ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
25. siječnja 2018.

4. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. 9 000 – 26 · (21 121 – 6 687 : 9 · 28) + 696 =
= 9 000 – 26 · (21 121 – 743 · 28) + 696 1 BOD
= 9 000 – 26 · (21 121 – 20 804) + 696 1 BOD
= 9 000 – 26 · 317 + 696 1 BOD
= 9 000 – 8 242 + 696 1 BOD
= 758 + 696 1 BOD
= 1454. 1 BOD
……………………………………………………………………..…. UKUPNO 6 BODOVA

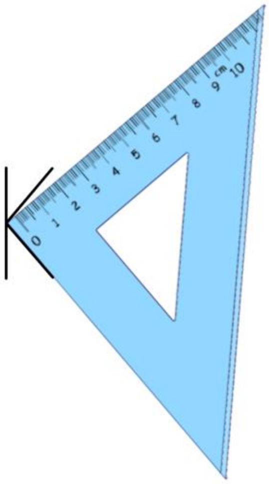
2. Riješimo zadatak metodom unatrag.
Konačan poredak na klupi, slijeva udesno, bio je Renata, Ivana, Tanja, Nikol ➔ RITN.
Trenutak prije, mijenjale su mjesta Ivana i Renata, pa je poredak prije tog premještanja, slijeva udesno, bio Ivana, Renata, Nikol, Tanja ➔ IRTN. 2 BODA
Prije toga, zamjenu su napravile Nikol i Tanja, pa je poredak prije tog premještanja bio Ivana, Renata, Nikol, Tanja ➔ IRNT. 2 BODA
Prvu zamjenu su napravile Renata i Tanja, pa je poredak na početku bio Ivana, Tanja, Nikol, Renata ➔ ITNR. 2 BODA
……………………………………………………………………..…. UKUPNO 6 BODOVA

Napomena:
Za točan poredak na početku, bez prikaza promjena prilikom premještanja, dobivaju se 3 BODA.

3.

Slovom M određena su 3 šiljasta kuta. 1 BOD
Jednim slovom A određena su 3 šiljasta i 2 tupa kuta, dakle dva slova A određuju 6 šiljastih i 4 tupa kuta. 2 BODA
Slovom T određena su 2 prava kuta. 1 BOD
Slovom K određena su 2 šiljasta i 1 tupi kut. 1 BOD
Slova u riječi „MATKA“ ukupno određuju 11 šiljastih, 2 prava i 5 tupih kutova. 1 BOD
……………………………………………………………………..…. UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Provjera vrsta kutova koje određuje slovo K može se napraviti na sljedeći način:



4. Prvi način:

U pune sate otkucavat će 7 + 8 + 9 +10 + 11 = **45** puta. 2 BODA

U puni sat i 15 minuta će otkucati ukupno **5** puta (u 7:15, 8:15. 9:15, 10:15 i 11:15), 1 BOD

u puni sat i 30 minuta ukupno 6 · 2 = **12** puta (u 6:30, 7:30, 8:30, 9:30, 10:30 i 11:30), 1 BOD

a u puni sat i 45 minuta ukupno 5 · 3 = **15** puta (u 6:45, 7:45. 8:45, 9:45 i 10:45). 1 BOD

Ukupno će biti 45 + 5 + 12 + 15 = **77** otkucaja. 1 BOD

…………………………………………………………………………..…. UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Od 6:20 do 6:59 otkucat će 2 + 3 = **5** puta,

od 7:00 do 7:59 ukupno 7 + (1 + 2 + 3) = **13** puta,

od 8:00 do 8:59 ukupno 8 + (1 + 2 + 3) = **14** puta,

od 9:00 do 9:59 ukupno 9 + (1 + 2 + 3) = **15** puta,

od 10:00 do 10:59 ukupno 10 + (1 + 2 + 3) = **16** puta,

i još 11 + (1 + 2) = **14** puta od 11:00 do 11:40. 5 BODOVA

Ukupno će biti 5 + 13 + 14 + 15 + 16 + 14 = **77** otkucaja. 1 BOD

(Za svaki pogrešan račun oduzeti 1 BOD.)

…………………………………………………………………………..…. UKUPNO 6 BODOVA

5. Prvi način:

Ukupan broj djece u dobi od 10 do 14 godina je 8 · 30 000 = 240 000. 1 BOD

Označimo s  broj dječaka. 1 BOD

Tada broj djevojčica možemo prikazati s

 $\boxed{6500}$, 1 BOD

a ukupan broj djece te dobi, tj. njih 240 000 s

  $\boxed{6500}$. 1 BOD

Zaključujemo da je

  jednako 240 000 – 6 500 = 233 500. 1 BOD

Stoga je , odnosno broj dječaka, jednak 233 500 : 2 = 116 750. 1 BOD

…………………………………………………………………………..…. UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Ukupan broj djece u dobi od 10 do 14 godina je 8 · 30 000 = 240 000. 1 BOD

Neka je x broj dječaka. Tada je x + 6 500 broj djevojčica. 2 BODA

Kako djevojčica i dječaka u dobi od 10 do 14 godina ima 240 000, vrijedi:

$x + x + 6\,500 = 240\,000$

Dalje je $2x + 6\,500 = 240\,000$ 1 BOD

$2x = 240\,000 - 6\,500$

$2x = 233\,500$ 1 BOD

Odnosno $x = 233\,500 : 2 = 116\,750$

Dječaka u dobi od 10 do 14 godina ima 116 750. 1 BOD

…………………………………………………………………….…. UKUPNO 6 BODOVA

6.

9 0

8 1

7 2

6 3

5 4

Znamenke su postavljene kružno i mogu se okretati u dva smjera stoga za svako mjesto imamo dvije mogućnosti:

Ako je prva znamenka šifre okrenuta za 5, tada je u oba slučaja okretanja polazna znamenka bila 7. 2 BODA

Ako je druga znamenka okrenuta za 7, onda je jedna mogućnost polazne znamenke 4, a druga je 0. 2 BODA

Ako je treća znamenka okrenuta za 2, onda su mogućnosti za polazne znamenke 8 ili 4. 2 BODA

Ako je četvrta znamenka okrenuta za 3, onda su mogućnosti za polazne znamenke 1 ili 5. 2 BODA

Dakle,

1. znamenka:	2. znamenka:	3. znamenka:	4. znamenka:
7	4 ili 0	8 ili 4	1 ili 5

Moguće šifre koje otključavaju lokot su:

7481, 7485, 7441, 7445, 1 BOD

7081, 7085, 7041, 7045. 1 BOD

…………………………………………………………………….…. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 1: Bilo koje četiri moguće šifre boduju se s 1 BODOM.
Napomena 2: Točno rješenje bez ikakvih objašnjenja bodovati s 4 BODA.

7. Trećina meda je 240 : 3 = 80 kg ili 80 000 grama. 2 BODA

Staklenki od 1 kg će biti 80, a zarada je 80 · 40 = 3 200 kn. 2 BODA

Staklenki od 800 g će biti 80 000 : 800 = 100, a zarada je 100 · 35 = 3 500 kn. 2 BODA

Staklenki od 500 g će biti 80 000 : 500 = 160, a zarada je 160 · 30 = 4 800 kn. 2 BODA

Ukupna zarada iznosi 3 200 + 3 500 + 4 800 = 11 500 kn. 2 BODA

…………………………………………………………………….…. UKUPNO 10 BODOVA

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
25. siječnja 2018.

5. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. $2018\cdot 146-\left[2018-18\cdot\left(4+50\cdot 2\right)\right]\cdot 18=2018\cdot 146-\left[2018-18\cdot\left(4+100\right)\right]\cdot 18$ 1 BOD

$=2018\cdot 146-\left[2018-18\cdot 104\right]\cdot 18$ 1 BOD

$=2018\cdot 146-\left[2018-1872\right]\cdot 18$ 1 BOD

$=2018\cdot 146-146\cdot 18$ 1 BOD

$=146\cdot\left(2018-18\right)$ 1 BOD

$=146\cdot 2000$

$=292\,000$ 1 BOD

…………………………………………..……………………...……… UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Ukoliko je učenik točno riješio zadatak bez primjene distributivnosti, ostvaruje svih 6 BODOVA.

2. Prvi način:

Mama slonica je teška 6 tona tj. 6 000 kg. 1 BOD

Ona je 50 puta teža od svog mladunca što znači da je masa mladunca slona jednaka 6 000 kg : 50 = 120 kg. 1 BOD

Mama slonica je 30 puta lakša od mame kita, što znači da je masa mame kita jednaka 6 000 kg · 30 = 180 000 kg (ili 180 t). 1 BOD

Mladunac kita je 20 puta teži od mladunca slona pa je masa mladunca kita jednaka 20 · 120 kg = 2 400 kg. 1 BOD

Budući da je 180 000 kg : 2 400 kg = 75, zaključujemo da je mama kit 75 puta teža od svoga mladunca. 2 BODA

(Ili:

Mama kit je od mladunca slona teža 30 · 50 = 1500 puta. 1 BOD

Kako je mladunac kit 20 puta teži od mladunca slona, zaključujemo da je mama kit 1500 : 20 = 75 puta teža od mladunca kita. 1 BOD)

…………………………………………..……………………...……… UKUPNO 6 BODOVA

3. Prvi način:

Neka je x broj bombona koje je Nikola pojeo u ponedjeljak.

Ostale dane pojeo je $x + 6$, $x + 12$, $x + 18$ i $x + 24$ bombona. 2 BODA

Ukupno je pojeo 100 bombona pa vrijedi:

$$x + x + 6 + x + 12 + x + 18 + x + 24 = 100$$ 1 BOD

$$5x + 60 = 100$$

$$5x = 40$$

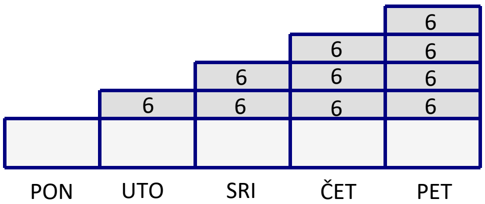
$$x = 8$$ 2 BODA

U četvrtak je Nikola pojeo 8 + 18 = 26 bombona. 1 BOD

…………………………………………..……………………...……UKUPNO 6 BODOVA

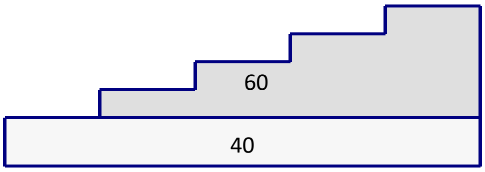
Drugi način:

Neka je $\boxed{\text{PON}}$ broj bombona koje je Nikola pojeo u ponedjeljak.
Ukupnu količinu od 100 bombona prikazujemo ovako:

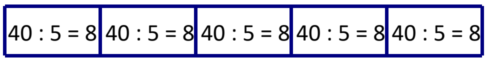


1 BOD

Dalje vrijedi:

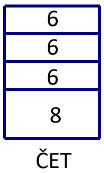


2 BODA



1 BOD

Nikola je u ponedjeljak pojeo 8 bombona, 1 BOD



a u četvrtak ukupno 26 bombona. 1 BOD

…………………………………………………………………………………………… UKUPNO 6 BODOVA

4. Od naručene količine brašna dobije se 2 400 : 5 = 480 pakiranja od 5 kg. 1 BOD
Zarada bi bila 480 · 14 = 6 720 kn. 1 BOD
Uništeno je 300 kg, pa je ostalo 2 100 kg. 1 BOD
Od toga se može napraviti 2 100 : 5 = 420 pakiranja od 5 kg. 1 BOD
Da bi zarada bila ista, cijena jednog pakiranja treba biti 6 720 : 420 = 16 kn. 1 BOD
Planiranu cijenu pakiranja od 5 kg treba povećati za 2 kune. 1 BOD
…………………………………………………………………………………………… UKUPNO 6 BODOVA

5. Najmanji šesteroznamenkasti broj djeljiv brojevima 2 i 3 jest broj 100 002. 2 BODA
Najmanji peteroznamenkasti broj djeljiv brojevima 5 i 9 jest broj 10 035. 2 BODA
Razlika brojeva iznosi 100 002 – 10 035 = 89 967. 1 BOD
89 967 ≈ 90 000
Traženi broj je 90 000. 1 BOD
…………………………………………………………………………………………… UKUPNO 6 BODOVA

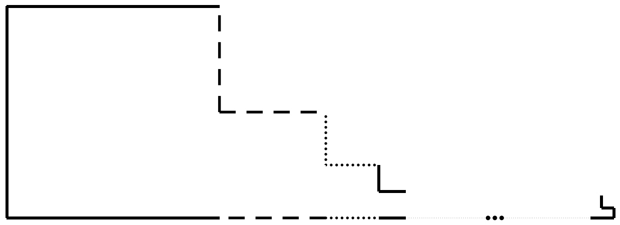
6. Prvi način:
Broj će biti djeljiv brojem 5 ako mu je znamenka jedinica 0 ili 5. 1 BOD
Ako mu je zadnja znamenka 0, onda se prva znamenka može izabrati na 5 načina (to mogu biti znamenke 9, 8, 5, 4 ili 1), druga na 4 načina (iste znamenke bez jedne već izabrane), a treća na 3 načina (bez dvije izabrane). 2 BODA
Takvih brojeva ima 5 · 4 · 3 · 1 = 60. 2 BODA
Ako je zadnja znamenka 5, onda se prva znamenka može izabrati na 4 načina

(prva znamenka ne smije biti 0, pa može biti 9, 8, 4 ili 1), druga također na
4 načina (bez jedne već izabrane među četiri navedene znamenke, ali uključujući 0),
a treća na 3 načina (bez dvije izabrane). 2 BODA
Takvih brojeva ima $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 48$. 2 BODA
Postoji $60 + 48 = 108$ traženih brojeva. 1 BOD
……………………………………………………….…………………...…… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:
Broj će biti djeljiv brojem 5 ako mu je znamenka jedinica 0 ili 5. 1 BOD
Izračunajmo ukupan broj četveroznamenkastih brojeva koji se mogu napisati
koristeći zadane znamenke, uz uvjet da su znamenke međusobno različite:
Prva znamenka može biti odabrana na 5 načina (bilo koja od ponuđenih
znamenaka različita od nule), 1 BOD
druga na 5 načina (bez jedne već izabrane među četiri navedene znamenke,
ali uključujući 0), 1 BOD
treća na 4 načina (bez dvije izabrane) i posljednja na 3 načina. 1 BOD
Takvih brojeva ima $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$. 1 BOD
Izračunajmo broj četveroznamenkastih brojeva koji se mogu napisati koristeći zadane
znamenke, uz uvjet da su znamenke međusobno različite, a koji nisu djeljivi brojem 5:
Posljednja znamenka može biti odabrana na 4 načina (bilo koja od ponuđenih
znamenaka različita od 0 i 5), 1 BOD
prva na 4 načina (bez jedne već izabrane među četiri znamenke različite,
ali različita od 0), 1 BOD
druga također na 4 načina (bez dvije izabrane), a treća na 3 načina (bez tri izabrane). 1 BOD
Takvih brojeva ima $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 = 192$. 1 BOD
Postoji $300 - 192 = 108$ traženih brojeva. 1 BOD
……………………………………………….…………………...…... UKUPNO 10 BODOVA

7. Prvi kvadrat u nizu ima stranicu duljine 1024 cm, drugi 512 cm, treći 256 cm,
četvrti 128 cm, peti 64, šesti 32, sedmi 16 cm, osmi 8 cm, deveti 4 cm,
deseti 2 cm i jedanaesti 1 cm. 1 BOD
Obzirom da su duljine stranica svih kvadrata prirodni brojevi,
jedanaesti kvadrat je posljednji u nizu. 1 BOD

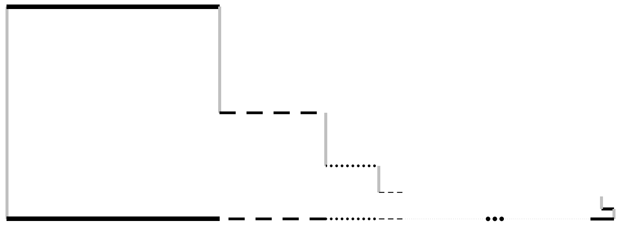
Prvi način rješavanja zadatka a):
a) Opseg ovog lika je duljina njegovog ruba.



Duljina ruba lika jednaka je zbroju duljina po **tri** stranice svakog kvadrata sa slike osim
posljednjeg u nizu 1 BOD
i duljina sve **četiri** stranice posljednjeg kvadrata. 1 BOD
$o = 3 \cdot (1\,024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2) + 4 \cdot 1$ 1 BOD
$o = 3 \cdot 2\,046 + 4$ 1 BOD
$o = 6\,142$ cm 1 BOD

Drugi način rješavanja zadatka a):

a) Opseg ovog lika je duljina njegovog ruba.
Zbrojimo li duljine „desnih vertikalnih" dužina, dobit ćemo duljinu stranice početnog kvadrata. Zato se duljina ruba lika sastoji se od dvije duljine stranice najvećeg kvadrata (lijeve i desne vertikalne stranice) i od dvostrukog zbroja duljina svih (horizontalnih) stranica kvadrata. 2 BODA



$o = 2 \cdot 1\,024 + 2 \cdot (1\,024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1)$ 1 BOD

$o = 2\,048 + 2 \cdot 2047$ 1 BOD

$o = 2\,048 + 4\,094$

$o = 6\,142$ cm 1 BOD

b) Kako je u nizu jedanaest kvadrata, srednji kvadrat je šesti po redu. 1 BOD

$P = 32 \cdot 32$ 1 BOD

$P = 1\,024\ \text{cm}^2$. 1 BOD

…………………………………………………….……………...………… UKUPNO 10 BODOVA

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
25. siječnja 2018.

6. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Broj je djeljiv s 8 ako mu je troznamenkasti završetak djeljiv s 8. 1 BOD

Kako je znamenka stotica jednaka 0, broj $\overline{4y}$ mora biti djeljiv s 8, pa y može biti jedino 0 ili 8.
1 BOD

Broj je djeljiv s 9 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 9, 1 BOD

tj. broj $x + 0 + 4 + y$ mora biti djeljiv s 9. 1 BOD

Dakle, ako je $y = 0$ onda je $x = 5$, što daje rješenje 5040, 1 BOD

a ako je $y = 8$ onda je $x = 6$, što daje rješenje 6048. 1 BOD

…………………………………………..………………………………..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Ako učenik odredi brojeve bez pravila za djeljivost i postupka, za svako rješenje dobiva jedan bod, što znači da ukoliko nema postupka učenik može dobiti najviše 2 BODA.

Drugi način:

Ako je broj djeljiv brojevima 8 i 9, onda je djeljiv i brojem 72 (njihovim najmanjim zajedničkim višekratnikom). 1 BOD

Treba ispitati djeljivost četveroznamenkastih brojeva 1040, 2040, 3040, 4040, 5040, 6040, 7040, 8040 i 9040 brojem 72.

1040 : 72 = 14 Brojevi 1008 i 1080 su djeljivi sa 72, ali nemaju traženi oblik.
 320
 32

2040 : 72 = 28 Brojevi 2016 i 2088 su djeljivi sa 72, ali nemaju traženi oblik.
 600
 24

3040 : 72 = 42 Brojevi 3024 i 3096 su djeljivi sa 72, ali nemaju traženi oblik.
 160
 16

4040 : 72 = 56 Broj 4032 je djeljiv sa 72, ali nema traženi oblik.
 440
 8

5040 : 72 = 70 **Broj 5040 je djeljiv sa 72 i ima traženi oblik.**
 00

6040 : 72 = 83 **Broj 6048 je djeljiv sa 72 i ima traženi oblik.**
280
64

7040 : 72 = 97 Broj 7056 je djeljiv sa 72, ali nema traženi oblik.
560
56

8040 : 72 = 111 Broj 8064 je djeljiv sa 72, ali nema traženi oblik.
84
120
48

9040 : 72 = 125 Brojevi 9000 i 9072 su djeljivi sa 72, ali nemaju traženi oblik.
184
400
40

Provjeravanje djeljivosti brojem 72 svih predloženih brojeva treba bodovati s 3 BODA (1 BOD za tri broja).

Višekratnici broja 72 traženog oblika su 5040 i 6048, odnosno nepoznate znamenke su $x = 5$, $y = 0$ (prvo rješenje) i $x = 6$, $y = 8$ (drugo rješenje). 2 BODA

…………………………………………..…………………………...... UKUPNO 6 BODOVA

2. $1 + 2 + 3 + \ldots + 50 = (1 + 50) + (2 + 49) + \ldots + (25 + 26) =$ 1 BOD

$= 25 \cdot 51 = 1275$ 1 BOD

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 9 = 32 \cdot 63 = 2016$ 2 BODA

Treba usporediti razlomke $\frac{1275}{2018}$ i $\frac{1275}{2016}$.

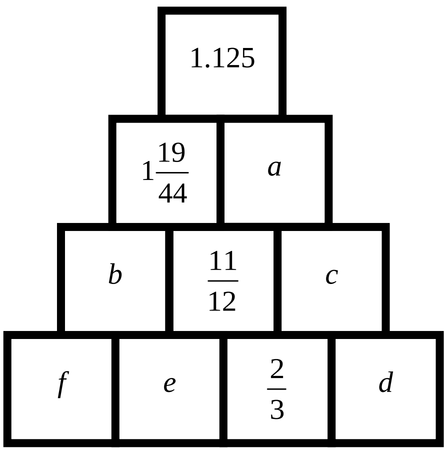
Razlomci imaju jednake brojnike pa je veći onaj koji ima manji nazivnik. 1 BOD

Kako je 2018 > 2016, onda je

$\frac{1275}{2018} < \frac{1275}{2016}$. 1 BOD

…………………………………………..……………………..…..….... UKUPNO 6 BODOVA

3. Označimo nepoznate brojeve s *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*.



Tada je:

$1.125 = 1\frac{19}{44} \cdot a$

$a = \frac{9}{8} : \frac{63}{44}$

$a = \frac{9}{8} \cdot \frac{44}{63}$

$a = \frac{11}{14}$

$b : \frac{11}{12} = \frac{63}{44}$

$b = \frac{63}{44} \cdot \frac{11}{12}$

$b = \frac{21}{16} = 1\frac{5}{16}$

$\frac{11}{12} : c = \frac{11}{14}$

$c = \frac{11}{12} : \frac{11}{14}$

$c = \frac{11}{12} \cdot \frac{14}{11}$

$c = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$

$\frac{2}{3} + d = 1\frac{1}{6}$

$d = \frac{7}{6} - \frac{2}{3}$

$d = \frac{7}{6} - \frac{4}{6}$

$d = \frac{1}{2}$

$e + \frac{2}{3} = \frac{11}{12}$

$e = \frac{11}{12} - \frac{2}{3}$

$e = \frac{11}{12} - \frac{8}{12}$

$e = \frac{1}{4}$

$f + \frac{1}{4} = 1\frac{5}{16}$

$f = 1\frac{5}{16} - \frac{1}{4}$

$f = 1\frac{5}{16} - \frac{4}{16}$

$f = 1\frac{1}{16}$

Rješenje:

$$1.125$$

$$1\frac{19}{44} \quad \frac{11}{14}$$

$$1\frac{5}{16} \quad \frac{11}{12} \quad 1\frac{1}{6}$$

$$1\frac{1}{16} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{2}$$

Za svaki od brojeva *a, b, c, d, e, f* učenik dobiva po 1 BOD.

…………………………………………..…………………………...….... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Točan rezultat priznati bilo da je napisan kao mješoviti broj, razlomak ili decimalni broj. Ako učenik neki od brojeva pogrešno izračuna, u nastavku rješenja pri bodovanju treba slijediti grešku.

4. Neka su a i b duljine kateta pravokutnog trokuta, $a \leq b$.

Površina pravokutnog trokuta iznosi $P = \frac{a \cdot b}{2}$.

Uvrstimo zadanu površinu:

$24 = \frac{a \cdot b}{2} \; / \cdot 2$

$a \cdot b = 48$ 1 BOD

Sva moguća rješenja su dana u tablici:

a (cm)	1	2	3	4	6
b (cm)	48	24	16	12	8
	1 BOD	1 BOD	1 BOD	1 BOD	1 BOD

5 BODOVA

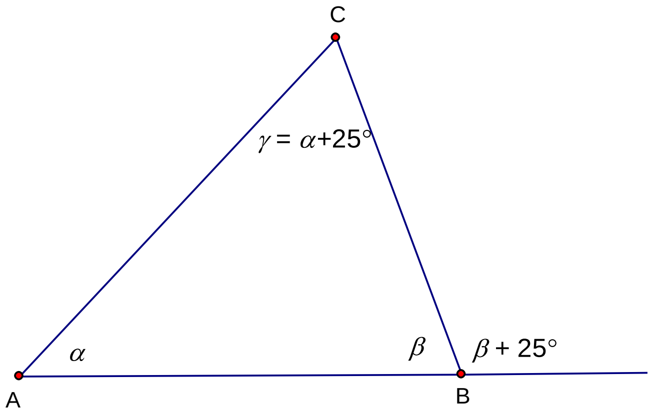
…………………………………………..……………………...…….... UKUPNO 6 BODOVA

5. Antea ima cikluse odmora i rada u ukupnom trajanju od 4 dana, a Barbara u ukupnom trajanju od 10 dana.
Dakle, nakon proteklih 20 dana, njihovi ciklusi rada i odmora se ponavljaju na isti način.
2 BODA
U prvih 20 dana od početka rada na svojim novim poslovima, Antea će se odmarati četvrti, osmi, dvanaesti, šesnaesti i dvadeseti dan, brojeći od početka, a Barbara osmi, deveti, deseti, osamnaesti, devetnaesti i dvadeseti dan, brojeći od početka.
To znači da će u prvih 20 dana one imati dva zajednička dana odmora. 2 BODA
U prvih 1000 dana rada, bit će ukupno 50 takvih ciklusa od 20 dana, što znači da će ukupno imati $50 \cdot 2 = 100$ zajedničkih dana odmora. 2 BODA

…………………………………………..……………………...…….... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Navedeni parcijalni bodovi služe kao pomoć pri bodovanju učenika koji nije u potpunosti ili nije točno riješio zadatak. Ukoliko je učenik riješio zadatak, koristeći svu potrebnu argumentaciju, bez obzira što možda nije naveo neku od izjava za koje je napisano da se boduju, treba biti ocijenjen sa 6 BODOVA.

6. 1. slučaj (5 BODOVA):
Skica:



Neka je vanjski kut trokuta npr. β_1 veći pa vrijedi da je $\beta_1 = \beta + 25°$. 1 BOD

Dalje vrijedi da je

$\beta + \beta_1 = 180°$

$\beta + \beta + 25° = 180°$

$2 \cdot \beta = 180° - 25°$

$\beta = 155° : 2$

$\beta = 77°30'$ 1 BOD

Za preostala dva unutarnja kuta vrijedi sljedeća jednakost:

$\alpha+\beta+\gamma=180°$

$\alpha+77°30'+\alpha+25°=180°$

$2\cdot\alpha=180°-(77°30'+25°)$

$2\cdot\alpha=179°60'-102°30'$

$2\cdot\alpha=77°30'$

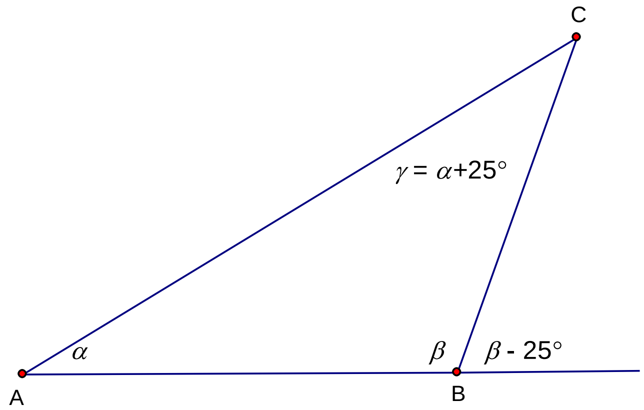
$\alpha=76°90':2$

$\alpha=38°45'$ 2 BODA

$\gamma=\alpha+25°=38°45'+25°=63°45'$ 1 BOD

2. slučaj (5 BODOVA):

Skica:



Neka je vanjski kut trokuta npr. β_1 manji pa vrijedi da je $\beta_1=\beta-25°$. 1 BOD

Dalje vrijedi da je

$\beta+\beta_1=180°$

$\beta+\beta-25°=180°$

$2\cdot\beta=180°+25°$

$\beta=205°:2$

$\beta=102°30'$ 1 BOD

Za preostala dva unutarnja kuta vrijedi sljedeća jednakost:

$\alpha+\beta+\gamma=180°$

$\alpha+102°30'+\alpha+25°=180°$

$2\cdot\alpha=180°-(102°30'+25°)$

$2\cdot\alpha=179°60'-127°30'$

$2\cdot\alpha=52°30'$

$\alpha=52°30':2$

$\alpha=26°15'$ 2 BODA

$\gamma=\alpha+25°=26°15'+25°=51°15'$ 1 BOD

…………………………………………………………………..……... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Rješenje bodovati na isti način ako učenik zapisuje veličine kutova samo u stupnjevima, a ne pretvara ih u stupnjeve i kutne minute (npr. β = 77.5º umjesto β = 77º30').

7. a) Svi trokuti koji se slažu na opisani način su jednakokračni trokuti kojima je krak za 2 cm kraći od osnovice.

Ako označimo duljinu osnovica s a, a duljine krakova s b zbog nejednakosti trokuta mora vrijediti $2b > a$. 1 BOD

Dakle, imamo sljedeće trokute:

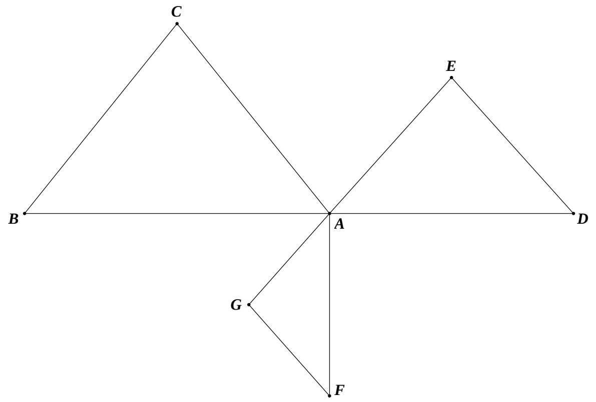
a	b	$2b > a$
10 cm	8 cm	DA
8 cm	6 cm	DA
6 cm	4 cm	DA
4 cm	2 cm	NE

(tablica) 1 BOD

Na opisani način mogu se složiti najviše tri takva trokuta. 1 BOD

b) Lik koji dobijemo slaganjem žice sastoji se od tri jednakokračna trokuta s jednim zajedničkim vrhom.

Nacrtajmo jedan takav lik:



Rub tog lika sastoji se od jedne stranice duljine 10 cm, tri stranice duljine 8 cm, tri stranice duljine 6 cm i dvije stranice duljine 4 cm. 1 BOD

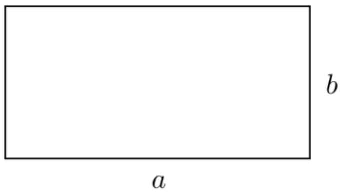
Dakle, zbroj opsega svih složenih trokuta je:

$o = 10 + 3 \cdot (8 + 6) + 2 \cdot 4$ 1 BOD

$o = 60$ cm 1 BOD

c) Treba izračunati površinu pravokutnika čije se stranice razlikuju za 12 cm, a opseg je jednak duljini žice.

$o = 2(a + b)$



Kako je opseg jednak 60 cm, onda je zbroj duljina susjednih stranica tog pravokutnika jednak $a + b = 30$ cm. 1 BOD

Ako je $a - b = 12$ cm, onda je $a = b + 12$, pa vrijedi:

$b + 12 + b = 30$. 1 BOD

Stoga je $b = 9$ cm, $a = 21$ cm. 1 BOD

Površina tog pravokutnika je:

$P = 21 \cdot 9 = 189\ cm^2$. 1 BOD

……………………………………………………………..……….. UKUPNO 10 BODOVA

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
25. siječnja 2018.

7. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Vrijedi: $\frac{a+b+c+d+e}{5}=18$. 1 BOD

Zbroj svih pet podataka je $a + b + c + d + e = 18 \cdot 5 = 90$. 1 BOD

Jedan je podatak 10, pa vrijedi $a + b + c + d + 10 = 90$. 1 BOD

Tada je $a + b + c + d = 90 - 10 = 80$, 1 BOD

odnosno $\frac{a+b+c+d}{4}=\frac{80}{4}=20$. 1 BOD

Aritmetička sredina preostala četiri podatka iznosi 20. 1 BOD

………………………………………………………………………….. UKUPNO 6 BODOVA

2. **Prvi način:** U pravokutnom trokutu jedan vanjski kut je pravi kut. Neka su α_1 i β_1 veličine preostalih dvaju vanjskih kutova tog trokuta.

Zbroj veličina vanjskih kutova trokuta iznosi 360°, pa vrijedi:

$\alpha_1 + \beta_1 + 90° = 360°$, odnosno $\alpha_1 + \beta_1 = 270°$. 1 BOD

Budući da je $\alpha_1 : \beta_1 = 7 : 11$, postoji racionalan broj k takav da je $\alpha_1 = 7k$ i $\beta_1 = 11k$.

Tada je: $7k + 11k = 270°$ 1 BOD

$18k = 270°$

$k = 15°$ 1 BOD

Tada je $\alpha_1 = 7 \cdot 15 = 105°$. 1 BOD

Onda je $\alpha = 180° - 105° = 75°$, 1 BOD

a kut $\beta = 90° - 75° = 15°$. 1 BOD

…..………………………………………………………………….……. UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način: Neka su α_1 i β_1 veličine vanjskih kutova pravokutnog trokuta koji nisu pravi kutovi, a α i β njima odgovarajući unutarnji kutovi. Veličina vanjskog kuta trokuta jednaka je zbroju veličina dvaju unutarnjih kutova kojima on nije susjedan.

Dakle, $\alpha_1 = 90° + \beta$ i $\beta_1 = 90° + \alpha$, odnosno $\beta = \alpha_1 - 90°$ i $\alpha = \beta_1 - 90°$.

Uvrštavanjem tih vrijednosti u jednakost $\alpha + \beta = 90°$ dobije se:

$\beta_1 - 90° + \alpha_1 - 90° = 90°$, tj. $\alpha_1 + \beta_1 = 270°$. 1 BOD

Napomena: Daljnji način rješavanja i bodovanja identičan je prvom načinu.

Treći način: Neka su α_1 i β_1 vanjski kutovi pravokutnog trokuta koji nisu pravi kutovi, a α i β njima odgovarajući unutarnji kutovi.

Zbroj veličina unutarnjeg i njemu pripadnog vanjskog kuta iznosi 180°, pa vrijedi:

$\alpha + \alpha_1 = 180°$ i $\beta + \beta_1= 180°$, pa je

$\alpha + \alpha_1 + \beta + \beta_1 = 360°$.

Budući da je $\alpha + \beta = 90°$, dobiva se $\alpha_1 + \beta_1 + 90° = 360°$, pa je

$\alpha_1 + \beta_1 = 270°$. 1 BOD

Napomena: Daljnji način rješavanja i bodovanja identičan je prvom načinu.

Četvrti način: Zbroj veličina unutarnjeg i njemu pripadnog vanjskog kuta iznosi 180°, pa vrijedi:
$\alpha + \alpha_1 = 180°$ i $\beta + \beta_1 = 180°$, odnosno $\alpha_1 = 180° - \alpha$ i $\beta_1 = 180° - \beta$.
Uvrštavanjem u uvjet zadatka $\alpha_1 : \beta_1 = 7 : 11$, dobiva se:
$(180° - \alpha) : (180° - \beta) = 7 : 11$ 1 BOD
$7 \cdot (180° - \beta) = 11 \cdot (180° - \alpha)$
$1260° - 7\beta = 1980° - 11\alpha$ 1 BOD
$11\alpha - 7\beta = 720°$ 1 BOD
Budući da je $\alpha + \beta = 90°$, vrijedi da je $\beta = 90° - \alpha$, pa je dalje:
$11\alpha - 7 \cdot (90° - \alpha) = 720°$ 1 BOD
$11\alpha - 630° + 7\alpha = 720°$
$18\alpha = 1350°$
$\alpha = 75°$ 1 BOD
Onda je $\beta = 90° - \alpha = 15°$. 1 BOD
…………………………………………………………………………………. UKUPNO 6 BODOVA

3. **Prvi način:** Vrijedi 1° = 60' i 1' = 60" te je 1° = 60 · 60" = 3600". 1 BOD
Navedeni središnji kut izrazi se (samo) u stupnjevima:

$$8°\,38'\,24'' = \left(8+\frac{38}{60}+\frac{24}{3600}\right)^{\circ} = \left(8+\frac{19}{30}+\frac{1}{150}\right)^{\circ} = \left(8+\frac{96}{150}\right)^{\circ} = \left(8+\frac{32}{50}\right)^{\circ} = 8.64°$$ 2 BODA

Iz $\frac{8.64°}{360°} = 0.024 = 2.4\%$ zaključi se da veličina središnjeg kuta kružnog isječka
iznosi 2.4% punoga kuta. 1 BOD
Ako je x ukupan broj učenika škole, tada 2.4 % od x iznosi 15, pa je
$x = 15 : 0.024$, 1 BOD
$x = 625$.
U školi je ukupno 625 učenika. 1 BOD
………………………………………………………………………..….…… UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način: Vrijedi 1° = 60' i 1' = 60" te je 1° = 60 · 60" = 3600". 1 BOD
Navedeni središnji kut, kao i puni kut, izraze se u kutnim sekundama:
8° 38' 24" = 8 · 3600" + 38 · 60" + 24" = 31 104" 1 BOD
360° = 360 · 3600" = 1 296 000" 1 BOD

Iz $\frac{31\,104''}{1\,296\,000''} = 0.024 = 2.4\ \%$

zaključuje se da veličina središnjeg kuta kružnog isječka iznosi 2.4% punoga kuta. 1 BOD
Ako je x ukupan broj učenika škole, tada 2.4% od x iznosi 15, pa je
$x = 15 : 0.024$, 1 BOD
$x = 625$.
U školi je ukupno 625 učenika. 1 BOD
……………………………………………………………………..….… UKUPNO 6 BODOVA

Treći način: Vrijedi 1° = 60' i 1' = 60" te je 1° = 60 · 60" = 3600". 1 BOD
Navedeni središnji kut izrazi se (samo) u stupnjevima:

$$8°\,38'\,24'' = \left(8+\frac{38}{60}+\frac{24}{3600}\right)^{\circ} = \left(8+\frac{19}{30}+\frac{1}{150}\right)^{\circ} = \left(8+\frac{96}{150}\right)^{\circ} = \left(8+\frac{32}{50}\right)^{\circ} = 8.64°$$ 2 BODA

Neka je x ukupan broj učenika u toj školi.

Broj učenika i pripadni središnji kut u kružnom dijagramu razmjerne su veličine te vrijedi:

$15 : x = 8.64° : 360°$ 1 BOD

$8.64° \cdot x = 5400°$ 1 BOD

$x = 625$

U školi ima 625 učenika. 1 BOD

……………………………………………………………………...…… UKUPNO 6 BODOVA

4. Označimo događaj A = {zbroj brojeva u dva uzastopna bacanja je prost broj}.

S obzirom da svako bacanje kockice ima 6 ishoda, ukupno će biti $6 \cdot 6 = 36$ ishoda. 1 BOD

Svi mogući ishodi mogu se napisati kao uređeni parovi kojima je prvi član broj dobiven u prvom bacanju, a drugi član broj dobiven u drugom bacanju kockice.

Povoljni su svi oni ishodi kod kojih je zbroj dvaju članova prost broj, a to su:

(1, 1), (1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4),

(4, 1), (4, 3), (5, 2), (5, 6), (6, 1) i (6, 5). 3 BODA

Povoljnih ishoda ima ukupno 15. 1 BOD

Dakle, $P(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} = 0.41\bar{6} \approx 41.67\%$. 1 BOD

……………………………………………………………………….….….. UKUPNO 6 BODOVA

Napomena 1: Nabrajanje povoljnih ishoda ne mora nužno biti u obliku uređenih parova (može primjerice u obliku 1 + 1, …). Za jedan izostavljeni povoljni ishod dati 2 BODA, za dva ili tri izostavljena 1 BOD, a za više od tri izostavljena 0 BODOVA. Dalje, pri određivanju vjerojatnosti događaja, slijediti pogrešku.

Napomena 2: Konačno rješenje se priznaje bez obzira na zapis (razlomak, decimalni broj ili postotak).

5. **Prvi način:** Neka Lovro ima x kuna. Cijena mobitela je $x + 0.05x = 1.05x$. 1 BOD

Snižena cijena mobitela iznosi $0.95 \cdot 1.05x = 0.9975x$. 1 BOD

Razlika $x - 0.9975x = 0.0025x$ je 4 kune. 1 BOD

Lovrina ušteđevina iznosi $x = 4 : 0.0025 = 1\,600$ kn. 1 BOD

Cijena mobitela je bila 1680 kn, 1 BOD

a snižena je na 1596 kn. 1 BOD

………………………………………………………………………… UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način: Neka je x Lovrina ušteđevina, a y početna cijena mobitela.

Vrijedi $y = x + 0.05x$, tj. $y = 1.05x$. 1 BOD

Također je $x - 0.95y = 4$. 1 BOD

Uvrštavanjem u tu jednadžbu vrijednost $y = 1.05x$ dobiva se:

$x - 0.95 \cdot 1.05x = 4$

$x - 0.9975x = 4$ 1 BOD

$0.0025x = 4$

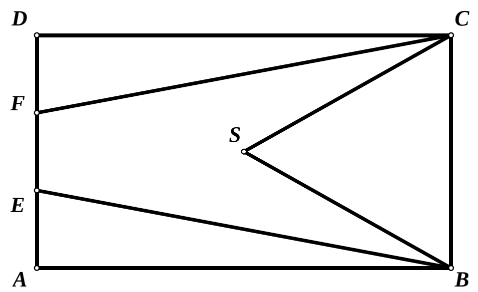
$x = 1600$ 1 BOD

Početna cijena mobitela bila je $y = 1.05 \cdot 1600 = 1680$ kn, 1 BOD

a cijena nakon sniženja je $1600 - 4 = 1596$ kn. 1 BOD

……………………………………………………………………...….… UKUPNO 6 BODOVA

6. Skica : 1 BOD



Označimo $|AB| = |CD| = a$ i $|BC| = |DA| = b$.

Tada je $|AE| = |EF| = |FD| = \frac{b}{3}$. 1 BOD

S je sjecište dijagonala, a dijagonale pravokutnika su jednake i raspolavljaju se u svom sjecištu. To znači da su jednakokračni trokuti DAS i BCS sukladni, pa imaju jednake visine na osnovicu.

U trokutu BCS visina na stranicu $\overline{BC}$ ima duljinu $\frac{a}{2}$. 1 BOD

Tada je $p_{BCS} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{a}{2} = \frac{ab}{4}$. 1 BOD

Površina pravokutnog trokuta ABE jednaka je površini pravokutnog trokuta CDF 1 BOD

i iznosi $p_{ABE} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{b}{3} = \frac{ab}{6}$. 1 BOD

Vrijedi: $p_{EBSCF} = p_{ABCD} - (p_{ABE} + p_{CDF} + p_{BCS})$ 1 BOD

$p_{EBSCF} = ab - \left(\frac{ab}{6} + \frac{ab}{6} + \frac{ab}{4}\right) = \frac{12 - (2+2+3)}{12} \cdot ab = \frac{5}{12} \cdot ab$ 1 BOD

Dakle, $p_{EBSCF} = \frac{5}{12} p_{ABCD}$. 1 BOD

Traženi omjer površina je $p_{EBSCF} : p_{ABCD} = 5:12$. 1 BOD

………………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ako učenik uzme neke konkretne vrijednosti za duljine stranica pravokutnika i tako dođe do točnog omjera, ali uz to ima provedene sve postupke i obrazložene sve odnose među duljinama dužina, takav postupak bodovati s 4 BODA.

7. **Prvi način:** U prvoj etapi, automobil je vozio 120 km brzinom od 90 km/h.

Za to mu je trebalo 120 : 90 = $\frac{4}{3}$ sata. 1 BOD

U drugoj etapi, automobil je vozio 1 sat i 15 minuta = $\frac{5}{4}$ sata brzinom 64 km/h.

Prešao je $\frac{5}{4} \cdot 64 = 80$ km. 1 BOD

U obje etape zajedno prešao je 200 km, a to je $\frac{5}{6}$ cijeloga puta.

Cijeli put ima $200 : \frac{5}{6} = 240$ km, 1 BOD

a od toga na treću etapu otpada 240 – 200 = 40 km. 1 BOD

Prosječna brzina će biti 80 km/h ako je ukupno vrijeme putovanja 240 : 80 = 3 sata. 2 BODA

Za prve dvije etape potrošio je $\frac{4}{3}+\frac{5}{4}=\frac{31}{12}=2\frac{7}{12}$ sata. 1 BOD

Treću etapu treba prijeći za $3-2\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$ sata. 1 BOD

Brzina u toj etapi treba biti $40:\frac{5}{12}=96$ km/h. 2 BODA

……………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način: U prvoj etapi, automobil je vozio s_1 = 120 km brzinom od v_1 = 90 km/h.

Za to mu je trebalo $t_1=\frac{s_1}{v_1}=\frac{120}{90}=\frac{4}{3}$ h. 1 BOD

U drugoj etapi, automobil je vozio t_2 = 1 h 15 min = $\frac{5}{4}$ h brzinom v_2 = 64 km/h.

Prešao je $s_2=v_2\cdot t_2=64\cdot\frac{5}{4}=80$ km. 1 BOD

U obje etape zajedno prešao je s_1 + s_2 = 120 + 80 = 200 km.

To je $\frac{5}{6}$ cijeloga puta s, iz čega se dobije $s=200:\frac{5}{6}=240$ km. 1 BOD

Tada je $s_3=\frac{1}{6}\cdot 240=40$ km. 1 BOD

Ako je prosječna brzina na cijelom putu 80 km/h, onda vrijedi:

$\frac{s}{t_1+t_2+t_3}=80$, odnosno nakon uvrštavanja $\frac{240}{\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+t_3}=80$. 1 BOD

$240=80\cdot\left(\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+t_3\right)$

$240=80\cdot\left(\frac{31}{12}+t_3\right)$ 1 BOD

$\frac{31}{12}+t_3=3$ 1 BOD

$t_3=3-\frac{31}{12}=\frac{5}{12}$ h 1 BOD

Konačno dobijemo prosječnu brzinu na posljednjoj šestini puta:

$v_3=\frac{s_3}{t_3}=\frac{40}{\frac{5}{12}}$, 1 BOD

v_3 = 96 km/h.

Preostalu šestinu puta automobil treba voziti brzinom od 96 km/h. 1 BOD

……………………………………………………………………….....…. UKUPNO 10 BODOVA

Treći način: U prvoj etapi, automobil je vozio 120 km brzinom od 90 km/h,
odnosno 1.5 km/min. Za to mu je trebalo 120 : 1.5 = 80 minuta. 1 BOD

U drugoj etapi, automobil je vozio 1 sat i 15 minuta = 75 minuta brzinom 64 km/h,

odnosno $\frac{16}{15}$ km/min te je prešao $\frac{16}{15} \cdot 75 = 80$ km. 1 BOD

U obje etape zajedno prešao je 200 km, a to je $\frac{5}{6}$ cijeloga puta.

To znači da je $\frac{1}{6}$ duljine cijelog puta jednaka 200 : 5 = 40 km, 1 BOD

i to je duljina treće etape puta.

Duljina cijelog puta jednaka je $40 \cdot 6 = 240$ km. 1 BOD

Prosječna brzina će biti 80 km/h ako je ukupno vrijeme putovanja

240 : 80 = 3 sata = 180 minuta. 2 BODA

Za prve dvije etape potrošio je 80 + 75 = 155 minuta. 1 BOD

Treću etapu treba prijeći za 180 – 155 = 25 minuta. 1 BOD

Brzina u toj etapi treba biti 40 : 25 = 1.6 km/min, tj. $1.6 \cdot 60 = 96$ km/h. 2 BODA

…………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
25. siječnja 2018.

8. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Racionalizirajmo razlomke:

$$\frac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{13}}\cdot\frac{\sqrt{15}-\sqrt{13}}{\sqrt{15}-\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{13}}{2},$$ 1 BOD

$$\frac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{11}}\cdot\frac{\sqrt{13}+\sqrt{11}}{\sqrt{13}+\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{13}+\sqrt{11}}{2}.$$ 1 BOD

Zadnji razlomak zapišimo malo drugačije:

$$\frac{\sqrt{5.5}-\sqrt{7.5}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{\frac{11}{2}}-\sqrt{\frac{15}{2}}}{\sqrt{2}}=\frac{\frac{\sqrt{11}-\sqrt{15}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{11}-\sqrt{15}}{2}.$$ 2 BODA

(Ili:

$$\frac{\sqrt{5.5}-\sqrt{7.5}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{11}-\sqrt{15}}{2}.$$ 2 BODA)

Na kraju zbrojimo sve dobiveno:

$$\frac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{13}}+\frac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{11}}-\frac{\sqrt{5.5}-\sqrt{7.5}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{13}}{2}+\frac{\sqrt{13}+\sqrt{11}}{2}-\frac{\sqrt{11}-\sqrt{15}}{2}=\sqrt{15}.$$ 2 BODA

…………………………………………………………………………………..…. UKUPNO 6 BODOVA

2. Prvi način:

Neka su v_1 i s_1 odnosno v_2 i s_2 količine vode i soka u prvoj odnosno drugoj boci, a V volumen svake od dviju boca.

Tada vrijedi:

$$v_1 : s_1 = 2 : 1 \text{ i } v_2 : s_2 = 4 : 1,$$

odnosno

$$v_1 = \frac{2}{3}V \text{ i } s_1 = \frac{1}{3}V,$$ 1 BOD

$$v_2 = \frac{4}{5}V \text{ i } s_2 = \frac{1}{5}V.$$ 1 BOD

Ukupna količina vode iz obiju boca je

$$v_3 = v_1 + v_2 = \frac{22}{15}V,$$ 1 BOD

a ukupna količina soka iz obiju boca je

$$s_3 = s_1 + s_2 = \frac{8}{15}V.$$ 1 BOD

Omjer količina vode i soka u trećoj boci je $v_3 : s_3 = \frac{22}{15}V : \frac{8}{15}V = 11 : 4$. 2 BODA

……………………………………………………………………...…...….. UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

U prvoj boci ima $\frac{1}{3}$ udjela soka, a u drugoj $\frac{1}{5}$ udjela soka. 2 BODA

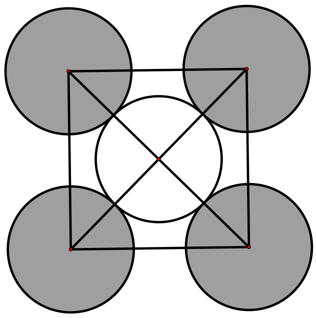
Kako su volumeni prve i druge boce jednaki, slijedi da u trećoj boci ima $\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{2}=\dfrac{4}{15}$ udjela soka.

2 BODA

Udio vode je $\frac{11}{15}$, a omjer količine vode i soka je 11 : 4. 2 BODA

…………………………………………………………………………....…. UKUPNO 6 BODOVA

3.



Neka je r duljina polumjera sukladnih kružnica.

Duljina dijagonale d kvadrata je $4r$. 1 BOD

Površina kvadrata je $P_1 = \dfrac{d^2}{2}=\dfrac{16r^2}{2}=8r^2$. 1 BOD

Površina svih zatamnjenih krugova je $4r^2\pi$. 1 BOD

Unutar kvadrata nalaze se 4 četvrtine zatamnjenih sukladnih krugova odnosno zatamnjeni dio ima površinu jednaku površini jednog kruga radijusa r, dakle $r^2\pi$. 1 BOD

Površina nezatamnjenog dijela kvadrata je $P_1-r^2\pi=8r^2-r^2\pi=r^2\left(8-\pi\right)$. 1 BOD

Tada je omjer površine svih zatamnjenih krugova i površine nezatamnjenog dijela kvadrata jednak

$\dfrac{4r^2\pi}{r^2\left(8-\pi\right)}=\dfrac{4\pi}{8-\pi}$. 1 BOD

………………………………………………………………….…...…… UKUPNO 6 BODOVA

4. Prvi način:

Ukupan broj kuglica je 1000.

Među prvih 1000 prirodnih brojeva ima ih 250 djeljivih s 4, 1 BOD

i 166 djeljivih sa 6. 1 BOD

Međutim, postoje brojevi koji su djeljivi i s 4 i sa 6.

To su višekratnici broja 12. Njih ima 83. 1 BOD

Dakle, ukupan broj brojeva koji nisu djeljivi ni s 4 ni sa 6 je

1000 – 250 – 166 + 83 = 667. 2 BODA

(Ili:

Ukupan broj brojeva koji su djeljivi s 4 ili s 6 je 250 + 166 – 83 = 333. 1 BOD

Brojeva koji nisu djeljivi ni s 4 ni sa 6 ima 1000 – 333 = 667. 1 BOD)

Tražena vjerojatnost je $\frac{667}{1000} = 66.7\,\%$. 1 BOD

……………………………………………………………………………..…..….. UKUPNO 6 BODOVA

5. Neka je $m = |n^2 - 100|$.

Vrijedi $m = |n^2 - 100| = |(n-10)(n+10)|$. 1 BOD

Broj *m* je prost ako i samo ako je jedan od brojeva $|n-10|$ i $|n+10|$ jednak 1, a drugi je prost broj. 1 BOD

Uočimo da nema prirodnih brojeva *n* za koje je $|n+10| = 1$. 1 BOD

Nađimo sve prirodne brojeve *n* za koje je $|n-10| = 1$.

Ako je $|n-10| = 1$, tada je *n* = 9 ili *n* = 11.

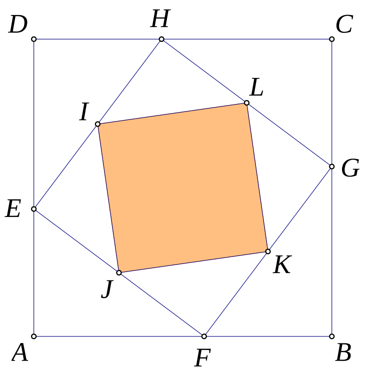
Za *n* = 9 je $m = |(n-10)(n+10)| = 19$, što je prost broj. 1 BOD

Za *n* = 11 je $m = |(n-10)(n+10)| = 21$, a to nije prost broj. 1 BOD

Dakle, postoji samo jedan prirodan broj *n* za koji je $|n^2 - 100|$ prost broj, a to je *n* = 9. 1 BOD

…………………………………………………………………………….…. UKUPNO 6 BODOVA

6. Prvi način:



Iz površine kvadrata *IJKL* možemo izračunati duljinu stranice tog kvadrata. Označimo duljinu stranice kvadrata *IJKL* s *y*. Iz uvjeta zadatka vrijedi:

$y^2 = 200$, pa je $y = 10\sqrt{2}$ dm. 2 BODA

Duljinu stranice kvadrata *EFGH* označimo s *a*. Neka je $x = \frac{a}{2}$. Tada vrijedi:

$y = x\sqrt{2}$, pa je $10\sqrt{2} = x\sqrt{2}$, odnosno *x* = 10 dm. 2 BODA

Duljina stranice kvadrata *EFGH* iznosi *a* = 20 dm. 1 BOD

Omjer kateta pravokutnog trokuta *AFE* je 3 : 4. Neka je $|EA| = 3k$ i $|AF| = 4k$.

Prema Pitagorinom poučku vrijedi $(3k)^2 + (4k)^2 = 20^2$, 1 BOD

pa je $25k^2 = 400$, odnosno $k^2 = 16$, *k* = 4. 2 BODA

Duljina stranice kvadrata *ABCD* iznosi $|AF| + |FB| = |AF| + |EA| = 16 + 12 = 28$ dm. 1 BOD

Površina kvadrata *ABCD* iznosi $p_{ABCD} = 28^2 = 784$ dm². 1 BOD

……………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Nacrtajmo dijagonale $\overline{IK}$ i $\overline{JL}$ kvadrata *IJKL*. Neka se te dijagonale sijeku u točki *S*.
Njima smo kvadrat *IJKL* podijelili na 4 sukladna trokuta *IJS, JKS, KLS* i *LIS*.
(Dijagonale kvadrata su jednake i raspolavljaju se, stranice kvadrata su jednake, pa tvrdnja slijedi po poučku SSS.) 1 BOD

Trokuti *IEJ*, *JFK*, *KGL* i *LHI* su jednakokračni pravokutni. I oni su sukladni jer su im katete jednake polovini stranice kvadrata *EFGH* (po poučku SKS). 1 BOD

Također vrijedi da su svi trokuti *IJS, JKS, KLS, LIS, IEJ, JFK, KGL* i *LHI* međusobno sukladni, jer su jednakokračni pravokutni i imaju jednake hipotenuze. 1 BOD

Dakle, za površine kvadrata *EFGH* i *IJKL* vrijedi:

$p_{EFGH} = 8p_{IEJ}$, $p_{IJKL} = 4p_{IEJ}$,

$p_{EFGH} = 2p_{IJKL} = 2 \cdot 200 = 400$ dm². 1 BOD

Prema tome, duljina stranice kvadrata *EFGH* iznosi 20 dm. 1 BOD

Omjer kateta pravokutnog trokuta *AFE* je 3 : 4. Neka je $|EA| = 3k$ i $|AF| = 4k$.

Prema Pitagorinom poučku vrijedi $(3k)^2 + (4k)^2 = 20^2$, 1 BOD

pa je $25k^2 = 400$, odnosno $k^2 = 16$, $k = 4$. 2 BODA

Duljina stranice kvadrata *ABCD* iznosi $|AF| + |FB| = |AF| + |EA| = 16 + 12 = 28$ dm. 1 BOD

Površina kvadrata *ABCD* iznosi $p_{ABCD} = 28^2 = 784$ dm². 1 BOD

………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

7. Prvi način:

Ako je x srednji broj po veličini, onda sve brojeve možemo zapisati kao
$x - 2$, $x - 1$, x, $x + 1$ i $x + 2$. 1 BOD

Tada je

$(x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 =$

$= x^2 - 4x + 4 + x^2 - 2x + 1 + x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 =$ 1 BOD

$= 5x^2 + 10 = 5(x^2 + 2)$. 2 BODA

Izraz $5(x^2 + 2)$ je djeljiv brojem 5. 1 BOD

Kada bi izraz $5(x^2 + 2)$ bio djeljiv brojem 25, faktor $x^2 + 2$ bi morao biti djeljiv brojem 5. 1 BOD

Dakle, $x^2 + 2 \in \{5, 10, 15, 20, \ldots\}$, tj. $x^2 \in \{3, 8, 13, 18, \ldots\}$. 2 BODA

Budući da kvadrat prirodnog broja nikada ne završava znamenkom 3 ni znamenkom 8, faktor $x^2 + 2$ nije djeljiv brojem 5, što znači da izraz $5(x^2 + 2)$ nije djeljiv s 25. 2 BODA

……………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Ako je x najmanji broj po veličini, onda sve brojeve možemo zapisati kao
x, $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$ i $x + 4$. 1 BOD

Tada je

$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 + (x+4)^2 =$

$= x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 + x^2 + 6x + 9 + x^2 + 8x + 16 =$ 1 BOD

$= 5x^2 + 20x + 30 = 5(x^2 + 4x + 6)$. 2 BODA

Izraz $5(x^2 + 4x + 6)$ je djeljiv brojem 5. 1 BOD

Kada bi izraz $5(x^2+4x+6)$ bio djeljiv brojem 25, faktor x^2+4x+6 bi morao biti djeljiv brojem 5.

1 BOD

Ako je x djeljiv s 5, onda x^2+4x+6 daje ostatak 1 pri dijeljenju s 5.
Ako je x oblika $5k+1$ za neki prirodan broj k, onda x^2+4x+6 daje ostatak 1 pri dijeljenju s 5.
Ako je x oblika $5k+2$ za neki prirodan broj k, onda x^2+4x+6 daje ostatak 3 pri dijeljenju s 5,
Ako je x oblika $5k+3$ za neki prirodan broj k, onda x^2+4x+6 daje ostatak 2 pri dijeljenju s 5.
Ako je x oblika $5k+4$ za neki prirodan broj k, onda x^2+4x+6 daje ostatak 3 pri dijeljenju s 5.

3 BODA

Dakle, x^2+4x+6 nije djeljiv brojem 5, pa izraz $5(x^2+4x+6)$ nije djeljiv s 25. 1 BOD

……………………………………………………………………………... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena. Za svaku netočnu ili nenapisanu tvrdnju (od gornjih pet), oduzeti po 1 BOD (od ukupno 3 BODA za taj dio rješenja), što znači: za svih 5 točnih tvrdnji dati 3 BODA, za 4 tvrdnje 2 BODA, za 3 tvrdnje 1 BOD, a za dvije, jednu ili nijednu točno napisanu tvrdnju 0 BODOVA.