DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

Poreč, 13. travnja 2018.

Zadatak A-1.1.

Odredi sve trojke realnih brojeva (x, y, z) koje zadovoljavaju sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} x + y - z &= -1 \\ x^2 - y^2 + z^2 &= 1 \\ -x^3 + y^3 + z^3 &= -1. \end{aligned}$$

Rješenje.

Iz prve jednadžbe imamo $x + y = z - 1$. Uvrštavanjem u drugu slijedi:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 1 - z^2 \\ (x+y)(x-y) &= (1-z)(1+z) \\ (z-1)(x-y) &= -(z-1)(1+z) \\ (z-1)(x-y+z+1) &= 0. \end{aligned}$$

Razlikujemo dva slučaja: $z = 1$ ili $x - y + z + 1 = 0$.

Ako je $z = 1$, onda je $x + y = 0$, tj. $x = -y$. Uvrštavanjem u treću jednadžbu dobivamo $2y^3 = -2$, odnosno $y = -1$, $x = 1$.

Ako je $x - y + z + 1 = 0$, onda uvrštavanjem $z = -x + y - 1$ u prvu jednadžbu dobivamo $2x = -2$, odnosno $x = -1$.

Sada vrijedi $z = -(-1) + y - 1 = y$ pa uvrštavanjem u treću jednadžbu dobivamo $2y^3 = -2$, odnosno $y = z = -1$.

Prema tome, rješenja zadanog sustava su $(1, -1, 1)$ i $(-1, -1, -1)$.

Zadatak A-1.2.

Neka su $D_0, D_1, \ldots, D_{2018}$ točke na dužini $\overline{AB}$ takve da je $D_0 = A$, $D_{2018} = B$ i

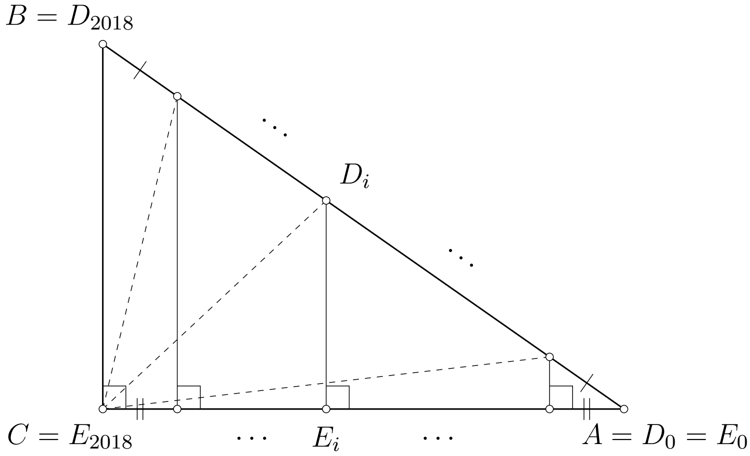
$$|D_0D_1| = |D_1D_2| = \cdots = |D_{2017}D_{2018}|.$$

Ako je C točka takva da je $\sphericalangle BCA = 90^\circ$, dokaži da vrijedi

$$|CD_0|^2 + |CD_1|^2 + \cdots + |CD_{2018}|^2 = |AD_1|^2 + |AD_2|^2 + \cdots + |AD_{2018}|^2.$$

Rješenje.

U pravokutnom trokutu ABC označimo s E_i nožište okomice iz D_i na stranicu $\overline{AC}$, za sve $i = 0, 1, \ldots 2018$. Vrijedi $E_0 = A$, $E_{2018} = C$.



Budući da su pravci D_iE_i paralelni s BC, prema Talesovom poučku o proporcionalnosti, vrijedi

$$|E_0E_1| = |E_1E_2| = \cdots = |E_{2017}E_{2018}|.$$

Iz toga slijedi $|CE_i| = |AE_{2018-i}|$, za $i = 1, 2, \ldots, 2017$.

Primjenom Pitagorinog poučka na pravokutne trokute CD_iE_i i AD_iE_i, za $i = 1, 2, \ldots, 2017$ slijedi

$$|CD_i|^2 = |D_iE_i|^2 + |CE_i|^2 \qquad \text{i} \qquad |AD_i|^2 = |D_iE_i|^2 + |AE_i|^2.$$

Oduzimanjem tih dviju jednakosti dobivamo

$$|CD_i|^2 - |AD_i|^2 = |CE_i|^2 - |AE_i|^2, \quad i = 1, \ldots, 2017,$$

a ista relacija vrijedi za $i = 0$ te $i = 2018$.

Zbrajanjem svih tih relacija dobivamo

$$\begin{aligned}
&|CD_0|^2 + |CD_1|^2 + \cdots + |CD_{2018}|^2 - |AD_0|^2 - |AD_1|^2 - \cdots - |AD_{2018}|^2 \\
&= |CE_0|^2 + |CE_1|^2 + \cdots + |CE_{2018}|^2 - |AE_0|^2 - |AE_1|^2 - \cdots - |AE_{2018}|^2 \\
&= (|CE_0|^2 - |AE_{2018}|^2) + (|CE_1|^2 - |AE_{2017}|^2) + \cdots + (|CE_{2018}|^2 - |AE_0|^2) = 0.
\end{aligned}$$

Budući da je $|AD_0| = 0$, tvrdnja je dokazana.

Zadatak A-1.3.

Dani su prosti broj p i prirodni broj $n \geqslant p - 1$. Ako je broj $np + 1$ kvadrat nekog prirodnog broja, dokaži da je broj $n + 1$ zbroj kvadrata nekih p prirodnih brojeva.

Prvo rješenje.

Neka je a prirodan broj takav da vrijedi $np + 1 = a^2$. Uočimo da vrijedi $a > 1$.

Tada vrijedi $a^2 - 1 = np$, odnosno $(a - 1)(a + 1) = np$.

Budući da je p prost, mora vrijediti $p \mid a - 1$ ili $p \mid a + 1$. Razlikujemo ta dva slučaja:

i) Neka vrijedi $p \mid a - 1$, odnosno $a = kp + 1$ za neki cijeli broj k.
Tada vrijedi $1 + np = (kp + 1)^2 = k^2p^2 + 2kp + 1$, odnosno $n = k^2p + 2k$.
Sada imamo:

$$n + 1 = k^2p + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 + (p - 1)k^2 = (k + 1)^2 + (p - 1) \cdot k^2.$$

Uočimo da zbog $a > 1$ vrijedi $k > 0$ pa su $k + 1$ i k prirodni brojevi.

ii) Neka vrijedi $p \mid a + 1$, odnosno $a = kp - 1$ za neki cijeli broj k.
Analogno prvom slučaju, dobijemo $n + 1 = (k - 1)^2 + (p - 1) \cdot k^2$.
Preostaje provjeriti da je $k - 1$ prirodan broj, odnosno da vrijedi $k \geqslant 2$.
Ako pretpostavimo suprotno, tj. $k = 1$, slijedi $n + 1 = p - 1$ odnosno $n = p - 2$ što je kontradikcija s pretpostavkom zadatka da je $n \geqslant p - 1$.

Prema tome, tvrdnja vrijedi za sve n i p koji zadovoljavaju uvjete zadatka.

Drugo rješenje.

Iz početne jednakosti je $np = (a - 1)(a + 1)$, pa zaključujemo da je $a - 1$ ili $a + 1$ djeljivo s p.

Ako je $a - 1$ djeljivo s p, onda su $\frac{a-1}{p}$ i $\frac{a+p-1}{p}$ prirodni brojevi. Tada je moguće rješenje

$$n + 1 = \underbrace{\left(\frac{a-1}{p}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{a-1}{p}\right)^2}_{p-1 \text{ puta}} + \left(\frac{a+p-1}{p}\right)^2.$$

Doista, imamo

$$\begin{aligned}
(p-1) \cdot \left(\frac{a-1}{p}\right)^2 + \left(\frac{a+p-1}{p}\right)^2 &= (p-1) \cdot \left(\frac{a-1}{p}\right)^2 + \left(\left(\frac{a-1}{p}\right) + 1\right)^2 \\
&= p \cdot \left(\frac{a-1}{p}\right)^2 + 2 \cdot \frac{a-1}{p} + 1 \\
&= p \cdot \frac{a^2 - 2a + 1}{p^2} + 2 \cdot \frac{a-1}{p} + 1 \\
&= \frac{a^2 - 1}{p} + 1 = n + 1.
\end{aligned}$$

Ako je $a+1$ djeljivo s p, onda su $\frac{a+1}{p}$ i $\frac{a-p+1}{p}$ prirodni brojevi. Naime, budući da je $a+1$ djeljivo s p, očito je $a + 1 - p \geqslant 0$. Uočimo da ne može vrijediti ni $a + 1 - p = 0$, jer tada imamo $n = p - 2$, što se protivi uvjetu zadatka. Prema tome, $a + 1 - p > 0$ je doista prirodni broj, djeljiv s p. Zbog toga, analogo prethodnom slučaju, imamo rješenje oblika

$$n + 1 = \underbrace{\left(\frac{a+1}{p}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{a+1}{p}\right)^2}_{p-1 \text{ puta}} + \left(\frac{a-p+1}{p}\right)^2.$$

Zadatak A-1.4.

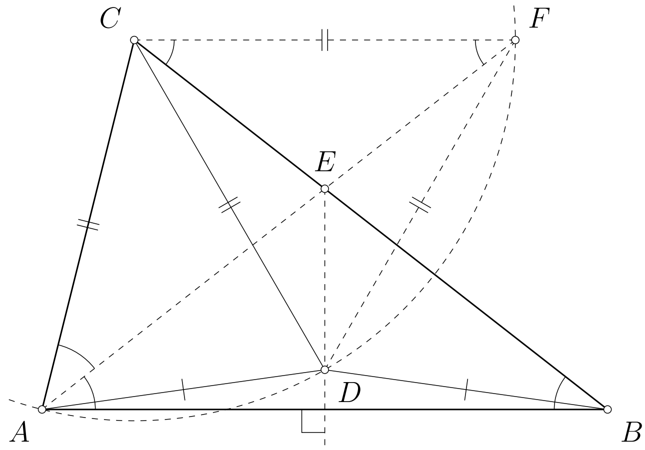
U trokutu ABC je $\sphericalangle CAB = 2\sphericalangle ABC$. Točka D nalazi se unutar trokuta ABC, a pritom vrijedi $|AD| = |BD|$ i $|CD| = |AC|$. Dokaži da je $\sphericalangle ACB = 3\sphericalangle DCB$.

Rješenje.

Neka je E sjecište simetrale dužine $\overline{AB}$ i dužine $\overline{BC}$.

Označimo $\sphericalangle ABC = \beta$ i uočimo $\sphericalangle ACB = 180^\circ - 3\beta$.

Budući da je E na simetrali dužine $\overline{AB}$, vrijedi $|AE| = |BE|$. Stoga je $\sphericalangle BAE = \sphericalangle ABC = \beta$. Slijedi da je $\sphericalangle EAC = \sphericalangle CAB - \beta = 2\beta - \beta = \beta$.



Neka je F drugo sjecište pravca AE i kružnice sa središtem u točki C polumjera $\overline{CA}$. Kako je trokut CAF jednakokračan ($\overline{CA}$ i $\overline{CF}$ su polumjeri kružnice), slijedi $\sphericalangle CFA = \beta$.

Iz $\sphericalangle CFA = \sphericalangle BAF$ slijedi da je $CF \parallel AB$ (kutovi uz presječnicu).

Stoga je i $\sphericalangle BCF = \sphericalangle CBA = \beta$, pa je trokut CEF jednakokračan.

Budući da je $CF \parallel AB$ te da je točka E jednako udaljena od točaka C i F, vrijedi da je DE simetrala i dužine $\overline{CF}$.

Prema tome, $|DF| = |DC| = |CF|$, tj. trokut DFC je jednakostraničan.

Konačno je $\sphericalangle DCB = 60^\circ - \beta = \dfrac{1}{3}(180^\circ - 3\beta) = \dfrac{1}{3}\sphericalangle ACB$, odnosno $\sphericalangle ACB = 3\sphericalangle DCB$.

Zadatak A-1.5.

Za prirodne brojeve raspoređene ukrug kažemo da su u *cik-cak* rasporedu ako je svaki broj ili veći ili manji od oba svoja susjeda. Za par susjednih brojeva kažemo da je *dobar* ako su nakon njegovog uklanjanja preostali brojevi također u cik-cak rasporedu.

Brojevi od 1 do 300 raspoređeni su u cik-cak raspored. Koliki je najmanji mogući broj dobrih parova susjednih brojeva?

Rješenje.

Neka su a, p, q, b četiri uzastopna broja u cik-cak rasporedu. Pretpostavimo da je $p > q$. Tada je $a < p$ i $q < b$.

Par (p, q) nije dobar ako i samo ako je $a > b$. Zato zaključujemo da par (p, q) nije dobar ako i samo je p najveći, a q najmanji broj u četvorci (a, p, q, b).

Ako par (p, q) nije dobar, onda je par (a, p) dobar jer a nije manji od q. Također, par (q, b) je dobar jer b nije veći od p.

Time smo pokazali da za svaka dva para koji imaju zajednički element vrijedi da je barem jedan od ta dva para dobar. Dakle, dobrih parova ima barem 150.

Pretostavimo da postoji cik-cak raspored $a_1, \ldots, a_{300}$ u kojem je točno 150 dobrih parova.

Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da je $a_1 > a_2$ i da par (a_1, a_2) nije dobar. Tada su parovi (a_{2k}, a_{2k+1}) dobri, a parovi (a_{2k-1}, a_{2k}) nisu dobri za sve $k = 1, 2, \ldots, 149$. Također, par (a_{299}, a_{300}) nije dobar par.

Budući da par (a_1, a_2) nije dobar prema navedenom kriteriju zaključujemo da je $a_1 > a_3$. Također, budući da (a_3, a_4) nije dobar par, zaključujemo da je $a_3 > a_5$. Analogno zaključujemo

$$a_1 > a_3 > a_5 > \cdots > a_{299} > a_1.$$

Time smo dobili kontradikciju, pa nije moguće da cik-cak raspored ima točno 150 dobrih parova. Dakle, dobrih parova ima barem 151.

Primjer rasporeda s točno 151 dobrih parova je

$$3,\ 2,\ 5,\ 4,\ 7,\ 6,\ \ldots,\ 299,\ 298,\ 300,\ 1.$$

U tom rasporedu par $(300, 1)$ i svi parovi $(2k, 2k+3)$ za $k = 1, \ldots, 148$ nisu dobri, a svi ostali parovi su dobri.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

Poreč, 13. travnja 2018.

Zadatak A-2.1.

Odredi sve prirodne brojeve n za koje postoje prirodni brojevi a i b takvi da je

$$S(a) = S(b) = S(a+b) = n,$$

pri čemu $S(a)$ označava zbroj znamenaka broja a.

Rješenje.

Za svaki prirodni broj a brojevi a i $S(a)$ daju isti ostatak pri dijeljenju s 9.

Primijenimo li ovu tvrdnju na početnu jednakost, dobivamo da a, b i $a+b$ daju jednake ostatke pri dijeljenju s 9. Odavde slijedi da su brojevi $(a+b)-b=a$ i $(a+b)-a=b$ djeljivi s 9. Zbog toga su i brojevi $a+b$ i n djeljivi s 9. Time smo dokazali da je svaki prirodni broj n za koji postoje a i b kao u uvjetu zadatka nužno djeljiv s 9.

Dokažimo da vrijedi i obrat: neka je n višekratnik broja 9, tj. oblika $n = 9k$, za neki $k \in \mathbb{N}$. Uzimajući brojeve

$$a = \overline{18\ldots18},\ b = \overline{72\ldots72},\ a+b = \overline{90\ldots90},$$

pri čemu svi navedeni brojevi imaju $2k$ znamenaka, dobivamo primjer brojeva za koji je zadovoljeno $S(a) = S(b) = S(a+b) = 9k = n$.

Zadatak A-2.2.

Branko ispisuje niz kvadratnih polinoma s realnim koeficijentima. U svakom koraku, nakon prethodno napisanog polinoma ax^2+bx+c, zapisuje polinom cx^2+bx+a ili polinom $a(x+d)^2+b(x+d)+c$ za neki realni broj d.

Ako započne s polinomom x^2-2x-1, može li Branko opisanim postupkom nakon određenog broja koraka dobiti polinom:

a) $2x^2-1$?

b) $2x^2-x-1$?

Rješenje.

a) Branko može polinom $2x^2-1$ dobiti sljedećim nizom koraka:

$$x^2-2x-1 \to -x^2-2x+1 \xrightarrow{d=-1} -x^2+2 \to 2x^2-1.$$

b) Primijetimo da primjenom bilo koje od dopuštenih transformacija diskriminanta kvadratnog polinoma ostaje nepromijenjena: diskriminanta kvadratnog polinoma cx^2+bx+a je $b^2-4ca = b^2-4ac$, dok je diskriminanta kvadratnog polinoma

$$a(x+d)^2+b(x+d)+c = ax^2+(2ad+b)x+(ad^2+bd+c)$$

jednaka

$$(2ad+b)^2 - 4a(ad^2+bd+c) = 4a^2d^2 + 4abd + b^2 - 4a^2d^2 - 4abd - 4ac = b^2 - 4ac.$$

Diskriminanta početnog kvadratnog polinoma $x^2 - 2x - 1$ je 8, dok je diskriminanta polinoma $2x^2 - x - 1$ jednaka 9. Prema tome, Branko ne može postići da nakon konačno mnogo koraka na ploči bude zapisan polinom $2x^2 - x - 1$.

Napomena: Algebarski zapisi transformacija su

$$(a,b,c) \xrightarrow{\text{T1}} (c,b,a) \qquad \text{i} \qquad (a,b,c) \xrightarrow{\text{T2}} (a, 2ad+b, ad^2+bd+c).$$

Ako su zadani kvadratni polinomi $f(x)$ i $g(x)$ iste diskriminante, onda niz koraka kojim od $f(x)$ dobivamo $g(x)$ možemo konstruirati na sljedeći način: transformacijom T2 namjestimo slobodni koeficijent polinoma tako da je on jednak vodećem koeficijentu polinoma $g(x)$, transformacijom T1 zamijenimo mjesta vodećem i slobodnom koeficijentu, a zatim transformacijom T2 namjestimo slobodni koeficijent da bude jednak slobodnom koeficijentu od $g(x)$.

Na taj način smo sigurni da smo dobili polinom koji ima željeni slobodni koeficijent zbog zadnjeg koraka, a željeni vodeći koeficijent jer transformacijom T2 ne mijenjamo vodeći koeficijent. Također dobivamo željeni srednji koeficijent jer je taj koeficijent jedinstveno određen do na predznak diskriminantnom (koja se ne mijenja transformacijama) i s preostala dva koeficijenta. Ukoliko je potrebno, transformacijom T2 uz $d = -b/a$ svi koeficijenti ostaju isti, osim što se srednjem mijenja predznak.

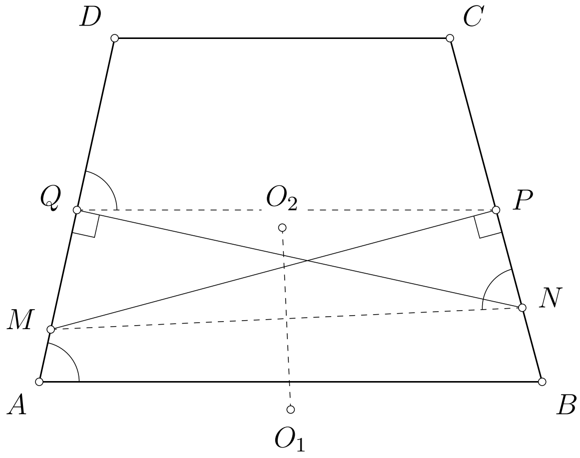
Zadatak A-2.3.

Dan je trapez $ABCD$. Simetrala kraka $\overline{BC}$ siječe krak $\overline{AD}$ u točki M, a simetrala kraka $\overline{AD}$ siječe krak $\overline{BC}$ u točki N.

Neka su O_1 i O_2 redom središta kružnica opisanih trokutima ABN i CDM. Dokaži da pravac O_1O_2 prolazi polovištem dužine $\overline{MN}$.

Rješenje.

Označimo s P i Q redom polovišta krakova $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$.



Pokažimo da je četverokut $ABNM$ tetivan.

Budući da je $\sphericalangle MQN = \sphericalangle NPM = 90°$, četverokut $MNPQ$ je tetivan. Zato je $\sphericalangle PQM + \sphericalangle MNP = 180°$.

Dužina $\overline{QP}$ je srednjica trapeza $ABCD$, stoga je paralelna s AB. Odavde slijedi $\sphericalangle MAB = \sphericalangle DQP$. Sada možemo zaključiti

$$\sphericalangle MAB = \sphericalangle DQP = 180° - \sphericalangle PQM = \sphericalangle MNP = 180° - \sphericalangle BNM,$$

iz čega slijedi da je četverokut $ABNM$ tetivan.

Analogno se pokazuje da je četverokut $MNCD$ tetivan.

Ovime smo pokazali da je dužina $\overline{MN}$ zajednička tetiva kružnica opisanih trokutima ABN i CDM. Stoga direktno slijedi da pravac O_1O_2, određen središtima opisanih kružnica, prolazi polovištem dužine $\overline{MN}$.

Zadatak A-2.4.

Odredi sve parove prostih brojeva (p, q) za koje je $p^{q-1} + q^{p-1}$ kvadrat prirodnog broja.

Rješenje.

Neka je n prirodni broj čiji je kvadrat jednak izrazu iz zadatka, tj.

$$p^{q-1} + q^{p-1} = n^2.$$

Podijelit ćemo zadatak na odvojene slučajeve prema parnosti brojeva p i q. Ako su oba broja parna, jedina mogućnost je da su oba 2. Tada dobivamo rješenje $(p, q) = (2, 2)$ za $n = 2$.

Ako su oba broja p, q neparna, tada gledajući ostatak pri dijeljenju s 4 zaključujemo da nema rješenja. Doista, kako su p, q neparni, brojevi $p - 1, q - 1$ su parni, pa su brojevi p^{q-1}, q^{p-1} kvadrati neparnih brojeva, za koje znamo da uvijek daju ostatak 1 pri dijeljenju s 4. Stoga lijeva strana daje ostatak 2 pri dijeljenju s 4, dok n^2 daje ostatak 1 ili 0 pri dijeljenju sa 4.

Jedini preostali slučaj je da je jedan od brojeva p, q paran, a drugi neparan. Budući da je jednadžba simetrična, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je p neparan, oblika $p = 2k + 1$ za prirodni broj k, a $q = 2$. Sada imamo jednadžbu

$$p + 2^{q-1} = n^2, \qquad \text{tj.} \quad p = n^2 - 2^{2k} = (n - 2^k)(n + 2^k).$$

Desna strana jednakosti sastoji se od dva faktora kojima je umnožak prost broj. To je jedino moguće ako je jedan od faktora jednak ± 1, a drugi $\pm p$. Također, uočimo da je $n + 2^k > 0$, te da je $n + 2^k > n - 2^k$, pa nužno mora biti

$$n - 2^k = 1 \quad \text{i} \quad n + 2^k = p.$$

Oduzimanjem zadnjih dviju jednadžbi dobivamo

$$2^{k+1} + 1 = p = 2k + 1.$$

Dokažimo da ova jednadžba nema rješenja. Broj $2^{k+1} + 1$, pa onda i broj $2k + 1$, daje ostatak 1 pri dijeljenju s 4, odakle je nužno k paran broj, tj. $k = 2l$, za neki nenegativan cijeli broj l. No, u tom slučaju, broj

$$p = 2^{k+1} + 1 = 2^{2l+1} + 1 = 2 \cdot 4^l + 1$$

je djeljiv s 3 (jer 4^l daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3). Dakle, p je djeljiv s 3, tj. $p = 3$. Uvrštavanjem u početnu jednadžbu, vidimo da u $p = 3$ i $q = 2$ nije rješenje.

Stoga, jedino rješenje je $(p, q) = (2, 2)$.

Napomena: Drugi način dokaza da jednadžba

$$2^{k+1} + 1 = p = 2k + 1.$$

nema rješenja je da se pokaže da vrijedi nejednakost $2^{k+1} + 1 > 2k + 1$, tj. $2^k > k$ za sve prirodne brojeve k. To možemo pokazati matematičkom indukcijom ili višestrukom upotrebom nejednakosti $2a \geqslant a + 1$:

$$2^k = 2 \cdot 2^{k-1} \geqslant 2^{k-1} + 1 = 2 \cdot 2^{k-2} + 1 \geqslant 2^{k-2} + 2 \geqslant \cdots \geqslant 2^1 + k - 1 = k + 1 > k.$$

Nejednakost $2^k > k$ se može dokazati i kombinatornim argumentom, uočavajući da je ukupan broj podskupova uvijek veći od broja jednočlanih podskupova k-članog skupa.

Slučaj kad su oba prosta broja p, q neparna, možemo riješiti tako da uočimo da su brojevi p^{q-1}, q^{p-1} kvadrati, pa je $(p^{\frac{q-1}{2}}, q^{\frac{p-1}{2}}, n)$ Pitagorina trojka u kojoj su prva dva broja neparna, što je nemoguće. Alternativno, možemo pisati

$$p^{q-1} = (n - q^{\frac{p-1}{2}})(n + q^{\frac{p-1}{2}}).$$

Budući da možemo pokazati da su faktori na desnoj strani relativno prosti, sličnim argumentima kao u rješenju zaključujemo da je $n = q^{\frac{p-1}{2}} + 1$. Mijenjajući uloge za p i q, možemo zaključiti i da je $n = p^{\frac{q-1}{2}} + 1$, pa dobivamo jednakost $p^{\frac{q-1}{2}} = n - 1 = q^{\frac{p-1}{2}}$. Iz toga slijedi $p = q$, pa uvrštavajući to u originalnu jednadžbu dobivamo $2p^{p-1} = n^2$, što nema rješenja za neparan p.

Zadatak A-2.5.

Dana je kvadratna ploča s $n \times n$ polja, gdje je n neparan prirodni broj. Svaki od $2n(n+1)$ jediničnih bridova koji omeđuju polja te ploče je ili crvene ili plave boje. Poznato je da je najviše n^2 bridova crvene boje.

Dokaži da postoji polje te ploče čija su barem tri brida plave boje.

Rješenje.

Pretpostavimo suprotno, tj. da ne postoji polje s tri plava brida. Tada svako polje ima barem dva crvena brida.

Sada brojimo parove oblika (P, c), pri čemu je P polje, a c crveni brid koji omeđuje to polje. Prebrojat ćemo ih na dva različita načina.

Budući da je svako polje omeđeno s barem dva crvena brida, takvih parova ima barem $2n^2$. S druge strane, budući da svaki brid na rubu ploče ima samo jedno, a svaki brid u unutrašnjosti točno dva susjedna polja, broj parova (P, c) možemo izraziti i kao $V + 2U$, gdje je V broj crvenih bridova na rubu ploče, a U broj crvenih bridova u unutrašnjosti. Zaključujemo da vrijedi $2n^2 \leqslant 2U + V$.

Nadalje, budući da ukupno imamo najviše n^2 crvenih bridova, vrijedi i $U + V \leqslant n^2$. Zbrajanjem ovih dviju nejednakosti lako zaključujemo da mora biti $V = 0$ i $U = n^2$.

Zaključujemo da u izvedenim nejednakostima vrijede jednakosti, pa svako polje ima točno dva crvena brida i svi se crveni bridovi nalaze u unutrašnjosti ploče.

Obojimo polja ploče šahovski, crno – bijelo. Primijetimo da svako bijelo polje sadrži točno dva crvena brida i da svaki crveni brid pripada točno jednom bijelom polju. To znači da crvenih bridova ima $2B$, gdje je B broj bijelih polja. No, to je kontradikcija jer crvenih polja ima n^2, što je neparan broj.

Zaključujemo da je početna pretpostavka kriva, tj. da postoji polje s tri plava brida.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

Poreč, 13. travnja 2018.

Zadatak A-3.1.

Dokaži da za svaki realni broj x vrijedi

$$\cos^3 \frac{x}{3} + \cos^3 \frac{x+2\pi}{3} + \cos^3 \frac{x+4\pi}{3} = \frac{3}{4} \cos x.$$

Rješenje.

Koristeći identitet

$$\cos t = 4\cos^3 \frac{t}{3} - 3\cos \frac{t}{3}$$

za $t = x$, $t = x + 2\pi$ i $t = x + 4\pi$ te zbrajanjem tih relacija, zbog periodičnosti kosinusa, dobivamo

$$3\cos x = 4\left(\cos^3 \frac{x}{3} + \cos^3 \frac{x+2\pi}{3} + \cos^3 \frac{x+4\pi}{3}\right) - 3\left(\cos \frac{x}{3} + \cos \frac{x+2\pi}{3} + \cos \frac{x+4\pi}{3}\right).$$

Korištenjem transformacijskih formula na izraz u zadnjoj zagradi, slijedi

$$\begin{aligned}\cos \frac{x}{3} + \cos \frac{x+4\pi}{3} + \cos \frac{x+2\pi}{3} &= 2\cos \frac{2\pi}{3} \cos \frac{x+2\pi}{3} + \cos \frac{x+2\pi}{3} \\ &= \left(2\cos \frac{2\pi}{3} + 1\right) \cos \frac{x+2\pi}{3} = 0.\end{aligned}$$

Konačno zaključujemo

$$\cos^3 \frac{x}{3} + \cos^3 \frac{x+2\pi}{3} + \cos^3 \frac{x+4\pi}{3} = \frac{3}{4}\left(\cos x + \cos \frac{x}{3} + \cos \frac{x+2\pi}{3} + \cos \frac{x+4\pi}{3}\right) = \frac{3}{4} \cos x.$$

Zadatak A-3.2.

Neka je $S = \{0, 95\}$. U svakom koraku Lucija proširuje skup S tako da odabire neki polinom s koeficijentima iz S, različit od nulpolinoma, te skupu S dodaje sve cjelobrojne nultočke tog polinoma. Postupak nastavlja odabirom drugog polinoma s koeficijentima iz tako proširenog skupa S dok god na taj način može dobiti nove nultočke.

Dokaži da Lucija može konačnim nizom koraka proširiti skup S do skupa koji nije moguće dalje proširiti. Koliko elemenata tada ima skup S?

Rješenje.

Cjelobrojna nultočka polinoma s cjelobrojnim koeficijentima mora biti djelitelj slobodnog člana. Budući da bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je slobodni član polinoma kojeg Lucija odabire različit od nule, zaključujemo da u skup S možemo dodati samo cjelobrojne djelitelje broja 95. Budući da je broj djelitelja broja 95 konačan, Lucija neće moći beskonačno puta proširiti skup S.

Dokažimo da će Lucija u skup S dodati sve cjelobrojne djelitelje od 95, tj. da će na kraju S imati 9 elemenata.

Budući da je -1 nultočka polinoma $95x + 95$, broj -1 se može dodati u S.

Broj 1 je nultočka polinoma $-x^{95} - x^{94} - \cdots - x + 95$, pa se u S može dodati 1.

Sada se može dodati broj -95 jer je nultočka polinoma $x + 95$.

Polinom $-x^3 + x^2 + x + 95$ s koeficijentima iz S ima nultočku 5, dakle 5 se može dodati u S. Sada vidimo da i -5 dodajemo u S jer je -5 nultočka polinoma $x + 5$.

Također su na kraju i $-19, 19 \in S$ jer su nultočke polinoma $5x + 95$ i $5x - 95$.

Napomena: Polinom kojem je 5 nultočka možemo dobiti na sustavniji način. Očito 5 ne možemo dobiti kao nultočku linearnog polinoma s koeficijentima iz skupa $S = \{-95, -1, 0, 1, 95\}$.

Pretpostavimo da je 5 nultočka polinoma $ax^2 + bx + c$, za $a, b, c \in S$. Tada $5 \mid c$ i $c \neq 0$, pa mora biti $c = 95$ ili $c = -95$. Imamo

$$25a + 5b = \pm 95,$$

odnosno

$$5a + b = \pm 19,$$

što je nemoguće za $a, b \in S$. Dakle, ako je 5 nultočka polinoma s koeficijentima iz S, polinom mora biti stupnja barem 3.

Pretpostavimo da je

$$5^3 a + 5^2 b + 5c + d = 0$$

za neke $a, b, c, d \in S$. Tada $5 \mid d$ i $d \neq 0$, pa je $d = 95$ ili $d = -95$.

Ako je $d = 95$, dijeljenjem gornje jednadžbe s 5 dobivamo

$$25a + 5b + c = -19,$$

pa vidimo da je $c \equiv 1 \pmod{5}$. Kako je $c \in S$, mora biti $c = 1$.

Sada je $5a + b = -4$ iz čega lako slijedi da je $a = -1$ i $b = 1$.

Zadatak A-3.3.

Odredi sve parove prirodnih brojeva (a, b) za koje $a^2 b$ dijeli $b^2 + 3a$.

Prvo rješenje.

Iz zadanog uvjeta imamo
$$a^2bk = b^2 + 3a,$$
za neki $k \in \mathbb{N}$. Iz $a^2bk - 3a = b^2$ slijedi $a \mid b^2$, a iz $a^2bk - b^2 = 3a$ slijedi $b \mid 3a$. Dakle, brojevi

$$\frac{b^2}{a},\ \frac{3a}{b} \quad \text{i} \quad \frac{b^2+3a}{a^2b} = \frac{b}{a^2} + \frac{3}{ab}$$

su cijeli. Množenjem drugog i trećeg dobivamo da je i $\frac{9a}{b^2}$ cijeli, odnosno $b^2 \mid 9a$. Sada je

$$b^2m = 9a,\ an = b^2$$

za neke prirodne brojeve m i n, iz čega dobijemo $mn = 9$. Dakle, $n \in \{1, 3, 9\}$, pa vidimo da je $b^2 \in \{a, 3a, 9a\}$. Uvrštavanjem u početni uvjet vidimo da $ab \mid n + 3$.

Sad gledamo tri moguća slučaja za n.

Ako je $n = 1$, onda je $b^2 = a$, pa iz početnog uvjeta $b^5 \mid 4b^2$, odnosno b^3 dijeli 4, pa je $a = b = 1$ jedno rješenje.

Ako je $n = 3$, onda je $b^2 = 3a$, pa $\frac{b^5}{9} \mid 2b^2$, odnosno $b^3 \mid 18$. Budući da je b djeljiv s 3, slijedi da u ovom slučaju nema rješenja.

Ako je $n = 9$, onda je $b^2 = 9a$, pa $\frac{b^5}{81} \mid \frac{4}{3}b^2$, odnosno $b^3 \mid 108$. Kako je b djeljiv s 3, dobivamo rješenje $(a, b) = (1, 3)$.

Jedina rješenja su $(1, 1)$ i $(1, 3)$.

Drugo rješenje.

Kao u prethodnom rješenju, dobije se $a \mid b^2$ i $b \mid 3a$. Budući da za prirodne brojeve x i y vrijedi

$$x \mid y \implies x \leqslant y,$$

imamo nejednakosti:
$$b^2 + 3a \leqslant 9a^2 + 3a, \quad b^2 + 3a \leqslant 4b^2.$$
Sada iz $a^2b \leqslant b^2 + 3a$ slijedi
$$a^2b \leqslant 9a^2 + 3a, \quad a^2b \leqslant 4b^2,$$
pa je
$$ab \leqslant 9a + 3, \quad a^2 \leqslant 4b.$$
Slijedi $a^3 \leqslant 4ab \leqslant 36a+12$, odnosno $a(a^2-36) \leqslant 12$, iz čega lako vidimo $a \leqslant 6$. Sada provjerom po slučajevima za a i korištenjem nejednakosti

$$\frac{a^2}{4} \leqslant b \leqslant 9 + \frac{3}{a}$$

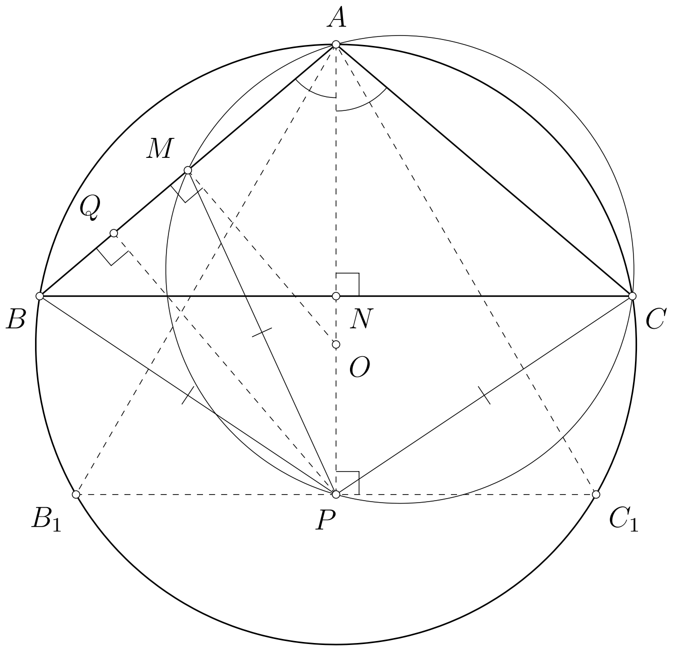
dobivamo da su moguća rješenja $a = b = 1$ i $a = 1$, $b = 3$.

Zadatak A-3.4.

Zadan je trokut ABC takav da je $|AB| = |AC|$. Neka su M i N polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ redom. Neka je P sjecište pravca AN s opisanom kružnicom trokuta AMC, različito od A. Pravac kroz točku P paralelan s BC siječe opisanu kružnicu trokuta ABC u točkama B_1 i C_1. Dokaži da je trokut AB_1C_1 jednakostraničan.

Prvo rješenje.

Točke A, M, P i C leže na istoj kružnici i vrijedi $\sphericalangle MAP = \sphericalangle PAC$. Stoga je $|MP| = |PC|$ jer su odgovarajući obodni kutovi sukladni. Kako je točka P na simetrali dužine $\overline{BC}$, vrijedi i $|BP| = |CP|$. Zato je $|MP| = |BP|$, a to znači da točka P leži na simetrali dužine $\overline{BM}$.



Neka je Q polovište dužine $\overline{MB}$, a O središte opisane kružnice trokuta ABC.

Uočimo da je $PQ \perp AB$ i $OM \perp AB$ pa je $PQ \parallel OM$. Kako je M polovište dužine $\overline{AB}$, a Q polovište dužine $\overline{MB}$, vrijedi $|MQ| = \frac{1}{3}|AQ|$. Zato je i $|OP| = \frac{1}{3}|AP|$.

Promotrimo sada trokut AB_1C_1. Središte njegove opisane kružnice je točka O, a nožište njegove visine iz vrha A je točka P. Kako su točke A, O i P kolinearne, taj trokut je jednakokračan.

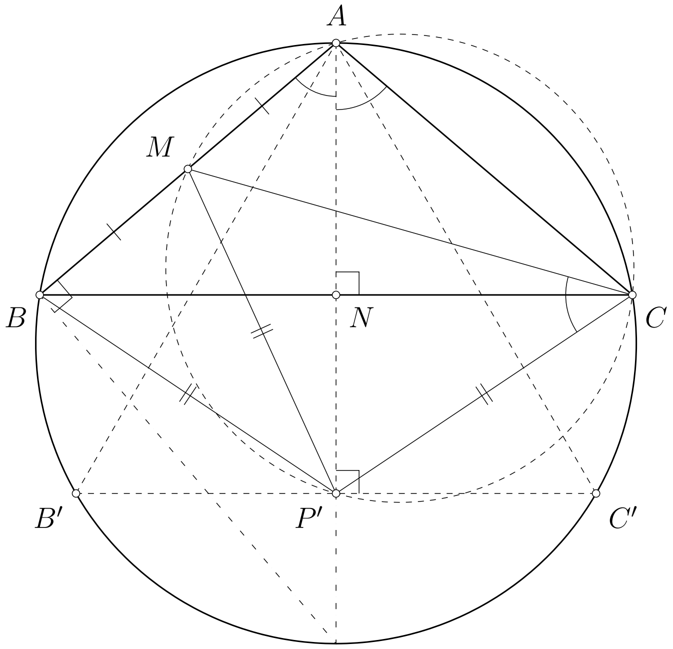
Zato je dužina $\overline{AP}$ ujedno i težišnica tog trokuta, pa je zbog $|OP| = \frac{1}{3}|AP|$ točka O težište tog trokuta. Konačno, kako se težište podudara sa središtem opisane kružnice, trokut AB_1C_1 je jednakostraničan.

Drugo rješenje.

Neka je $AB'C'$ jednakostranični trokut upisan u kružnicu opisanu oko trokuta ABC i neka je P' polovište dužine $\overline{B'C'}$. Budući da je $BC \parallel B'C'$, dovoljno je dokazati da se točke P i P' podudaraju.

Neka je R polumjer opisane kružnice trokuta ABC. Tada je duljina visine upisanog jednakostraničnog trokuta $|AP'| = \frac{3}{2}R$.

Označimo $\varphi = \sphericalangle BAN$. Tada je $|AB| = 2R\cos\varphi$ i $|AM| = R\cos\varphi$.



Koristeći poučak o kosinusu u trokutu ABP' dobivamo

$$\begin{aligned}|BP'|^2 &= |AP'|^2 + |AB|^2 - 2|AP'| \cdot |AB| \cos\varphi \\ &= \left(\frac{3}{2}R\right)^2 + (2R\cos\varphi)^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}R \cdot 2R\cos\varphi \cdot \cos\varphi \\ &= \frac{9}{4}R^2 - 2R^2\cos^2\varphi.\end{aligned}$$

Slično, koristeći poučak o kosinusu u trokutu AMP' dobivamo

$$\begin{aligned}|MP'|^2 &= |AP'|^2 + |AM|^2 - 2|AP'| \cdot |AM| \cos\varphi \\ &= \left(\frac{3}{2}R\right)^2 + (R\cos\varphi)^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}R \cdot R\cos\varphi \cdot \cos\varphi \\ &= \frac{9}{4}R^2 - 2R^2\cos^2\varphi.\end{aligned}$$

Dakle, $|CP'| = |BP'| = |MP'|$ pa su točke M, B i C na kružnici sa središtem P'. Zato je

$$\sphericalangle MCP' = \sphericalangle P'MC = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle CP'M) = 90^\circ - \sphericalangle CBM = \sphericalangle MAP'.$$

Konačno, iz $\sphericalangle MCP' = \sphericalangle MAP'$ slijedi da je $\overline{MP'}$ tetiva kružnice opisane trokutu AMC, a kako je P' i na simetrali dužine $\overline{BC}$, točka P' je upravo točka P.

Zadatak A-3.5.

Dva igrača naizmjence zapisuju po jednu znamenku, redom slijeva nadesno. Igrač gubi ako je nakon njegovog poteza napisan niz znamenaka

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$$

za koji postoji prirodni broj k takav da je broj $\overline{a_k a_{k+1} \ldots a_n}$ djeljiv s 11.

Koji igrač može pobijediti neovisno o igri protivnika?

Rješenje.

Pokazat ćemo da igrač koji je drugi na potezu može pobijediti neovisno o igri igrača koji je prvi na potezu. Očito, nijedan igrač neće napisati nulu ni u kojem koraku.

Uočimo da je $10^r \equiv (-1)^r \pmod{11}$, pa vrijedi sljedeći kriterij za djeljivost s 11:

$$\overline{a_k a_{k+1} \dots a_n} \equiv a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \dots + (-1)^{n-k} a_k \pmod{11}.$$

Označimo sa N_k ostatak broja $\overline{a_k a_{k+1} \dots a_n}$ pri dijeljenju s 11, za $k = 1, \dots, n.$ Ako su u n-tom potezu brojevi

$$N_1, \ \dots, \ N_n$$

svi različiti, onda prema spomenutom kriteriju djeljivosti s 11 u sljedećom potezu dobivamo brojeve

$$a_{n+1} - N_1, \ \dots, \ a_{n+1} - N_n, \ a_{n+1} \pmod{11}$$

koji su također svi različiti jer je $a_{n+1} \neq 0$. Induktivno zaključujemo da su u svakom potezu igre (za $n \leqslant 10$) brojevi $N_1, \dots, N_n$ različiti. Također, zbog načina na koji se brojevi $N_1, \dots, N_n$ transformiraju u svakom potezu, zaključujemo da postoji najviše $n+1$ znamenki čijim zapisivanjem igrač na potezu gubi.

Pretpostavimo da igra traje barem devet poteza. Drugi igrač gubi ako i samo ako je u devetom potezu skup $\{N_1, N_2, \dots, N_9\}$ jednak skupu $\{1, 2, \dots, 9\}$, tj. drugi igrač pobjeđuje ako i samo ako se među brojevima $N_1, N_2, \dots, N_9$ pojavljuje broj 10.

Ako u osmom potezu u skupu $\{N_1, \dots, N_8\}$ nedostaju dva broja od 1 do 10 koji nisu uzastopni, onda bez obzira na odabir prvog igrača u devetom potezu jedan od brojeva $N_1, \dots, N_9$ mora biti 10. Naime, ako prvi igrač odabere broj X, onda postoji k takav da je u osmom potezu $N_k = X + 1$ i u devetom potezu dobivamo

$$N_k \equiv X - (X+1) \equiv -1 \equiv 10 \pmod{11}.$$

Pokažimo da drugi igrač može osigurati da u osmom potezu igre među brojevima $N_1, \dots, N_8$ nema dva uzastopna broja. Svakako drugi igrač može osigurati da igra traje barem sedam poteza. Neka u sedmom potezu vrijedi

$$\{N_1, \dots, N_7\} = \{1, 2, \dots, 10\} \setminus \{X, Y, Z\}.$$

Ako među brojevima X, Y i Z nema uzastopnih, onda drugi igrač može odabrati bilo koji od njih. Ako je $Y = X + 1$, onda drugi igrač može napisati jedan od brojeva X ili $X + 1$ tako da u osmom potezu među brojevima $N_1, \dots, N_8$ nema dva uzastopna broja. Naime, ako je $Z = X - 1$, drugi igrač napiše X, a ako je $Z \neq X - 1$, onda drugi igrač napiše $X + 1$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

Poreč, 13. travnja 2018.

Zadatak A-4.1.

Neka je n prirodni broj. Dokaži da za svaki izbor brojeva $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0,1]$ vrijedi

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n + 1)^2 \geqslant 4(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2).$$

Prvo rješenje.

Kako je $x_i \in [0,1]$, imamo da je $x_i \geqslant x_i^2$, tj.

$$4(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \geqslant 4(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2).$$

Uvedimo oznaku $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Uočimo da je zbog gornje ocjene dovoljno dokazati da vrijedi

$$(S+1)^2 \geqslant 4S.$$

Ta nejednakost očito vrijedi jer je ekvivalentna sa $(S-1)^2 \geqslant 0$.

Drugo rješenje.

Dokažimo ovu nejednakost indukcijom po $n \in \mathbb{N}$.

Baza indukcije, $n = 1$:

$$(x_1 + 1)^2 \geqslant 4x_1^2 \iff (1 - x_1)(3x_1 + 2) \geqslant 0.$$

Pretpostavka indukcije: Pretpostavimo da postoji prirodni broj n takav da za svaki izbor brojeva $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0,1]$ vrijedi

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n + 1)^2 \geqslant 4(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2).$$

Korak indukcije: Dokažimo da analogna tvrdnja vrijedi i za bilo koji izbor brojeva $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} \in [0,1]$. Budući da je nejednakost simetrična, bez smanjenja općenitosti smijemo pretpostaviti da je x_{n+1} najmanji broj među njima. Iz toga možemo zaključiti da je taj element manji ili jednak od aritmetičke sredine svih ostalih brojeva jer je

$$x_{n+1} = \frac{1}{n}\left(x_{n+1} + x_{n+1} + \cdots + x_{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right).$$

Uvodeći oznaku $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, slijedi $x_{n+1} \leqslant \frac{S}{n}$, odnosno $S \geqslant n x_{n+1}$.

Prema pretpostavci indukcije za brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vrijedi

$$\begin{aligned}
(x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1} + 1)^2 &= (S + x_{n+1} + 1)^2 \\
&= (S+1)^2 + 2(S+1)x_{n+1} + x_{n+1}^2 \\
&\geqslant 4(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) + 2Sx_{n+1} + 2x_{n+1} + x_{n+1}^2 \\
&\geqslant 4(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) + 2nx_{n+1}^2 + 2x_{n+1} + x_{n+1}^2 \\
&= 4(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) + (2n+1)x_{n+1}^2 + 2x_{n+1} \\
&\geqslant 4(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) + (2n+3)x_{n+1}^2 \\
&\geqslant 4(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) + 4x_{n+1}^2 \\
&= 4(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + x_{n+1}^2),
\end{aligned}$$

pri čemu smo koristili $x_{n+1} \geqslant x_{n+1}^2$, te činjenicu da za sve prirodne brojeve n vrijedi $2n+3 \geqslant 4$.

Budući da smo iz pretpostavke indukcije dokazali korak, prema principu matematičke indukcije zaključujemo da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve n.

Zadatak A-4.2.

Gaussov cijeli broj je kompleksni broj čiji su realni i imaginarni dijelovi cijeli brojevi. Odredi najveći prirodni broj n za koji postoji skup od n Gaussovih cijelih brojeva tako da su kvadrati njihovih apsolutnih vrijednosti uzastopni prirodni brojevi.

Rješenje.

Ako je kompleksni broj $z = x + yi$ Gaussov cijeli broj, onda je $|z|^2 = x^2 + y^2$ zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva.

Kvadrat parnog cijelog broja je djeljiv s 4, dok kvadrat neparnog cijelog broja daje ostatak 1 pri dijeljenju s 4. Dakle, zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva može dati ostatke $0, 1$ ili 2 pri dijeljenju s 4.

Ako bi n bio veći od 3, onda bi bilo među koja uzastopna četiri prirodna broja u nizu

$$|z_1|^2, \ |z_2|^2, \ \ldots, \ |z_n|^2$$

postojao broj koji daje ostatak 3 pri dijeljenju s 4, što smo pokazali da je nemoguće. Dakle, n je manji ili jednak 3.

Uočimo da su $2+2i, 3, 3+i$ Gaussovi cijeli brojevi čiji je zbroj kvadrata modula redom $8, 9, 10$. Dakle, najveći prirodni broj n u zadatku je jednak tri.

Zadatak A-4.3.

Neka je $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija takva da je

$$f(ab) = f(a+b)$$

za sve prirodne brojeve $a \geqslant 4$ i $b \geqslant 4$.

Dokaži da je $f(n) = f(8)$ za sve prirodne brojeve $n \geqslant 8$.

Prvo rješenje.

Neka je $n \geqslant 8$ prirodan broj. Prema uvjetu iz zadatka vrijedi

$$\begin{aligned} f(n) &= f(4+(n-4)) = f(4(n-4)) = f(2(n-4)+2(n-4)) \\ &= f(4(n-4)(n-4)) = f(4(n-4)+(n-4)) \\ &= f(5(n-4)) = f(5+n-4) \\ &= f(n+1). \end{aligned}$$

Dakle, po principu matematičke indukcije zaključujemo da je $f(n) = f(8)$, za sve $n \geqslant 8$.

Drugo rješenje.

Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom.

Baza: Za $n = 8$ tvrdnja je očita. Za $n = 9$ računamo:

$$\begin{aligned} f(9) &= f(4+5) = f(20) = f(4+16) = f(64) \\ &= f(8 \cdot 8) = f(16) = f(4 \cdot 4) = f(8). \end{aligned}$$

Korak: Pretpostavimo da je $n > 9$ takav da je $f(m) = f(8)$, za sve $8 \leqslant m < n$. Ako je n paran, tada je $n = 2k$ za neki $k > 4$. Vrijedi:

$$\begin{aligned} f(2k) &= f(k^2) = f(k^2 - 4 + 4) \\ &= f(4(k^2-4)) = f((2k-4)(2k+4)) \\ &= f(4k) = f(k+4) \end{aligned}$$

Za $k > 4$ je $k + 4 < 2k = n$, pa je prema pretpostavci $f(k+4) = f(8)$.

Ako je n neparan, vrijedi $n = 2k+1$ za neki $k > 4$. Imamo:

$$\begin{aligned} f(2k+1) &= f(k(k+1)) = f(k(k+1) - 6 + 6) \\ &= f(6(k^2+k+1)) = f(3(k-2) \cdot 2(k+3)) \\ &= f(3k - 6 + 2k + 6) = f(5k) = f(k+5) \end{aligned}$$

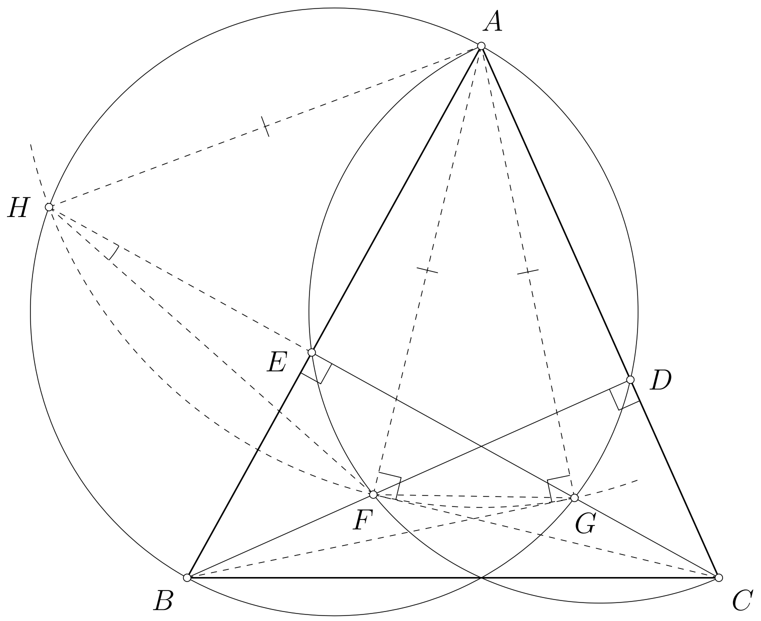
Za $k > 4$ je $k + 5 < 2k + 1 = n$, pa je prema pretpostavci $f(k+5) = f(8)$.

Vidimo da u oba slučaja vrijedi $f(n) = f(8)$.

Zadatak A-4.4.

Neka su $\overline{BD}$ i $\overline{CE}$ visine šiljastokutnog trokuta ABC. Kružnica promjera $\overline{AC}$ siječe dužinu $\overline{BD}$ u točki F. Kružnica promjera $\overline{AB}$ siječe pravac CE u točkama G i H, pri čemu je G između C i E. Ako je $\sphericalangle CHF = 12^\circ$, odredi $\sphericalangle AGF$.

Rješenje.



Tetiva $\overline{GH}$ je okomita na promjer $\overline{AB}$, pa je AB simetrala dužine $\overline{GH}$. Zato je $|AG| = |AH|$.

Trokut AFC je pravokutan, pa prema Euklidovom poučku vrijedi $|AF|^2 = |AD| \cdot |AC|$.

Analogno, trokut ABG je pravokutan, pa je $|AG|^2 = |AE| \cdot |AB|$.

Kutovi $\sphericalangle BDC$ i $\sphericalangle BEC$ su pravi, pa je četverokut $BCDE$ tetivan. Prema poučku o potenciji točke primijenjenom na točku A s obzirom na kružnicu opisanu četverokutu $BCDE$ zaključujemo da je $|AD| \cdot |AC| = |AE| \cdot |AB|$.

Stoga je $|AF| = |AG| = |AH|$, tj. točka A je središte trokutu GFH opisane kružnice.

Konačno je

$$\sphericalangle AGF = \sphericalangle GFA = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle FAG) = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\sphericalangle FHG) = \frac{1}{2}(180^\circ - 24^\circ) = 78^\circ.$$

Zadatak A-4.5.

Na natjecanju sudjeluje 300 natjecatelja. Svaka dva natjecatelja se međusobno ili poznaju ili ne poznaju, a ne postoje tri natjecatelja koji se svi međusobno poznaju. Odredi najveću moguću vrijednost broja n tako da vrijede sljedeći uvjeti:

- Svaki natjecatelj poznaje najviše n ostalih natjecatelja.
- Za svaki prirodni broj m takav da je $1 \leqslant m \leqslant n$ postoji barem jedan natjecatelj koji poznaje točno m ostalih natjecatelja.

Rješenje.

Najveća moguća vrijednost broja n je 200.

Pretpostavimo da postoji natjecatelj, nazovimo ga X, koji poznaje 201 ostalih natjecatelja i neka tih 201 natjecatelja tvori skup S. Dakle, moraju postojati i natjecatelji koji poznaju točno $1, 2, \ldots, 200$ ostalih natjecatelja.

Kažemo da natjecatelj *ima stupanj* m ako poznaje točno m drugih natjecatelja.

Svaki natjecatelj iz skupa S ima stupanj najviše 99. Naime, ne smije poznavati nikoga iz S jer ne postoje tri natjecatelja koji se svi međusobno poznaju, a osim X i natjecatelja iz S postoji još samo 98 natjecatelja. Zaključujemo zapravo da natjecatelji iz S imaju najviše 99 različitih stupnjeva. Istovremeno, natjecatelja koji nisu u skupu S i koji nisu X, ima 98, pa oni imaju najviše 98 različitih stupnjeva.

Time smo pokazali da natjecatelji imaju najviše $1+99+98 = 198 < 201$ različitih stupnjeva, pa je nemoguće da postoje natjecatelji koji poznaju točno $1, 2, \ldots, 201$ ostalih natjecatelja. Dakle, ne postoji natjecatelj koji poznaje točno 201 ostalih natjecatelja.

Pokažimo sada da je moguće da je $n = 200$. Označimo 100 natjecatelja s $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ i njih zovimo A-natjecateljima, a preostalih 200 s $B_1, B_2, \ldots, B_{200}$ te njih zovimo B-natjecateljima.

Za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ i svaki $j \in \{1, 2, \ldots, 200\}$, takve da je $i \leqslant j$, neka se poznaju natjecatelji A_i i B_j. Svi ostali parovi natjecatelja neka se međusobno ne poznaju. Tvrdimo da je za ovakav raspored poznanstava $n = 200$ i da su ispunjeni svi uvjeti zadatka.

Naime, ne postoje tri natjecatelja koji se svi međusobno poznaju, zato što se nikoja dva među A-natjecateljima ne poznaju i nikoja dva među B-natjecateljima se međusobno ne poznaju.

Nadalje, za $i \in \{1, 2, \ldots, 100\}$, natjecatelj A_i poznaje natjecatelje $B_i, B_{i+1}, \ldots, B_{200}$ i samo njih. Dakle, on ima točno $201 - i$ poznanika, što znači da postoje natjecatelji koji poznaju točno $200, 199, \ldots, 101$ ostalih natjecatelja. Slično, za $j \in \{1, 2, \ldots, 100\}$, natjecatelj B_j poznaje natjecatelje $A_1, \ldots, A_{j-1}, A_j$ i samo njih. Odnosno, on ima točno j poznanika, što znači da postoje natjecatelji koji poznaju točno $1, 2, \ldots, 100$ ostalih natjecatelja.