**Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske**
**Agencija za odgoj i obrazovanje**
**Hrvatsko matematičko društvo**

# DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

**1. razred – srednja škola – A varijanta**

**Poreč, 13. travnja 2018.**

**1.** Odredi sve trojke realnih brojeva $(x, y, z)$ koje zadovoljavaju sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} x \;+ y \;- z &= -1 \\ x^2 - y^2 + z^2 &= 1 \\ -x^3 + y^3 + z^3 &= -1. \end{aligned}$$

**2.** Neka su $D_0, D_1, \ldots, D_{2018}$ točke na dužini $\overline{AB}$ takve da je $D_0 = A$, $D_{2018} = B$ i

$$|D_0D_1| = |D_1D_2| = \cdots = |D_{2017}D_{2018}|.$$

Ako je $C$ točka takva da je $\sphericalangle BCA = 90^\circ$, dokaži da vrijedi

$$|CD_0|^2 + |CD_1|^2 + \cdots + |CD_{2018}|^2 = |AD_1|^2 + |AD_2|^2 + \cdots + |AD_{2018}|^2.$$

**3.** Dani su prosti broj $p$ i prirodni broj $n \geqslant p-1$. Ako je broj $np+1$ kvadrat nekog prirodnog broja, dokaži da je broj $n+1$ zbroj kvadrata nekih $p$ prirodnih brojeva.

**4.** U trokutu $ABC$ je $\sphericalangle CAB = 2\sphericalangle ABC$. Točka $D$ nalazi se unutar trokuta $ABC$, a pritom vrijedi $|AD| = |BD|$ i $|CD| = |AC|$. Dokaži da je $\sphericalangle ACB = 3\sphericalangle DCB$.

**5.** Za prirodne brojeve raspoređene ukrug kažemo da su u *cik-cak* rasporedu ako je svaki broj ili veći ili manji od oba svoja susjeda. Za par susjednih brojeva kažemo da je *dobar* ako su nakon njegovog uklanjanja preostali brojevi također u cik-cak rasporedu.

Brojevi od 1 do 300 raspoređeni su u cik-cak raspored. Koliki je najmanji mogući broj dobrih parova susjednih brojeva?

**Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.**

**Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske**
**Agencija za odgoj i obrazovanje**
**Hrvatsko matematičko društvo**

## DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

### 2. razred – srednja škola – A varijanta

### Poreč, 13. travnja 2018.

**1.** Odredi sve prirodne brojeve $n$ za koje postoje prirodni brojevi $a$ i $b$ takvi da je

$$S(a) = S(b) = S(a+b) = n,$$

pri čemu $S(a)$ označava zbroj znamenaka broja $a$.

**2.** Branko ispisuje niz kvadratnih polinoma s realnim koeficijentima. U svakom koraku, nakon prethodno napisanog polinoma $ax^2 + bx + c$, zapisuje polinom $cx^2 + bx + a$ ili polinom $a(x+d)^2 + b(x+d) + c$ za neki realni broj $d$.

Ako započne s polinomom $x^2 - 2x - 1$, može li Branko opisanim postupkom nakon određenog broja koraka dobiti polinom:

a) $2x^2 - 1$?

b) $2x^2 - x - 1$?

**3.** Dan je trapez $ABCD$. Simetrala kraka $\overline{BC}$ siječe krak $\overline{AD}$ u točki $M$, a simetrala kraka $\overline{AD}$ siječe krak $\overline{BC}$ u točki $N$.

Neka su $O_1$ i $O_2$ redom središta kružnica opisanih trokutima $ABN$ i $CDM$. Dokaži da pravac $O_1O_2$ prolazi polovištem dužine $\overline{MN}$.

**4.** Odredi sve parove prostih brojeva $(p, q)$ za koje je $p^{q-1} + q^{p-1}$ kvadrat prirodnog broja.

**5.** Dana je kvadratna ploča s $n \times n$ polja, gdje je $n$ neparan prirodni broj. Svaki od $2n(n+1)$ jediničnih bridova koji omeđuju polja te ploče je ili crvene ili plave boje. Poznato je da je najviše $n^2$ bridova crvene boje.

Dokaži da postoji polje te ploče čija su barem tri brida plave boje.

**Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.**

**Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske**
**Agencija za odgoj i obrazovanje**
**Hrvatsko matematičko društvo**

## DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

### 3. razred – srednja škola – A varijanta

### Poreč, 13. travnja 2018.

**1.** Dokaži da za svaki realni broj $x$ vrijedi

$$\cos^3 \frac{x}{3} + \cos^3 \frac{x+2\pi}{3} + \cos^3 \frac{x+4\pi}{3} = \frac{3}{4}\cos x.$$

**2.** Neka je $S = \{0, 95\}$. U svakom koraku Lucija proširuje skup $S$ tako da odabire neki polinom s koeficijentima iz $S$, različit od nulpolinoma, te skupu $S$ dodaje sve cjelobrojne nultočke tog polinoma. Postupak nastavlja odabirom drugog polinoma s koeficijentima iz tako proširenog skupa $S$ dok god na taj način može dobiti nove nultočke.

Dokaži da Lucija može konačnim nizom koraka proširiti skup $S$ do skupa koji nije moguće dalje proširiti. Koliko elemenata tada ima skup $S$?

**3.** Odredi sve parove prirodnih brojeva $(a, b)$ za koje $a^2b$ dijeli $b^2 + 3a$.

**4.** Zadan je trokut $ABC$ takav da je $|AB| = |AC|$. Neka su $M$ i $N$ polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ redom. Neka je $P$ sjecište pravca $AN$ s opisanom kružnicom trokuta $AMC$, različito od $A$. Pravac kroz točku $P$ paralelan s $BC$ siječe opisanu kružnicu trokuta $ABC$ u točkama $B_1$ i $C_1$. Dokaži da je trokut $AB_1C_1$ jednakostraničan.

**5.** Dva igrača naizmjence zapisuju po jednu znamenku, redom slijeva nadesno. Igrač gubi ako je nakon njegovog poteza napisan niz znamenaka

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$$

za koji postoji prirodni broj $k$ takav da je broj $\overline{a_k a_{k+1} \ldots a_n}$ djeljiv s 11.

Koji igrač može pobijediti neovisno o igri protivnika?

**Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.**

**Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske**
**Agencija za odgoj i obrazovanje**
**Hrvatsko matematičko društvo**

# DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

## 4. razred – srednja škola – A varijanta

## Poreč, 13. travnja 2018.

**1.** Neka je $n$ prirodni broj. Dokaži da za svaki izbor brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0,1]$ vrijedi

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n + 1)^2 \geqslant 4(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2).$$

**2.** *Gaussov cijeli broj* je kompleksni broj čiji su realni i imaginarni dijelovi cijeli brojevi. Odredi najveći prirodni broj $n$ za koji postoji skup od $n$ Gaussovih cijelih brojeva tako da su kvadrati njihovih apsolutnih vrijednosti uzastopni prirodni brojevi.

**3.** Neka je $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija takva da je

$$f(ab) = f(a+b)$$

za sve prirodne brojeve $a \geqslant 4$ i $b \geqslant 4$.

Dokaži da je $f(n) = f(8)$ za sve prirodne brojeve $n \geqslant 8$.

**4.** Neka su $\overline{BD}$ i $\overline{CE}$ visine šiljastokutnog trokuta $ABC$. Kružnica promjera $\overline{AC}$ siječe dužinu $\overline{BD}$ u točki $F$. Kružnica promjera $\overline{AB}$ siječe pravac $CE$ u točkama $G$ i $H$, pri čemu je $G$ između $C$ i $E$. Ako je $\sphericalangle CHF = 12^\circ$, odredi $\sphericalangle AGF$.

**5.** Na natjecanju sudjeluje 300 natjecatelja. Svaka dva natjecatelja se međusobno ili poznaju ili ne poznaju, a ne postoje tri natjecatelja koji se svi međusobno poznaju. Odredi najveću moguću vrijednost broja $n$ tako da vrijede sljedeći uvjeti:

- Svaki natjecatelj poznaje najviše $n$ ostalih natjecatelja.
- Za svaki prirodni broj $m$ takav da je $1 \leqslant m \leqslant n$ postoji barem jedan natjecatelj koji poznaje točno $m$ ostalih natjecatelja.

**Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.**