Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

25. siječnja 2018.

1. Izračunajte

$$\frac{20182019^2 - 20182018^2}{20182018 \cdot 20182020 - 20182017 \cdot 20182019}.$$

2. Ako je $a - b = 3$, a $a \cdot b = 1$, koliko je $\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}$ i $\frac{1}{a^6} + \frac{1}{b^6}$?

3. Riješite jednadžbu

$$\frac{2x}{x-1} - \frac{x}{x+2} - \frac{5x}{(x-1)(x+2)} = \frac{4}{x^2+x-2} - \frac{2}{x-1}.$$

4. Na stranici $\overline{AB}$, pravokutnika $ABCD$, odabrana je točka E, a na stranici $\overline{CD}$ točka F tako da je četverokut $EBFD$ romb. Odredite duljinu dužine $\overline{EF}$ ako su duljine stranica pravokutnika $a = |AB|$ i $b = |BC|$, $|AB| > |BC|$.

5. Odredite znamenke x, y, z i t tako da vrijedi $\overline{xyzt} + \overline{yzt} + \overline{zt} + \overline{t} = 2018$.

* * *

6. Nora ima tri ogrlice s različitim brojem perlica. Od njih je napravila tri nove ogrlice od kojih svaka ima 50 perlica. To je postigla tako da je s prve ogrlice skinula $\frac{2}{7}$ perlica i premjestila ih na drugu ogrlicu, a zatim s tako dobivene druge ogrlice premjestila $\frac{2}{7}$ perlica na treću i s tako dobivene treće ogrlice $\frac{2}{7}$ perlica premjestila na prvu. Koliko je bilo perlica na svakoj ogrlici prije premještanja?

7. Iz točke D stranice $\overline{AB}$, $|AD| > |BD|$, jednakostraničnog trokuta ABC povuče se okomica na stranicu $\overline{BC}$ s nožištem u E. Zatim se iz E povuče okomica na $\overline{CA}$ s nožištem u F, a iz F okomica na $\overline{AB}$ s nožištem u G. Površina četverokuta $DEFG$ jednaka je $21\sqrt{3}\,\text{cm}^2$, a duljina stranice trokuta ABC iznosi $14\,\text{cm}$. Odredite duljinu $x = |BD|$ i opseg četverokuta $DEFG$.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

25. siječnja 2018.

1. Odredite realni parametar m tako da za rješenja x_1, x_2 jednadžbe

$$5x^2 - 10m^2x - mx - 3x + 6m^2 + m - 4 = 0$$

vrijedi $(5x_1 - 1)(5x_2 - 1) = 2018$.

2. Odredite kvadratnu funkciju kojoj su nultočke $\dfrac{2\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ i $\dfrac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ ako točka $A(\sqrt{3}, 9)$ pripada grafu te funkcije.

3. Jedne su godine 1. siječanj i 1. travanj bili u četvrtak. Koliko u toj godini ima mjeseci koji imaju pet petaka? Obrazložite.

4. Neka su a i b rješenja jednadžbe $z^2 + z + 1 = 0$. Izračunajte $a^{2018} + b^{2018}$.

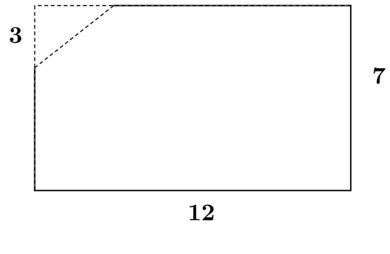
5. Odredite sve uređene parove realnih brojeva (x, y) za koje vrijedi

$$\begin{cases} x^2 - 3xy - 18y^2 = 0, \\ xy - 3y^2 + x - 5y = 0. \end{cases}$$

* * *

6. Na visini od x metara iznad pozornice visi reflektor usmjeren okomito na pozornicu i na njoj osvjetljava krug površine $P\,\mathrm{m}^2$. Ako bismo reflektor podignuli za 1 metar, osvjetljena bi se površina povećala za $2.25\,\mathrm{m}^2$. Ako bismo reflektor spustili za 1 metar, osvjetljena bi se površina smanjila za $1.75\,\mathrm{m}^2$ (u odnosu na prvobitnu površinu). Na kojoj se visini iznad pozornice nalazi reflektor?

7. Od pravokutne ploče duljina stranica 12 cm i 7 cm, odrezan je jedan vrh u obliku pravokutnog trokuta s katetama duljina 4 cm i 3 cm, kao na slici. Iz preostalog dijela treba izrezati novu pravokutnu ploču. Kolika je najveća moguća površina nove pravokutne ploče? Odredite njezine dimenzije (duljine stranica).



Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

25. siječnja 2018.

1. Riješite jednadžbu $\quad 9^{-(x+2)^2} + 8 \cdot 3^{-x^2-4x-5} - 1 = 0.$

2. Odredite najveću vrijednost funkcije

$$\begin{aligned} f(x) = &\left(\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} + \cdots + \sin\frac{k\pi}{3} + \cdots + \sin\frac{2018\pi}{3}\right)^2 \cdot \cos x \\ &+ \left(\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} + \cdots + \cos\frac{k\pi}{3} + \cdots + \cos\frac{2018\pi}{3}\right)^2 \cdot \sin x. \end{aligned}$$

3. Jednakokračni trokut ABC s osnovicom $\overline{BC}$, $|BC| = 20$, te krakovima duljine 18 podijeljen je dužinom $\overline{DE}$ na dva dijela jednakih opsega i površina. Točka D je na osnovici, a točka E na kraku $\overline{AC}$ te su obje različite od vrhova trokuta. Odredite duljinu $|DC|$.

4. Odredite neki period funkcije $f(x) = 2\sin\left(\frac{3}{4}x\right) + \cos\left(\frac{4}{5}x - \frac{\pi}{3}\right)$.

5. Božićne se kuglice pakiraju u dvije vrste kutija, crvene i zelene. U crvene se kutije kuglice pakiraju u pet redova sa po četiri kuglice, a u zelene u tri reda sa po šest kuglica. Na koliko različitih načina možemo odabrati broj crvenih i broj zelenih kutija kako bismo spakirali 2018 božićnih kuglica? Ne smije biti nepopunjenih kutija i niti jedna kuglica ne smije ostati nespakirana.

* * *

6. Na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ riješite sustav nejednadžbi

$$\begin{cases} (\operatorname{tg} x - 1)(\sin x + 1) < 0 \\ 4\sin^2 x - 2(\sqrt{3}+1)\sin x + \sqrt{3} > 0. \end{cases}$$

7. Kocku $ABCDA_1B_1C_1D_1$ brida a presiječemo ravninom koja prolazi točkama $E \in \overline{AB}$, $F \in \overline{BC}$ i $G \in \overline{B_1C_1}$ takvima da je $|AE| = \frac{1}{4}|AB|$, $|BF| = \frac{2}{3}|BC|$ i $|B_1G| = \frac{1}{3}|B_1C_1|$. Obujam manjega od dvaju tako nastalih geometrijskih tijela je $\dfrac{7}{6}$. Odredite obujam početne kocke.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

25. siječnja 2018.

1. Riješite jednadžbu

$$\binom{x+1}{x-2} + 2\binom{x-1}{3} = 7(x-1).$$

2. Pravac p koji sadrži desni fokus hiperbole $4x^2 - 5y^2 = 20$ i okomit je na os x, siječe hiperbolu u točkama A i B. Odredite opseg trokuta čiji su vrhovi A, B i lijevi fokus hiperbole.

3. Ako su $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ rješenja jednadžbe $z + \dfrac{1}{z} = 2\sin\dfrac{\pi}{7}$, koliko je $z_1^{770} + z_2^{770}$?

4. U nekom je brojevnom sustavu, s bazom manjom od 25, umnožak dvoznamenkastog broja s jednakim znamenkama i njegovoga dvokratnika jednak 1210 (u istom brojevnom sustavu). O kojem se broju radi i u kojem brojevnom sustavu?

5. Lea je svoju sestru Elu učila zbrajati prirodne brojeve. Nakon nekog vremena Lea je odabrala prirodni broj n i na papiru napisala $1 + 2 + 3 + \cdots + n$. Prilikom zbrajanja, Ela je zabunom jedan od zapisanih brojeva zbrojila dva puta i na kraju dobila rezultat 228. Koliko je brojeva Ela trebala zbrojiti? Koji je broj zbrojila dva puta?

* * *

6. Odredite sve realne brojeve x, y i α za koje vrijedi

$$y = -2018x \quad \text{i} \quad \frac{2018x + i}{y + i} = \frac{1 + i\sin\alpha}{1 - i\sin 3\alpha}, \qquad x \neq 0, \alpha \in \langle 0, 2\pi\rangle.$$

i označava imaginarnu jedinicu ($i^2 = -1$).

7. Duljina stranice baze pravilne uspravne četverostrane prizme jednaka je 1. Ravnina π sadrži jedan vrh gornje baze i jednu dijagonalu donje baze, te dijeli prizmu na dva dijela različitih obujmova. Pravci u kojima ravnina π siječe dvije bočne strane prizme zatvaraju kut φ takav da je $\cos\varphi = \dfrac{1}{3}$. Izračunajte oplošje i obujam manjeg od nastalih geometrijskih tijela.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.