Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

15. veljače 2013.

1. Brisanjem prve dvije znamenke nekog prirodnog broja n dobije se 73 puta manji broj. Odredi dva najmanja takva broja n.

2. Odredi sve uređene trojke (x, y, z) realnih brojeva za koje vrijedi

$$\begin{cases} x + y = \sqrt{28} \\ xy - 2z^2 = 7. \end{cases}$$

3. Paralelno stranicama jednakostraničnog trokuta povučeni su pravci koji dijele taj trokut na tri sukladna romba, tri sukladna trapeza i jedan jednakostranični trokut u sredini. Ako je površina tog dobivenog trokuta dvostruko veća od površine pojedinog romba, koliki je udio površine jednog trapeza u površini polaznog trokuta?

4. Dokaži da jednadžba

$$x^2 = 2y^2 - 75y + 5$$

nema cjelobrojnih rješenja.

5. Pravokutnik dimenzija 5×6 podijeljen je na osam pravokutnika čije su stranice paralelne sa stranicama polaznog pravokutnika, a duljine stranica su im prirodni brojevi. Dokaži da su barem dva od tih osam pravokutnika međusobno sukladna.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

15. veljače 2013.

1. Odredi sve realne brojeve a takve da postoji kompleksni broj z za koji vrijedi

$$|z| = 1 \qquad \text{i} \qquad |az - 1| = a\,|z + 1|\,.$$

2. Dokaži da jednadžba

$$3x^4 + 2013 = 25y^2 - 24x^2$$

nema cjelobrojnih rješenja.

3. U skupu realnih brojeva riješi jednadžbu

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = 24.$$

4. Dužina $\overline{AB}$ je dulja stranica pravokutnika $ABCD$. Okomica iz vrha B na dijagonalu $\overline{AC}$ siječe pravac AD u točki E, a kružnica sa središtem A koja prolazi kroz točku B siječe $\overline{CD}$ u točki F. Dokaži da su pravci AF i EF međusobno okomiti.

5. Ivica je od n^3 jediničnih kockica sastavio veliku kocku brida duljine n i zatim je neke od šest strana velike kocke obojao, a neke nije. Kada je rastavio veliku kocku, otkrio je da točno 1000 jediničnih kockica nema niti jednu obojanu stranu. Pokaži da je to zaista moguće i odredi broj strana velike kocke koje je Ivica obojao.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

15. veljače 2013.

1. Dane su tri kolinearne točke A, B i M, takve da je M između A i B, te kružnica k čiji je promjer $\overline{AB}$. Neka je N bilo koja točka na kružnici k, različita od A i B. Dokaži da je vrijednost izraza

$$\frac{\operatorname{tg}(\sphericalangle ANM)}{\operatorname{tg}(\sphericalangle MAN)}$$

konstantna, tj. da ne ovisi o odabiru točke N.

2. Neka je n složen prirodni broj i neka su $d_1, d_2, \ldots, d_m$ svi njegovi djelitelji. Dokaži da vrijedi jednakost

$$\frac{2}{\log n^m} \sum_{k=1}^{m} \log d_k = 1.$$

3. Dana je kocka $ABCDA'B'C'D'$ brida duljine 1. Na njenim bridovima $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{C'D'}$ i $\overline{B'C'}$ odabrane su redom točke P, Q, R i S tako da je $PQRS$ kvadrat sa središtem u središtu dane kocke. Kolika je duljina stranice tog kvadrata?

4. Dokaži da je broj $\cos \frac{\pi}{2 \cdot 3^n}$ iracionalan za svaki prirodni broj n.

(Realni broj je iracionalan ako ga nije moguće prikazati kao omjer dvaju cijelih brojeva.)

5. Polja jedinične kvadratne mreže velikih dimenzija obojana su naizmjenično crno i bijelo, poput šahovske ploče. Iz te mreže izrezan je poligon čije stranice leže na linijama kvadratne mreže.

Neka se taj poligon sastoji od B bijelih i C crnih polja, a njegov rub od b bijelih i c crnih jediničnih dužina. Dokaži da vrijedi $c - b = 4(C - B)$.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

15. veljače 2013.

1. Odredi sve prirodne brojeve n za koje vrijedi

$$\lfloor\sqrt[4]{1}\rfloor + \lfloor\sqrt[4]{2}\rfloor + \ldots + \lfloor\sqrt[4]{n}\rfloor = \frac{3}{2}n + 1.$$

($\lfloor x\rfloor$ označava najveći cijeli broj koji nije veći od x.)

2. Točno tri unutrašnja kuta konveksnog mnogokuta su tupa. Koliko najviše stranica može imati taj mnogokut?

3. Dokaži da je broj čiji se dekadski zapis sastoji od 2187 znamenki 1 djeljiv s 2187.

4. Četverokut s vrhovima 0, z, $\frac{1}{z}$ i $z + \frac{1}{z}$ u kompleksnoj ravnini ima površinu $\frac{35}{37}$. Odredi najmanju moguću vrijednost izraza $\left|z + \frac{1}{z}\right|^2$.

5. U nekoj zemlji nalaze se tri grada A, B i C. Između svaka dva grada postoji nekoliko cesta (najmanje jedna) i sve ceste su dvosmjerne. Osim direktnih cestovnih veza između dvaju gradova postoje i indirektne. Indirektna cestovna veza između gradova X i Y sastoji se od ceste koja povezuje grad X s trećim gradom Z i ceste koja povezuje gradove Z i Y.

Poznato je da postoje ukupno 43 cestovne veze između gradova A i B, te ukupno 29 cestovnih veza između gradova B i C. Koliko ukupno može biti cestovnih veza između gradova A i C?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.