Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

25. siječnja 2018.

1. Matija 2018. godine navršava onoliko godina koliki je trostruki zbroj znamenaka godine njegovog rođenja. Isto vrijedi i za njegovog djeda. Koliko je godina djed navršio u godini Matijinog rođenja?

2. Dan je pravokutni trokut ABC s pravim kutom pri vrhu C i stranicama duljina $|AB| = 26$, $|BC| = 24$. U njega je upisana polukružnica s promjerom na stranici $\overline{BC}$ koji sadrži točku C. Polukružnica dira stranicu $\overline{AB}$. Koliki je polumjer upisane polukružnice?

3. Kažemo da je prirodni broj N *zanimljiv* ako je djeljiv s 36 i ako postoji prirodni broj k manji od 10 takav da su $1, 2, \ldots, k$ u nekom poretku znamenke broja N u dekadskom zapisu. Odredi najmanji zanimljiv prirodni broj.

4. Odredi sve parove realnih brojeva (x, y) za koje vrijedi $x + y = x^2 + y^2 = x^3 + y^3$.

5. Na koliko se načina može u svako polje tablice 2018×2018 upisati po jedan prirodni broj tako da zbroj brojeva u bilo koja tri uzastopna polja u istom retku ili stupcu bude 5?

* * *

6. U trokutu ABC mjera kuta $\sphericalangle ABC$ je $120°$, te vrijedi $|AB| = 6$ i $|BC| = 9$. Neka su točke P i Q na stranici $\overline{AC}$ takve da je trokut BPQ jednakostraničan. Odredi $|PQ|$.

7. Marin raspoređuje brojeve 1, 2, …, 8 u vrhove kocke, a zatim svakom bridu pridružuje zbroj brojeva u vrhovima koje taj brid spaja. Može li Marin postići da svi brojevi pridruženi bridovima budu međusobno različiti?

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

25. siječnja 2018.

1. Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi

$$\operatorname{Re}(z) = 9 \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}(z^2) = \operatorname{Im}(z^3).$$

2. Dan je pravokutnik $ABCD$. Između pravaca AB i CD, paralelno s njima, nacrtan je određeni broj crvenih pravaca, a između pravaca AD i BC, paralelno s njima, određeni broj plavih pravaca. Time je pravokutnik podijeljen na 775 malih pravokutnika, a crveni i plavi pravci međusobno se sijeku u 720 točaka. Koliko ima crvenih, a koliko plavih pravaca?

3. Odredi sve trojke prostih brojeva (p, q, r) za koje vrijedi

$$p^q = r - 1.$$

4. Odredi sve parove realnih brojeva (x, y) za koje vrijedi

$$\begin{aligned} x^2 + xy - 4y^2 &= -1 \\ 4x^2 + xy - 11y^2 &= -2. \end{aligned}$$

5. Dan je trapez $ABCD$ s osnovicama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, takav da je trokut ABC šiljastokutan. Neka je O središte kružnice opisane trokutu ABC, a točka E sjecište pravaca OB i CD. Ako je $\sphericalangle DBC = \sphericalangle CEB + 10°$, odredi veličinu kuta između dijagonala trapeza $ABCD$.

* * *

6. U trokutu ABC vrijedi $|AC| = 2$, $|BC| = 1$, a kut pri vrhu C je pravi. Kvadrat je smješten unutar tog trokuta tako da mu dva vrha leže na dužini $\overline{AC}$, treći na stranici $\overline{AB}$, a četvrti na kružnici polumjera 1 sa središtem u točki B. Odredi duljinu stranice tog kvadrata.

7. Retci tablice 50×50 označeni su brojevima $a_1, \ldots, a_{50}$, a stupci brojevima $b_1, \ldots, b_{50}$. Tih 100 brojeva je međusobno različito i među njima je točno 50 racionalnih brojeva. Tablica je popunjena tako da je za $i, j = 1, 2, \ldots, 50$, u polje (i, j) upisan broj $a_i + b_j$. Odredi najveći mogući broj racionalnih brojeva upisanih u polja tablice.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

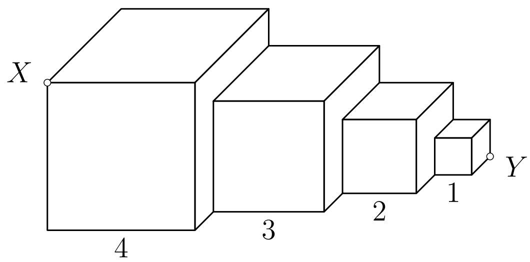
3. razred – srednja škola – A varijanta

25. siječnja 2018.

1. Odredi sve realne brojeve x za koje vrijedi

$$1 \leqslant \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \leqslant 3.$$

2. Četiri kocke duljina bridova 1, 2, 3 i 4 nalaze se jedna do druge kao na slici. Odredi duljinu dijela dužine $\overline{XY}$ koji se nalazi unutar kocke brida duljine 3.



3. Odredi sve realne brojeve x za koje vrijedi

$$(x-1009)^3 + (2x-1009)^3 + (2018-3x)^3 = 0.$$

4. Na koliko se načina sva slova $A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I$ mogu poredati tako da su i samoglasnici i suglasnici poredani abecednim redom?

5. Odredi sve proste brojeve p za koje postoji prirodan broj m takav da je broj

$$p^m + 4$$

kvadrat prirodnog broja.

* * *

6. Neka su $\overline{BD}$ i $\overline{CE}$ visine šiljastokutnog trokuta ABC. Odredi najmanju veličinu kuta $\sphericalangle BAC$ za koju je moguće da vrijedi $|AE| \cdot |AD| = |BE| \cdot |CD|$.

7. Zgrada uz prizemlje ima još 100 katova. Dizalo u toj zgradi ima samo dvije tipke A i B. Pritiskom na tipku A dizalo se penje za 7 katova, a pritiskom na tipku B dizalo se spušta za 9 katova. Je li moguće takvim dizalom doći sa svakog kata na bilo koji drugi?

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

25. siječnja 2018.

1. Odredi zadnje dvije znamenke broja $(1!)^2 + (2!)^2 + \cdots + (2018!)^2$.

2. Neka je z kompleksan broj takav da je $\arg z \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ i $z^6 + z^3 + 1 = 0$. Odredi modul i argument broja z.

Argument kompleksnog broja $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ je broj $\arg z = \varphi$.

3. Dokaži da je $2^{2^{n+2}} + 4$ višekratnik broja 10 za svaki prirodni broj n.

4. U kutiji se nalazi n kuglica, od kojih su neke bijele, a neke crne. Odredi n ako je vjerojatnost da izvlačenjem dviju kuglica izvučemo jednu bijelu i jednu crnu jednaka $\frac{1}{2}$ i poznato je da kuglica jedne boje ima za 2018 više nego kuglica druge boje.

5. Odredi geometrijsko mjesto (skup) središta svih kružnica koje izvana diraju kružnicu s jednadžbom $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$, a os x im je tangenta.

* * *

6. Neka je $a_1, a_2, \ldots, a_{41}$ aritmetički niz takav da je

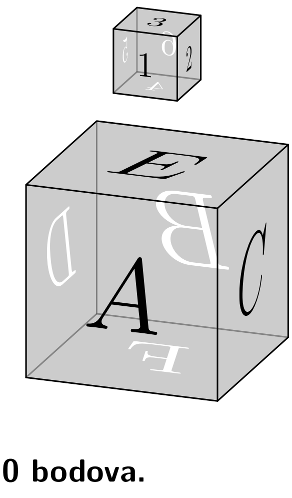
$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{40}} + \sqrt{a_{41}}}$$

prirodni broj. Ako je $a_1 = 1$, a razlika niza prirodni broj, odredi razliku niza.

7. Dano je 27 identičnih standardnih igraćih kockica $1 \times 1 \times 1$ s brojevima 1 do 6, kao na gornjoj slici (nasuprot 1 je 6, nasuprot 2 je 5 i nasuprot 3 je 4).

Od njih je sastavljena kocka $3 \times 3 \times 3$ tako da se kockice uvijek diraju stranama na kojima je isti broj. Promatramo zbrojeve brojeva napisanih na stranama velike kocke. Ti zbrojevi su označeni slovima A, B, C, D, E, F, kao na donjoj slici (parovi na suprotnim stranama su A i B, C i D te E i F).

Ako je $A = 9$ i $C = 36$, odredi B, D, E i F.



Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.