuta slijedi: $r_1 : r = R : (R+x)$, tj.

$$r_1 = r \cdot \frac{R}{R+x}.$$

Uvrstimo li to u gornje jednakosti imamo: $r^2(R+x) = 2r^2 \cdot \dfrac{R^2}{(R+x)^2} \cdot R.$

$$(R+x)^3 = 2 \cdot R^3 \quad \Rightarrow \quad R+x = R\sqrt[3]{2} \quad \Rightarrow \quad x = R(\sqrt[3]{2}-1).$$

Prema poučku o obodnom i središnjem kutu je $\alpha = \beta$.

Tada je $\cos\alpha = \cos\beta = \dfrac{x}{R} = \dfrac{R(\sqrt[3]{2}-1)}{R} = \sqrt[3]{2}-1.$

Zadatak B-3.5. Na svakoj strani kocke napisan je prirodni broj. Svaki vrh kocke označen je brojem koji je jednak umnošku brojeva napisanih na stranama kocke koje se sastaju u tom vrhu. Zbroj brojeva kojima su na taj način označeni vrhovi kocke je 3333. Odredite zbroj brojeva kojima su označene strane kocke.

Rješenje.

Neka su a, b, c, d, e i f brojevi napisani na stranama kocke, tako da su a i f na suprotnim stranama, b i d na suprotnim stranama te c i e na suprotnim stranama.

Tada je:

$$\begin{aligned}
3333 &= abc + abe + acd + ade + bcf + bef + cdf + def = \\
&= a(bc + be + dc + de) + f(bc + be + dc + de) = \\
&= (a + f)(b(c + e) + d(c + e)) = \\
&= (a + f)(b + d)(c + e).
\end{aligned}$$

Kako je $3333 = 3 \cdot 11 \cdot 101$ rastav broja 3333 na proste faktore i svaki od brojeva $a + f$, $b + d$, $c + e$ je veći od 1, slijedi $\{a + f, b + d, c + e\} = \{3, 11, 101\}$. Tada je

$$a + b + c + d + e + f = 3 + 11 + 101 = 115.$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

Opatija, 1. travnja 2011.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1. Odredite polinom trećeg stupnja s realnim koeficijentima tako da zadovoljava uvjete

$$P(1+i) = 3i - 4 \quad \text{i} \quad P(-i) = 4i - 1.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
P(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\
P(1+i) &= a(1+i)^3 + b(1+i)^2 + c(1+i) + d \\
3i - 4 &= a(1 + 3i + 3i^2 + i^3) + b(1 + 2i + i^2) + c + ci + d \\
3i - 4 &= -2a + 2ai + 2bi + c + ci + d
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} 3 &= 2a + 2b + c \\ -4 &= -2a + c + d \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
P(-i) &= a(-i)^3 + b(-i)^2 + c(-i) + d \\
4i - 1 &= ai - b - ci + d
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} 4 &= a - c \quad \Rightarrow \quad c = a - 4 \\ -1 &= -b + d \quad \Rightarrow \quad b = 1 + d \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&3 = 5a - 2 \quad \Rightarrow \quad a = 1 \\
&d = a = 1 \\
&c = -3 \\
&b = 2
\end{aligned}$$

Dakle, $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$.

Zadatak B-4.2. Dokažite da za svaki prirodni broj n veći od 1 vrijedi:

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x + \ldots + \operatorname{tg}(nx - x) \cdot \operatorname{tg} nx = \frac{\operatorname{tg} nx}{\operatorname{tg} x} - n,$$

za sve x za koje su svi pribrojnici definirani i $\operatorname{tg} x \neq 0$.

Rješenje.

Dokaz provodimo matematičkom indukcijom. Provjerimo tvrdnju za $n = 2$.

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

S druge strane je

$$\frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x} - 2 = \frac{\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}}{\operatorname{tg} x} - 2 = \frac{2}{1 - \operatorname{tg}^2 x} - 2 = \frac{2 - 2 + 2\operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2\operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

pa tvrdnja vrijedi za $n = 2$.

Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ tvrdnja vrijedi, odnosno da je

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x + \ldots + \operatorname{tg}(nx - x) \cdot \operatorname{tg} nx = \frac{\operatorname{tg} nx}{\operatorname{tg} x} - n.$$

Dokažimo da tada vrijedi i za $n + 1$. Treba dokazati:

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x + \ldots + \operatorname{tg}(nx - x) \cdot \operatorname{tg} nx + \operatorname{tg} nx \cdot \operatorname{tg}(nx + x) = \frac{\operatorname{tg}((n+1)x)}{\operatorname{tg} x} - (n+1).$$

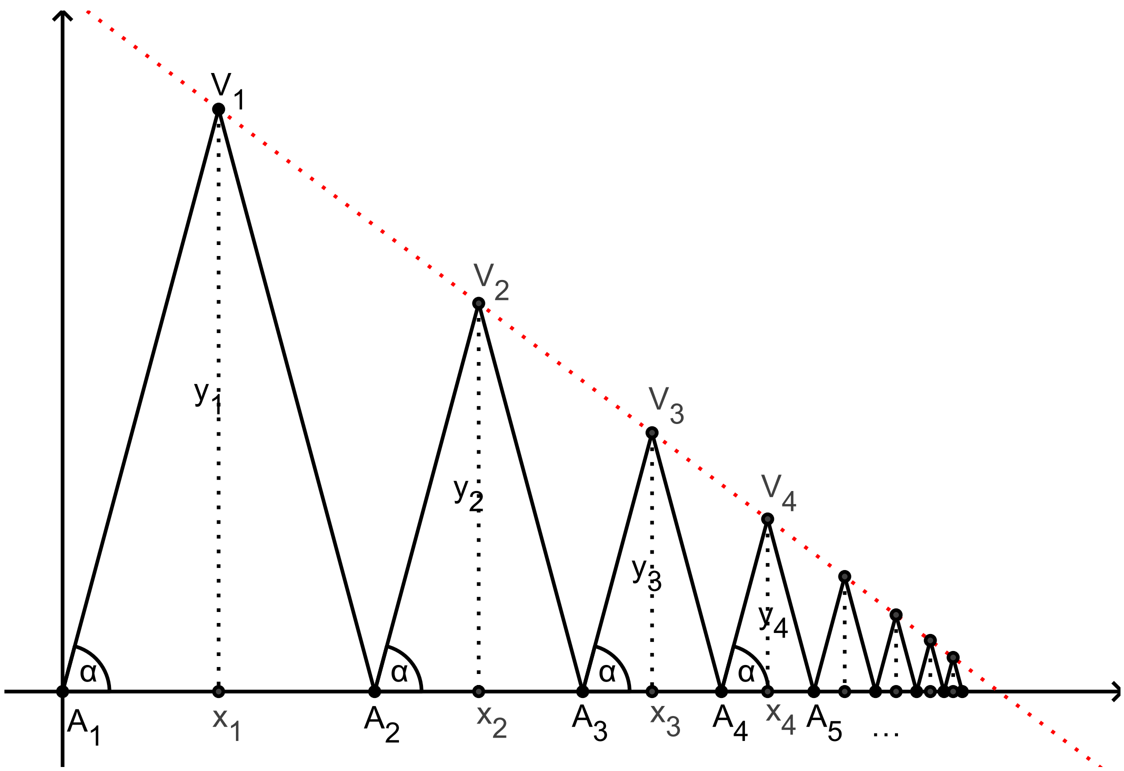
Krenimo od lijeve strane jednakosti koju želimo dokazati i primjenimo pretpostavku indukcije

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x + \ldots + \operatorname{tg}(nx - x) \cdot \operatorname{tg} nx + \operatorname{tg} nx \cdot \operatorname{tg}(nx + x) = \\
&= \frac{\operatorname{tg} nx}{\operatorname{tg} x} - n + \operatorname{tg} nx \cdot \operatorname{tg}(nx + x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x}\left(\operatorname{tg} nx + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} nx \cdot \operatorname{tg}(nx + x)\right) - n = \\
&= \frac{1}{\operatorname{tg} x}\left(\operatorname{tg} nx + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} nx \cdot \frac{\operatorname{tg} nx + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} nx \cdot \operatorname{tg} x}\right) - n = \\
&= \frac{1}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{\operatorname{tg} nx - \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}^2 nx + \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg} nx}{1 - \operatorname{tg} nx \cdot \operatorname{tg} x}\right) - n = \\
&= \frac{1}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{\operatorname{tg} nx + \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg} nx}{1 - \operatorname{tg} nx \cdot \operatorname{tg} x}\right) - n = \\
&= \frac{1}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{\operatorname{tg} nx + \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg} nx}{1 - \operatorname{tg} nx \cdot \operatorname{tg} x}\right) - n = \\
&= \frac{1}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{\operatorname{tg} nx + \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x(1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} nx)}{1 - \operatorname{tg} nx \cdot \operatorname{tg} x}\right) - n = \\
&= \frac{1}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{\operatorname{tg} nx + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} nx \cdot \operatorname{tg} x} - \operatorname{tg} x\right) - n = \frac{\operatorname{tg}(nx + x)}{\operatorname{tg} x} - 1 - n = \frac{\operatorname{tg}((n+1)x)}{\operatorname{tg} x} - (n+1)
\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. Prema tome, dana tvrdnja vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Zadatak B-4.3. Nakon što je riješio sve zadatke iz testa, učenik je iz dosade počeo crtati. Nacrtao je jednakokračan trokut kojemu je osnovica $\overline{A_1A_2}$, duljine a, na pozitivnom dijelu osi x, s vrhom A_1 u ishodištu i kutom α pri vrhu A_1. Do njega je na isti način nacrtao drugi jednakokračan trokut s osnovicom $\overline{A_2A_3}$ duljine $\frac{2}{3}a$. Zatim je do njega, na isti način, nacrtao sljedeći trokut s osnovicom $\overline{A_3A_4}$ duljine $\frac{2}{3}|\overline{A_2A_3}|$ i tako dalje (svi nacrtani trokuti su slični). Pokažite da vrhovi nacrtanih trokuta $V_1, V_2, \ldots, V_n, \ldots$, koji nisu na osi x, leže na pravcu $\operatorname{tg}\alpha \cdot x + 5y - 3a \operatorname{tg}\alpha = 0$.

Rješenje.



Osnovice nacrtanih trokuta čine geometrijski niz (a_n) s kvocijentom $2/3$ i zbrojem S_n. Tada je

$$a_1 = a, \quad a_2 = \frac{2}{3}a, \quad a_3 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 a, \ldots, a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} a.$$

$$S_n = a\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)} = 3a\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right).$$

Za apscise traženih vrhova V_n vrijedi

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{2}a,\\
x_2 &= a_1 + \frac{1}{2}a_2 = a + \frac{1}{3}a = \frac{4}{3}a,\\
x_3 &= a_1 + a_2 + \frac{1}{2}a_3 = S_2 + \frac{1}{2}a_3,\\
x_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + \frac{1}{2}a_4 = S_3 + \frac{1}{2}a_4,\\
&\vdots\\
x_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + \frac{1}{2}a_n = S_{n-1} + \frac{1}{2}a_n = 3a\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} a\\
x_n &= 3a - \frac{5a}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Ordinate bilo kojeg od vrhova V_n računamo iz

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_n}{\frac{a_n}{2}}$$

pa je

$$y_n = \frac{a}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \operatorname{tg}\alpha. \qquad (2)$$

Treba još samo pronaći vezu između x i y koordinate vrha V_n (ili uvrstiti u danu jednadžbu pravca).

Iz (2) ćemo izraziti

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{2y_n}{a \cdot \operatorname{tg}\alpha}$$

i uvrstiti u (1). Tada je

$$x_n = 3a - \frac{5a}{2} \cdot \frac{2y_n}{a \cdot \operatorname{tg}\alpha},$$

odnosno

$$x_n = 3a - \frac{5y_n}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Pišemo $\operatorname{tg}\alpha \cdot x_n + 5y_n - 3a \operatorname{tg}\alpha = 0$.

Odatle proizlazi da vrhovi nacrtanih trokuta leže na pravcu $\operatorname{tg}\alpha \cdot x + 5y - 3a \operatorname{tg}\alpha = 0$.

Zadatak B-4.4. Neka je $f_0(x) = \dfrac{1}{1-x}$ i $f_n(x) = f_0(f_{n-1}(x))$, za $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$. Odredite $f_{2011}(2011)$.

Rješenje.

Iz zadanog slijedi

$$f_1(x) = f_0(f_0(x)) = f_0\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{\frac{1-x-1}{1-x}} = \frac{1-x}{-x}.$$

Dakle, $f_1(x) = \dfrac{x-1}{x}$.

Dalje imamo

$$f_2(x) = f_0(f_1(x)) = f_0\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = \frac{1}{\frac{x-x+1}{x}} = x.$$

Dakle, $f_2(x) = x$. Također je

$$f_3(x) = f_0(f_2(x)) = f_0(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Dakle:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= f_3(x) = f_6(x) = \ldots = f_{3k}(x) \\ f_1(x) &= f_4(x) = f_7(x) = \ldots = f_{3k+1}(x) \\ f_2(x) &= f_5(x) = f_8(x) = \ldots = f_{3k+2}(x) \end{aligned}$$

Kako je $2011 = 3 \cdot 670 + 1$ slijedi da je

$$f_{2011}(x) = f_1(x) = \frac{x-1}{x}$$

pa je

$$f_{2011}(2011) = \frac{2011-1}{2011} = \frac{2010}{2011}.$$

Zadatak B-4.5. Stranice neke knjige označene su brojevima 1, 2, 3, $\ldots$, n. Iz knjige je istrgnut jedan list. Zbroj brojeva na preostalim stranicama je 2013. Koliko stranica ima knjiga i koje stranice nedostaju?

Rješenje. Sa n označimo broj stranica knjige, a sa k i $k+1$ brojeve stranica na listu koji je istrgnut. Vrijedi

$$2013 = 1 + 2 + \ldots + k - 1 + k + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} - k - (k+1).$$

Procjenimo gornju i donju granicu za zbroj na desnoj strani jednakosti.

Očito je $1 \leq k \leq n-1$ pa imamo sustav nejednadžbi:

$$\begin{aligned} 2013 &\leq \frac{n(n+1)}{2} - 1 - 2 \\ 2013 &\geq \frac{n(n+1)}{2} - (n-1) - n. \end{aligned}$$

Iz njega dobivamo sustav od dvije kvadratne nejednadžbe

$$\begin{aligned} n^2 + n - 4032 &\geq 0 \\ n^2 - 3n - 4024 &\leq 0. \end{aligned}$$

Ako sa $n_1 < n_2$ označimo rješenja jednadžbe $n^2 + n - 4032 = 0$ i sa $n_3 < n_4$ rješenja jednadžbe $n^2 - 3n - 4024 = 0$, slijedi da mora biti $n \in [n_2, n_4]$ (jer se lako vidi da su n_1 i n_3 negativni). Vrijedi da je

$$\begin{aligned} n_2 &= \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 4032}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{16129}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{127^2}}{2} = 63, \\ n_4 &= \frac{3 + \sqrt{9 + 4 \cdot 4024}}{2} = \frac{3 + \sqrt{16105}}{2} < \frac{3 + \sqrt{127^2}}{2} = 65. \end{aligned}$$

Dakle, n je ili 63 ili 64.

Ako je $n = 63$, onda rješavamo jednadžbu

$$\begin{aligned} &\frac{63 \cdot 64}{2} - k - (k+1) = 2013 \\ &2016 - 2k - 1 = 2013 \\ &2k = 2 \\ &k = 1 \end{aligned}$$

i kao rješenje dobivamo $n = 63$, $k = 1$.

Ako je $n = 64$, onda rješavamo

$$\begin{aligned} &\frac{64 \cdot 65}{2} - k - (k+1) = 2013 \\ &2080 - 2k - 1 = 2013 \\ &2k = 66 \\ &k = 33 \end{aligned}$$

i kao rješenje dobivamo $n = 64$, $k = 33$.

Dakle, ili je istrgnuta prva i druga stranica iz knjige koja ima 63 stranice, ili je istrgnuta 33. i 34. stranica iz knjige koja ima 64 stranice.