ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. veljače 2018.

4. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

**1. Prvi način:**

$52328 - 28 : 2 + (8 \cdot 5320 + 5320 \cdot 2) + 4827 \cdot 5 \cdot (145 - 145) =$

$= 52328 - 14 + (8 \cdot 5320 + 5320 \cdot 2) + 4827 \cdot 5 \cdot 0$ 2 BODA

(1 BOD za količnik, 1 BOD za zagradu)

$= 52328 - 14 + 5320 \cdot (8 + 2) + 0$ 3 BODA

(2 BODA za distributivnost, 1 BOD za umnožak s nulom)

$= 52328 - 14 + 5320 \cdot 10$ 2 BODA

$= 52328 - 14 + 53200$ 1 BOD

$= 52314 + 53200$ 1 BOD

$= 105514$ 1 BOD

……………………………………………………………………………..…. UKUPNO 10 BODOVA

**Drugi način:**

$52328 - 28 : 2 + (8 \cdot 5320 + 5320 \cdot 2) + 4827 \cdot 5 \cdot (145 - 145) =$

$= 52328 - 14 + (5320 \cdot 8 + 5320 \cdot 2) + 4827 \cdot 5 \cdot 0$ 2 BODA

(1 BOD za količnik, 1 BOD za zagradu)

$= 52328 - 14 + (42560 + 10640) + 0$ 3 BODA

(po 1 BOD za umnoške u zagradi, 1 BOD za umnožak s nulom)

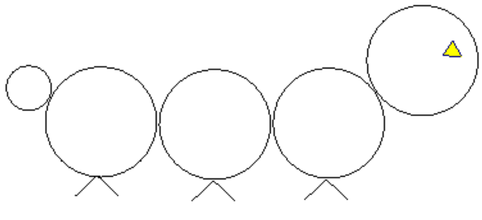
$= 52328 - 14 + 53200$ 3 BODA

$= 52314 + 53200$ 1 BOD

$= 105514$ 1 BOD

……………………………………………………………………………..…. UKUPNO 10 BODOVA

**2.**



Neka je CCZPŽ oznaka za bojanje gusjenice redom bojama crvena, crvena, zelena, plava i žuta.

Mogući načini bojanja su: CCZPŽ, CCZŽP, CCPZŽ, CCPŽZ, CCŽZP, CCŽPZ,
PCCZŽ, PCCŽZ, PZCCŽ, PŽCCZ, PZŽCC, PŽZCC,
ZCCPŽ, ZCCŽP, ZPCCŽ, ZŽCCP, ZPŽCC, ZŽPCC,
ŽCCPZ, ŽCCZP, ŽPCCZ, ŽZCCP, ŽPZCC i ŽZPCC. 8 BODOVA

(za svaka tri točna bojanja 1 BOD)

Bojanje gusjenice uz zadane uvjete može se učiniti na 24 načina. 2 BODA

……………………………………………………………………………..…. UKUPNO 10 BODOVA

**Napomena:** Ako je učenik ispisivanjem načina bojanja pokazao razumijevanje uvjeta i ispisao 16 ili više načina, treba mu (uz točno prebrojavanje) dati proporcionalan broj bodova.

**3.** To su brojevi: 900,
801, 810,
702, 720, 711,
603, 630, 612, 621,
504, 540, 513, 531, 522,
405, 450, 414, 441, 423, 432,
306, 360, 315, 351, 324, 342, 333,
207, 270, 216, 261, 225, 252, 234, 243,
108, 180, 117, 171, 126, 162, 135, 153, 144. 9 BODOVA

Takvih brojeva ima 45. 1 BOD

……………………………………………………………………….…. UKUPNO 10 BODOVA

**Napomena:** Svakih 5 točno ispisanih brojeva bodovati s JEDNIM BODOM.

**4. Prvi način:**

Najmanje je posađeno topola pa s $\boxed{T}$ označimo broj topola posađenih u akciji pošumljavanja. 1 BOD

Kako je broj topola jednak polovini broja posađenih breza, onda je broj posađenih breza dvostruko veći od broja posađenih topola tj. broj posađenih breza možemo označiti s:

$$\boxed{T}\boxed{T}$$ 1 BOD

Broj hrastova je tri puta veći od broja breza pa broj hrastova možemo označiti s:

$$\boxed{T}\boxed{T}\boxed{T}\boxed{T}\boxed{T}\boxed{T}$$ 1 BOD

Kako je javora posađeno 14 više od hrastova, njihov broj označimo s:

$$\boxed{T}\boxed{T}\boxed{T}\boxed{T}\boxed{T}\boxed{T}\boxed{\ 14\ }$$ 1 BOD

Ukupan broj tj. 209 posađenih stabala možemo prikazati s:

$$\boxed{T}\boxed{T}\boxed{T}\boxed{T}\boxed{T}\boxed{T}\boxed{T}\boxed{T}\boxed{T}\boxed{T}\boxed{T}\boxed{T}\boxed{T}\boxed{T}\boxed{T}\boxed{\ 14\ }$$ 1 BOD

Kako je 209 – 14 = 195, a 195 : 15 = 13, zaključujemo da je broj posađenih topola 13. 2 BODA

Konačno, broj posađenih breza je 2 · 13 = 26, hrastova 3 · 26 = 78, a javora 78 + 14 = 92. 3 BODA

……………………………………………………………………….…. UKUPNO 10 BODOVA

**Drugi način:**

Najmanje je posađeno topola pa s $x$ označimo broj topola posađenih u akciji pošumljavanja. 1 BOD

Kako je broj topola jednak polovini broja posađenih breza, onda je broj posađenih breza dvostruko veći od broja posađenih topola tj. broj posađenih breza je $2x$. 1 BOD

Broj hrastova je tri puta veći od broja breza pa je broj hrastova $6x$. 1 BOD

Kako je javora posađeno 14 više od hrastova, njihov je broj $6x + 14$. 1 BOD

Ukupan broj posađenih stabala je 209 pa vrijedi:

$$x + 2x + 6x + 6x + 14 = 209,\text{ odnosno:}$$ 1 BOD

$$15x + 14 = 209.$$

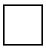
Kako je 209 – 14 = 195, onda je $15x = 195$. 1 BOD

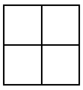
195 : 15 = 13 pa je $x = 13$. Broj posađenih topola je 13. 1 BOD

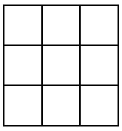
Konačno, broj posađenih breza je 2 · 13 = 26, hrastova 3 · 26 = 78, a javora 78 + 14 = 92. 3 BODA

……………………………………………………………………….…. UKUPNO 10 BODOVA

**5. a)** Na slici je moguće izbrojiti sljedeće kvadrate:

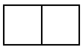
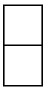

9 kvadrata površine 1 cm$^2$, 1 BOD

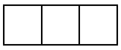
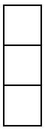

4 kvadrata površine 4 cm$^2$, 1 BOD

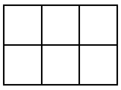
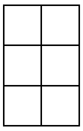

1 kvadrat površine 9 cm$^2$. 1 BOD

Zbroj površina svih kvadrata je $9 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 9 = 34$ cm$^2$. 2 BODA

**b)** Pravokutnika koji nisu kvadrati ima:


6 pravokutnika površine 2 cm$^2$,

6 pravokutnika površine 2 cm$^2$, 1 BOD


3 pravokutnika površine 3 cm$^2$,

3 pravokutnika površine 3 cm$^2$, 1 BOD


2 pravokutnika površine 6 cm$^2$,

2 pravokutnika površine 6 cm$^2$. 1 BOD

Zbroj površina svih pravokutnika koji nisu kvadrati je $12 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 6 = 66$ cm$^2$. 2 BODA
…………………………………………………………………………..…. UKUPNO 10 BODOVA

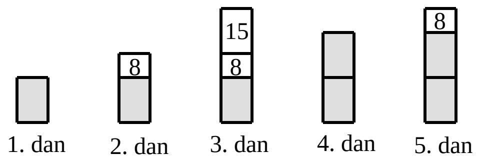
ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. veljače 2018.

5. razred - rješenja

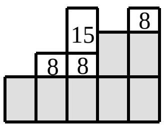
OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

**1. Prvi način:** Neka je prvi dan pročitao $x$ stranica knjige.
1. dan: $x$ stranica
2. dan: $x + 8$ stranica
3. dan: $(x + 8) + 15 = x + 23$ stranice
4. dan: $x + x$ stranica
5. dan: $x + x + 8$ stranica — 3 BODA
Vrijedi jednadžba:
$x + x + 8 + x + 23 + x + x + x + x + 8 = 200$ — 1 BOD
Pojednostavljivanjem dobivamo:
$7\,x = 200 – 39$,
$x = 161 : 7$,
$x = 23$. — 3 BODA
Prvi dan je pročitao 23 stranice knjige, drugi dan 31 stranicu, treći i četvrti dan po 46 stranica, a peti dan 54 stranice knjige. — 3 BODA
………………………………………………………………………..…. UKUPNO 10 BODOVA

**Drugi način:** Označimo li s $\square$ broj stranica pročitanih prvog dana, za ostale dane vrijedi:




3 BODA

Ukupno pročitan broj stranica je: 

1 BOD

Zaključujemo da $\square\square\square\square\square\square\square$ vrijedi:

$200 – (8 + 8 + 8 + 15) = 200 – 39 = 161$, — 2 BODA

tj. da $\square$ vrijedi $161 : 7 = 23$. — 1 BOD

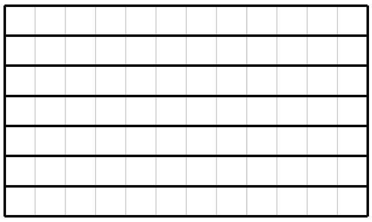
Prvi dan je pročitao 23 stranice knjige, drugi dan 31 stranicu, treći i četvrti dan po 46 stranica, a peti dan 54 stranice knjige. — 3 BODA
……………………………………………………………………........ UKUPNO 10 BODOVA

**2.** Broj je djeljiv brojem 72, ako je djeljiv i brojem 8 i brojem 9. 1 BOD
Znamenke $a$, $b$, $c$ i $d$ mogu imati vrijednost 2, 3, 5 i 7. 1 BOD
Tada je 2 + 3 + 5 + 7 = 17. 1 BOD
Da bi broj bio djeljiv brojem 9, mora biti $x = 1$. 1 BOD
Broj $\overline{1abcd}$ je djeljiv brojem 8, pa samim tim i brojem 2. To jedino vrijedi za $d = 2$. 1 BOD
Da bi broj bio djeljiv brojem 8, troznamenkasti završetak $\overline{bc2}$ mora biti djeljiv brojem 8,
pri čemu $b$ i $c$ mogu imati vrijednost 3, 5 ili 7. 1 BOD
Postoji 6 mogućnosti: 352, 372, 532, 572, 732 i 752. 1 BOD
Dijeljenjem brojem 8 provjeri se da djeljivost vrijedi samo za 352 i 752. 1 BOD
Za 352 je $a = 7$, a za 752 je $a = 3$. 1 BOD
Postoje dva tražena broja: 13 752 i 17 352. 1 BOD
……………………………………………………….………………..…. UKUPNO 10 BODOVA

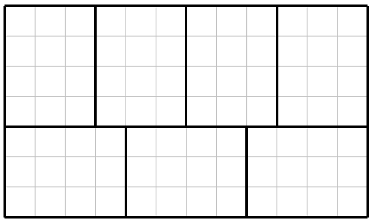
**Napomena:** Provjera djeljivosti brojem 9 i otkrivanje prve znamenke broja može se napraviti i nakon određivanja četveroznamenkastog završetka broja.

**3.** Površina pravokutne ploče 7 × 12 jednaka je 7 · 12 = 84. 1 BOD
Kako bismo je popločali sa 7 sukladnih pravokutnika, površina svakog
od tih pravokutnika mora biti jednaka 12. 2 BODA
Dimenzije pravokutnika čije su duljine prirodni brojevi mogu biti samo jedne
od sljedećih: 1 × 12, 2 × 6 ili 3 × 4. 2 BODA

Pravokutnicima dimenzija 1 × 12 možemo popločati ploču dimenzija 7 × 12,
jer 7 takvih pravokutnika možemo složiti jednog do drugog, kao na slici:



Međutim, stranice tih pravokutnika nisu prirodni brojevi veći od jedan, pa to nije rješenje. 1 BOD
Popločavanje dimenzije pravokutnika 2 × 6 nije moguće jer se takvim pravokutnicima
može popločiti samo ploča kojoj su širina i dužina parni brojevi, a naša ploča nije takva. 2 BODA
Pravokutnicima dimenzija 3 × 4 možemo popločati ploču 7 × 12, jer ih
možemo složiti tako da 4 stavimo jednog do drugog po duljini ploče,
a preostala 3 okomito na njih, kao na slici: 2 BODA



……………………………………………………………………………..…. UKUPNO 10 BODOVA

**Napomena 1:** Za popločavanje pravokutnicima dimenzija 3 × 4 učenik mora dati primjer, ali taj je primjer dovoljno ili nacrtati ili opisati riječima (nije potrebno oboje).

**Napomena 2:** Učenici mogu pokazati da popločavanje pravokutnicima dimenzija $2 \times 6$ nije moguće i na neki drugačiji način od gore navedenog, a svaki ispravan način zaključivanja da takve dimenzije nisu moguće treba, kao i u gornjem slučaju, bodovati s 2 BODA.

4. **Prvi način:**

Promatramo skupine od tri kuće s parnim i dvije kuće s neparnim brojem.
To je zajedno pet kuća, a budući da je $105 : 5 = 21$, zaključujemo da u ulici ima 21 takva skupina.
U ulici ima $21 \cdot 3 = 63$ kuće s parnim i $21 \cdot 2 = 42$ kuće s neparnim kućnim brojem. 3 BODA
S parne su strane kuće označene brojevima od 2 do 126.
Dakle, 4 su kuće s jednoznamenkastim brojevima (od 2 do 8),
45 kuća s dvoznamenkastim brojevima (od 10 do 98),
te 14 kuća s troznamenkastim brojevima (od 100 do 126).
Za njihovo označavanje upotrijebljeno je $4 \cdot 1 + 45 \cdot 2 + 14 \cdot 3 = 136$ znamenaka. 3 BODA

S neparne su strane kuće označene brojevima od 1 do 83.
Dakle, 5 je kuća s jednoznamenkastim brojevima (od 1 do 9),
a 37 kuća s dvoznamenkastim brojevima (od 11 do 83).
Za njihovo označavanje upotrijebljeno je $5 \cdot 1 + 37 \cdot 2 = 79$ znamenaka. 3 BODA

Za označavanje kuća s obje strane ulice upotrijebljeno je $136 + 79 = 215$ znamenaka. 1 BOD
……………………………………………………………………….…. UKUPNO 10 BODOVA

**Drugi način:**

Promatramo skupine od tri kuće s parnim i dvije kuće s neparnim brojem.
To je zajedno pet kuća, a budući da je $105 : 5 = 21$, zaključujemo da u ulici ima 21 takva skupina.
1 BOD
S parne su strane kuće označene brojevima od 2 do 126, a s neparne su strane kuće označene brojevima od 1 do 83. 1 BOD
Do broja 84 pojavljuju se svi prirodni brojevi redom, a od 86 do 126 samo parni. 1 BOD
Za prvih 9 jednoznamenkastih prirodnih brojeva upotrijebljeno je $9 \cdot 1 = 9$ znamenaka. 1 BOD
Za dvoznamenkaste brojeve od 10 do 84 upotrijebljeno je $75 \cdot 2 = 150$ znamenaka. 2 BODA
Za parne brojeve 86, 88, 90, 92, 94, 96 i 98 upotrijebljeno je $7 \cdot 2 = 14$ znamenaka. 1 BOD
Za troznamenkaste parne brojeve 100, 102, … , 126 upotrijebljeno je $14 \cdot 3 = 42$ znamenke.
2 BODA
Za označavanje kuća s obje strane ulice upotrijebljeno je $9 + 150 + 14 + 42 = 215$ znamenaka.
1 BOD
……………………………………………………………………..….. UKUPNO 10 BODOVA

5. **Prvi način:**

Zbroj umnožaka u 1. retku / 1. stupcu jednak je
$1 + 2 + 3 + \ldots + 10 + 11 + 12 = (12 \cdot 13) : 2 = 156 : 2 = 78.$ 2 BODA
Zbroj umnožaka u 2. retku / 2. stupcu je
$2 + 4 + 6 + \ldots + 20 + 22 + 24 = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 10 + 11 + 12) = 2 \cdot 78.$ 2 BODA
Analogno, zbroj umnožaka u 3. retku / 3. stupcu je $3 \cdot 78$ i dalje redom do $12 \cdot 78$. 3 BODA
Zbroj zbrojeva svih umnožaka po svim retcima / stupcima je
$78 + 2 \cdot 78 + 3 \cdot 78 + \ldots + 10 \cdot 78 + 11 \cdot 78 + 12 \cdot 78 =$
$= 78 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 10 + 11 + 12)$ 2 BODA
$= 78 \cdot 78 = 6084.$ 1 BOD
…………………………………………………….…………...…. UKUPNO 10 BODOVA

**Drugi način:**

Zbroj umnožaka u 1. retku je

$1 + 2 + 3 + \ldots + 10 + 11 + 12 = (12 \cdot 13) : 2 = 156 : 2 = 78.$ 2 BODA

Zbroj umnožaka u 2. retku je

$2 + 4 + 6 + \ldots + 20 + 22 + 24 = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 10 + 11 + 12) = 2 \cdot 78 = 156.$ 2 BODA

Analogno, zbroj umnožaka u 3. retku je $3 \cdot 78 = 234$, u 4. retku 312,
u 5. retku 390, u 6. retku 468, u 7. retku 546, u 8. retku 624,
u 9. retku 702, u 10. retku 780, u 11. retku 858 i u 12. retku 936. 5 BODOVA

(po 1 BOD za dva zbroja)

Zbroj zbrojeva svih umnožaka po svim retcima je

$78 + 156 + 234 + 312 + 390 + 468 + 546 + 624 + 702 + 780 + 858 + 936 = 6084.$ 1 BOD

……………………………………………………………………..……..…. UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. veljače 2018.

6. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

**1. Prvi način:**

Broj ptica u jatu označimo s $x$.

Onda je $\frac{x}{5}+\frac{x}{3}+3\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{5}\right)+1=x$. 4 BODA

Dalje, $\frac{3x+5x}{15}+3\cdot\frac{5x-3x}{15}+1=x$, 2 BODA

odnosno $\frac{8x}{15}+\frac{6x}{15}+1=x$. 1 BOD

Slijedi: $\frac{14x}{15}+1=x$. 1 BOD

Odavde slijedi da je $\frac{1}{15}x=1$, 1 BOD

odnosno $x = 15$. U jatu je bilo 15 ptica. 1 BOD

…………………………………………..………………………….......... UKUPNO 10 BODOVA

**Drugi način:**

Broj ptica u jatu označimo s $x$.

| Prvo stablo | Drugo stablo | Treće stablo | | |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{5}x$ | $\frac{1}{3}x$ | $3\cdot\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{5}x\right)=$ | $3\cdot\frac{2}{15}x$ | 4 BODA |
| (1 BOD) | (1 BOD) | (1 BOD) | (1 BOD) | |

Onda je $\frac{1}{5}x+\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}x+1=x$. 2 BODA

Dalje je $\frac{14}{15}x+1=x$. 2 BODA

Odavde slijedi da je $\frac{1}{15}x=1$, 1 BOD

odnosno $x = 15$. U jatu je bilo 15 ptica. 1 BOD

…………………………………………..………………………….......... UKUPNO 10 BODOVA

**Treći način:**

Na prvo stablo sletjela je $\frac{1}{5}$ jata, a na drugo $\frac{1}{3}$ jata.

Razlika između ta dva dijela jata iznosi $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{5-3}{15}=\frac{2}{15}$ jata. 2 BODA

Trostruka razlika iznosi $3\cdot\frac{2}{15}=\frac{2}{5}$ jata. 1 BOD

Na treće stablo sletjelo je, dakle, $\frac{2}{5}$ jata. 1 BOD

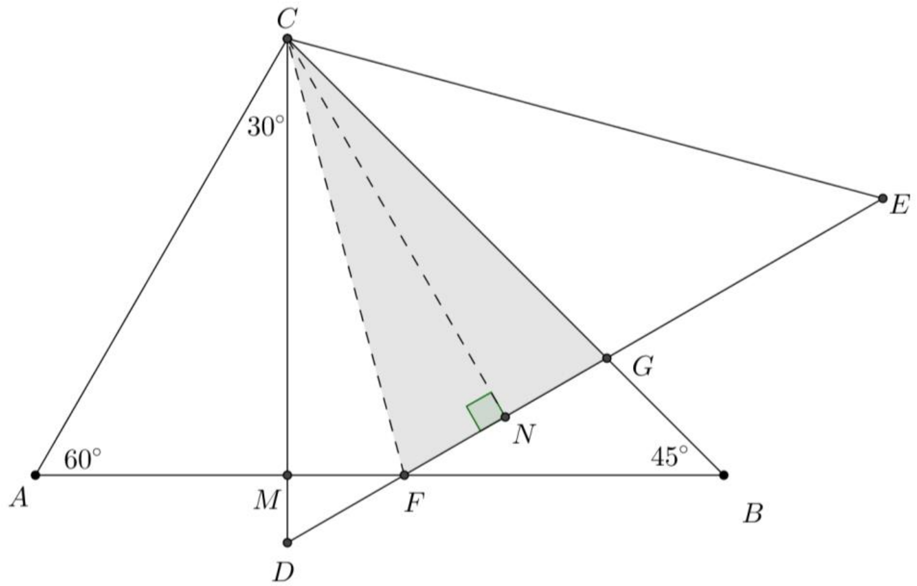
Na sva tri stabla zajedno sletjelo je $\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{3+5+6}{15}=\frac{14}{15}$ jata. 3 BODA

Preostala je jedna ptica u zraku, a ona predstavlja $1-\frac{14}{15}=\frac{1}{15}$ jata. 2 BODA

Dakle, u jatu je bilo 15 ptica. 1 BOD

………………………………………..…………………………...... UKUPNO 10 BODOVA

**2. Prvi način:**




Kut $\angle AMD$ je pravi kut, tj. $|\angle AMD|=90°$. 1 BOD

Nacrtajmo okomicu $\overline{CN}$ iz vrha $C$ na stranicu $\overline{DE}$.

Veličina kuta $\angle NCM$ iznosi $|\angle NCM|=30°$ (slijedi iz $\Delta DNC$, jer je $|\angle CDE|=60°$). 1 BOD

Veličina kuta $\angle GCN$ iznosi $|\angle GCN|=45°-30°=15°$ (slijedi iz $\Delta BMC$, $|\angle BCM|=45°$). 1 BOD

Veličina kuta $\angle FGC$ iznosi $|\angle FGC|=90°-15°=75°$. 1 BOD

Veličina kuta $\angle CGE$ iznosi $|\angle CGE|=180°-(30°+45°)=105°=|\angle BGF|$. 1 BOD

Veličina kuta $\angle GFB$ iznosi $|\angle GFB|=180°-(105°+45°)=30°$. 1 BOD

Veličina kuta $\angle MFN$ iznosi $|\angle MFN|=180°-30°=150°$.

Trokuti $AMC$ i $DNC$ su sukladni (KSK ili SSK$^{>}$), pa je $|MC|=|NC|$. 1 BOD

Trokuti $MFC$ i $FNC$ su sukladni pravokutni trokuti (oba imaju pravi kut, zajednička im je hipotenuza i $|MC|=|NC|$, pa su sukladni po poučku SSK$^{>}$). 1 BOD

Stoga veličina kuta $\angle CFG$ iznosi $|\angle CFG|=150°:2=75°$. 1 BOD

Nasuprot sukladnih kutova $\angle FGC$ i $\angle CFG$ su sukladne stranice, odnosno $|CF|=|CG|$, pa je trokut $CFG$ jednakokračan. 1 BOD

………………………………………..……………………..….…... UKUPNO 10 BODOVA

**Drugi način:**

Kut $\angle AMD$ ($\angle AMC$) je pravi kut, tj. $|\angle AMD| = 90°$. 1 BOD

Nacrtajmo okomicu $\overline{CN}$ iz vrha $C$ na stranicu $\overline{DE}$.

Trokuti $ABC$ i $CDE$ su sukladni pa imaju jednake površine, dužine $\overline{CN}$ i $\overline{CM}$ su visine na sukladne stranice pa su njihove duljine jednake, odnosno $|MC| = |NC|$. 1 BOD

Iz sukladnosti tih trokuta slijedi i $|\angle ECD| = |\angle ACB| = 180° - 105° = 75°$. 1 BOD

Trokuti $MFC$ i $FNC$ su sukladni pravokutni trokuti (oba imaju pravi kut, zajednička im je hipotenuza i $|MC| = |NC|$, pa su sukladni po poučku SSK$^{>}$). 1 BOD

Veličina kuta $\angle MFD$ iznosi $|\angle MFD| = 90° - 60° = 30° = |\angle GFB|$ (slijedi iz pravokutnog trokuta $MFD$). 1 BOD

Kut $\angle CGN$ je vanjski kut trokuta $FGB$ pa je $|\angle CGN| = 30° + 45° = 75°$ 1 BOD

Iz pravokutnog trokuta $CNG$ slijedi $|\angle GCN| = 90° - 75° = 15°$.

Veličina kuta $\angle DCN$ iznosi $|\angle DCN| = 45° - 15° = 30°$ (jer je $|\angle BCM| = 45°$). 1 BOD

Iz sukladnosti trokuta $MFC$ i $FNC$ slijedi $|\angle MCF| = |\angle NCF| = 30° : 2 = 15°$. 1 BOD

Nadalje, trokuti $CFN$ i $CGN$ su sukladni po poučku KSK (kutovi veličina 15° i 90° uz zajedničku stranicu $\overline{CN}$). 1 BOD

Iz njihove sukladnosti slijedi $|NG| = |NF|$ i $|FC| = |GC|$.

Dakle, trokut $CFG$ je jednakokračan. 1 BOD

……………………………………………..…………………………...……... UKUPNO 10 BODOVA

**3. Prvi način:**

$$\frac{283}{255} = 1 + \frac{28}{255}$$ 1 BOD

$$= 1 + \frac{1}{\frac{255}{28}}$$ 2 BODA

$$= 1 + \frac{1}{9 + \frac{3}{28}}$$ 2 BODA

$$= 1 + \frac{1}{9 + \frac{1}{\frac{28}{3}}}$$ 1 BOD

$$= 1 + \frac{1}{9 + \frac{1}{9 + \frac{1}{3}}}$$ 1 BOD

Prirodni brojevi koji zamjenjuju nepoznanice su $a = 9$, $b = 9$, $c = 3$. 3 BODA

……………………………………………..………………………………...…... UKUPNO 10 BODOVA

**Drugi način:**

$$\frac{283}{255}=1+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}}$$

Slijedi $\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}}=\frac{283}{255}-1=\frac{283-255}{255}=\frac{28}{255}$. 3 BODA

Dalje je $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}=\frac{255}{28}=9+\frac{3}{28}$. 2 BODA

Dakle, $a = 9$. 1 BOD

Iz $\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}=\frac{3}{28}$ slijedi $b+\frac{1}{c}=\frac{28}{3}=9+\frac{1}{3}$. 2 BODA

Slijedi $b = 9$, $c = 3$. 2 BODA

…………………………………………..…………………………...…... UKUPNO 10 BODOVA

**4. Prvi način:**

Neka je $x$ početna duljina čarobnog saga.

Početna širina saga bila je 1.8 m = 18 dm. 1 BOD

Nakon ispunjenja prve želje stranice su mu bile:

duljina $\frac{1}{2}x$, a širina $18-\frac{1}{3}\cdot 18=18-6=12$ dm. 2 BODA

Nakon ispunjenja druge želje stranice su mu bile:

duljina $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x=\frac{1}{4}x$, a širina $12-\frac{1}{3}\cdot 12=12-4=8$ dm. 2 BODA

Nakon ispunjenja treće želje stranice su mu bile:

duljina $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}x=\frac{1}{8}x$, a širina $8-\frac{1}{3}\cdot 8=8-\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$ dm. 2 BODA

Površina pravokutnika računa se po formuli $P = a \cdot b$, gdje su $a$ i $b$ duljine susjednih stranica.

Iz uvjeta zadatka slijedi da je

$\frac{1}{8}x\cdot\frac{16}{3}=18$, odnosno $\frac{2}{3}x=18$, pa slijedi $x = 27$ dm = 2.7 m. 2 BODA

Početna površina čarobnog saga bila je $P = 1.8 \text{ m} \cdot 2.7 \text{ m} = 4.86 \text{ m}^2$. 1 BOD

…………………………………………..………………………..…..…... UKUPNO 10 BODOVA

**Drugi način:**

Površina pravokutnika računa se po formuli $P = a \cdot b$, gdje su $a$ i $b$ duljine susjednih stranica.

Neka je $x$ početna duljina saga, a $y$ početna širina saga.

Nakon ispunjenja svake želje duljina saga se prepolovi.

Nakon ispunjenja tri želje duljina saga se 3 puta prepolovi, pa je jednaka $a=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x=\frac{1}{8}x$.

2 BODA

Nakon ispunjenja svake želje širina saga se umanji za $\frac{1}{3}$ širine, što znači da preostane $\frac{2}{3}$ širine.

Nakon ispunjenja tri želje širina saga je $b=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}y=\frac{8}{27}y$. 2 BODA

Površina saga nakon tri ispunjene želje jednaka je

$P_3=\frac{1}{8}x\cdot\frac{8}{27}y=\frac{1}{27}xy$. 2 BODA

Prema uvjetima zadatka je $P_3=18$ dm², a $y$ = 1.8 m = 18 dm. 1 BOD

Slijedi

$18=\frac{1}{27}x\cdot 18$, 1 BOD

što daje $x$ = 27 dm = 2.7 m. 1 BOD

Početna površina čarobnog saga bila je $P$ = 1.8 m · 2.7 m = 4.86 m$^2$. 1 BOD

…………………………………………..…………………………...….... UKUPNO 10 BODOVA

**Napomena:**
Duljina i površina saga mogu se izraziti i u decimetrima, odnosno dm².

**5. Prvi način:**

Neka je $\overline{2abcde}$ traženi početni broj. Onda je novodobiveni broj $\overline{abcde2}$. 2 BODA

Tada vrijedi da je $\overline{abcde2}=3\cdot\overline{2abcde}$. 1 BOD

Dalje slijedi:

$10\cdot\overline{abcde}+2=3\cdot\left(200000+\overline{abcde}\right)$ 2 BODA

$10\cdot\overline{abcde}+2=600000+3\cdot\overline{abcde}$ 1 BOD

$7\cdot\overline{abcde}=600000-2$ 1 BOD

$\overline{abcde}=599998:7$ 1 BOD

$\overline{abcde}=85714$ 1 BOD

Početni broj je 285714, a novodobiveni 857142. 1 BOD

…………………………………………..……………………..….....  UKUPNO 10 BODOVA

**Drugi način:**

Neka je $\overline{2abcde}$ traženi početni broj. Onda je novodobiveni broj $\overline{abcde2}$. 2 BODA

Tada vrijedi da je $\overline{abcde2}=3\cdot\overline{2abcde}$. 1 BOD

Broj $3\cdot e$ mora završavati znamenkom 2, što je moguće jedino ako je $e$ = 4. 1 BOD

Sada je $\overline{abcd42}=3\cdot\overline{2abcd4}$. To je moguće jedino ako je $d$ = 1. 1 BOD

Imamo, dakle, $\overline{abc142}=3\cdot\overline{2abc14}$.

Broj $3\cdot c$ mora završavati znamenkom 1, a to je moguće jedino ako je $c$ = 7. 1 BOD

Dalje, imamo $\overline{ab7142}=3\cdot\overline{2ab714}$. To je moguće jedino ako je $b$ = 5. 1 BOD

Sada je $\overline{a57142}=3\cdot\overline{2a5714}$. To je moguće jedino ako je $a$ = 8. 1 BOD

Provjerom množenja zaista vrijedi $857142=3\cdot 285714$.

Početni broj je 285714, a novodobiveni 857142. 2 BODA

…………………………………………..……………….…..….....  UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. veljače 2018.

7. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

**1.** Neka je $x$ iznos novca prije plaćanja poreza.

Oporezuje se $\frac{2}{5}x + \frac{1}{3}x = \frac{11}{15}x$, 2 BODA

a ne oporezuje $\frac{4}{15}x$. 1 BOD

Iz $\frac{4}{15}x = 100\ 000$ dobiva se $x = 375\ 000$. Tvrtka je imala 375 000 kuna. 2 BODA

Od toga se po stopi 20 % oporezuje $\frac{2}{5} \cdot 375\ 000 = 150\ 000$ kn. 1 BOD

Iznos poreza je $150\ 000 \cdot 0.2 = 30\ 000$ kn. 1 BOD

Zatim se po stopi 10 % oporezuje $\frac{1}{3} \cdot 375\ 000 = 125\ 000$ kn. 1 BOD

Iznos poreza je $125\ 000 \cdot 0.1 = 12\ 500$ kn. 1 BOD

Za porez je ukupno plaćeno $30\ 000 + 12\ 500 = 42\ 500$ kuna. 1 BOD

…………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

**2.** **Prvi način:** Neka je $\alpha$ veličina unutarnjeg, a $\alpha_1$ veličina susjednog vanjskog kuta zadanog pravilnog mnogokuta.

Iz uvjeta zadatka vrijedi da je $\alpha = 9\,\alpha_1$ i $\alpha + \alpha_1 = 180°$.

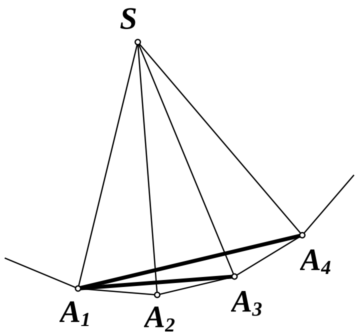
Slijedi da je $10\alpha_1 = 180°$, pa je $\alpha_1 = 18°$. 1 BOD

Tada je $\alpha = 180° - 18° = 162°$. 1 BOD

U pravilnom mnogokutu svi su vanjski kutovi jednakih veličina, a zbroj im je 360°.

Iz $18° \cdot n = 360°$ izračuna se da je $n = 20$, dakle riječ je o dvadeseterokutu. 1 BOD

Skica dijela dvadeseterokuta s traženim kutom izgleda ovako: 1 BOD




Vrijedi da je $|\angle A_1SA_2| = 360° : 20 = 18°$, pa je $|\angle A_1SA_3| = 2 \cdot 18° = 36°$ i

$|\angle A_1SA_4| = 3 \cdot 18° = 54°$. 2 BODA

Iz jednakokračnog trokuta $A_1A_3S$ se izračuna

$|\angle A_3A_1S| = (180° - 36°) : 2 = 144° : 2 = 72°$. 1 BOD

Iz jednakokračnog trokuta $A_1A_4S$ se izračuna

$|\angle A_4A_1S|$ = (180° – 54°) : 2 = 126° : 2 = 63°. 1 BOD

Nadalje, $|\angle A_3A_1A_4| = |\angle A_3A_1S| - |\angle A_4A_1S|$, pa je 1 BOD

$|\angle A_3A_1A_4|$ = 72° – 63° = 9°. 1 BOD

……………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

**Drugi način:** Prvi dio identičan je postupku u prvom načinu uključujući i skicu (ukupno 4 BODA).
Dalje slijedi:

Vrijedi da je $|\angle A_1SA_2|$ = 360° : 20 = 18°, pa je $|\angle A_1SA_4|$ = 3 · 18° = 54°. 2 BODA

Iz jednakokračnog trokuta $A_1A_2A_3$ vrijedi da je

$|\angle A_3A_1A_2|$ = (180° – $\alpha$) : 2 = (180° – 162°) : 2 = 18° : 2 = 9°. 1 BOD

Iz jednakokračnog trokuta $A_1A_4S$ se izračuna

$|\angle A_4A_1S|$ = (180° – 54°) : 2 = 126° : 2 = 63°. 1 BOD

Nadalje, $|\angle A_3A_1A_4| = \frac{\alpha}{2} - \left(|\angle A_2A_1A_3| + |\angle A_4A_1S|\right)$, pa je 1 BOD

$|\angle A_3A_1A_4|$ = 81° – (9° + 63°) = 81° – 72° = 9°. 1 BOD

……………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

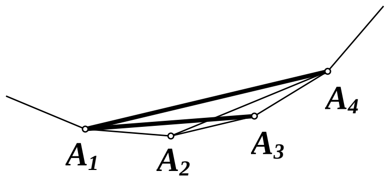
**Treći način:** Ako je $\alpha$ veličina unutarnjeg kuta mnogokuta, onda je veličina njegovog vanjskog kuta 180° – $\alpha$.

Iz uvjeta zadatka 9 · (180° – $\alpha$) = $\alpha$, izračuna se $\alpha$ = 162°. 2 BODA

Koristeći formulu za veličinu unutarnjeg kuta $n$-terokuta

$\frac{(n-2)\cdot 180°}{n} = 162°$ izračuna se da je $n$ = 20. 1 BOD

Skica dijela dvadeseterokuta s prikazom traženog kuta izgleda ovako: 1 BOD




Duljine stranica i veličine kutova pravilnog mnogokuta su jednake,
pa prema SKS poučku vrijedi: $\Delta A_1A_2A_3 \cong \Delta A_2A_3A_4$.

Tada je $|A_1A_3| = |A_2A_4|$. 1 BOD

Onda je, prema SSS poučku: $\Delta A_1A_3A_4 \cong \Delta A_4A_2A_1$.

Zbog toga vrijedi $|\angle A_3A_4A_1| = |\angle A_2A_1A_4|$. 1 BOD

Zbroj veličina kutova svakog četverokuta je 360°, a u četverokutu $A_1A_2A_3A_4$ dva kuta imaju po 162°, dok su druga dva jednakih veličina.

Onda je: $|\angle A_2A_1A_4|$ = (360° – 2 · 162°) : 2 = 18°. 2 BODA

U jednakokračnom trokutu $A_1A_2A_3$ je: $|\angle A_2A_1A_3|$ = (180° – 162°) : 2 = 9°. 1 BOD

Konačno je: $|\angle A_3A_1A_4| = |\angle A_2A_1A_4| - |A_2A_1A_3|$ = 18° – 9° = 9°. 1 BOD

……………………………………………………….…………..………....… UKUPNO 10 BODOVA

**3. Prvi način:** Ako je broj $\overline{6ababab}$ višekratnik broja 18, onda je on djeljiv brojevima 2 i 9.

Zbog djeljivosti broja $\overline{6ababab}$ brojem 2, znamenka $b$ može biti 0, 2, 4, 6 ili 8. 1 BOD

Zbog djeljivosti broja $\overline{6ababab}$ brojem 9, zbroj njegovih znamenaka djeljiv je brojem 9, tj. $6 + 3a + 3b = 9k$, $k \in N$. 1 BOD

Broj $\overline{ababa}$ je prema uvjetu zadatka djeljiv brojem 6, pa je stoga djeljiv brojevima 2 i 3.

Zbog djeljivosti broja $\overline{ababa}$ brojem 2, znamenka $a$ može biti 2, 4, 6 ili 8.

(0 ne može biti jer broj $\overline{ababa}$ ne bi bio peteroznamenkast) 1 BOD

Zbog djeljivosti broja $\overline{ababa}$ brojem 3, zbroj njegovih znamenaka djeljiv je brojem 3, tj. $3a + 2b = 3l$, $l \in N$. 1 BOD

Kako su pribrojnik $3a$ i zbroj $3l$ djeljivi brojem 3, onda i drugi pribrojnik $2b$ mora biti djeljiv brojem 3. To vrijedi za $b = 0, 3, 6$, i 9. 1 BOD

Kako je znamenka $b$ već uvjetovana djeljivošću brojem 2, znamenka $b$ može biti 0 ili 6. 1 BOD

Uvrštavanjem broja $b$ u izraz $6 + 3a + 3b = 9k$ slijedi:

a) $b = 0$

$6 + 3a = 9k$

Za $k = 1$ slijedi $a = 1$.

Za $k = 2$ slijedi $a = 4$.

Za $k = 3$ slijedi $a = 7$.

b) $b = 6$

$24 + 3a = 9k$

Za $k = 3$ slijedi $a = 1$.

Za $k = 4$ slijedi $a = 4$.

Za $k = 5$ slijedi $a = 7$.

U oba slučaja, zbog uvjeta djeljivosti brojem 2, znamenka $a$ može biti samo 4. 2 BODA

Traženi brojevi su 6 404 040 i 6 464 646. 2 BODA

…………………………………………………………..……….…. UKUPNO 10 BODOVA

**Drugi način:** Ako je broj $\overline{6ababab}$ višekratnik broja 18, onda je on djeljiv brojevima 2 i 9.

Zbog djeljivosti broja $\overline{6ababab}$ brojem 2, znamenka $b$ može biti 0, 2, 4, 6 ili 8. 1 BOD

Zbog djeljivosti broja $\overline{6ababab}$ brojem 9, zbroj njegovih znamenaka $6 + 3a + 3b$ mora biti djeljiv brojem 9. 1 BOD

Najveća vrijednost za $a$ i $b$ je 9, pa $6 + 3a + 3b$ može imati najveću vrijednost 60.

Zbroj $6 + 3a + 3b$ može imati vrijednost: 9, 18, 27, 36, 45 i 54.

Dijeljenjem brojem 3 dobije se da je $2 + a + b = 3, 6, 9, 12, 15$ ili 18, odnosno $a + b = 1, 4, 7, 10, 13$ ili 16. 1 BOD

Broj $\overline{ababa}$ je prema uvjetu zadatka djeljiv brojem 6, pa je stoga djeljiv brojevima 2 i 3.

Zbog djeljivosti broja $\overline{ababa}$ brojem 2, znamenka $a$ može biti 2, 4, 6 ili 8.

(0 ne može biti jer broj $\overline{ababa}$ ne bi bio peteroznamenkast) 1 BOD

Zbog djeljivosti broja $\overline{ababa}$ brojem 3, zbroj njegovih znamenaka koji je $3a + 2b$ mora biti djeljiv brojem 3. 1 BOD

Vidjeli smo da $a$ može imati vrijednost 2, 4, 6 ili 8, dok $b$ može biti 0, 2, 4, 6, ili 8.

Budući je zbroj dva parna broja opet parni broj, vrijednost zbroja $a + b$ može biti 4, 10 ili 16. Sve moguće kombinacije prikazane su u tablici (uključujući i vrijednost izraza $3a + 2b$): 2 BODA

| $a$ | $b$ | $a + b$ | $3a + 2b$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 4 | 10 |
| 2 | 8 | 10 | 22 |
| 4 | 0 | 4 | 12 |
| 4 | 6 | 10 | 24 |
| 6 | 4 | 10 | 26 |
| 8 | 2 | 10 | 28 |
| 8 | 8 | 16 | 40 |

Od svih brojeva u zadnjem stupcu, brojem 3 su djeljivi samo 12 i 24. 1 BOD
Njih dobijemo za $a = 4$ i $b = 0$, odnosno $a = 4$ i $b = 6$.
Traženi brojevi su 6 404 040 i 6 464 646. 2 BODA
……………………………………………………………..…………….… UKUPNO 10 BODOVA

**Treći način:** Peteroznamenkasti broj $\overline{ababa}$ je prema uvjetu zadatka djeljiv brojem 6, pa je stoga djeljiv brojevima 2 i 3.
Zbog djeljivosti broja $\overline{ababa}$ brojem 2, znamenka $a$ može biti 2, 4, 6 ili 8.
(0 ne može biti jer broj $\overline{ababa}$ ne bi bio peteroznamenkast). 1 BOD
Imamo brojeve oblika $\overline{2b2b2}$, $\overline{4b4b4}$, $\overline{6b6b6}$ i $\overline{8b8b8}$.
Zbog djeljivosti broja $\overline{ababa}$ brojem 3, zbroj njegovih znamenaka mora biti djeljiv brojem 3.
Imamo sljedeće mogućnosti:

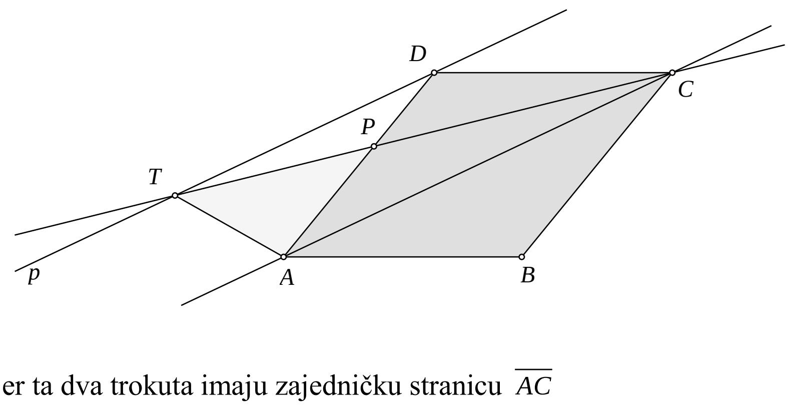
| $a$ | 2 | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| $b$ | 0, 3, 6, 9 | 0, 3, 6, 9 | 0, 3, 6, 9 | 0, 3, 6, 9 |

2 BODA

Ako je broj $\overline{6ababab}$ višekratnik broja 18, onda je on djeljiv brojevima 2 i 9.
Zbog djeljivosti broja $\overline{6ababab}$ brojem 2, znamenka $b$ može biti 0, 2, 4, 6 ili 8,
pa od u tablici navedenih mogućnosti za $b$ ostaju $b = 0$ ili $b = 6$. 2 BODA

Zbog djeljivosti broja $\overline{6ababab}$ brojem 9, zbroj njegovih znamenaka mora biti djeljiv brojem 9. Ispitujemo mogućnosti:
Za $a = 2$ i $b = 0$ ili 6 dobije se 6 202 020 i 6 262 626 koji nisu djeljivi brojem 9.
Za $a = 4$ i $b = 0$ ili 6 dobije se 6 404 040 i 6 464 646 koji jesu djeljivi brojem 9.
Za $a = 6$ i $b = 0$ ili 6 dobije se 6 606 060 i 6 666666 koji nisu djeljivi brojem 9.
Za $a = 8$ i $b = 0$ ili 6 dobije se 6 808 080 i 6 868 686 koji nisu djeljivi brojem 9. 3 BODA
Traženi brojevi su 6 404 040 i 6 464 646. 2 BODA
……………………………………………………………..…………….… UKUPNO 10 BODOVA

**4. Prvi način:**




skica: 1 BOD

$p_{\Delta ACD} = p_{\Delta ACT}$ jer ta dva trokuta imaju zajedničku stranicu $\overline{AC}$
i jednake duljine visina na tu stranicu. 1 BOD
Kako je $p_{\Delta ACD} = p_{\Delta ACP} + p_{\Delta PCD}$ i $p_{\Delta ACT} = p_{\Delta ACP} + p_{\Delta APT}$
slijedi da je $p_{\Delta APT} = p_{\Delta PCD}$. 2 BODA
Vrijedi $|DP| = \frac{2}{5}|DA|$, a duljina visine na stranicu $\overline{DP}$ u trokutu $PCD$ jednaka je duljini

visine na stranicu $\overline{DA}$ u trokutu $ACD$.

Zbog toga je $p_{\Delta PCD} = \frac{2}{5} p_{\Delta ACD}$. 2 BODA

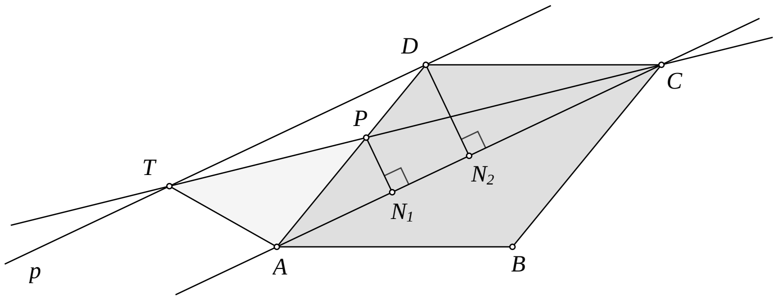
S obzirom da dijagonala dijeli romb na dva sukladna trokuta, $p_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} p_{ABCD}$,

pa je $p_{\Delta PCD} = \frac{2}{5} p_{\Delta ACD} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} p_{ABCD} = \frac{1}{2} p_{ABCD}$, što znači da je i $p_{\Delta APT} = \frac{1}{5} p_{ABCD}$ 3 BODA

Dakle, $p_{\Delta APT} : p_{ABCD} = 1:5$. 1 BOD

……………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

(**Napomena:** Dokazati da je $p_{\Delta PCD} = \frac{2}{5} p_{\Delta ACD}$ može se i ovako:



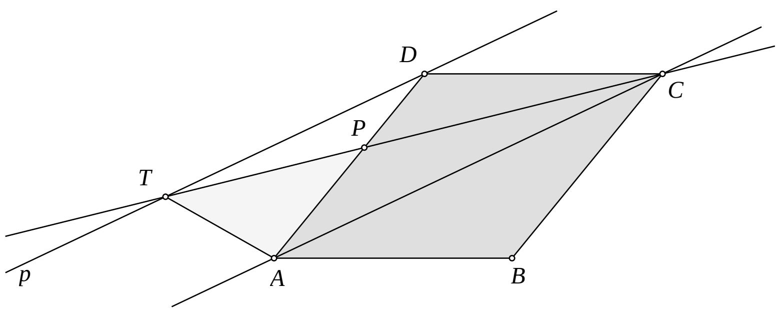

Označimo s $N_1$ i $N_2$ nožišta visina iz vrhova $P$ i $D$ u trokutima $\Delta ACP$ i $\Delta ACD$.
Trokut $\Delta AN_1P$ sličan je trokutu $\Delta AN_2D$ po KK-poučku (zajednički kut kod vrha $A$ i jedan pravi kut).

Kako je $|AP| = \frac{3}{5}|AD|$, zbog sličnosti trokuta će biti $|N_1P| = \frac{3}{5}|N_2D|$,

pa je i površina $p_{\Delta ACP} = \frac{3}{5} p_{\Delta ACD}$ (imaju zajedničku stranicu).

Dakle, $p_{\Delta PCD} = \frac{2}{5} p_{\Delta ACD}$. 2 BODA)

**Drugi način:**




1 BOD

Zbog $|AP| : |PD| = 3 : 2$ vrijedi $|PD| = \frac{2}{3}|AP|$, a duljina visine na stranicu $\overline{PD}$ u trokutu $PDT$

jednaka je duljini visine na stranicu $\overline{AP}$ u trokutu $APT$.

Zbog toga je $p_{\Delta PDT}=\frac{2}{3}p_{\Delta APT}$. 1 BOD

Trokuti *ACP* i *DPT* su slični jer su im kutovi iste veličine (dva vršna kuta, odnosno šiljasti kutovi uz presječnicu). 1 BOD

Zbog $|AP|:|PD|=3:2$ vrijedi je $p_{\Delta ACP}:p_{\Delta DPT}=9:4$, odnosno $p_{\Delta ACP}=\frac{9}{4}p_{\Delta DPT}$. 1 BOD

Tada je $p_{\Delta ACP}=\frac{9}{4}\cdot\frac{2}{3}p_{\Delta APT}=\frac{3}{2}p_{\Delta APT}$. 1 BOD

Zbog $|AP|:|PD|=3:2$ vrijedi $|PD|=\frac{2}{3}|AP|$, a duljina visine na stranicu $\overline{PD}$ u trokutu *PDC* jednaka je duljini visine na stranicu $\overline{AP}$ u trokutu *APC*.

Zbog toga je $p_{\Delta PDC}=\frac{2}{3}p_{\Delta APC}$. 1 BOD

Tada je $p_{\Delta PDC}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}p_{\Delta APT}=p_{\Delta APT}$. 1 BOD

Dijagonala $\overline{AC}$ dijeli romb na dva jednaka dijela, pa je površina romba

$p_{ABCD}=2\left(p_{\Delta APC}+p_{\Delta PCD}\right)=2\left(\frac{3}{2}p_{\Delta PDC}+p_{\Delta PDC}\right)=5p_{\Delta PDC}=5p_{\Delta APT}$. 2 BODA

Dakle, $p_{\Delta APT}:p_{ABCD}=1:5$. 1 BOD

……………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

**5.** **Prvi način:** Uvedimo oznake Aninih i Ivanovih godina kao u tablici. 1 BOD

| | Ana | Ivan |
|---|---|---|
| Prije | $y$ | $x$ |
| Sada | $1.2x$ | $y$ |
| Poslije | $150-1.2x$ | $1.2x$ |

Razlika godina između sada i prije jednaka je kod Ane i kod Ivana pa vrijedi:

$1.2x-y=y-x$, 1 BOD

iz čega je $y=1.1x$ 1 BOD

Razlika godina između poslije i sada jednaka je kod Ane i kod Ivana pa vrijedi:

$150-1.2x-1.2x=1.2x-y$ 1 BOD

$y=3.6x-150$ 1 BOD

Zato je:

$3.6x-150=1.1x$, 1 BOD

iz čega je $x=60$ 1 BOD

Onda je $1.2x=1.2\cdot 60=72$ 1 BOD

$y=1.1\cdot 60=66$ 1 BOD

Ana ima 72, a Ivan 66 godina. 1 BOD

……………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

**Drugi način:** Iz teksta se može zaključiti da je Ana starija od Ivana.

Neka Ivan sada ima $x$ godina, a Ana $x+y$ godina (Ana je starija za $y$ godina).

Ana je imala godina kao Ivan sada ($x$) prije $y$ godina. Ivan je tada imao $x-y$ godina. 1 BOD

Prvi uvjet zadatka daje jednadžbu:

$1.2\cdot(x-y)=x+y$, 1 BOD

iz čega se sređivanjem dobije:

$x = 11y$ 1 BOD
Ako Ivan sada ima $x$ godina, a Ana $x + y$ godina, Ivan će za $y$ godina imati godina kao Ana sada.
Ivan će tada imati $x + y$ godina, a Ana će imati $x + 2y$ godina. 1 BOD
Iz drugog uvjeta zadatka slijedi:
$x + y + x + 2y = 150$ tj.
$2x + 3y = 150$ 1 BOD
Uvrštavanjem $x = 11y$ dobije se:
$22y + 3y = 150$, 1 BOD
pa je $y = 6$. 1 BOD
Tada je $x = 11 \cdot 6 = 66$, 1 BOD
a $x + y = 66 + 6 = 72$. 1 BOD
Ivan ima 66 godina, a Ana 72 godine. 1 BOD
………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

**Treći način:** Označimo s $A$ Anine, a s $I$ Ivanove trenutne godine.
Neka je Ana je imala godina koliko Ivan sada prije $x$ godina.
Vrijedi $A - x = I$, tj. $x = A - I$. 1 BOD
Ivan je tada imao $I - x$ godina, pa vrijedi $A = 1.2 \cdot (I - x)$ 1 BOD
Uvrštavanjem nepoznanice $x$ iz prve u drugu jednadžbu dobije se:
$A = 1.2 \cdot (I - A + I)$,
iz čega je $11A = 12I$ 1 BOD
Za $y$ godina Ivan će imati godina koliko Ana sada.
Vrijedi $I + y = A$, tj. $y = A - I$. 1 BOD
Ana će tada imati $A + y$ godina, a zajedno će imati 150 godina.
Vrijedi: $I + y + A + y = 150$, tj. $I + A + 2y = 150$ 1 BOD
Uvrštavanjem nepoznanice $y$ u drugu jednadžbu dobije se:
$I + A + 2A - 2I = 150$
$3A - I = 150$ 1 BOD
Rješavanjem sustava jednadžbi
$11A = 12I$ i $3A - I = 150$ dobije se:
$I = 3A - 150$
$11A = 36A - 1800$ 1 BOD
$25A = 1800$
$A = 72$ 1 BOD
Onda je: $I = 3 \cdot 72 - 150 = 66$ 1 BOD
Ana ima 72 godine, a Ivan 66 godina. 1 BOD
………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. veljače 2018.

8. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

**1. Prvi način:**

Ako je korijen prirodan broj, broj pod korijenom mora također biti prirodan. 1 BOD

Vrijedi:

$$\frac{a+64}{a-64}=1+\frac{128}{a-64}.$$ 2 BODA

Broj $a - 64$ mora biti djelitelj broja 128. Negativne djelitelje ne treba ni promatrati, jer će za njih promatrani broj biti ili negativan ili jednak 0, pa korijeni ili ne postoje ili su jednaki 0 što nije prirodan broj. 2 BODA

Pogledajmo tablicu:

| $a-64$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 65 | 66 | 68 | 72 | 80 | 96 | 128 | 192 |
| $\frac{128}{a-64}$ | 128 | 64 | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 |
| $1+\frac{128}{a-64}$ | 129 | 65 | 33 | 17 | **9** | 5 | 3 | 2 |

3 BODA

Dakle, 9 je jedini kvadrat broja,

tj. postoji samo jedan broj $a = 80$ za koji je $\sqrt{\frac{a+64}{a-64}}$ također prirodan broj. 2 BODA

…………………………………………………………………….……..… UKUPNO 10 BODOVA

**Drugi način:**

Ako je korijen prirodan broj, broj pod korijenom također mora biti prirodan. 1 BOD

Označimo $x = \frac{a+64}{a-64}$ i iz toga izrazimo $a$.

$ax - 64x = a + 64$

$ax - a = 64x + 64$

$a \cdot (x - 1) = 64x + 64$

$a = \frac{64x+64}{x-1}$ 1 BOD

$a = \frac{64x-64+128}{x-1}$

$a = 64 + \frac{128}{x-1}$ 1 BOD

Broj $x - 1$ mora biti djelitelj broja 128. Budući da su brojevi $x$ i $a$ prirodni brojevi, promatramo samo djelitelje broja 128 koji su također prirodni brojevi. 2 BODA

Djelitelji broja 128 su 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 i 128. 2 BODA

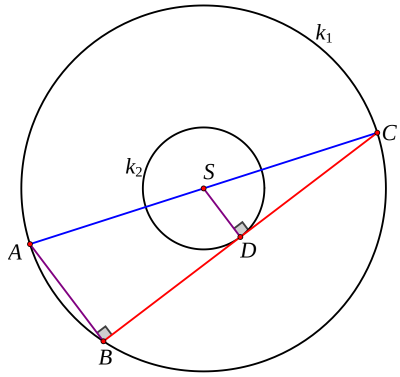
Ako $x - 1$ poprima te vrijednosti, onda je $x$ (redom) 2, 3, 5, 9, 17, 33, 65 i 129. 1 BOD

Među njima je jedino korijen broja 9 prirodan broj. 1 BOD

Onda je $a = 64 + \frac{128}{8} = 80$ jedini broj s traženim svojstvom. 1 BOD

…………………………………………………………………….……... UKUPNO 10 BODOVA

**2.**




Skica: 1 BOD

$S$ je središte kružnica, a točka $D$ dirалište tangente $\overline{BC}$ i kružnice $k_2$.
Duljine polumjera kružnica $k_1$ i $k_2$ označimo redom sa $r_1$ i $r_2$. Iz uvjeta zadatka slijedi omjer $r_1 : r_2 = 3 : 1$, odnosno $r_1 = 3r_2$. 1 BOD

Prema Talesovom poučku obodni kut $\angle ABC$ nad promjerom $\overline{AC}$ je pravi kut.
Prema tome, trokut $\Delta ABC$ je pravokutan. 1 BOD

Tetiva $\overline{BC}$ kružnice $k_1$ je i tangenta kružnice $k_2$, te je okomita na polumjer $\overline{SD}$.
Prema tome, i $\Delta SDC$ je pravokutan. 1 BOD

Trokuti $\Delta ABC$ i $\Delta SDC$ su slični po poučku KK (trokuti imaju jedan zajednički kut pri vrhu $C$ i oba imaju jedan pravi kut). 1 BOD

Iz sličnosti trokuta $\Delta ABC$ i $\Delta SDC$ slijedi proporcionalnost duljina njihovih stranica:

$\frac{|AB|}{|SD|} = \frac{|AC|}{|SC|} \Rightarrow \frac{12}{r_2} = \frac{6r_2}{3r_2} \Rightarrow r_2 = 6\,\text{cm}$, 2 BODA

a $r_1 = 18$ cm. 1 BOD

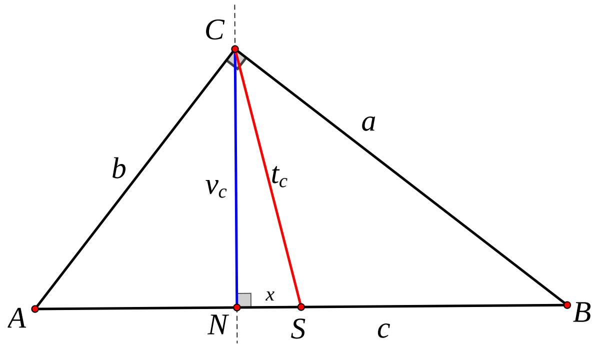
Površina kružnog vijenca računa se po formuli $P = \left(r_1^2 - r_2^2\right)\pi$, gdje su $r_1$ i $r_2$ duljine polumjera kružnica $k_1$ i $k_2$. 1 BOD

Prema tome, površina kružnog vijenca je $P = (324 - 36)\,\pi\ \text{cm}^2 = 288\,\pi\ \text{cm}^2$. 1 BOD

……………………………………………………………………..…. UKUPNO 10 BODOVA

**Napomena:** Površina kružnog vijenca može se dobiti tako da se posebno izračunaju površine krugova omeđenih kružnicama $k_1$ i $k_2$, a zatim se te vrijednosti oduzmu.

**3.**




Skica: 1 BOD

**(Napomena:** Ako na skici nisu nacrtane dužine visina $v_c$ i težišnica $t_c$, **ne bodovati** 1 BODOM.)

Prema uvjetu zadatka je $v_c : t_c = 12:13$ pa postoji realan broj *k* takav da je $v_c = 12k$ i $t_c = 13k$.

Označimo sa *N* nožište visine nacrtane vrhom *C*, a sa *S* polovište hipotenuze *c*.

Kako je trokut *ABC* pravokutan, točka *S* je središte opisane kružnice trokuta, 1 BOD

pa je $\frac{c}{2} = t_c = 13k$. 1 BOD

Označimo $|NS| = x$. U pravokutnom trokutu *NSC* vrijedi $x^2 = t_c^2 - v_c^2 = 169k^2 - 144k^2 = 25k^2$.

Zato je $x = 5k$. 2 BODA

Slijedi da je $|AN| = \frac{c}{2} - x = 13k - 5k = 8k$. 1 BOD

Dalje možemo na dva načina.

**Prvi način:**

Uz oznake $|\angle CAB| = \alpha$ i $|\angle ABC| = \beta$ je $\alpha + \beta = 90°$. Budući da su trokuti *ANC* i *CNB* pravokutni, slijedi da je $|\angle NCA| = \beta$ i $|\angle BCN| = \alpha$. 1 BOD

Zato su trokuti *ANC* i *CNB* slični po poučku KK, pa vrijedi 1 BOD

$$\frac{a}{b} = \frac{v_c}{\frac{c}{2} - x} = \frac{12k}{8k} = \frac{3}{2} = 3:2.$$ 2 BODA

…………………………………………………………………………….. UKUPNO 10 BODOVA

**Drugi način:**

Trokuti *ABC* i *ACN* imaju jedan zajednički kut ($\angle BAC$, odnosno $\angle NAC$) i oba imaju jedan pravi kut, pa su slični po poučku KK. 2 BODA

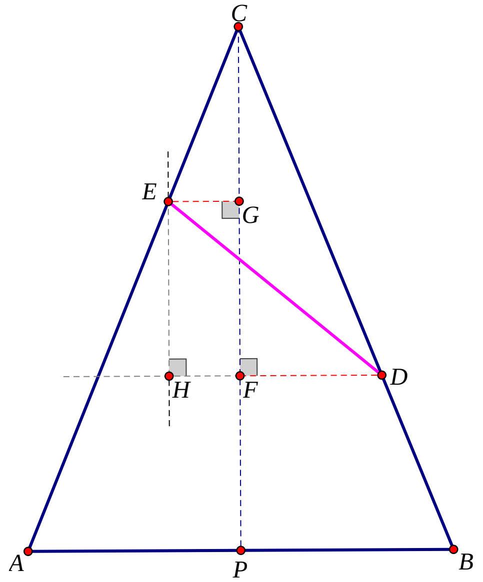
Tada vrijedi:

$$\frac{a}{b} = \frac{v_c}{|AN|} = \frac{12k}{8k} = \frac{3}{2} = 3:2.$$ 2 BODA

…………………………………………………………………….…….. UKUPNO 10 BODOVA

**4. Prvi način:**

Neka je *P* polovište osnovice $\overline{AB}$. Budući da je trokut *ABC* jednakokračan, to je $\overline{CP}$ je okomita na $\overline{AB}$. Točkama *D* i *E* nacrtajmo okomice na $\overline{CP}$ i nožišta tih okomica označimo redom kao točke *F* i $G$. Produljimo dužinu $\overline{FD}$ preko točke $F$ i na tom pravcu označimo točku $H$ takvu da je $HFGE$ pravokutnik. Tada je $\Delta HDE$ pravokutan trokut s hipotenuzom $\overline{DE}$.




Skica: 1 BOD

(**Napomena:** Ako na skici nisu nacrtani polupravac $\overrightarrow{DF}$ (produžetak dužine $\overline{DF}$) i okomica točkom $E$ na dužinu $\overline{DF}$, **ne bodovati** 1 BODOM.)

Iz uvjeta koje zadovoljavaju točke $E$ i $D$, $|CE|:|EA|=1:2$ i $|BD|:|DC|=1:2$, slijedi $|CE|:|CA|=1:3$ i $|DC|:|BC|=2:3$ (tj. $|CE|=\frac{13}{3}\text{cm}$ i $|DC|=\frac{26}{3}\text{cm}$) te $|AP|=5\text{ cm}$.

Iz pravokutnog trokuta $APC$ slijedi da je $|PC|=\sqrt{|AC|^2-|AP|^2}=12\text{ cm}$. 1 BOD

Trokuti $EGC$ i $APC$ su slični (po poučku KK), 1 BOD

pa je $|EG|:|AP|=|CE|:|CA|=1:3$, odnosno $|EG|=\frac{|AP|}{3}=\frac{5}{3}\text{cm}$ 1 BOD

i $|GC|:|PC|=1:3$, odnosno $|GC|=\frac{|PC|}{3}=4\text{cm}$. 1 BOD

Trokuti $DFC$ i $PBC$ su slični (po poučku KK), 1 BOD

pa je $|FD|:|PB|=|DC|:|BC|=2:3$, odnosno $|FD|=\frac{2|PB|}{3}=\frac{10}{3}\text{cm}$ 1 BOD

i $|FC|:|PC|=2:3$, odnosno $|FC|=\frac{2|PC|}{3}=8\text{cm}$. 1 BOD

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut $EHD$ dobivamo

$|DE|=\sqrt{|HD|^2+|EH|^2}=$

$=\sqrt{(|HF|+|FD|)^2+|FG|^2}=$

$=\sqrt{(|EG|+|FD|)^2+(|FC|-|GC|)^2}=$ 1 BOD

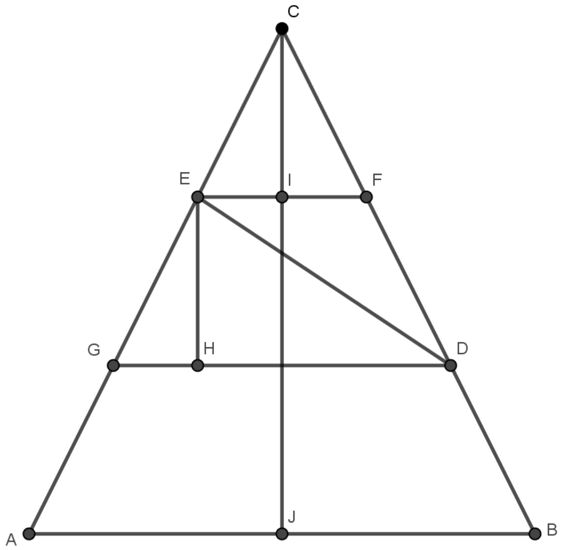
$=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}\text{cm}$ 1 BOD

…………………………………………………………………..… UKUPNO 10 BODOVA

**Drugi način:**

Nadopunimo sliku na sljedeći način:

Iz točaka $D$ i $E$ povuku se usporednice s osnovicom trokuta $AB$ (dobiju se točke $F$ i $G$), a zatim se povuku okomice iz točaka $C$ i $E$ (te se označe točke $H$, $I$ i $J$). 1 BOD




Prema Talesovom poučku, usporedni pravci na krakovima odsijecaju proporcionalne dužine.

Zbog $|BC| = |AC|$ je $|AG| = |BD| = \frac{1}{3}|AC|$ i $|CE| = \frac{1}{3}|AC|$, te je i $|GE| = \frac{1}{3}|AC|$. 1 BOD

Točka $J$ je polovište jednakokračnog trokuta $ABC$, pa je $|AJ| = 5$ cm. Iz pravokutnog trokuta $AJC$ slijedi da je $|CJ|^2 = 13^2 - 5^2 = 144$, odnosno $|CJ| = 12$ cm. 1 BOD

Trokuti $CEI$ i $CAJ$ su slični (po poučku KK) pa je, zbog $|CE| : |CA| = 1 : 3$,

$|CE| = \frac{13}{3}$ cm, $|EI| = \frac{5}{3}$ cm i $|CI| = 4$ cm. 2 BODA

Po istom poučku slični su trokuti $GDC$ i $ABC$.

Zbog $|CD| : |CB| = 2 : 3$ je $|GD| = \frac{2}{3} \cdot |AB| = \frac{20}{3}$ cm. 1 BOD

Trokuti $CEI$ i $EGH$ su sukladni (KSK poučak) pa je $|GH| = \frac{5}{3}$ cm i $|EH| = 4$ cm. 1 BOD

Tada je $|HD| = |GD| - |GH| = \frac{20}{3} - \frac{5}{3} = \frac{15}{3} = 5$ cm. 1 BOD

Iz pravokutnog trokuta $EHD$ slijedi:

$|ED|^2 = |EH|^2 + |HD|^2 = 4^2 + 5^2 = 41$. 1 BOD

Dakle, $|ED| = \sqrt{41}$ cm. 1 BOD

………………………………………………………………………..………. UKUPNO 10 BODOVA

**5.** Označimo broj točaka na drugom pravcu s $x$.

Na prvom je pravcu 8 točaka, koje čine $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ dužina. 1 BOD

Svaka od tih dužina sa svakom od $x$ točaka na drugom pravcu čini jedan trokut.
Takvih je trokuta $28x$. 1 BOD

Ako je na drugom pravcu $x$ točaka, one određuju $\frac{x\cdot(x-1)}{2}$ dužina. 1 BOD

Svaka dužina sa svakom od 8 točaka na prvom pravcu također čine trokut.

Takvih je trokuta $4x^2 - 4x$. 1 BOD

Ukupan broj trokuta je 640. Vrijedi:

$28x + 4x^2 - 4x = 640$ 1 BOD

$4x^2 + 24x - 640 = 0 \quad / : 4$

$x^2 + 6x - 160 = 0$ 1 BOD

Dobivena kvadratna jednadžba riješi se rastavljanjem srednjeg člana i izlučivanjem (**prvi način**):

$x^2 + 16x - 10x - 160 = 0$

$x \cdot (x + 16) - 10 \cdot (x + 16) = 0$

$(x + 16) \cdot (x - 10) = 0$ 2 BODA

Iz $x + 16 = 0$ slijedi $x_1 = -16$, a iz $x - 10 = 0$ slijedi $x_2 = 10$. 1 BOD

Budući da broj točaka mora biti prirodni broj, na drugom je pravcu 10 točaka. 1 BOD

…………………………………………………………………..…. UKUPNO 10 BODOVA

**Napomena 1:** Jednadžba $x^2 + 6x - 160 = 0$ se može riješiti i na sljedeća dva načina:

**Drugi način:**

$x^2 + 6x - 160 = 0$

$(x + 3)^2 - 9 - 160 = 0$

$(x + 3)^2 = 169$ 1 BOD

$x + 3 = \sqrt{169}$

$x_1 + 3 = 13 \qquad x_2 + 3 = -13$

$x_1 = 10 \qquad x_2 = -16$ 2 BODA

Broj točaka mora biti prirodan broj, dakle na drugom je pravcu 10 točaka. 1 BOD

**Treći način:**

Iz $x^2 + 6x = 160$ slijedi $x(x + 6) = 160$.

Kako je $x$ prirodan broj, zaključujemo da $x$ mora biti djelitelj broja $160 = 2^5 \cdot 5$. 1 BOD

Za svaku mogućnost da je $x$ djelitelj broja 160 provjerimo je li $x(x + 6) = 160$ 2 BODA

i ustanovimo da je jedino rješenje $x = 10$. 1 BOD

**Napomena 2:** Ukoliko učenik na prvom pravcu pogrešno prebroji 56, a na drugom $x \cdot (x-1)$ dužina, zadatak treba bodovati s 0 BODOVA.

Ukoliko učenik točno prebroji 28 dužina na prvom pravcu, a na drugom pravcu prebroji $x \cdot (x-1)$ dužina (umjesto $\frac{x\cdot(x-1)}{2}$) ili ukoliko učenik točno prebroji $\frac{x\cdot(x-1)}{2}$ dužina na drugom pravcu, a na prvom 56 (umjesto 28), onda treba bodovati dio rješenja do dobivanja kvadratne jednadžbe (koja onda nema cjelobrojna rješenja), slijedeći tu pogrešku i učenik, u tom slučaju, na zadatku najviše može dobiti 5 BODOVA.