DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

Poreč, 13. travnja 2018.

Zadatak B-1.1.

Odredite sve parove prirodnih brojeva takve da je njihov osmerostruki najveći zajednički djelitelj za 6 veći od njihovog najmanjeg zajedničkog višekratnika.

Rješenje.

Neka su x i y traženi prirodni brojevi, V njihov najmanji zajednički višekratnik i M njihov najveći zajednički djelitelj.

Vrijedi da je $V + 6 = 8M \Rightarrow V = 8M - 6$.

Za brojeve M i V uvijek vrijedi jednakost $x \cdot y = M \cdot V$. Slijedi

$x \cdot y = M \cdot (8M - 6)$.

Neka su $n, m \in \mathbb{N}$, takvi da je $x = n \cdot M$ i $y = m \cdot M$.

$n \cdot m \cdot M^2 = M \cdot (8M - 6)$.

$n \cdot m = 8 - \dfrac{6}{M}$.

Dakle, može biti $M \in \{1, 2, 3, 6\}$.

Za $M = 1$ dobijemo $V = 2, n \cdot m = 2, n = 1, m = 2, x = 1, y = 2$.

Za $M = 2$ dobijemo $V = 10, n \cdot m = 5, n = 1, m = 5, x = 2, y = 10$.

Za $M = 3$ dobijemo $V = 18, n \cdot m = 6, n = 1, m = 6, x = 3, y = 18$ i $n = 2, m = 3, x = 6, y = 9$.

Za $M = 6$ dobijemo $V = 42, n \cdot m = 7, n = 1, m = 7, x = 6, y = 42$.

Svi parovi traženih prirodnih brojeva su $\{1, 2\}$, $\{2, 10\}$, $\{3, 18\}$, $\{6, 9\}$ i $\{6, 42\}$.

Zadatak B-1.2.

Odredite periodične brojeve $0.\dot{x}$, $0.\dot{x}\dot{y}$ i $0.\dot{x}y\dot{z}$ za koje vrijedi

$$0.\dot{x}+0.\dot{x}\dot{y}+0.\dot{x}y\dot{z}=\frac{445}{333},$$

gdje su x, y, z (ne nužno različite) znamenke.

Rješenje.

Dane periodične brojeve prikažimo u obliku razlomaka:

$$\begin{aligned}
0.\dot{x}&=\frac{x}{9},\\
0.\dot{x}\dot{y}&=\frac{10x+y}{99},\\
0.\dot{x}y\dot{z}&=\frac{100x+10y+z}{999}.
\end{aligned}$$

Nakon uvrštavanja u danu jednakost, dobivamo

$$\frac{x}{9}+\frac{10x+y}{99}+\frac{100x+10y+z}{999}=\frac{445}{333}.$$

Sada množimo s najmanjim zajedničkim nazivnikom:

$$x\cdot 37\cdot 3\cdot 11+(10x+y)\cdot 37\cdot 3+(100x+10y+z)\cdot 11=445\cdot 3\cdot 11.$$

Kako svi pribrojnici, osim drugog, sadrže faktor 11 te su djeljivi s 11, jedina je mogućnost da broj $10x+y$ bude djeljiv s 11, odnosno da su znamenke x i y jednake.

Tada prethodna jednakost prelazi u

$$\begin{aligned}
&x\cdot 37\cdot 3\cdot 11+(11x)\cdot 37\cdot 3+(110x+z)\cdot 11=445\cdot 3\cdot 11,\\
&x\cdot 37\cdot 3+x\cdot 37\cdot 3+(110x+z)=445\cdot 3,\\
&332x+z=1335,\\
&z=1335-332x.
\end{aligned}$$

Kako je z znamenka, vrijedi:

$$\begin{aligned}
&0\leqslant 1335-332x\leqslant 9\\
\Rightarrow\quad &3.99<x<4.1\\
\Rightarrow\quad &x=4=y.\\
&z=1335-332\cdot 4=7.
\end{aligned}$$

Brojevi su $\frac{4}{9}=0.\dot{4}$, $\frac{44}{99}=0.\dot{4}\dot{4}$, $\frac{447}{999}=0.\dot{4}4\dot{7}$.

Zadatak B-1.3.

U tablicu dimenzija 300×300 upisani su prirodni brojevi koji nisu veći od 10, pri čemu su brojevi koji leže u poljima sa zajedničkim vrhom relativno prosti. Dokažite da postoji broj koji se pojavljuje bar 15000 puta.

Rješenje.

Podijelimo tablicu na 150^2 kvadrata dimenzija 2×2.

Kako svaki od ovih kvadrata može sadržavati najviše 2 elementa niza $2, 3, 4, 6, 8, 9, 10$, to svaki ovakav kvadrat sadrži bar dva elementa niza $1, 5, 7$.

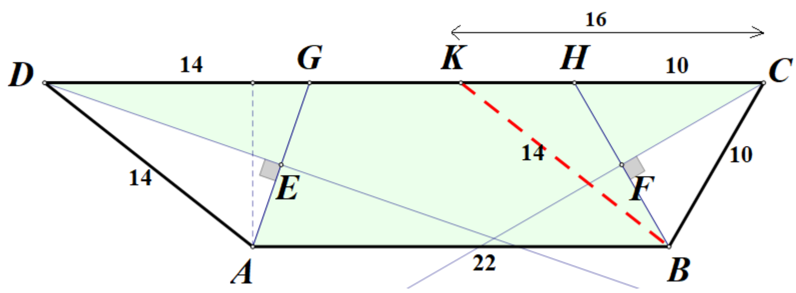
Kako ovih kvadrata ima 150^2, to će se $2 \cdot 150^2$ puta pojaviti element skupa $\{1, 5, 7\}$.

Prema Dirichletovom principu zaključujemo da će se neki od brojeva $1, 5, 7$ pojaviti barem $\dfrac{2 \cdot 150^2}{3} = 15000$ puta.

Zadatak B-1.4.

U trapezu $ABCD$ je $AB \parallel CD$, $|AB| = 22$, $|BC| = 10$, $|CD| = 38$, $|DA| = 14$. Kutovi trapeza pri vrhovima A i B su tupi. Simetrale kutova pri vrhovima A i D sijeku se u točki E, a simetrale kutova pri vrhovima B i C u točki F. Izračunajte površinu šesterokuta $ABFCDE$.

Prvo rješenje.



Označimo kut $\sphericalangle DAB$ s 2α. Tada je kut $\sphericalangle DAE$ jednak α. Zbog paralelnosti (osnovica trapeza) slijedi $\sphericalangle ADC = 180^\circ - 2\alpha$, odnosno $\sphericalangle ADE = 90^\circ - \alpha$. Tada je kut $\sphericalangle AED = 90^\circ$. Analogno zaključujemo da i da je kut $\sphericalangle BFC = 90^\circ$.

Neka je sad G presjek CD i AE (simetrale kuta kod vrha A). Slično, neka je H presjek CD i BF.

Kutovi $\sphericalangle DGA$ i $\sphericalangle DAG$ su sukladni (paralelni kraci), a isto tako su sukladni i kutovi $\sphericalangle GDE$ i $\sphericalangle ADE$ jer je DE simetrala kuta. Stranica $\overline{DE}$ je zajednička stranica trokutima GDE i ADE, stoga su ti trokuti sukladni, pa je trokut AGD jednakokračan trokut. Analogno zaključujemo i da je trokut BCH jednakokračan. Stoga je površina trokuta DEG jednaka polovini površine trokuta ADG, a površina trokuta BFC jednaka je polovini površine trokuta BCH.

Površina šesterokuta $ABFCDE$ jednaka je:

$$\begin{aligned} P_{ABFCDE} &= P_{ABCD} - \frac{1}{2}P_{BCH} - \frac{1}{2}P_{ADG} \\ &= \frac{22+38}{2} \cdot h - \frac{1}{2} \cdot \frac{10 \cdot h}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{14 \cdot h}{2} = \frac{1}{2}h(60-12) = 24h, \end{aligned}$$

gdje je h visina danog trapeza $ABCD$.

Visinu računamo iz trokuta BCK, koji dobijemo povlačenjem paralele BK s krakom AD kroz vrh B. Duljine stranica trokuta BCK su $10, 16, 14$ pa njegovu površinu računamo koristeći Heronovu formulu:

$$\begin{aligned} &P_{BCK} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, s = \frac{a+b+c}{2}, \\ &P_{BCK} = 40\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Slijedi

$$\begin{aligned} &\frac{h \cdot 16}{2} = 40\sqrt{3}, \\ &h = 5\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Sada je tražena površina jednaka $P_{ABFCDE} = 24h = 24 \cdot 5\sqrt{3} = 120\sqrt{3}$.

Drugo rješenje.

Slika i oznake kao i u prvom rješenju.

Kao i u prvom rješenju pokaže se da su trokuti AGD i BCH jednakokračni, odnosno da su točke E i F redom polovišta dužina $\overline{AG}$ i $\overline{BH}$.

Sada zaključujemo da je $\overline{EF}$ srednjica trapeza $ABHG$, pa je njezina duljina $|EF| = \frac{22+14}{2} = 18$. Visinu početnog trapeza $ABCD$ računamo kao i u prvom rješenju iz trokuta BCK:

$$\begin{aligned} &\frac{h \cdot 16}{2} = \sqrt{20(20-10)(20-16)(20-14)}, \\ &h = 5\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Traženu površinu šesterokuta možemo računati kao zbroj površina trapeza $ABFE$ i trapeza $EFCD$:

$$\begin{aligned} P_{ABFCDE} &= P_{ABEF} + P_{EFCD} \\ &= \frac{22+18}{2} \cdot \frac{h}{2} + \frac{18+38}{2} \cdot \frac{h}{2} = (20+28)\frac{h}{2} = 24 \cdot 5\sqrt{3} = 120\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Zadatak B-1.5.

Odredite sve cijele brojeve a za koje rješenje (x, y) sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} &x + (a+1)y = 2 \\ &a(2x - y) - a(ay + 1) = 3 \end{aligned}$$

zadovoljava uvjet $|x + y| \leqslant \dfrac{2018}{a+1}$.

Rješenje.

Nakon sređivanja druge jednadžbe sustava slijedi

$$\begin{aligned} &x + (a+1)y = 2 \\ &2ax - y(a^2 + a) = 3 + a. \end{aligned}$$

Nakon što prvu jednadžbu pomnožimo s $-2a$ i zbrojimo s drugom, dobivamo $y = \dfrac{a-1}{a(a+1)}$, a nakon toga iz prve jednadžbe slijedi

$$x = \frac{a+1}{a}, a \neq -1 \text{ i } a \neq 0. \tag{*}$$

$$\begin{aligned} &\left|\frac{a+1}{a} + \frac{a-1}{a(a+1)}\right| \leqslant \frac{2018}{a+1} \\ &\left|\frac{a^2 + 2a + 1 + a - 1}{a(a+1)}\right| \leqslant \frac{2018}{a+1} \Leftrightarrow \left|\frac{a^2 + 3a}{a(a+1)}\right| \leqslant \frac{2018}{a+1} \\ &\Leftrightarrow \left|\frac{a+3}{a+1}\right| \leqslant \frac{2018}{a+1} \Leftrightarrow |a+3| \leqslant \frac{2018}{a+1}|a+1|, a \neq -1. \end{aligned}$$

Sad imamo dva slučaja.

I. Ako je $a + 1 < 0$, odnosno $a < -1$, tada je $|a + 3| \leqslant -2018$, što nije moguće.

II. Ako je $a + 1 > 0 \Leftrightarrow a > -1$, tada je:

$$\begin{aligned} &|a + 3| \leqslant 2018 \\ &\Leftrightarrow -2018 \leqslant a + 3 \leqslant 2018 \\ &\Leftrightarrow -2021 \leqslant a \leqslant 2015. \end{aligned}$$

Kako je $a > -1$, slijedi $a \in \langle -1, 2015] \cap \mathbb{Z}$.
Kako je zbog (*) $a \neq 0$, rješenje su svi cijeli brojevi iz skupa $\{1, 2, \ldots, 2015\}$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

Poreč, 13. travnja 2018.

Zadatak B-2.1.

Za koje vrijednosti realnog parametra m vrijedi nejednakost $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2<47$ ako su x_1 i x_2 rješenja jednadžbe $x^2-(2^{m-1}-5)x+1=0$?

Rješenje.

Za rješenja jednadžbe $x^2-(2^{m-1}-5)x+1=0$ vrijedi

$$x_1+x_2=2^{m-1}-5 \quad \text{i} \quad x_1x_2=1.$$

Zato je

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 &= \frac{x_1^4+x_2^4}{x_1^2x_2^2}=\frac{(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2}{x_1^2x_2^2}\\
&=\frac{((x_1+x_2)^2-2x_1x_2)^2-2(x_1x_2)^2}{(x_1x_2)^2}\\
&=\frac{((2^{m-1}-5)^2-2)^2-2\cdot 1^2}{1^2}=((2^{m-1}-5)^2-2)^2-2
\end{aligned}$$

Dani uvjet je ekvivalentan s

$$\begin{aligned}
& ((2^{m-1}-5)^2-2)^2-2<47\\
\Leftrightarrow\quad & ((2^{m-1}-5)^2-2)^2<49\\
\Leftrightarrow\quad & |(2^{m-1}-5)^2-2|<7\\
\Leftrightarrow\quad & -7<(2^{m-1}-5)^2-2<7\\
\Leftrightarrow\quad & -5<(2^{m-1}-5)^2<9.
\end{aligned}$$

Nejednakost $-5<(2^{m-1}-5)^2$ vrijedi za sve realne brojeve m, a nejednakost $(2^{m-1}-5)^2<9$ ekvivalentna je s $-3<2^{m-1}-5<3$ odnosno $2<2^{m-1}<8$, odakle dobivamo $1<m-1<3$.

Konačno, tražene vrijednosti parametra m su $m\in\langle 2,4\rangle$.

Zadatak B-2.2.

Odredite sve uređene parove cijelih brojeva (x, y) za koje vrijedi

$$(xy-1)^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2.$$

Rješenje.

Uočimo da je dana jednadžba simetrična, pa ako je par (x, y) rješenje jednadžbe, tada je i par (y, x) njezino rješenje.

Transformirajmo danu jednadžbu:

$$\begin{aligned}
(xy-1)^2 &= (x+1)^2 + (y+1)^2 \\
(xy-1)^2 - (x+1)^2 &= (y+1)^2 \\
(xy+x)(xy-x-2) &= (y+1)^2 \\
x(y+1)(xy-x-2) &= (y+1)^2
\end{aligned}$$

Prvi slučaj. Ako je $y+1=0$, onda jednadžbu zadovoljava svaki x. Dakle, rješenja dane jednadžbe su svi uređeni parovi $(a, -1)$, $a \in \mathbb{Z}$.

Zbog simetričnosti, rješenja su i svi uređeni parovi $(-1, b)$, $b \in \mathbb{Z}$.

Drugi slučaj. Ako je $x+1 \neq 0$ i $y+1 \neq 0$, tada je $x(xy-x-2) = y+1$.

Ovo je ekvivalentno s

$$\begin{aligned}
x^2y - x^2 - 2x &= y+1 \\
x^2y - y &= x^2 + 2x + 1 \\
(x^2-1)y &= (x+1)^2 \\
(x-1)(x+1)y &= (x+1)^2
\end{aligned}$$

Zbog $x+1 \neq 0$ slijedi $(x-1)y = (x+1)$.

Ako je $x = 1$, ova jednadžba nema rješenja, pa dijelimo s $x-1$:

$$y = \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}.$$

Sada slijedi $x - 1 \in \{-2, -1, 1, 2\}$, odnosno $x \in \{-1, 0, 2, 3\}$. Kako je $x, y \neq -1$, mora biti $x \in \{2, 3\}$. Iz $x = 2$ slijedi $y = 3$; iz $x = 3$ slijedi $y = 2$.

Konačno, rješenja su uređeni parovi: $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(-1, b)$, $(a, -1)$ za $a, b \in \mathbb{Z}$.

Zadatak B-2.3.

U trokutu kojemu su duljine stranica a, b, c i nasuprotni kutovi redom α, β, γ vrijedi jednakost

$$a^3 + b^3 + c^3 = ab(a+b) - bc(b+c) + ac(a+c).$$

Ako je $\cos\beta = \dfrac{24}{25}$, odredite omjer u kojemu visina iz vrha kuta α dijeli njemu nasuprotnu stranicu.

Rješenje.

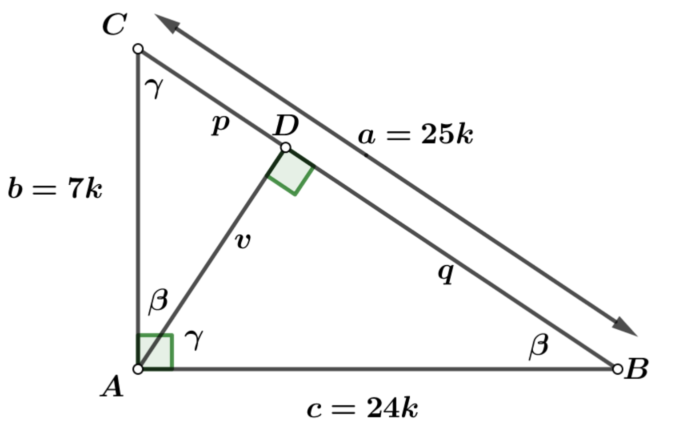
Iz jednakosti $a^3 + b^3 + c^3 = ab(a+b) - bc(b+c) + ac(a+c)$ slijedi

$$\begin{gathered}
a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - ab^2 + b^2c + bc^2 - a^2c - ac^2 = 0 \\
a^3 - ab^2 - ac^2 + b^3 - a^2b + bc^2 + c^3 + b^2c - a^2c = 0 \\
a(a^2 - b^2 - c^2) + b(b^2 - a^2 + c^2) + c(c^2 + b^2 - a^2) = 0 \\
(b^2 + c^2 - a^2)(-a + b + c) = 0
\end{gathered}$$

Zbog nejednakosti trokuta je $b + c - a > 0$ pa mora biti $b^2 + c^2 - a^2 = 0$, odnosno $b^2 + c^2 = a^2$. Dakle, zadani je trokut pravokutan s hipotenuzom duljine a. Kako je $\cos\beta = \frac{24}{25}$, duljine stranica tog trokuta su oblika

$$a = 25k, \quad c = 24k, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(25k)^2 - (24k)^2} = 7k.$$

Označimo dijelove danog trokuta kao na slici:



Iz sličnosti trokuta ABD i CBA te trokuta CAD i CBA (ili iz Euklidovog poučka) dobivamo

$$\frac{p}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow p = \frac{b^2}{a}, \qquad \frac{q}{c} = \frac{c}{a} \Rightarrow q = \frac{c^2}{a}.$$

Traženi omjer je $\dfrac{p}{q} = \dfrac{b^2}{c^2} = \left(\dfrac{7k}{24k}\right)^2 = \dfrac{49}{576}$ (ili recipročno).

Zadatak B-2.4.

Zbroj četiri pozitivna realna broja je 8, a zbroj njihovih kvadrata 40. Odredite najveću moguću vrijednost koju jedan od tih brojeva može poprimiti.

Rješenje.

Neka su a, b, c, d promatrani brojevi. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je d najveći od njih. Iz $a+b+c+d=8$ i $a^2+b^2+c^2+d^2=40$ slijedi

$$a+b+c=8-d, \qquad a^2+b^2+c^2=40-d^2. \tag{$*$}$$

Kvadriramo li prvu jednakost i primijenimo drugu dobivamo

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2&=(8-d)^2\\ a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)&=(8-d)^2\\ 40-d^2+2(ab+bc+ca)&=64-16d+d^2\\ ab+bc+ca&=12-8d+d^2.\end{aligned} \tag{**}$$

Poznato je da vrijedi

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca \tag{$***$}$$

(lako se dobije iz nejednakosti $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant 0$).

Primijenimo li u toj nejednakosti (*) i (**) dobivamo:

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2&\geqslant ab+bc+ca\\ 40-d^2&\geqslant 12-8d+d^2\\ d^2-4d-14&\leqslant 0.\end{aligned}$$

Rješenja jednadžbe $d^2-4d-14=0$ su $d=2\pm 3\sqrt{2}$, a rješenje gornje nejednadžbe je $d\in\left[2-3\sqrt{2},2+3\sqrt{2}\right]$. Najveći realan broj d iz ovog intervala je $2+3\sqrt{2}$.

Treba još provjeriti postoje li pozitivni realni brojevi a, b i c koji uz $d=2+3\sqrt{2}$ zadovoljavaju obje dane jednadžbe.

Stavimo li $a=b=c=\dfrac{8-d}{3}=2-\sqrt{2}$, lako je provjeriti da je zaista $a^2+b^2+c^2+d^2=3(2-\sqrt{2})^2+(2+3\sqrt{2})^2=40$.

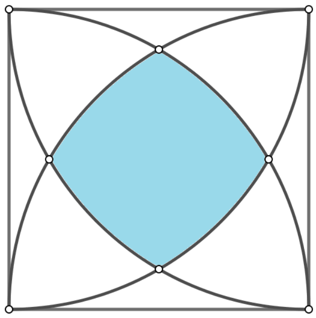
Najveća moguća vrijednost jednog od promatranih brojeva je $2+3\sqrt{2}$.

Napomena: Umjesto nejednakosti (***) možemo primijeniti nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine:

$$\begin{aligned}\frac{a+b+c}{3}&\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\\ (a+b+c)^2&\leqslant 3(a^2+b^2+c^2)\\ (8-d)^2&\leqslant 3(40-d^2)\\ d^2-4d-14&\leqslant 0.\end{aligned}$$

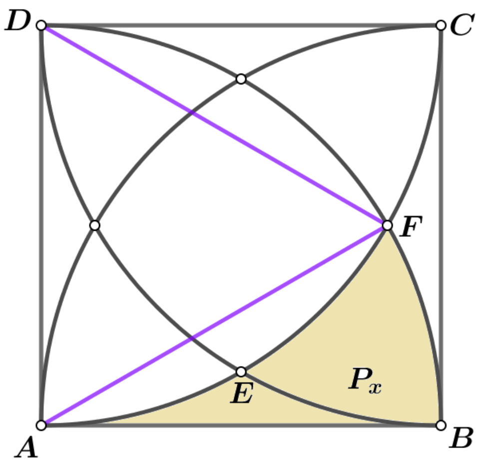
Zadatak B-2.5.

Unutar kvadrata je iz svakog vrha povučen kružni luk polumjera a, gdje je a duljina stranice kvadrata. Odredite opseg i površinu osjenčanog lika.



Prvo rješenje.

Uočimo da je površina kvadrata jednaka zbroju četiri površine osjenčanog dijela P_x i tražene površine. Najprije ćemo izračunati površinu P_x.



Površinu P_x dobijemo ako od kružnog isječka ABF oduzmemo površinu kružnog odsječka kruga sa središtem D, omeđenog tetivom $\overline{AF}$ i lukom $\widehat{AF}$. Trokut AFD je jednakostraničan trokut (njegove su stranice jednake polumjeru nacrtanih lukova). Stoga je $\sphericalangle FAB = 30°$, $\sphericalangle FDA = 60°$. Slijedi

$$P_x = a^2\pi \cdot \frac{30°}{360°} - \left(a^2\pi \cdot \frac{60°}{360°} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{a^2\pi}{12}.$$

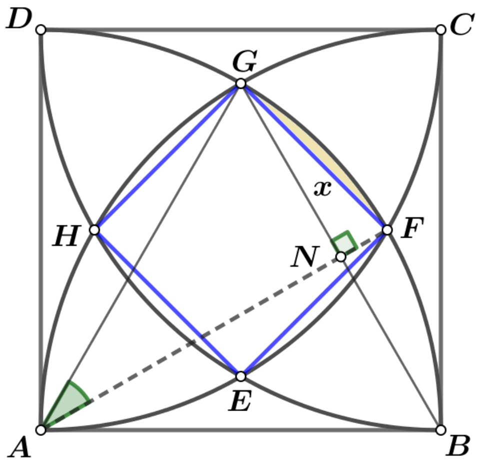
Tražena površina jednaka je

$$P = a^2 - 4P_x = a^2\left(1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right).$$

Traženi opseg jednak je četverostrukoj duljini luka $\widehat{EF}$ kojemu pripada središnji kut od 30°. Stoga je $o = 4 \cdot \dfrac{1}{12} \cdot 2a\pi = \dfrac{2a\pi}{3}$.

Drugo rješenje.

Osjenčeni lik sastoji se od kvadrata $EFGH$ čiji su vrhovi sjecišta nacrtanih lukova i četiri sukladna kružna odsječka. Uočimo da je trokut ABG jednakostraničan, a kut $\sphericalangle FAG = 30°$.



Duljinu x stranice kvadrata računamo primjenom Pitagorinog poučka na trokut FGN, gdje je N sjecište $\overline{AF}$ i $\overline{BG}$, odnosno polovište dužine $\overline{BG}$.

$$
\begin{aligned}
x^2 = |FG|^2 = |NG|^2 + |NF|^2 &= \left(\frac{1}{2}|BG|\right)^2 + (|AF| - |AN|)^2 \\
&= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + a^2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\
&= a^2(2 - \sqrt{3})
\end{aligned}
$$

Površinu kružnog odsječka nad tetivom $\overline{FG}$ dobit ćemo oduzimanjem površine trokuta AFG od površine odgovarajućeg kružnog isječka s vrhom u A.

$$
\begin{aligned}
&P_{\text{odsj}} = P_{\text{isj}} - P_{\triangle} \\
&P(\triangle AFG) = \frac{1}{2} \cdot |AF| \cdot |GN| = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4} \\
&P_{\text{odsj}} = \frac{1}{12} \cdot a^2\pi - \frac{a^2}{4} = a^2\left(\frac{\pi}{12} - \frac{1}{4}\right)
\end{aligned}
$$

Konačno je tražena površina

$$
P = x^2 + 4P_{\text{odsj}} = a^2(2 - \sqrt{3}) + 4a^2\left(\frac{\pi}{12} - \frac{1}{4}\right) = a^2\left(1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right).
$$

Opseg lika računamo na isti način kao u prvom rješenju.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

Poreč, 13. travnja 2018.

Zadatak B-3.1.

Odredite sve cijele brojeve x takve da je $\log_3 \dfrac{2x+60}{x+5}$ također cijeli broj.

Rješenje.

Iz $\dfrac{2x+60}{x+5} > 0$ dobivamo da je $x \in \langle -\infty, -30\rangle \cup \langle -5, +\infty\rangle$.

Imamo tri mogućnosti:

$\log_3 \dfrac{2x+60}{x+5} = 0$ ili $\log_3 \dfrac{2x+60}{x+5} = n$ ili $\log_3 \dfrac{2x+60}{x+5} = -n$, $n \in \mathbb{N}$.

Provjerimo postoji li cijeli broj x takav da je $\log_3 \dfrac{2x+60}{x+5} = 0$.

$\dfrac{2x+60}{x+5} = 1 \Rightarrow x = -55$.

Neka je $\log_3 \dfrac{2x+60}{x+5} = n$, gdje je n prirodan broj. Tada je $\dfrac{2x+60}{x+5} = 3^n$.

$\dfrac{2x+60}{x+5} = \dfrac{2(x+5)+50}{x+5} = 2 + \dfrac{50}{x+5} \Rightarrow \dfrac{50}{x+5} = 3^n - 2$.

Budući da je $3^n - 2$ neparan broj, zbog djeljivosti slijedi $x + 5 \in \{2, 10, 50\}$, odnosno $x \in \{-3, 5, 45\}$.

Uvrštavanjem se provjeri da su rješenja $x = -3$, $x = 45$.

Neka je sada $\log_3 \dfrac{2x+60}{x+5} = -n$, gdje je n prirodan broj. Tada je

$$\frac{2x+60}{x+5} = 3^{-n} \Leftrightarrow \frac{x+5}{2x+60} = 3^n \Leftrightarrow \frac{x+5}{x+30} = 2 \cdot 3^n$$
$$\Leftrightarrow \frac{x+30-25}{x+30} = 2 \cdot 3^n \Leftrightarrow 1 - \frac{25}{x+30} = 2 \cdot 3^n.$$

Kako je na desnoj strani paran cijeli broj, na lijevoj strani mora biti $x + 30 \in \{-1, -5, -25\}$, odnosno $x \in \{-31, -35, -55\}$.

Uvrštavanjem se provjeri da su rješenja $x = -35$ i $x = -55$.

Stoga su traženi cijeli brojevi x jednaki -55, -35, -3 i 45.

Zadatak B-3.2.

U trokutu sa stranicama duljina a, b, c i površinom P vrijedi jednakost

$$\sqrt{3}(b^2 + a^2 - c^2) = 2ab - 4P.$$

Izračunajte mjeru kuta nasuprot stranice duljine c.

Rješenje.

Neka je kut nasuprot stranici duljine c jednak γ.

Podijelimo li jednakost $\sqrt{3}(b^2 + a^2 - c^2) = 2ab - 4P$ s $2ab$, dobivamo

$$\frac{\sqrt{3}(b^2 + a^2 - c^2)}{2ab} = 1 - \frac{2P}{ab},$$

odnosno $\sqrt{3}\cos\gamma = 1 - \dfrac{2P}{ab}$.

Kako je $P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, iz prethodne jednakosti dobivamo trigonometrijsku jednadžbu $\sqrt{3}\cos\gamma = 1 - \sin\gamma$ koju rješavamo svođenjem na adicijske formule:

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}\cos\gamma + \sin\gamma &= 1\\
\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\gamma + \frac{1}{2}\sin\gamma &= \frac{1}{2}\\
\cos\gamma\cos 30^\circ + \sin\gamma\sin 30^\circ &= \frac{1}{2}\\
\cos(\gamma - 30^\circ) &= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Iz $\cos(\gamma - 30^\circ) = \frac{1}{2}$ slijedi $\gamma - 30^\circ = 60^\circ$, odnosno $\gamma = 90^\circ$.

Napomena: Jednadžba $\sqrt{3}\cos\gamma + \sin\gamma = 1$ može se riješiti i univerzalnom supstitucijom. Uvođenjem supstitucije $\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2} = t$ jednadžba $\sqrt{3}\cos\gamma + \sin\gamma = 1$ prelazi u jednadžbu

$$\sqrt{3}\,\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} = 1,$$

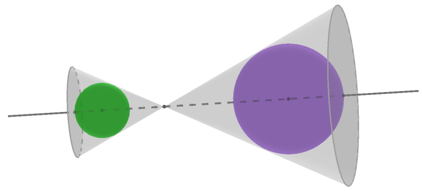
odnosno $(1+\sqrt{3})t^2 - 2t + 1 - \sqrt{3} = 0$, a rješenja su $t_1 = \sqrt{3} - 2$ i $t_2 = 1$.

Iz $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{3} - 2 < 0$ slijedi $\gamma > 180^\circ$ što je nemoguće.

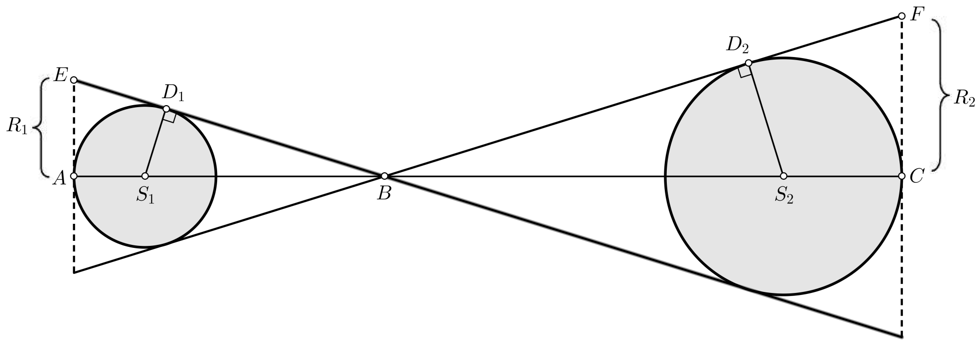
Iz $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = 1$ slijedi $\gamma = 90^\circ$.

Zadatak B-3.3.

Dvije kugle polumjera 3 cm i 5 cm upisane su u dva stošca kao što je prikazano na slici. Stošci imaju jednake vršne kutove i zajedničku os koja je okomita na baze stožaca te prolazi njihovim središtima i zajedničkim vrhom. Udaljenost između baza je 40 cm. Ako svaka kugla dodiruje plašt i bazu pripadnog stošca, izračunajte ukupni obujam stožaca.



Rješenje.



Uočimo da je udaljenost središta kugli $|S_1B| + |S_2B| = 40 - 3 - 5 = 32\,\text{cm}$.

Zbog sličnosti trokuta S_1BD_1 i S_2BD_2, vrijedi $|S_1B| : |S_2B| = 3 : 5$.

Slijedi da je $|S_1B| = 12\,\text{cm}$ i $|S_2B| = 20\,\text{cm}$.

$|BD_1| = \sqrt{12^2 - 3^2} = \sqrt{135} = 3\sqrt{15}\,\text{cm}$.

Zbog sličnosti trokuta S_1BD_1 i EBA, vrijedi $|S_1D_1| : |BD_1| = |EA| : |AB|$.

Slijedi $3 : 3\sqrt{15} = R_1 : 15$, odnosno $R_1 = \sqrt{15}\,\text{cm}$.

Analogno je $|BD_2| = \sqrt{20^2 - 5^2} = \sqrt{375} = 5\sqrt{15}\,\text{cm}$.

Zbog sličnosti trokuta S_2BD_2 i FBC, vrijedi $|S_2D_2| : |BD_2| = |FC| : |CB|$.

Slijedi $5 : 5\sqrt{15} = R_2 : 25$, odnosno $R_2 = \frac{5}{3}\sqrt{15}\,\text{cm}$.

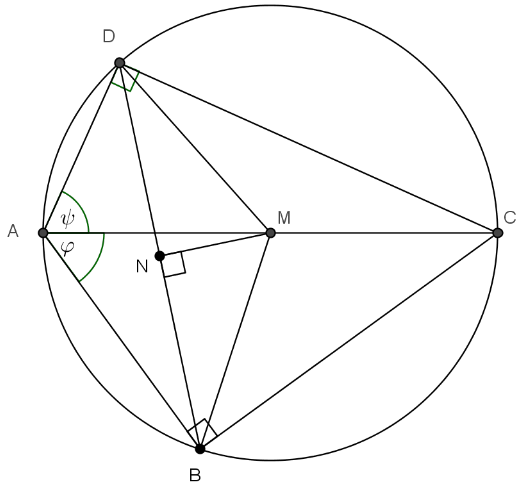
Ukupni obujam dvaju stožaca je

$$\begin{aligned} V = V_1 + V_2 &= \frac{1}{3}R_1^2\pi|AB| + \frac{1}{3}R_2^2\pi|BC| = \frac{1}{3}\pi(R_1^2 \cdot |AB| + R_2^2|BC|) \\ &= \frac{1}{3}\pi\left(15 \cdot 15 + \frac{125}{3} \cdot 25\right) = \frac{25}{9}\pi(27 + 125) = \frac{25}{9}\pi \cdot 152 = \frac{3800}{9}\pi\,\text{cm}^3. \end{aligned}$$

Zadatak B-3.4.

U konveksnom četverokutu $ABCD$ je $|AB| = 15$, $|BC| = 20$, $|CD| = 24$, a kutovi pri vrhovima B i D su pravi. Izračunajte udaljenost između polovišta dijagonala četverokuta $ABCD$.

Prvo rješenje.



Iz pravokutnog trokuta ABC slijedi $|AC| = \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$.

Iz pravokutnog trokuta ACD slijedi $|AD| = \sqrt{|AC|^2 - |CD|^2} = 7$.

Kako je $|BD|^2 = |AD|^2 + |AB|^2 - 2|AD||AB|\cos(\varphi + \psi)$, potrebno je izračunati $\cos(\varphi + \psi)$.

$$\cos\varphi = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin\varphi = \frac{4}{5}.$$
$$\sin\psi = \frac{|CD|}{|AB|} = \frac{24}{25} \Rightarrow \cos\psi = \frac{7}{25}.$$
$$\cos(\varphi + \psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi = -\frac{3}{5}.$$

Dakle, dobivamo $|BD|^2 = |AD|^2 + |AB|^2 - 2|AD||AB|\cos(\varphi + \psi) = 400$ pa je $|BD| = 20$.

Kako je $|MB| = |MD| = \frac{25}{2}$ i točka N polovište dijagonale $\overline{BD}$, zaključujemo da je $\overline{MN}$ visina jednakokračnog trokuta BMD.

Stoga je $|MN| = \sqrt{|MB|^2 - |BN|^2} = \frac{15}{2}$.

Napomena: Kako je $ABCD$ tetivni četverokut, duljina dijagonale $\overline{BD}$ može se dobiti primjenom Ptolomejevog teorema. Umnožak duljina dijagonala tetivnog četverokuta jednak je zbroju umnožaka duljina nasuprotnih stranica, tj. $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC|$.

Dakle, $25 \cdot |BD| = 15 \cdot 24 + 20 \cdot 7$, odakle dobivamo $|BD| = 20$.

Drugo rješenje.

Iz pravokutnog trokuta ABC slijedi $|AC| = \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$.

Iz pravokutnog trokuta ACD slijedi $|AD| = \sqrt{|AC|^2 - |CD|^2} = 7$.

Neka je $\alpha = \sphericalangle BCD$. Tada je $180^\circ - \alpha = \sphericalangle DAB$ jer je $ABCD$ tetivni četverokut.

Kut NMD jednak je manjem obodnom kutu nad tetivom BD, odnosno $\sphericalangle NMD = \alpha$.

Iz pravokutnog trokuta DNM slijedi $\cos\alpha = \dfrac{|MN|}{R}$, odnosno $|MN| = R\cos\alpha$.

Primijenimo poučak o kosinusu na trokute DAB i BCD kako bismo izračunali $\cos\alpha$.

$$\begin{aligned}
|BD|^2 &= |AD|^2 + |AB|^2 - 2|AD||AB|\cos(180^\circ - \alpha)\\
|BD|^2 &= |BC|^2 + |CD|^2 - 2|BC||CD|\cos\alpha\\
|BD|^2 &= 49 + 225 + 2 \cdot 7 \cdot 15\cos\alpha\\
|BD|^2 &= 400 + 576 - 2 \cdot 20 \cdot 24\cos\alpha.
\end{aligned}$$

Nakon oduzimanja zadnje dvije jednakosti i sređivanja, dobivamo $\cos\alpha = 0.6$.

Tada je $|MN| = R\cos\alpha = \frac{25}{2} \cdot 0.6 = 7.5$.

Zadatak B-3.5.

Mate i Roko su, pripremajući se za natjecanje, postavljali jedan drugome "nerješive" zadatke. Tako je Roko pitao Matu: *Znaš li koliko iznosi zbroj znamenaka broja* 3^{2018} *?*

Na to je Mate odgovorio novim pitanjem:

Ne znam, a znaš li ti koji je broj 2018. *po redu ako nastaviš niz u kojem je prvi broj* 3^{2018}, *drugi broj zbroj njegovih znamenaka, treći broj zbroj znamenaka drugog broja i tako dalje? Svaki je sljedeći broj u tom nizu jednak zbroju znamenaka prethodnog broja!*

Pokažite da je Matino pitanje rješivo i odredite 2018. broj u tom nizu.

Rješenje.

Označimo redom s $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2018}, \ldots$ prvi, drugi, treći,..., 2018-ti član... danog niza brojeva.

Uočimo da je $a_1 = 3^{2018} = 9 \cdot 3^{2016}$.

Kako je prvi član niza djeljiv s 9, njegov je zbroj znamenaka djeljiv s 9. Zato je i broj a_2 djeljiv s 9, a tada i svi ostali članovi niza.

Kako je $a_1 = 3^{2018} = 9^{1009} < 10^{1009}$, prvi član niza ne može imati više od 1009 znamenaka, a svaka je najviše 9. Zato je $a_2 \leqslant 9 \cdot 1009 = 9081$.

Dakle drugi član niza ima najviše 4 znamenke pa je treći član niza najviše $4 \cdot 9 = 36$.

Kako je treći član niza djeljiv s 9, on može biti samo 9, 18, 27 ili 36. U svakom slučaju zbroj njegovih znamenaka je 9, pa je svaki sljedeći član danog niza jednak 9. Dakle 2018. član niza jednak je 9.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

Poreč, 13. travnja 2018.

Zadatak B-4.1.

Dokažite da je zbroj prvih $1+3+9+\ldots+3^m$ prirodnih brojeva jednak

$$1^2+3^2+9^2+\ldots+(3^m)^2.$$

Rješenje.

Označimo

$$1+3+9+\cdots+3^m=k, \quad 1^2+3^2+9^2+\cdots+(3^m)^2=p.$$

Odredimo brojeve k i p.

Oba broja predstavljaju zbroj prih $m+1$ članova geometrijskog niza, pa je

$$\begin{aligned}
k&=1\cdot\frac{3^{m+1}-1}{3-1}=\frac{3^{m+1}-1}{2},\\
p&=1^2\cdot\frac{(3^2)^{m+1}-1}{3^2-1}=\frac{3^{2m+2}-1}{8}.
\end{aligned}$$

Želimo dokazati da je zbroj prvih k prirodnih brojeva jednak p. Ako je S_k zbroj prvih k prirodnih brojeva, vrijedi

$$S_k=\frac{1}{2}k(k+1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3^{m+1}-1}{2}\cdot\left(\frac{3^{m+1}-1}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3^{m+1}-1}{2}\cdot\frac{3^{m+1}+1}{2}=\frac{3^{2m+2}-1}{8},$$

što je i trebalo dokazati.

Zadatak B-4.2.

Marina je u žurbi upisala u tablicu 5×5 samo neke od brojeva koje je trebala upisati. Zbunjenoj je prijateljici objasnila da će lako kasnije popuniti tablicu jer su brojevi u svakom retku i svakom stupcu poredani tako da čine 5 uzastopnih članova aritmetičkog niza. Popunite tablicu brojevima koje Marina nije upisala.

3				
		31		
	11			
				27

Rješenje.

Označimo razliku aritmetičkog niza iz prvog stupca s d_1, razliku aritmetičkog niza iz petog retka s d_2 te s x i y polja u tablici kao na slici:

3				
$3+2d_1$	y	31		
	11			
x	$27-3d_2$			27

Broj x je peti član aritmetičkog niza u prvom stupcu i prvi član aritmetičkog niza u petom retku. Stoga je $x = 3 + 4d_1$, odnosno $x = 27 - 4d_2$. Tada je

$$3 + 4d_1 = 27 - 4d_2,$$

iz čega slijedi da je $d_1 + d_2 = 6$.

U trećem retku, brojevi $3 + 2d_1$, y, 31 su tri uzastopna člana aritmetičkog niza, pa vrijedi

$$2y = 3 + 2d_1 + 31,$$

odnosno $y = 17 + d_1$.

Isto vrijedi i za brojeve y, 11 i $27 - 3d_2$ u drugom stupcu, pa imamo

$$2 \cdot 11 = y + 27 - 3d_2,$$

iz čega slijedi $y = -5 + 3d_2$. Sada vidimo da je

$$17 + d_1 = -5 + 3d_2,$$

odnosno $-d_1 + 3d_2 = 22$, pa dobivamo sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 &= 6 \\ -d_1 + 3d_2 &= 22 \end{aligned}$$

Zbrajanjem jednadžbi dobivamo $4d_2 = 28$, pa je $d_2 = 7$, a onda je $d_1 = 6 - 7 = -1$. Zaključujemo da je $x = -1$, $y = 16$ te se sada tablica može lako popuniti:

3	26	49	72	95
2	21	40	59	78
1	16	31	46	61
0	11	22	33	44
-1	6	13	20	27

Zadatak B-4.3.

Odredite $f^{2018}(2018)$ ako za funkciju $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vrijedi

$$(x-1)f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x-1}.$$

Napomena: $f^{2018}(x)=(\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{2018})(x)$.

Rješenje.

Uvrštavanjem $x=t$ i $x=\frac{1}{t}$ u zadanu funkcijsku jednadžbu dobivamo sustav:

$$\begin{aligned}(t-1)f(t)+f(\tfrac{1}{t})&=\frac{1}{t-1}\\ f(t)+\left(\tfrac{1}{t}-1\right)f(\tfrac{1}{t})&=\frac{1}{\frac{1}{t}-1}=\frac{t}{1-t}\end{aligned}$$

Množenjem prve jednadžbe s $1-\frac{1}{t}$ i zbrajanjem s drugom imamo:

$$\begin{aligned}\left[(t-1)\left(1-\frac{1}{t}\right)+1\right]f(t)&=\frac{1}{t-1}\cdot\left(1-\frac{1}{t}\right)+\frac{t}{1-t}\\ \left(t-1-1+\frac{1}{t}+1\right)f(t)&=\frac{1}{t-1}\cdot\frac{t-1}{t}+\frac{t}{1-t}\\ \frac{t^2-t+1}{t}\cdot f(t)&=\frac{1}{t}+\frac{t}{1-t}\\ \frac{t^2-t+1}{t}\cdot f(t)&=\frac{1-t+t^2}{t(1-t)}\\ f(t)&=\frac{1}{1-t}\end{aligned}$$

Sada računamo redom kompozicije:

$$\begin{aligned}f^2(x)&=(f\circ f)(x)=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{x-1}{x}=1-\frac{1}{x}\\ f^3(x)&=\frac{1}{1-1+\frac{1}{x}}=x\\ f^4(x)&=\frac{1}{1-x}=f(x)\end{aligned}$$

Očito će se ove tri funkcije ponavljati pri računanju kompozicije $f^n(x)$ ovisno o ostatku pri dijeljenju broja n s 3. Za $n=2018$ ostatak je 2, pa je

$$f^{2018}(2018)=f^2(2018)=\frac{2018-1}{2018}=\frac{2017}{2018}.$$

Zadatak B-4.4.

Skup svih točaka koje zadovoljavaju jednadžbu $x^2 + y^2 = 8|x| + 6|y|$ je krivulja u ravnini. Odredite površinu dijela ravnine koji je omeđen tom krivuljom. Koliko ima točaka (x, y) s cjelobrojnim koordinatama koje leže unutar te krivulje (ne na krivulji) za koje vrijedi $xy > 0$?

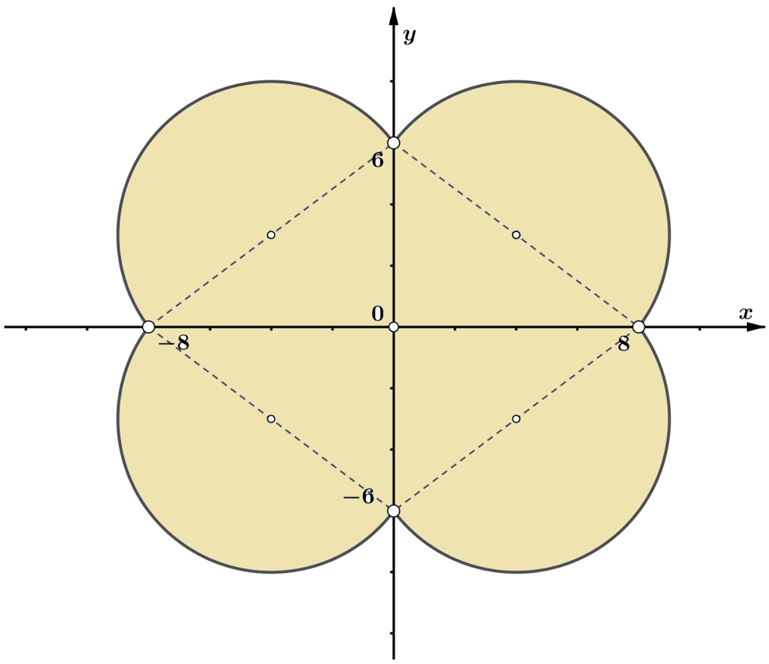
Rješenje.

Zapišimo danu jednadžbu u obliku

$$|x|^2 + |y|^2 - 8|x| - 6|y| = 0 \iff (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 25$$

Za $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ imamo dio kružnice $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$ koji se nalazi u prvom kvadrantu.
Za $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$ imamo dio kružnice $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$ koji se nalazi u drugom kvadrantu.
Za $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$ imamo dio kružnice $(x+4)^2 + (y+3)^2 = 25$ koji se nalazi u trećem kvadrantu.
Za $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$ imamo dio kružnice $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$ koji se nalazi u četvrtom kvadrantu.

Nacrtajmo ove krivulje.



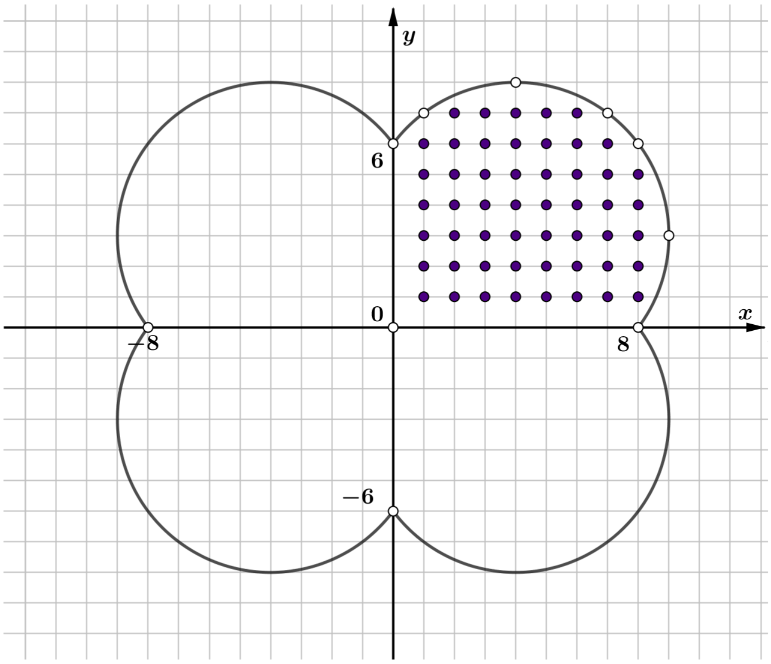
Uočimo da su dijelovi nacrtanih kružnica zapravo polukružnice. Stoga je površina područja koje je omeđeno danim skupom točaka jednaka

$$P = 4 \cdot \frac{5^2\pi}{2} + \frac{12 \cdot 16}{2} = 50\pi + 96.$$

Još treba izračunati koliko je cjelobrojnih točaka unutar nacrtanog područja, i to onog dijela koje se nalazi u prvom i trećem kvadrantu.

Kružnica u prvom kvadrantu prolazi točkama $(1, 7)$, $(4, 8)$, $(7, 7)$, $(8, 6)$ i $(9, 3)$. Sada lako prebrojimo točke koje su unutar traženog područja u prvom kvadrantu. Ordinatu $y = 7$ ima 5 točaka, ordinatu $y = 6$ ima 7 točaka, a svaku od ordinata $y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ima 8 točaka.

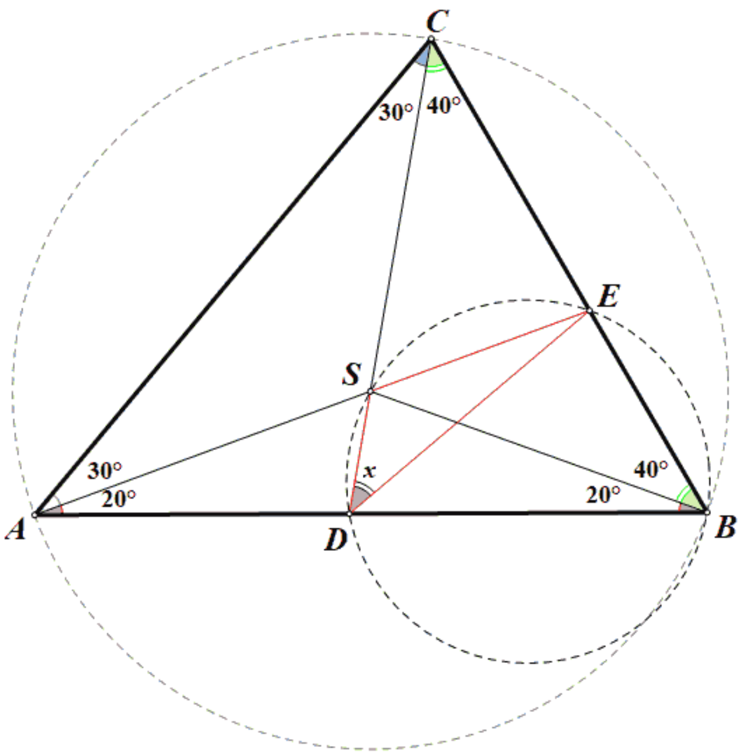
Konačno, imamo ukupno $(5 + 7 + 5 \cdot 8) \cdot 2 = 104$ točaka s cjelobrojnim koordinatama unutar traženog područja.



Zadatak B-4.5.

U trokutu ABC je $\sphericalangle CAB = 50°$ i $\sphericalangle ABC = 60°$. Na stranici $\overline{AB}$ nalazi se točka D, a na stranici $\overline{BC}$ točka E tako da je $\sphericalangle CAE = \sphericalangle ACD = 30°$. Izračunajte mjeru kuta $\sphericalangle CDE$.

Rješenje.



Neka je $S = AE \cap CD$.

Trokut ASC ima dva sukladna kuta, što znači da je jednakokračan, odnosno $|AS| = |SC|$ i

$$\sphericalangle ASC = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ.$$

Kako je $\sphericalangle ABC = 60^\circ$, prema Talesovom poučku o središnjem i obodnom kutu, točka S je središte kružnice opisane trokutu ABC. Njezin je polumjer jednak $|SA| = |SC| = |SB|$.

Tada su i trokuti ASC i BSC jednakokračni, pa je

$$\sphericalangle SAB = \sphericalangle SBA = 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ,$$
$$\sphericalangle SBC = \sphericalangle SCB = 70^\circ - 30^\circ = 40^\circ.$$

Promotrimo kutove četverokuta $DBES$.

$$\sphericalangle ESD = \sphericalangle ASC = 120^\circ,$$

pa je

$$\sphericalangle ESD + \sphericalangle DBE = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ.$$

Zbroj nasuprotnih kutova jednak je 180°, pa je četverokut $DBES$ tetivan, odnosno može mu se opisati kružnica. Kutovi $\sphericalangle SDE$ i $\sphericalangle SBE$ su manji obodni kutovi nad istom tetivom $\overline{SE}$, što znači da su sukladni. Stoga je

$$\sphericalangle CDE = \sphericalangle SDE = \sphericalangle SBE = \sphericalangle SBC = 40^\circ.$$