ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

25. siječnja 2018.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1.

Izračunajte

$$\frac{20182019^2 - 20182018^2}{20182018 \cdot 20182020 - 20182017 \cdot 20182019}.$$

Rješenje.

Uvedimo zamjenu $x = 20182018$. 1 bod

Tada je

$$\frac{(x+1)^2 - x^2}{x \cdot (x+2) - (x-1)(x+1)} \qquad \text{2 boda}$$

$$= \frac{2x+1}{x^2 + 2x - x^2 + 1} \qquad \text{2 boda}$$

$$= \frac{2x+1}{2x+1} = 1. \qquad \text{1 bod}$$

Zadatak B-1.2.

Ako je $a - b = 3$, a $a \cdot b = 1$, koliko je $\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}$ i $\frac{1}{a^6} + \frac{1}{b^6}$?

Rješenje.

Kvadriranjem jednadžbe $a - b = 3$ dobivamo

$$a^2 - 2ab + b^2 = 9$$

odakle slijedi

$$a^2 + b^2 = 9 + 2ab = 11. \qquad \text{2 boda}$$

Sada imamo

$$\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} = \frac{b^3 - a^3}{(ab)^3} = \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{(ab)^3} = \frac{-3(11+1)}{1^3} = -36 \qquad \text{2 boda}$$

$$\frac{1}{a^6} + \frac{1}{b^6} = \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{(ab)^3} = (-36)^2 + 2 = 1298. \qquad \text{2 boda}$$

Zadatak B-1.3.

Riješite jednadžbu

$$\frac{2x}{x-1}-\frac{x}{x+2}-\frac{5x}{(x-1)(x+2)}=\frac{4}{x^2+x-2}-\frac{2}{x-1}.$$

Rješenje.

Zapišimo trinom x^2+x-2 u obliku umnoška:

$$x^2+x-2=(x+2)(x-1).$$ 1 bod

Tada zadana jednadžba prelazi u

$$\frac{2x(x+2)-x(x-1)-5x}{(x-1)(x+2)}=\frac{4-2(x+2)}{(x-1)(x+2)},\quad x\neq 1,\ x\neq -2.$$ 2 boda

Tada je

$$2x^2+4x-x^2+x-5x=4-2x-4$$ 1 bod

$$x^2+2x=0$$

$$x(x+2)=0.$$ 1 bod

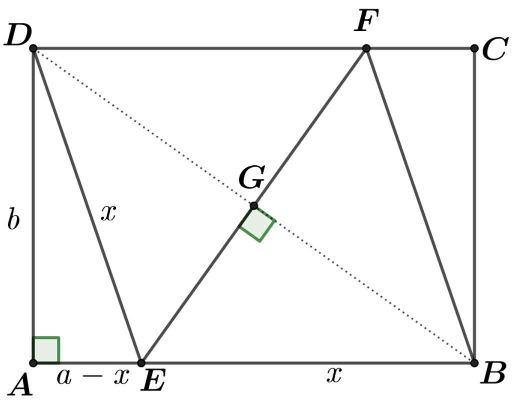
S obzirom na to da je $x\neq -2$, jedino rješenje je $x=0$. 1 bod

Zadatak B-1.4.

Na stranici $\overline{AB}$, pravokutnika $ABCD$, odabrana je točka E, a na stranici $\overline{CD}$ točka F tako da je četverokut $EBFD$ romb. Odredite duljinu dužine $\overline{EF}$ ako su duljine stranica pravokutnika $a=|AB|$ i $b=|BC|$, $|AB|>|BC|$.

Prvo rješenje.

Označimo sa x duljinu stranice romba: $x=|BE|=|DE|$.



Primijenimo Pitagorin poučak na trokute AED i ABD:

$$|BD|^2 = a^2 + b^2$$ 1 bod

$$x^2 = (a-x)^2 + b^2$$ 1 bod

Iz posljednje jednakosti slijedi da je $x = \dfrac{a^2+b^2}{2a}$. 1 bod

Površinu romba $EBFD$ računamo kao $P = \frac{|BD|\cdot|EF|}{2}$ ili $P = b \cdot x$. 1 bod

Stoga vrijedi

$$\frac{|BD|\cdot|EF|}{2} = b \cdot x$$

$$|EF| = \frac{2bx}{|BD|} = \frac{2b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{a^2+b^2}{2a} = \frac{b\cdot\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$ 2 boda

Napomena: Do istog se rezultata može doći iz pravokutnog trokuta GEB koristeći Pitagorin poučak:

$$\frac{|EF|^2}{4} + \frac{|BD|^2}{4} = x^2 \quad \Longrightarrow \quad |EF|^2 = 4x^2 - |BD|^2,$$

što vrijedi 2 boda.

Drugo rješenje.

Promotrimo sliku danu u prvom rješenju. Trokuti DFG i DBC su slični prema poučku K–K (imaju zajednički kut pri vrhu D i jedan pravi kut). 2 boda

Tada je

$$\frac{|BD|}{2a} = \frac{|EF|}{2b}$$ 2 boda

$$|EF| = \frac{b}{a}\cdot|BD|$$ 1 bod

$$|EF| = \frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2+b^2}.$$ 1 bod

Zadatak B-1.5.

Odredite znamenke x, y, z i t tako da vrijedi $\overline{xyzt} + \overline{yzt} + \overline{zt} + \overline{t} = 2018$.

Rješenje.

Iz uvjeta zadatka slijedi

$$\begin{aligned}1000x+100y+10z+t+100y+10z+t+10z+t+t&=2018\\1000x+200y+30z+4t&=2018\\500x+100y+15z+2t&=1009.\end{aligned}$$

Očito je $x \leqslant 2$. 1 bod

Za $x=1$ imamo $100y+15z+2t=509$.

Kako su z i t najviše 9 (u tom je slučaju $15z+2t=153$),
y mora biti barem 4, a najviše 5.

Za $y=4$ imamo $15z+2t=109$, pa z mora biti barem 6, a najviše 7. 1 bod

Za $z=6$ slijedi $2t=19$ što nije moguće.

Za $z=7$ slijedi $2t=4$ pa je $t=2$. 1 bod

Za $y=5$ slijedi $15z+2t=9$, što ne može biti niti za jedan izbor znamenaka z i t. 1 bod

Ako je $x=2$, imamo $100y+5z+2t=9$, što ne može biti niti za jedan izbor znamenaka.

1 bod

Jedino je rješenje $x=1$, $y=4$, $z=7$ i $t=2$. 1 bod

Zadatak B-1.6.

Nora ima tri ogrlice s različitim brojem perlica. Od njih je napravila tri nove ogrlice od kojih svaka ima 50 perlica. To je postigla tako da je s prve ogrlice skinula $\frac{2}{7}$ perlica i premjestila ih na drugu ogrlicu, a zatim s tako dobivene druge ogrlice premjestila $\frac{2}{7}$ perlica na treću i s tako dobivene treće ogrlice $\frac{2}{7}$ perlica premjestila na prvu. Koliko je bilo perlica na svakoj ogrlici prije premještanja?

Rješenje.

Neka je na prvoj ogrlici bilo x, na drugoj y, a na trećoj z perlica.

Kada je s prve ogrlice premjestila $\frac{2}{7}x$ perlica na drugu, na prvoj je ostalo $\frac{5}{7}x$ perlica. 1 bod

Na drugoj je sada $y+\frac{2}{7}x$ perlica. 1 bod

Kada s druge ogrlice premjesti $\frac{2}{7}\left(y+\frac{2}{7}x\right)$ perlica na treću, na drugoj ostaje 50 perlica pa je $\frac{5}{7}\left(y+\frac{2}{7}x\right)=50$, odnosno

$$y+\frac{2}{7}x=70.$$ 2 boda

Na trećoj ogrlici je sada $z+\frac{2}{7}\left(y+\frac{2}{7}x\right)=z+\frac{2}{7}\cdot 70=z+20$ perlica, 1 bod a nakon premještanja $\frac{2}{7}(z+20)$ perlica na prvu ogrlicu ostalo ih je 50 i imamo

$$\begin{aligned}\frac{5}{7}(z+20)&=50\\ z&=50.\end{aligned}$$ 2 boda

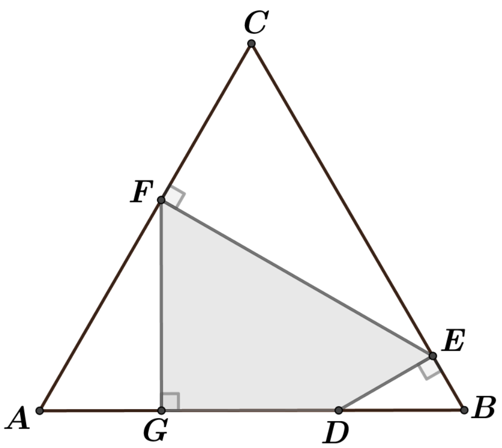
Na prvoj ogrlici je sada $\frac{5}{7}x+\frac{2}{7}(z+20)=50$, što znači da je $x=42$. 2 boda

Iz $y+\frac{2}{7}x=70$ dobivamo da je na drugoj ogrlici bilo $y=58$ perlica. 1 bod

Zadatak B-1.7.

Iz točke D stranice $\overline{AB}$, $|AD|>|BD|$, jednakostraničnog trokuta ABC povuče se okomica na stranicu $\overline{BC}$ s nožištem u E. Zatim se iz E povuče okomica na $\overline{CA}$ s nožištem u F, a iz F okomica na $\overline{AB}$ s nožištem u G. Površina četverokuta $DEFG$ jednaka je $21\sqrt{3}\,\text{cm}^2$, a duljina stranice trokuta ABC iznosi $14\,\text{cm}$. Odredite duljinu $x=|BD|$ i opseg četverokuta $DEFG$.

Rješenje.



Svaki od trokuta DBE, ECF i FAG je polovica jednakostraničnog trokuta.

Stoga vrijedi

$$|BE|=\frac{1}{2}|BD|=\frac{x}{2}\quad\text{pa je}\quad|CE|=14-\frac{x}{2}$$
$$|CF|=\frac{1}{2}|CE|=7-\frac{x}{4}$$
$$|FA|=14-|CF|=14-\left(7-\frac{x}{4}\right)=7+\frac{x}{4}$$ 2 boda

Izrazimo površinu četverokuta $DEFG$ pomoću x:

$$\begin{aligned}
P_{DEFG} &= P_{ABC} - P_{DBE} - P_{ECF} - P_{FAG} \\
&= \frac{|AB|^2\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{|DB|^2\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}\frac{|CE|^2\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{|FA|^2\sqrt{3}}{4} && \text{1 bod} \\
&= \frac{14^2\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}\frac{\left(14 - \frac{x}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(7 + \frac{x}{4}\right)^2\sqrt{3}}{4} && \text{1 bod}
\end{aligned}$$

Dakle vrijedi

$$\begin{aligned}
21\sqrt{3} &= \frac{\sqrt{3}}{8}\left(2 \cdot 14^2 - x^2 - \left(14 - \frac{x}{2}\right)^2 - \left(7 + \frac{x}{4}\right)^2\right) && \text{1 bod} \\
21 \cdot 8 &= 2 \cdot 196 - x^2 - 14^2 + 14x - \frac{x^2}{4} - 49 - \frac{7x}{2} - \frac{x^2}{16} \\
0 &= 21 + \frac{21}{2}\,x - \frac{21}{16}\,x^2. && \text{1 bod}
\end{aligned}$$

Dobili smo kvadratnu jednadžbu $x^2 - 8x + 16 = 0$

čije je jedino rješenje $x = 4$, pa je $|BD| = 4\,\text{cm}$. 1 bod

Dalje je

$$\begin{aligned}
|DE| &= \frac{x\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\,\text{cm}, \\
|EF| &= \frac{\left(14 - \frac{x}{2}\right)\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\,\text{cm}, \\
|FG| &= \frac{\left(7 + \frac{x}{4}\right)\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}, \\
|GD| &= |AB| - |DB| - \frac{1}{2}|FA| = 14 - 4 - \frac{1}{2} \cdot 8 = 6\,\text{cm} && \text{2 boda}
\end{aligned}$$

Opseg četverokuta $DEFG$ iznosi $6 + 12\sqrt{3}\,\text{cm}$. 1 bod

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

25. siječnja 2018.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1.

Odredite realni parametar m tako da za rješenja x_1, x_2 jednadžbe

$$5x^2 - 10m^2x - mx - 3x + 6m^2 + m - 4 = 0$$

vrijedi $(5x_1 - 1)(5x_2 - 1) = 2018$.

Rješenje.

Uvedimo oznake $a = 5$, $b = -10m^2 - m - 3$, $c = 6m^2 + m - 4$.

Po Vieteovim formulama tada imamo

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{10m^2 + m + 3}{5}, \quad x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{6m^2 + m - 4}{5}.$$ 2 boda

Zadano je $(5x_1 - 1)(5x_2 - 1) = 2018$, što zapisujemo u pogodnijem obliku:

$$25x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 1 = 2018.$$ 2 boda

Prema tome, vrijedi

$$\begin{gathered} 5(6m^2 + m - 4) - 10m^2 - m - 3 = 2017 \\ \iff 20m^2 + 4m - 2040 = 0 \\ \iff 5m^2 + m - 510 = 0. \end{gathered}$$ 1 bod

Rješavanjem ove kvadratne jednadžbe dobivamo dvije mogućnosti:

$$m_1 = 10, \quad m_2 = -\frac{51}{5}.$$ 1 bod

Zadatak B-2.2.

Odredite kvadratnu funkciju kojoj su nultočke $\dfrac{2\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ i $\dfrac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ ako točka $A(\sqrt{3}, 9)$ pripada grafu te funkcije.

Rješenje.

Neka je $x_1 = \frac{2\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ i $x_2 = \frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$.

Racionaliziranjem nazivnika dobivamo $x_1 = -3 - \sqrt{3}$ i $x_2 = 3 - \sqrt{3}$. 1 bod

Traženu funkciju možemo zapisati u obliku

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2), \quad \text{odnosno} \quad f(x) = a\left(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2\right). \qquad \text{1 bod}$$

Nakon uvrštavanja x_1 i x_2 dobivamo

$$f(x) = a(x^2 + 2\sqrt{3}x - 6). \qquad \text{1 bod}$$

Budući da točka $A(\sqrt{3}, 9)$ pripada grafu te funkcije, vrijedi

$$9 = a\left((\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - 6\right), \qquad \text{1 bod}$$

dakle $a = 3$. 1 bod

Tražena kvadratna funkcija je $f(x) = 3x^2 + 6\sqrt{3}x - 18$. 1 bod

Napomena: Priznati i kvadratnu funkciju zapisanu u faktoriziranom obliku $f(x) = 3(x + 3 + \sqrt{3})(x - 3 + \sqrt{3})$ ili tjemenom obliku $f(x) = 3(x + \sqrt{3})^2 - 27$.

Zadatak B-2.3.

Jedne su godine 1. siječanj i 1. travanj bili u četvrtak. Koliko u toj godini ima mjeseci koji imaju pet petaka? Obrazložite.

Prvo rješenje.

Od 1. siječnja do 1. travnja ima 90 ili 91 dan. Kako su oba datuma pala u isti dan, broj dana između njih mora biti djeljiv sa 7.

Prema tome, između je 91 dan pa se radi o prijestupnoj godini. 2 boda

Prijestupna godina ima 52 tjedna i 2 dana. Četvrtak je bio 1. siječnja, što znači da je 2. siječnja bio petak i te je godine bilo 53 petaka. 1 bod

U jednom je mjesecu ili 4 ili 5 petaka. Neka je n broj mjeseci u kojima ima 5 petaka. Tada je

$$5n + 4(12 - n) = 53, \quad \text{to jest} \quad n = 5. \qquad \text{2 boda}$$

Zaključujemo da je bilo 5 mjeseci s 5 petaka (siječanj, travanj, srpanj, listopad i prosinac). 1 bod

Drugo rješenje.

Neka je 1. siječanj u četvrtak. Tada je 29. siječanj također u četvrtak, pa je 1. veljače u nedjelju. Ako godina nije prijestupna, onda su 1. ožujak i 29. ožujak nedjelja, a 1. travanj je u srijedu. To je protivno uvjetu zadatka.

Zato se radi o prijestupnoj godini. 2 boda

Sada ćemo ispisivanjem (ključnih dijelova) kalendara te godine otkriti koji mjeseci imaju pet petaka. Pogledajmo tablicu:

mjesec	1. petak	2. petak	3. petak	4. petak	5. petak
siječanj	2. 1.	9. 1.	16. 1.	23. 1.	30. 1.
veljača	6. 2.	13. 2.	20. 2.	27. 2.	
ožujak	5. 3.	12. 3.	19. 3.	26. 3.	
travanj	2. 4.	9. 4.	16. 4.	23. 4.	30. 4.
svibanj	7. 5.	14. 5.	21. 5.	28. 5.	
lipanj	4. 6.	11. 6.	18. 6.	25. 6.	
srpanj	2. 7.	9. 7.	16. 7.	23. 7.	30. 7.
kolovoz	6. 8.	13. 8.	20. 8.	27. 8.	
rujan	3. 9.	10. 9.	17. 9.	24. 9.	
listopad	1. 10.	8. 10.	15. 10.	22. 10.	29. 10.
studeni	5. 11.	12. 11.	19. 11.	26. 11.	
prosinac	3. 12.	10. 12.	17. 12.	24. 12.	31. 12.

3 boda

U toj je godini 5 mjeseci s 5 petaka (siječanj, travanj, srpanj, listopad i prosinac). 1 bod

Napomena: Nije nužno da učenik ispisuje cijeli kalendar, ali mora se vidjeti kako je došao do rješenja.

Zadatak B-2.4.

Neka su a i b rješenja jednadžbe $z^2 + z + 1 = 0$. Izračunajte $a^{2018} + b^{2018}$.

Prvo rješenje.

Ako su a i b rješenja jednadžbe $z^2 + z + 1 = 0$, prema Vieteovim formulama je

$$a + b = -1, \qquad ab = 1.$$ 1 bod

Kako su a i b rješenja dane jednadžbe (uočimo da su različita od 1), vrijedi

$$\begin{aligned} z^2 + z + 1 &= 0 \; / \cdot (z-1) \\ z^3 - 1 &= 0 \quad \Longrightarrow \quad a^3 = 1,\ b^3 = 1. \end{aligned}$$ 2 boda

Uočimo da je 2016 djeljivo s 3 pa imamo

$$a^{2016} = (a^3)^{672} = 1, \quad b^{2016} = (b^3)^{672} = 1.$$ 1 bod

Odavde je

$$\begin{aligned} a^{2018} + b^{2018} &= a^{2016} \cdot a^2 + b^{2016} \cdot b^2 = a^2 + b^2 \\ &= (a+b)^2 - 2ab = 1 - 2 = -1. \end{aligned}$$ 1 bod, 1 bod

Drugo rješenje.

Rješenja dane jednadžbe su $a = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ i $b = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ (ili obratno). Tada je 1 bod

$$a^3 = \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{-1}{8}(1 + 3i\sqrt{3} - 3 \cdot 3 - 3i\sqrt{3}) = 1$$

i analogno $b^3 = 1$. 2 boda

Uočimo

$$a^{2016} = (a^3)^{672} = 1, \quad b^{2016} = (b^3)^{672} = 1.$$ 1 bod

Odavde je

$$a^{2018} + b^{2018} = a^{2016} \cdot a^2 + b^{2016} \cdot b^2 = a^2 + b^2$$ 1 bod

$$= \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -1.$$ 1 bod

Zadatak B-2.5.

Odredite sve uređene parove realnih brojeva (x, y) za koje vrijedi

$$\begin{cases} x^2 - 3xy - 18y^2 = 0, \\ xy - 3y^2 + x - 5y = 0. \end{cases}$$

Prvo rješenje.

Jedno rješenje je očito uređeni par $(0, 0)$. 1 bod

Da bismo našli ostala rješenja, pretpostavimo da vrijedi $y \neq 0$ (ako je $y = 0$, onda mora biti i $x = 0$). Podijelimo prvu jednadžbu s y^2. Dobivamo

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 3\frac{x}{y} - 18 = 0.$$ 1 bod

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $\frac{x}{y} = 6$ i $\frac{x}{y} = -3$. 1 bod

Ako je $x = 6y$, iz druge jednadžbe početnog sustava dobivamo $3y^2 + y = 0$. Zbog pretpostavke $y \neq 0$ odavde slijedi $y = -\frac{1}{3}$. 1 bod

Za $y = -\frac{1}{3}$ dobivamo da je $x = -2$, odnosno uređeni par $\left(-2, -\frac{1}{3}\right)$ je drugo rješenje sustava. 1 bod

Na sličan se način iz $x = -3y$ dobiva uređeni par $\left(4, -\frac{4}{3}\right)$ kao treće rješenje sustava. 1 bod

Drugo rješenje.

Umjesto dijeljenja s y^2 prva se jednadžba može faktorizirati:

$$\begin{cases} (x+3y)(x-6y)=0, \\ xy-3y^2+x-5y=0. \end{cases}$$ 1 bod

Tada iz prve jednadžbe slijedi $x+3y=0$ ili $x-6y=0$, odnosno $x=-3y$ ili $x=6y$. 1 bod

Za $x=6y$ iz druge jednadžbe početnog sustava dobivamo $3y^2+y=0$, odakle slijedi $y=0$ ili $y=-\frac{1}{3}$. 1 bod

Za $y=0$ dobivamo da je $x=0$, odnosno uređeni par $(0,0)$ je jedno rješenje sustava. 1 bod

Za $y=-\frac{1}{3}$ dobivamo da je $x=-2$, odnosno uređeni par $\left(-2,-\frac{1}{3}\right)$ je drugo rješenje sustava. 1 bod

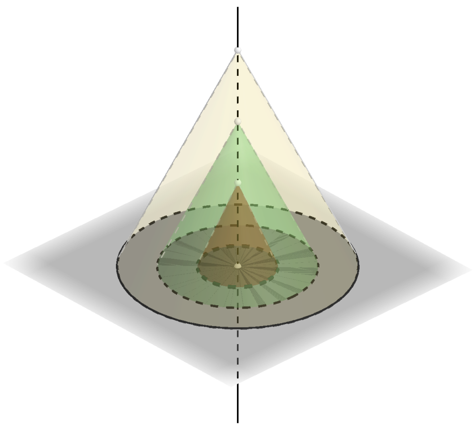
Na sličan se način iz $x=-3y$ dobiva uređeni par $\left(4,-\frac{4}{3}\right)$ kao treće rješenje sustava. 1 bod

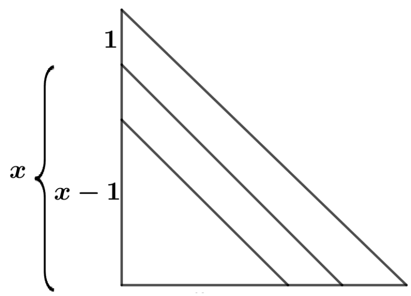
Zadatak B-2.6.

Na visini od x metara iznad pozornice visi reflektor usmjeren okomito na pozornicu i na njoj osvjetljava krug površine $P\,\mathrm{m}^2$. Ako bismo reflektor podignuli za 1 metar, osvjetljena bi se površina povećala za $2.25\,\mathrm{m}^2$. Ako bismo reflektor spustili za 1 metar, osvjetljena bi se površina smanjila za $1.75\,\mathrm{m}^2$ (u odnosu na prvobitnu površinu). Na kojoj se visini iznad pozornice nalazi reflektor?

Prvo rješenje.

Snop svjetlosti koji izlazi iz reflektora i osvjetljava krug na pozornici određuje stožac.





1 bod

Baze tih stožaca su koncentrični krugovi, a vrhovi (ovisno o položaju reflektora) se nalaze na pravcu okomitom na pozornicu.

Pravokutni karakteristični trokuti tih stožaca međusobno su slični. Zbog toga se polumjeri koncentričnih krugova odnose kao i odgovarajuće visine, a njihove se površine odnose kao kvadrati tih visina. 1 bod

Pišemo sljedeći sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2 = \dfrac{P+2.25}{P} \\ \left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2 = \dfrac{P-1.75}{P}. \end{cases}$$ 2 boda

Množenjem s nazivnicima dobivamo

$$\begin{cases} Px^2+2Px+P = Px^2+2.25x^2 \\ Px^2-2Px+P = Px^2-1.75x^2, \end{cases}$$ 2 boda

odnosno

$$\begin{cases} 2Px+P = 2.25x^2 \implies P = \dfrac{2.25x^2}{2x+1} \\ 2Px-P = 1.75x^2 \implies P = \dfrac{1.75x^2}{2x-1}. \end{cases}$$ 1 bod

Izjednačavanjem dobivenih izraza za P slijedi

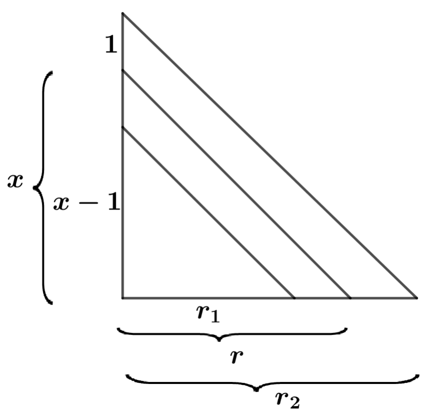
$$\frac{2.25x^2}{2x+1} = \frac{1.75x^2}{2x-1} \ / : x^2 \quad (x \neq 0).$$ 1 bod

Dobivamo $4.5x - 3.5x = 2.25 + 1.75$. 1 bod

Zaključujemo da se reflektor nalazi na visini $x = 4$ metra iznad pozornice. 1 bod

Drugo rješenje.

Promatramo površine koncentričnih krugova u odnosu na zadanu površinu. Koristimo sličnost pravokutnih karakterističnih trokuta odgovarajućih stožaca: sa skice



1 bod

čitamo

$$\frac{x-1}{x} = \frac{r_1}{r} \implies r_1 = \frac{x-1}{x}\cdot r$$
$$\frac{x+1}{x} = \frac{r_2}{r} \implies r_2 = \frac{x+1}{x}\cdot r.$$ 1 bod

Površina većeg kruga je $P_2 = P + 2.25$, odnosno vrijedi

$$r_2^2\pi = r^2\pi + 2.25 \implies \left(\frac{x+1}{x} \cdot r\right)^2 \cdot \pi = r^2\pi + 2.25. \qquad \text{1 bod}$$

Površina manjeg kruga $P_1 = P - 1.75$, odnosno

$$\left(\frac{x-1}{x} \cdot r\right)^2 \cdot \pi = r^2\pi - 1.75. \qquad \text{1 bod}$$

Odavde je

$$\left(\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 - 1\right) \cdot r^2\pi = 2.25$$
$$\left(\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 - 1\right) \cdot r^2\pi = -1.75. \qquad \text{2 boda}$$

Ako posljednje dvije jednakosti podijelimo (ili iz prve izrazimo $r^2\pi$ te uvrstimo u drugu), dobit ćemo

$$\frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 - 1}{\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 - 1} = \frac{2.25}{-1.75}. \qquad \text{2 boda}$$

Nakon sređivanja brojnika i nazivnika slijedi

$$\frac{2x+1}{-2x+1} = -\frac{9}{7} \qquad \text{1 bod}$$

i, konačno,

$$14x + 7 = 18x - 9 \implies 4x = 16 \implies x = 4\,\text{m}. \qquad \text{1 bod}$$

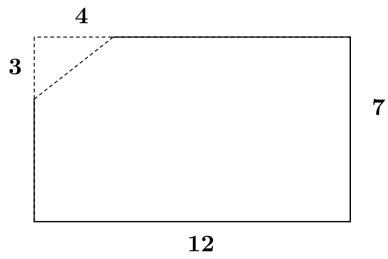
Napomena: Ako učenik ima drugačije rješenje, treba ga bodovati na sljedeći način:

- skica 1 bod
- uočavanje sličnosti karakterističnih trokuta 1 bod
- zapisivanje korektnog sustava jednadžbi koristeći uvjete zadatka 2 boda
- sređivanje dobivenog sustava 2 boda
- svođenje na jednu jednadžbu s jednom nepoznanicom 2 boda
- rješavanje jednadžbe – računanje visine x. 2 boda

Ako učenik napravi računsku grešku u nekom od koraka oduzeti jedan bod za taj korak, ali slijediti grešku i bodovati ostale korake ako su točno provedeni s učenikovim rezultatom.

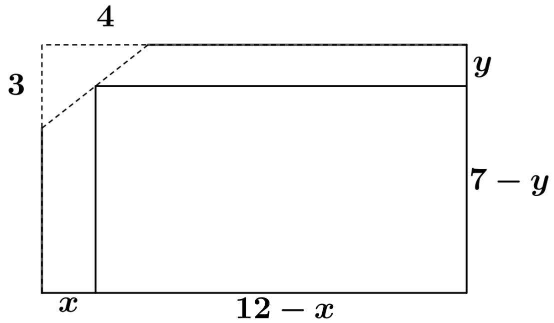
Zadatak B-2.7.

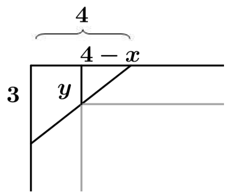
Od pravokutne ploče duljina stranica 12 cm i 7 cm, odrezan je jedan vrh u obliku pravokutnog trokuta s katetama duljina 4 cm i 3 cm, kao na slici. Iz preostalog dijela treba izrezati novu pravokutnu ploču. Kolika je najveća moguća površina nove pravokutne ploče? Odredite njezine dimenzije (duljine stranica).



Rješenje.

Označimo x i y kao na lijevoj slici. Duljine stranica novog pravokutnika su $12-x$ i $7-y$ pa je njegova površina jednaka $P=(12-x)(7-y)$. 1 bod





Zbog sličnosti trokuta (na desnoj slici) vrijedi $\dfrac{3}{4}=\dfrac{y}{4-x}$ iz čega slijedi $y=3-\frac{3}{4}x$. 2 boda

Tada je

$$P=P(x)=(12-x)\left(4+\frac{3}{4}x\right)=-\frac{3}{4}x^2+5x+48.$$ 1 bod

Najveća se vrijednost kvadratne funkcije P postiže za

$$x=-\frac{5}{2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}=\frac{10}{3} \quad\Longrightarrow\quad y=3-\frac{3}{4}\cdot\frac{10}{3}=\frac{1}{2}.$$ 2 boda

Najveća vrijednost kvadratne funkcije P iznosi

$$P_0=\frac{4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot 48-5^2}{4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}=\frac{169}{3}$$

(to jest $P\left(\frac{10}{3}\right)=\frac{169}{3}$). 2 boda

Dimenzije nove ploče su $12-x=12-\dfrac{10}{3}=\dfrac{26}{3}$ cm, $7-y=\dfrac{13}{2}$ cm. 2 boda

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

25. siječnja 2018.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1.

Riješite jednadžbu $\quad 9^{-(x+2)^2}+8\cdot 3^{-x^2-4x-5}-1=0.$

Rješenje.

Danu jednadžbu možemo pisati u obliku

$$9^{-(x+2)^2}+8\cdot 3^{-(x^2+4x+4)-1}-1=0$$

$$9^{-(x+2)^2}+8\cdot 3^{-(x+2)^2-1}-1=0 \qquad \text{1 bod}$$

$$9^{-(x+2)^2}+\frac{8}{3}\cdot 3^{-(x+2)^2}-1=0$$

Uvedimo supstituciju $3^{-(x+2)^2}=t$. Time danu jednadžbu svodimo na kvadratnu.

$$t^2+\frac{8}{3}t-1=0 \quad \text{ili} \quad 3t^2+8t-3=0 \qquad \text{1 bod}$$

Njezina su rješenja $t_1=-3$, $t_2=\frac{1}{3}$. Kako se radi o eksponencijalnoj funkciji, varijabla 1 bod
t ne može biti negativna, pa je $t=\frac{1}{3}$, odakle slijedi $3^{-(x+2)^2}=3^{-1}$. 1 bod

Dobivamo $-(x+2)^2=-1$ 1 bod

pa je $x+2=1$ ili $x+2=-1$

i konačno $x=-1$ ili $x=-3$. 1 bod

Zadatak B-3.2.

Odredite najveću vrijednost funkcije

$$f(x)=\left(\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}+\cdots+\sin\frac{k\pi}{3}+\cdots+\sin\frac{2018\pi}{3}\right)^2\cdot\cos x$$
$$+\left(\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3}+\cdots+\cos\frac{k\pi}{3}+\cdots+\cos\frac{2018\pi}{3}\right)^2\cdot\sin x.$$

Rješenje.

Vrijednosti koje poprimaju sinusi u prvoj zagradi su $\sin\frac{k\pi}{3} \in \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Zbroj prvih šest pribrojnika je

$$\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} + \sin\pi + \sin\frac{4\pi}{3} + \sin\frac{5\pi}{3} + \sin 2\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 = 0. \quad \text{2 boda}$$

Ovih se šest vrijednosti sinusa istim redom nastavljaju ponavljati.

Kako je $2018 : 6 = 336$ i ostatak 2, zbroj svih sinusa je

$$336 \cdot 0 + \sin\frac{2017\pi}{3} + \sin\frac{2018\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}. \quad \text{1 bod}$$

Analogno računamo i zbroj kosinusa u drugoj zagradi. Vrijednosti koje poprimaju kosinusi u drugoj zagradi su $\cos\frac{k\pi}{3} \in \left\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\pi + \cos\frac{4\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{3} + \cos 2\pi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 0. \quad \text{1 bod}$$

Zbroj svih kosinusa je

$$336 \cdot 0 + \cos\frac{2017\pi}{3} + \cos\frac{2018\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0. \quad \text{1 bod}$$

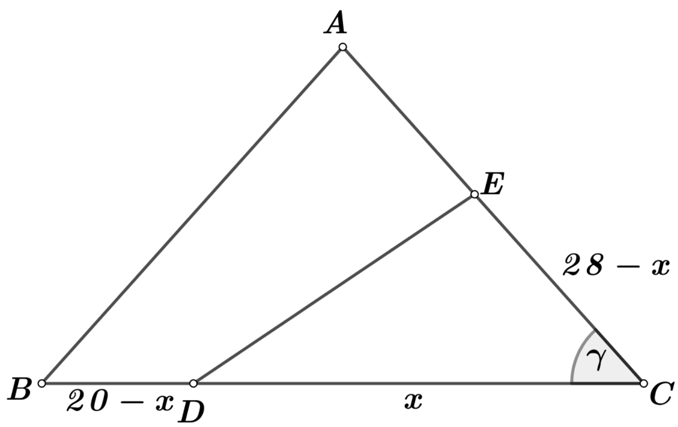
Dakle, $f(x) = 3 \cdot \cos x + 0 \cdot \sin x = 3\cos x$, pa je najveća vrijednost dane funkcije jednaka 3. 1 bod

Zadatak B-3.3.

Jednakokračni trokut ABC s osnovicom $\overline{BC}$, $|BC| = 20$, te krakovima duljine 18 podijeljen je dužinom $\overline{DE}$ na dva dijela jednakih opsega i površina. Točka D je na osnovici, a točka E na kraku $\overline{AC}$ te su obje različite od vrhova trokuta. Odredite duljinu $|DC|$.

Rješenje.

Označimo $x = |DC|$. Kut u vrhu C označimo s γ. Kako je opseg trokuta ABC podijeljen na dva jednaka dijela, vrijedi $|DC| + |CE| = 28$ pa je $|CE| = 28 - x$. 1 bod



$$P_{DCE} = \frac{1}{2}x \cdot (28 - x) \cdot \sin\gamma$$
$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 18 \cdot \sin\gamma$$ 1 bod

Kako je $P_{ABC} = 2P_{CDE}$ vrijedi

$$\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 18 \cdot \sin\gamma = 2 \cdot \frac{1}{2}x \cdot (28 - x) \cdot \sin\gamma$$ 1 bod

odakle slijedi $x(28 - x) = 180$. 1 bod

Rješavanjem kvadratne jednadžbe $x^2 - 28x + 180 = 0$ dobivamo rješenja $x = 10$ i $x = 18$. 1 bod

Za $x = 10$ vrijedi $28 - x = 18$, pa se točka E podudara s vrhom A. Zato je prema uvjetu zadatka jedino rješenje $x = 18$. 1 bod

Zadatak B-3.4.

Odredite neki period funkcije $f(x) = 2\sin\left(\frac{3}{4}x\right) + \cos\left(\frac{4}{5}x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Rješenje.

Temeljni period funkcije $f_1(x) = 2\sin\left(\frac{3}{4}x\right)$ je $P_1 = \frac{2\pi}{\frac{3}{4}} = \frac{8\pi}{3}$. 1 bod

Temeljni period funkcije $f_2(x) = \cos\left(\frac{4}{5}x - \frac{\pi}{3}\right)$ je $P_2 = \frac{2\pi}{\frac{4}{5}} = \frac{5\pi}{2}$. 1 bod

Uočimo da je svaki period funkcije f_1 oblika $\frac{8\pi}{3} \cdot n$, $n \in \mathbb{N}$, a svaki period funkcije f_2 oblika $\frac{5\pi}{2} \cdot m$, $m \in \mathbb{N}$. 1 bod

Period funkcije $f = f_1 + f_2$ je svaki broj koji je istovremeno oblika $\frac{8\pi}{3} \cdot n$ i $\frac{5\pi}{2} \cdot m$, za neke $m, n \in \mathbb{N}$. 1 bod

Proširimo razlomke do istog nazivnika: $\frac{8\pi}{3} = \frac{16\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{2} = \frac{15\pi}{6}$.

Najmanji zajednički višekratnik brojeva 16 i 15 je 240. Zato je $15 \cdot \frac{8\pi}{3} = 16 \cdot \frac{5\pi}{2} = \frac{240\pi}{6} = 40\pi$ period funkcije f.

Period funkcije f je svaki broj oblika $40k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. 2 boda

Napomena: Učeniku treba dati sve bodove za točan postupak i napisan bilo koji odgovor koji je višekratnik broja 40π.

Napomena: Ako je učenik pogodio period P, treba provjeriti da je $f(x + P) = f(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. U protivnom dobiva samo 1 bod.

Zadatak B-3.5.

Božićne se kuglice pakiraju u dvije vrste kutija, crvene i zelene. U crvene se kutije kuglice pakiraju u pet redova sa po četiri kuglice, a u zelene u tri reda sa po šest kuglica. Na koliko različitih načina možemo odabrati broj crvenih i broj zelenih kutija kako bismo spakirali 2018 božićnih kuglica? Ne smije biti nepopunjenih kutija i niti jedna kuglica ne smije ostati nespakirana.

Prvo rješenje.

U crvene se kutije pakira po 20 kuglica, a u zelene po 18 kuglica. Neka je x broj crvenih kutija, a y broj zelenih kutija. Treba odrediti $x, y \in \mathbb{N}_0$ takve da je $20x + 18y = 2018$, 1 bod

odnosno riješiti jednadžbu $10x + 9y = 1009$, $x, y \in \mathbb{N}_0$.

Jedno je rješenje očito uređeni par $(100, 1)$. 1 bod

Zato vrijedi $10(x - 100) + 9(y - 1) = 0$. 1 bod

Odatle je $x - 100 = -9k$, $y - 1 = 10k$, za neki $k \in \mathbb{N}_0$,

pa su rješenja oblika $x = 100 - 9k$, $y = 10k + 1$.

Kako su x i y iz skupa $\mathbb{N}_0$, iz $100 - 9k \geqslant 0$ i $10k + 1 \geqslant 0$ slijedi $k < 11.1$ pa je $k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10, 11\}$. 2 boda

Stoga ima ukupno 12 rješenja. 1 bod

Drugo rješenje.

Uz iste oznake, kao u prvom rješenju, riješit ćemo jednadžbu $10x + 9y = 1009$.

Iz $10x = 1009 - 9y$, 1 bod

zbog $x \geqslant 0$ slijedi $1009 - 9y \geqslant 0$, pa je $y \leqslant 112$. 2 boda

Uočimo da zadnja znamenka broja y mora biti 1, kako bi razlika $1009 - 9y$ bila djeljiva s 10. 1 bod

Kandidati za y su brojevi: 1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91, 101, 111.

Direktnom provjerom iz $10x + 9y = 1009$ dobivamo 12 rješenja:

$$\begin{gathered}(100, 1), \quad (91, 11), \quad (82, 21), \quad (73, 31), \quad (64, 41), \quad (55, 51), \\ (46, 61), \quad (37, 71), \quad (28, 81), \quad (19, 91), \quad (10, 101), \quad (1, 111).\end{gathered}$$ 2 boda

Zadatak B-3.6.

Na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ riješite sustav nejednadžbi

$$\begin{cases} (\operatorname{tg} x - 1)(\sin x + 1) < 0 \\ 4\sin^2 x - 2(\sqrt{3} + 1)\sin x + \sqrt{3} > 0. \end{cases}$$

Rješenje.

Kako je $\sin x + 1 > 0$, za svaki $x \in \langle 0, 2\pi\rangle \setminus \left\{\frac{3}{2}\pi\right\}$ slijedi da je $\operatorname{tg} x - 1 < 0$. 1 bod

Dakle, rješenje prve nejednadžbe je

$$x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4}\right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\rangle .$$ 2 boda

Uvođenjem supstitucije $\sin x = t$ rješavanje druge nejednadžbe svodi se na rješavanje kvadratne nejednadžbe $4t^2 - 2\left(\sqrt{3}+1\right)t + \sqrt{3} > 0$, odakle dobivamo $t < \dfrac{1}{2}$ ili $t > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2 boda

Iz $\sin x < \dfrac{1}{2}$ slijedi $x \in \left\langle 0, \dfrac{\pi}{6}\right\rangle \cup \left\langle \dfrac{5\pi}{6}, 2\pi\right\rangle$, a iz $\sin x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ slijedi $x \in \left\langle \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right\rangle$. 2 boda

Rješenje druge nejednadžbe je unija dobivenih intervala

$$x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{6}\right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{6}, 2\pi\right\rangle .$$ 1 bod

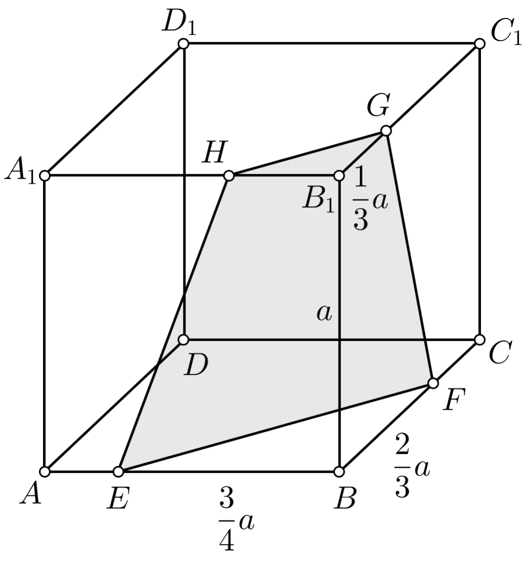
Presjekom skupova rješenja prve i druge nejednadžbe dobivamo konačno rješenje sustava nejednadžbi.

$$x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{6}\right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}\right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\rangle .$$ 2 boda

Zadatak B-3.7.

Kocku $ABCDA_1B_1C_1D_1$ brida a presiječemo ravninom koja prolazi točkama $E \in \overline{AB}$, $F \in \overline{BC}$ i $G \in \overline{B_1C_1}$ takvima da je $|AE| = \frac{1}{4}|AB|$, $|BF| = \frac{2}{3}|BC|$ i $|B_1G| = \frac{1}{3}|B_1C_1|$. Obujam manjega od dvaju tako nastalih geometrijskih tijela je $\dfrac{7}{6}$. Odredite obujam početne kocke.

Prvo rješenje.

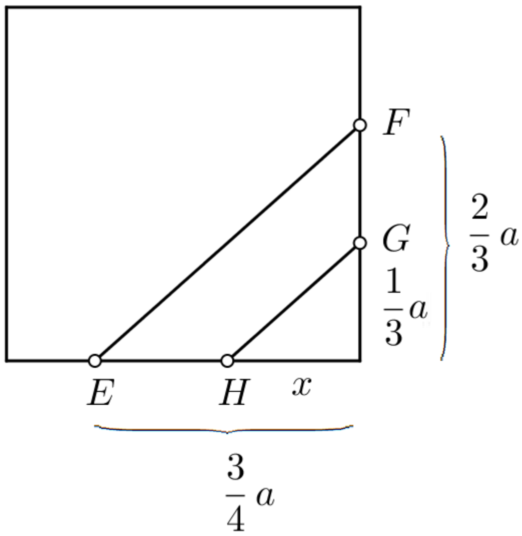


Uočimo da je dobiveno manje geometrijsko tijelo krnja piramida visine a.

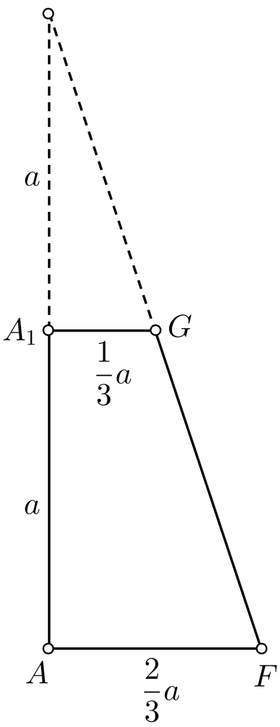
Njena donja baza je pravokutan trokut s katetama $|EB| = \frac{3}{4}\,a$ i $|BF| = \frac{2}{3}\,a$, a gornja baza pravokutan trokut s katetama $|B_1G| = \frac{1}{3}\,a$ i $|HB_1|$. 2 boda

Odredimo duljinu $x = |HB_1|$.

Promotrimo tlocrt kocke:



Iz sličnosti trokuta slijedi $x : \frac{3}{4}a = \frac{1}{3}a : \frac{2}{3}a$ odakle dobivamo $x = \frac{3}{8}a$. 2 boda



Analogno, zbog sličnosti je visina "cijele" piramide jednaka $2a$. 1 bod

Obujam „cijele" piramide jednak je

$V_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}a\cdot\frac{2}{3}a\right)\cdot 2a = \frac{1}{6}a^3.$ 2 boda

Obujam manje piramide (dopune) jednak je

$V_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}a\cdot\frac{1}{3}a\right)\cdot a = \frac{1}{48}\,a^3.$ 1 bod

Obujam krnje piramide jednak je

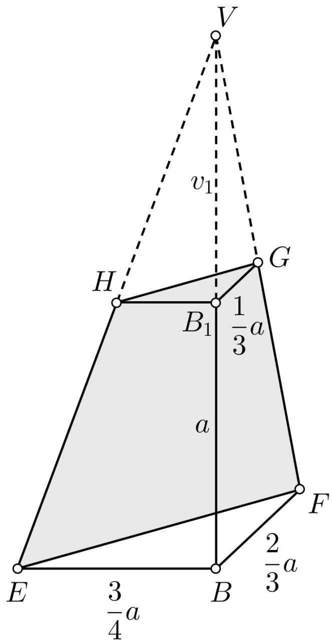
$V = V_1 - V_2 = \frac{1}{6}a^3 - \frac{1}{48}a^3 = \frac{7}{48}\,a^3.$ 1 bod

Prema danom uvjetu, $\frac{7}{48}a^3 = \frac{7}{6}$, dakle $a^3 = 8$. 1 bod

Slijedi da je volumen kocke jednak 8.

Drugo rješenje.

Kao i u prvom rješenju vidimo da je manji dio krnja piramida, te uočavamo $|EB| = \frac{3}{4}\,a$, $|BF| = \frac{2}{3}\,a$, $|B_1G| = \frac{1}{3}\,a$. 2 boda



„Cijela" piramida i manja piramida (dopuna) slične su s koeficijentom sličnosti $k = 2$ jer je

$|BF| : |B_1G| = \dfrac{2}{3}a : \dfrac{1}{3}a = 2 : 1.$ 2 boda

Tada je $|BV| : |B_1V| = (a + v_1) : v_1 = 2$,

pa je $v_1 = a$.

Visina „cijele" piramide jednaka je $2a$. 1 bod

Obujam „cijele" piramide jednak je

$V_1 = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4}a \cdot \dfrac{2}{3}a\right) \cdot 2a = \dfrac{1}{6}a^3.$ 2 boda

Zbog sličnosti vrijedi $V_1 : V_2 = k^3 = 8$. 1 bod

Obujam manje piramide je

$V_2 = \dfrac{1}{8}V_1 = \dfrac{1}{48}a^3,$

pa obujam krnje piramide iznosi $V = \dfrac{7}{8}V_1 = \dfrac{7}{48}a^3$. 1 bod

Sada zbog uvjeta slijedi $\frac{7}{48}a^3 = \frac{7}{6}$ pa je $a^3 = 8$. 1 bod

Obujam kocke je 8.

Treće rješenje.

Presjekom je nastala trostrana krnja piramida. (Skica kao u prvom rješenju) 1 bod

Veća baza je pravokutni trokut površine $B = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot a^2 = \dfrac{1}{4}a^2$. 1 bod

Vrijedi: $|BF| : |B_1G| = |VB| : |VB_1| = |EB| : |HB_1| = \frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2 : 1$. 2 boda

Manja baza ima površinu $b = \frac{1}{4}B = \frac{1}{16}a^2$. 1 bod

Visina krnje piramide je a. 1 bod

Koristimo formulu za obujam krnje piramide.

$$\frac{7}{6} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \left(\frac{1}{4}\,a^2 + \frac{1}{16}a^2 + \sqrt{\frac{a^2}{4} \cdot \frac{a^2}{16}}\right)$$ 2 boda

Sređivanjem dobivamo $\dfrac{7}{6} = \dfrac{a^3}{3}\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{8}\right) = \dfrac{7}{48}\,a^3$ 1 bod

i konačno $a^3 = 8$ $(a = 2)$. 1 bod

Obujam kocke je $V = 8$.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

25. siječnja 2018.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1.

Riješite jednadžbu

$$\binom{x+1}{x-2}+2\binom{x-1}{3}=7(x-1).$$

Rješenje.

Primijenimo li pravilo $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ na izraz $\binom{x+1}{x-2}=\binom{x+1}{x+1-x+2}=\binom{x+1}{3}$,

dana jednadžba prelazi u oblik $\binom{x+1}{3}+2\binom{x-1}{3}=7(x-1)$. 2 boda

Uvjet da je zadatak dobro definiran je $x+1\geqslant 3 \implies x\geqslant 2$ i $x-1\geqslant 3 \implies x\geqslant 4$.

Stoga za rješenje mora vrijediti $x\geqslant 4$. 1 bod

Primjenom pravila za računanje binomnih koeficijenata, dobivamo

$$\frac{(x+1)x(x-1)}{6}+2\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}=7(x-1)\Big/\cdot\frac{6}{x-1}$$
$$x^2+x+2(x^2-3x-2x+6)=42$$
$$x^2-3x-10=0 \implies x_1=5,\ x_2=-2.$$ 2 boda

Kako je $x\geqslant 4$, rješenje zadane jednadžbe je $x=5$. 1 bod

Zadatak B-4.2.

Pravac p koji sadrži desni fokus hiperbole $4x^2-5y^2=20$ i okomit je na os x, siječe hiperbolu u točkama A i B. Odredite opseg trokuta čiji su vrhovi A, B i lijevi fokus hiperbole.

Rješenje.

Koordinate fokusa hiperbole su $F_1(-3,0)$ i $F_2(3,0)$. 1 bod

Pravac p sadrži fokus $F_2(3,0)$ i okomit je na os x pa je njegova jednadžba $x=3$. 1 bod

Odredimo koordinate točaka A i B:

$$\left.\begin{array}{r} x=3 \\ 4x^2-5y^2=20 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad y=\pm\frac{4}{\sqrt{5}}.$$ 1 bod

Slijedi $A\left(3,-\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)$, $B\left(3,\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)$.

Duljine stranica trokuta su:

$$|AB|=\frac{8}{\sqrt{5}},$$ 1 bod

$$|AF_1|=\frac{14}{\sqrt{5}}, \quad |BF_2|=\frac{14}{\sqrt{5}}.$$ 1 bod

Slijedi $o=\dfrac{36}{\sqrt{5}}=\dfrac{36\sqrt{5}}{5}$ (nije nužno racionalizirati nazivnik). 1 bod

Zadatak B-4.3.

Ako su $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ rješenja jednadžbe $z+\dfrac{1}{z}=2\sin\dfrac{\pi}{7}$, koliko je $z_1^{770}+z_2^{770}$?

Rješenje.

Ako $z+\dfrac{1}{z}=2\sin\dfrac{\pi}{7}$ pomnožimo sa z dobit ćemo jednadžbu $z^2-2\sin\dfrac{\pi}{7}\cdot z+1=0$.

Rješenja jednadžbe su:

$$\begin{aligned} z_{1,2}&=\frac{2\sin\frac{\pi}{7}\pm\sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{7}-4}}{2}=\frac{2\sin\frac{\pi}{7}\pm 2\sqrt{-\left(1-\sin^2\frac{\pi}{7}\right)}}{2} \\ &=\sin\frac{\pi}{7}\pm i\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{7}}=\sin\frac{\pi}{7}\pm i\cos\frac{\pi}{7}. \end{aligned}$$ 2 boda

Napišimo trigonometrijski prikaz dobivenih rješenja:

$$z_1=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)=\cos\frac{5\pi}{14}+i\sin\frac{5\pi}{14}.$$ 1 bod

$$z_2=\cos\frac{5\pi}{14}-i\sin\frac{5\pi}{14}=\cos\left(-\frac{5\pi}{14}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{14}\right)=\cos\frac{23\pi}{14}+i\sin\frac{23\pi}{14}.$$ 1 bod

$$z_1^{770}=\cos\left(770\cdot\frac{5\pi}{14}\right)+i\sin\left(770\cdot\frac{5\pi}{14}\right)=\cos(275\pi)+i\sin(275\pi)=-1.$$

$$z_2^{770}=\cos\left(770\cdot\frac{23\pi}{14}\right)+i\sin\left(770\cdot\frac{23\pi}{14}\right)=\cos(1265\pi)+i\sin(1265\pi)=-1.$$

$$z_1^{770}+z_2^{770}=-2.$$ 2 boda

Zadatak B-4.4.

U nekom je brojevnom sustavu, s bazom manjom od 25, umnožak dvoznamenkastog broja s jednakim znamenkama i njegovoga dvokratnika jednak 1210 (u istom brojevnom sustavu). O kojem se broju radi i u kojem brojevnom sustavu?

Rješenje.

Tražimo x i b za koje vrijedi $\overline{xx}_b \cdot 2\overline{xx}_b = 1210_b$.

Osim uvjeta iz zadatka da je baza $b < 25$, uočimo i da je $b > 2$. 1 bod

Traženi broj zapisujemo kao $\overline{xx}_b = xb + x$.

Tada je $(xb + x) \cdot 2\,(xb + x) = b^3 + 2b^2 + b$. 1 bod

$2x^2(b+1)^2 = b(b+1)^2 \implies 2x^2 = b$. 1 bod

Zbog uvjeta na bazu je $x^2 = 4$ ili $x^2 = 9$. 1 bod

Prvo rješenje je broj 22 u sustavu s bazom 8. 1 bod

Drugo rješenje je broj 33 u sustavu s bazom 18. 1 bod

(Provjera: $22_8 \cdot 44_8 = 18 \cdot 36 = 648 = 1210_8$, $33_{18} \cdot 66_{18} = 57 \cdot 114 = 6498 = 1210_{18}$.)

Zadatak B-4.5.

Lea je svoju sestru Elu učila zbrajati prirodne brojeve. Nakon nekog vremena Lea je odabrala prirodni broj n i na papiru napisala $1 + 2 + 3 + \cdots + n$. Prilikom zbrajanja, Ela je zabunom jedan od zapisanih brojeva zbrojila dva puta i na kraju dobila rezultat 228. Koliko je brojeva Ela trebala zbrojiti? Koji je broj zbrojila dva puta?

Prvo rješenje.

Označimo s x broj koji je Ela zbrojila dva puta. Tada je

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + x = 228,\ 1 \leqslant x \leqslant n, \tag{1}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + x = 228,$$ 1 bod

$$n(n+1) + 2x = 456. \tag{2}$$

Iz (1) i (2) slijedi

$2 \leqslant 456 - n(n+1) \leqslant 2n$, odnosno 1 bod

$n^2 + n \leqslant 454$ i $n^2 + 3n \geqslant 456$.

Ovaj sustav možemo zapisati kao

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant 454 + \frac{1}{4} \quad \text{i} \quad \left(n + \frac{3}{2}\right)^2 \geqslant 456 + \frac{9}{4},$$ 1 bod

iz čega slijedi $n \geqslant 19.9$ i $n \leqslant 20.9$, $n \in \mathbb{N}$. 1 bod

Jedini prirodni broj koji zadovoljava obje nejednakosti je broj $n = 20$. 1 bod

Tada je $x = 18$. 1 bod

Drugo rješenje.

Zbrajanjem prvih $1, 2, 3, 4, \ldots, 17, 18, 19, 20, 21, \ldots$ prirodnih brojeva dobivamo:

$1, 3, 6, 10, \ldots, 153, 171, 190, 210, 231, \ldots$.

Ako je $n \leqslant 19$, najveći broj koji je Ela mogla zbrojiti dva puta je 19, i u tom slučaju dobiveni zbroj bio bi najviše $190 + 19 = 209$. 2 boda

Ako je $n \geqslant 21$, najmanji broj koji je mogla zbrojiti dva puta je 1, i u tom slučaju dobiveni zbroj ne bi bio manji od $21 \cdot 11 + 1 = 232$. 2 boda

Stoga je $n = 20$. Zbroj prvih 20 prirodnih brojeva je 210.
Broj koji je pribrojen dvaput je $x = 18$. 2 boda

Napomena: Za rješenje bez obrazloženja da je to jedina mogućnost, uz postupak računanja zbroja dodijeliti 2 boda, a za samo pogođeno rješenje bez ikakvog postupka 1 bod.

Zadatak B-4.6.

Odredite sve realne brojeve x, y i α za koje vrijedi

$$y = -2018x \quad \text{i} \quad \frac{2018x + i}{y + i} = \frac{1 + i\sin\alpha}{1 - i\sin 3\alpha}, \qquad x \neq 0, \alpha \in \langle 0, 2\pi\rangle.$$

i označava imaginarnu jedinicu ($i^2 = -1$).

Rješenje.

Nakon množenja druge jednakosti sa zajedničkim nazivnikom dobivamo

$$\frac{2018x + i}{y + i} = \frac{1 + i\sin\alpha}{1 - i\sin 3\alpha}$$
$$(y + i)(1 + i\sin\alpha) = (2018x + i)(1 - i\sin 3\alpha)$$
$$y - \sin\alpha + i(1 + y\sin\alpha) = 2018x + \sin 3\alpha + i(1 - 2018x\sin 3\alpha) \qquad (1)$$ 1 bod

Izjednačavanjem imaginarnih dijelova lijeve i desne strane u (1) te zamjenom $y = -2018x$ dobivamo:

$$1 + y\sin\alpha = 1 - 2018x\sin 3\alpha$$
$$1 - 2018x\sin\alpha = 1 - 2018x\sin 3\alpha.$$ 2 boda

Zbog $x \neq 0$ vrijedi $\sin\alpha = \sin 3\alpha$.

Rješenja ove jednadžbe su $\alpha = 3\alpha + 2k\pi$ ili $\alpha = \pi - 3\alpha + 2k\pi$,

odnosno, $\alpha = k\pi$ ili $\alpha = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. 2 boda

Kako je $\alpha \in \langle 0, 2\pi\rangle$, rješenja su $\alpha \in \left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \pi, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right\}$. 1 bod

Izjednačavanjem realnih dijelova u (1) dobivamo

$$y - \sin\alpha = 2018x + \sin 3\alpha$$
$$2y = \sin\alpha + \sin 3\alpha \quad (\text{zbog } y = -2018x \text{ i } \sin\alpha = \sin 3\alpha)$$ 1 bod
$$y = \sin\alpha.$$

Ako je $\alpha = \pi$, onda je $y = x = 0$, što nije rješenje zbog uvjeta $x \neq 0$ u zadatku. 1 bod

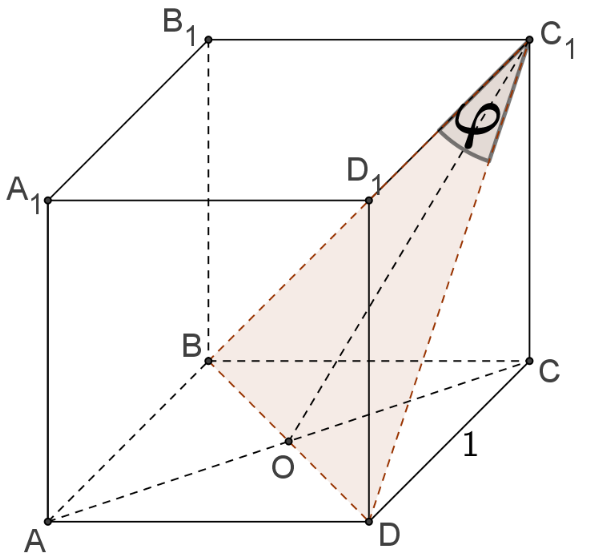
Ako je $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ ili $\dfrac{3\pi}{4}$, onda je $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x = -\dfrac{1}{2018} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4036}$. 1 bod

Ako je $\alpha = \dfrac{5\pi}{4}$ ili $\dfrac{7\pi}{4}$, onda je $y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x = -\dfrac{1}{2018} \cdot \dfrac{-\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4036}$. 1 bod

Zadatak B-4.7.

Duljina stranice baze pravilne uspravne četverostrane prizme jednaka je 1. Ravnina π sadrži jedan vrh gornje baze i jednu dijagonalu donje baze, te dijeli prizmu na dva dijela različitih obujmova. Pravci u kojima ravnina π siječe dvije bočne strane prizme zatvaraju kut φ takav da je $\cos\varphi = \dfrac{1}{3}$. Izračunajte oplošje i obujam manjeg od nastalih geometrijskih tijela.

Rješenje.



1 bod

Prema uvjetima zadatka vrijedi $|CD| = 1$ i $\sphericalangle BC_1D = \varphi$. Lako dobivamo $|BD| = \sqrt{2}$, $|OD| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Iz $\triangle OC_1D$ slijedi $|C_1D| = \dfrac{|OD|}{\sin\frac{\varphi}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$. 2 boda

Iz $\triangle C_1CD$ slijedi $|CC_1|^2 = |C_1D|^2 - |CD|^2 = \dfrac{1}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}} - 1$. 1 bod

Kako je $\cos\varphi = \frac{1}{3}$, slijedi da je $\sin^2\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{1-\cos\varphi}{2} = \dfrac{1}{3}$ pa je $|CC_1| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 1 bod

Obujam piramide $BDCC_1$ jednak je

$$V = \frac{1}{3}P_{BDC} \cdot |CC_1| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$ 2 boda

Uočimo da je $|OC| = |CC_1| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ pa je $|OC_1| = 1$. 1 bod

$$\begin{aligned}
P_{\triangle BDC} &= \frac{1}{2}, \\
P_{\triangle DCC_1} &= \frac{|DC| \cdot |CC_1|}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \\
P_{\triangle BDC_1} &= \frac{|BD| \cdot |OC_1|}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

Oplošje piramide je:

$$O = P_{\triangle BDC} + 2 \cdot P_{\triangle DCC_1} + P_{\triangle BDC_1} = \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{2}.$$ 2 boda