Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

Poreč, 13. travnja 2018.

1. Odredite sve parove prirodnih brojeva takve da je njihov osmerostruki najveći zajednički djelitelj za 6 veći od njihovog najmanjeg zajedničkog višekratnika.

2. Odredite periodične brojeve $0.\dot{x}$, $0.\dot{x}\dot{y}$ i $0.\dot{x}y\dot{z}$ za koje vrijedi

$$0.\dot{x} + 0.\dot{x}\dot{y} + 0.\dot{x}y\dot{z} = \frac{445}{333},$$

gdje su x, y, z (ne nužno različite) znamenke.

3. U tablicu dimenzija 300×300 upisani su prirodni brojevi koji nisu veći od 10, pri čemu su brojevi koji leže u poljima sa zajedničkim vrhom relativno prosti. Dokažite da postoji broj koji se pojavljuje bar 15000 puta.

4. U trapezu $ABCD$ je $AB \parallel CD$, $|AB| = 22$, $|BC| = 10$, $|CD| = 38$, $|DA| = 14$. Kutovi trapeza pri vrhovima A i B su tupi. Simetrale kutova pri vrhovima A i D sijeku se u točki E, a simetrale kutova pri vrhovima B i C u točki F. Izračunajte površinu šesterokuta $ABFCDE$.

5. Odredite sve cijele brojeve a za koje rješenje (x, y) sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} &x + (a+1)y = 2 \\ &a(2x - y) - a(ay + 1) = 3 \end{aligned}$$

zadovoljava uvjet $|x + y| \leqslant \dfrac{2018}{a+1}$.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

Poreč, 13. travnja 2018.

1. Za koje vrijednosti realnog parametra m vrijedi nejednakost $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 < 47$ ako su x_1 i x_2 rješenja jednadžbe $x^2 - (2^{m-1} - 5)x + 1 = 0$?

2. Odredite sve uređene parove cijelih brojeva (x, y) za koje vrijedi

$$(xy-1)^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2.$$

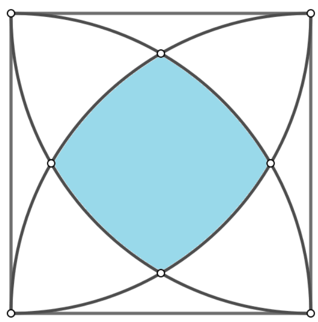
3. U trokutu kojemu su duljine stranica a, b, c i nasuprotni kutovi redom α, β, γ vrijedi jednakost

$$a^3 + b^3 + c^3 = ab(a+b) - bc(b+c) + ac(a+c).$$

Ako je $\cos\beta = \frac{24}{25}$, odredite omjer u kojemu visina iz vrha kuta α dijeli njemu nasuprotnu stranicu.

4. Zbroj četiri pozitivna realna broja je 8, a zbroj njihovih kvadrata 40. Odredite najveću moguću vrijednost koju jedan od tih brojeva može poprimiti.

5. Unutar kvadrata je iz svakog vrha povučen kružni luk polumjera a, gdje je a duljina stranice kvadrata. Odredite opseg i površinu osjenčanog lika.



Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

Poreč, 13. travnja 2018.

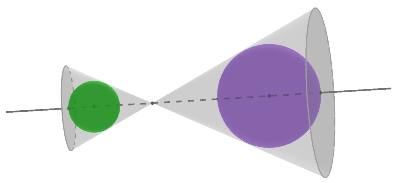
1. Odredite sve cijele brojeve x takve da je $\log_3 \dfrac{2x+60}{x+5}$ također cijeli broj.

2. U trokutu sa stranicama duljina a, b, c i površinom P vrijedi jednakost

$$\sqrt{3}(b^2+a^2-c^2)=2ab-4P.$$

Izračunajte mjeru kuta nasuprot stranice duljine c.

3. Dvije kugle polumjera 3 cm i 5 cm upisane su u dva stošca kao što je prikazano na slici. Stošci imaju jednake vršne kutove i zajedničku os koja je okomita na baze stožaca te prolazi njihovim središtima i zajedničkim vrhom. Udaljenost između baza je 40 cm. Ako svaka kugla dodiruje plašt i bazu pripadnog stošca, izračunajte ukupni obujam stožaca.



4. U konveksnom četverokutu $ABCD$ je $|AB|=15$, $|BC|=20$, $|CD|=24$, a kutovi pri vrhovima B i D su pravi. Izračunajte udaljenost između polovišta dijagonala četverokuta $ABCD$.

5. Mate i Roko su, pripremajući se za natjecanje, postavljali jedan drugome "nerješive" zadatke. Tako je Roko pitao Matu: *Znaš li koliko iznosi zbroj znamenaka broja 3^{2018} ?*

Na to je Mate odgovorio novim pitanjem:

Ne znam, a znaš li ti koji je broj 2018. po redu ako nastaviš niz u kojem je prvi broj 3^{2018}, drugi broj zbroj njegovih znamenaka, treći broj zbroj znamenaka drugog broja i tako dalje? Svaki je sljedeći broj u tom nizu jednak zbroju znamenaka prethodnog broja!

Pokažite da je Matino pitanje rješivo i odredite 2018. broj u tom nizu.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

Poreč, 13. travnja 2018.

1. Dokažite da je zbroj prvih $1+3+9+\ldots+3^m$ prirodnih brojeva jednak

$$1^2+3^2+9^2+\ldots+(3^m)^2.$$

2. Marina je u žurbi upisala u tablicu 5×5 samo neke od brojeva koje je trebala upisati. Zbunjenoj je prijateljici objasnila da će lako kasnije popuniti tablicu jer su brojevi u svakom retku i svakom stupcu poredani tako da čine 5 uzastopnih članova aritmetičkog niza. Popunite tablicu brojevima koje Marina nije upisala.

3				
		31		
	11			
				27

3. Odredite $f^{2018}(2018)$ ako za funkciju $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vrijedi

$$(x-1)f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x-1}.$$

Napomena: $f^{2018}(x)=(\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{2018})(x)$.

4. Skup svih točaka koje zadovoljavaju jednadžbu $x^2+y^2=8|x|+6|y|$ je krivulja u ravnini. Odredite površinu dijela ravnine koji je omeđen tom krivuljom. Koliko ima točaka (x,y) s cjelobrojnim koordinatama koje leže unutar te krivulje (ne na krivulji) za koje vrijedi $xy>0$?

5. U trokutu ABC je $\sphericalangle CAB=50^\circ$ i $\sphericalangle ABC=60^\circ$. Na stranici $\overline{AB}$ nalazi se točka D, a na stranici $\overline{BC}$ točka E tako da je $\sphericalangle CAE=\sphericalangle ACD=30^\circ$. Izračunajte mjeru kuta $\sphericalangle CDE$.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.