Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

Opatija, 1. travnja 2011.

1. (10) Riješite jednadžbu:

$$|x - |x - |x + 1||| = x.$$

2. (10) Koristeći znamenke 1, 3, 4, 5, a, gdje je a također neka od znamenki (ne nužno različita), napišite najveći mogući peteroznamenkasti broj koji je djeljiv s 12. Svaku od znamenki 1, 3, 4, 5, a treba upotrijebiti.

3. (10) Dokažite da je u tablici

$$\begin{array}{l} 1 \\ 2, 3, 4 \\ 3, 4, 5, 6, 7 \\ 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \\ \dots \end{array}$$

zbroj svih članova u svakom retku jednak kvadratu srednjeg broja.

4. (10) Kralj Hijeron iz Siracuse dao je 16 funti zlata i 4 funte srebra, da mu iz tog materijala izliju krunu. Kad je kruna bila gotova, težila je 20 funti, ali je kralj ipak dao velikom matematičaru Arhimedu da ispita, nije li možda određena količina zlata zamijenjena srebrom iste težine.

Arhimed je vagnuo krunu u vodi i ustanovio da je izgubila na težini $1\frac{1}{4}$ funte. Znajući pri tom da 20 funti zlata izgubi u vodi 1 funtu svoje težine, a 21 funta srebra izgubi 2 funte svoje težine, Arhimed je utvrdio računski da je doista jedna količina zlata zamijenjena srebrom. Kolika je ta količina zlata?

5. (10) U šiljastokutnom trokutu ABC duljina težišnice $\overline{BM}$ jednaka je duljini visine $\overline{CN}$. Neka je P sjecište pravaca CN i BM. Dokažite da je $|BP| = 2 \cdot |PN|$.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

Opatija, 1. travnja 2011.

1. (10) Nacrtajte u kompleksnoj ravnini skup točaka (x, y), pridruženih kompleksnim brojevima $z = x + yi$, za koje vrijedi

$$\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z < 0 \quad \text{i} \quad |z|^2 \leq \operatorname{Im}\left(z^2\right) + 1.$$

Izračunajte površinu tog skupa točaka.

2. (10) Veslajući ujednačeno ribar je uzvodno prešao onoliko kilometara koliko iznosi rješenje jednadžbe $\sqrt{5x} - \dfrac{4}{\sqrt{3x+1}} = \sqrt{3x+1}$, a vratio se, bez zadržavanja, u pristanište za 1 sat i 20 minuta. Kojom je brzinom veslao ako je brzina rijeke 2 km/h?

3. (10) Četiri brata žive na imanju u obliku jednakokračnog trapeza kojemu je duljina veće osnovice a, kut uz osnovicu 50° i kut među dijagonalama 76°. Kuće su im pri vrhovima trapeza. Odlučili su napraviti bunar jednako udaljen od sve četiri kuće, točnije, od vrhova trapeza. Koliko bi bunar trebao biti udaljen od vrhova trapeza? Može li se bunar napraviti na njihovom imanju?

4. (10) Neka je $ABCD$ paralelogram i neka su P i Q redom polovišta stranica BC i CD. Dokažite da je površina trokuta APQ jednaka $\frac{3}{8}$ površine paralelograma.

5. (10) U kutiji se nalaze kuglice označene brojevima od 1 do 10. Petar izvlači po jednu kuglicu te na ploči zapisuje zbroj broja na kuglici i rednog broja izvlačenja. Dokažite da nakon izvlačenja svih kuglica, među brojevima zapisanim na ploči postoje barem dva broja kojima su zadnje znamenke jednake.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

Opatija, 1. travnja 2011.

1. (10) Ako su a, b, c duljine stranica proizvoljnog trokuta te α kut kojeg zatvaraju stranice s duljinama b i c, dokažite da vrijedi:

$$a^2 = (b+c)^2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} + (b-c)^2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

2. (10) Riješite nejednadžbu:

$$\log_{\frac{x+4}{2}} \log_2 \frac{2x-1}{1+x} < 0.$$

3. (10) Dan je pravokutni trokut s katetama duljina 6 i 8 metara. Kotač polumjera 1 metar nalazi se unutar trokuta i dirajući jednu njegovu stranicu počne se kotrljati po stranicama trokuta (unutar trokuta i uvijek u istom smjeru), tako da uvijek dira barem jednu stranicu trokuta. Koliki put opiše središte kotača dok se ne vrati u početni položaj?

4. (10) Uspravnom kružnom stošcu opisana je kugla. Ravnina koja sadrži središte te kugle, a paralelna je s bazom stošca dijeli stožac na dva dijela jednakih obujmova. Odredite kosinus kuta pri vrhu osnog presjeka stošca.

5. (10) Na svakoj strani kocke napisan je prirodni broj. Svaki vrh kocke označen je brojem koji je jednak umnošku brojeva napisanih na stranama kocke koje se sastaju u tom vrhu. Zbroj brojeva kojima su na taj način označeni vrhovi kocke je 3333. Odredite zbroj brojeva kojima su označene strane kocke.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

Opatija, 1. travnja 2011.

1. (10) Odredite polinom trećeg stupnja s realnim koeficijentima tako da zadovoljava uvjete

$$P(1+i) = 3i - 4 \quad \text{i} \quad P(-i) = 4i - 1.$$

2. (10) Dokažite da za svaki prirodni broj n veći od 1 vrijedi:

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x + \ldots + \operatorname{tg}(nx - x) \cdot \operatorname{tg} nx = \frac{\operatorname{tg} nx}{\operatorname{tg} x} - n,$$

za sve x za koje su svi pribrojnici definirani i $\operatorname{tg} x \neq 0$.

3. (10) Nakon što je riješio sve zadatke iz testa, učenik je iz dosade počeo crtati. Nacrtao je jednakokračan trokut kojemu je osnovica $\overline{A_1A_2}$, duljine a, na pozitivnom dijelu osi x, s vrhom A_1 u ishodištu i kutom α pri vrhu A_1. Do njega je na isti način nacrtao drugi jednakokračan trokut s osnovicom $\overline{A_2A_3}$ duljine $\frac{2}{3}a$. Zatim je do njega, na isti način, nacrtao sljedeći trokut s osnovicom $\overline{A_3A_4}$ duljine $\frac{2}{3}|\overline{A_2A_3}|$ i tako dalje (svi nacrtani trokuti su slični). Pokažite da vrhovi nacrtanih trokuta $V_1, V_2, \ldots, V_n, \ldots$, koji nisu na osi x, leže na pravcu $\operatorname{tg}\alpha \cdot x + 5y - 3a \operatorname{tg}\alpha = 0$.

4. (10) Neka je $f_0(x) = \dfrac{1}{1-x}$ i $f_n(x) = f_0(f_{n-1}(x))$, za $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$. Odredite $f_{2011}(2011)$.

5. (10) Stranice neke knjige označene su brojevima 1, 2, 3, …, n. Iz knjige je istrgnut jedan list. Zbroj brojeva na preostalim stranicama je 2013. Koliko stranica ima knjiga i koje stranice nedostaju?