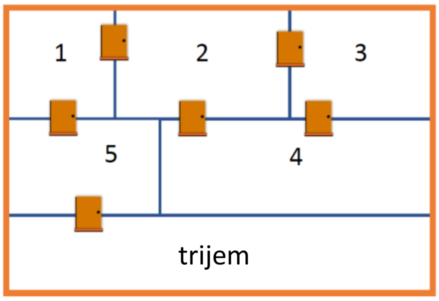
MATEMATIČKI KLOKAN S
6 100 000 sudionika u 69 zemalja Europe, Amerike, Afrike i Azije
Četvrtak, 22. ožujka 2018. – Trajanje 75 minuta
Natjecanje za Student (IV. razred SŠ)

* Natjecanje je pojedinačno. **Računala su zabranjena**.
* **Svaki zadatak ima pet ponuđenih odgovora od kojih je samo jedan točan**.
* Prvih osam pitanja donosi po 3 boda, drugih osam po 4 boda, a trećih osam po 5 bodova.
* Ako nijedan odgovor nije zaokružen ili su zaokružena dva ili više odgovora zadatak donosi 0 bodova.
* Ako je zaokruženi odgovor pogrešan, oduzima se četvrtina bodova predviđenih za taj zadatak.
* Svaki sudionik u natjecanju dobiva simboličan dar, a deset posto najboljih nagradu.

Pitanja za 3 boda:

1. Na slici je tlocrt prizemlja Renatine kuće. Renata uđe u kuću s trijema i prođe kroz svaka vrata točno jednom. U kojoj će sobi biti na kraju?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Rješenje: B

2. Koji od danih izraza ima najveću vrijednost?

A) $2-0\cdot 1+8$ B) $2+0\cdot 1\cdot 8$ C) $2\cdot 0+1\cdot 8$ D) $2\cdot(0+1+8)$ E) $2\cdot 0+1+8$

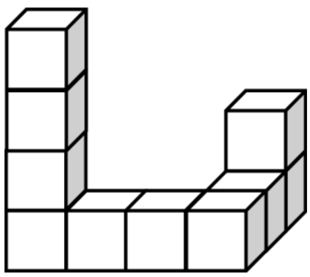
Rješenje: D

3. Thor ima sedam kamena i čekić. Svaki put kada Thor čekićem udari kamen on se razlomi na točno pet manjih kamena. Ovo je napravio nekoliko puta. Koji od danih brojeva može biti broj kamena koje Thor ima na kraju?

A) 17 B) 20 C) 21 D) 23 E) 25

Rješenje: D
Svaki put kada Thor čekićem udari kamen on dobije 4 kamena više nego ih je imao do tada. Zato konačan broj kamena minus 7 mora biti višekratnik broja 4.

4. Tijelo na slici sastoji se od 10 kocaka koje su zalijepljene jedna za drugu. Tijelo je uronjeno u kantu s bojom koja je potpuno prekrila njegovu površinu. Koliko kocaka će imati obojane točno četiri strane?



A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

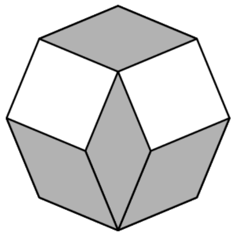
Rješenje: C

5. Sljedeće dvije izjave su istinite: Neki vanzemaljci su zeleni, ostali su ljubičasti. Zeleni vanzemaljci žive isključivo na Marsu.
Stoga logički slijedi:

A) Svi vanzemaljci žive na Marsu.
B) Samo zeleni vanzemaljci žive na Marsu.
C) Neki ljubičasti vanzemaljci žive na Veneri.
D) Svi ljubičasti vanzemaljci žive na Veneri.
E) Nijedan zeleni vanzemaljac ne živi na Veneri.

Rješenje: E

6. Četiri sukladna romba i dva sukladna kvadrata spojena su tako da tvore pravilni osmerokut. Odredi mjeru većeg kuta romba.



A) 135° B) 140° C) 144° D) 145° E) 150°

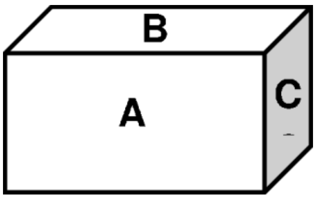
Rješenje: A
Veći kut romba unutarnji je kut pravilnog osmerokuta, tj. $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$ za $n = 8$.

7. U kutiji se nalazi 65 loptica. Osam loptica je bijele boje, a ostale su crne. U jednom se izvlačenju smije uzeti najviše 5 loptica. Loptice se nakon izvlačenja ne vraćaju u kutiju. Koji je najmanji broj izvlačenja potreban kako bi bili sigurni da je izvučena barem jedna bijela loptica?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

Rješenje: B
Najgori mogući slučaj je da izvučemo svih 57 crnih loptica prije nego izvučemo prvu bijelu kuglicu. Izvlačimo li po 5 kuglica trebat će nam u tom slučaju 12 pokušaja.

8. Cigla u obliku kvadra ima strane površina A, B i C, kao na slici. Koliki je obujam cigle?

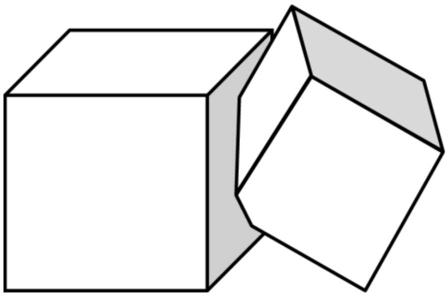


A) ABC B) $\sqrt{ABC}$ C) $\sqrt{AB+BC+CA}$ D) $\sqrt[3]{ABC}$ E) $2(A+B+C)$

Rješenje: B
Vrijedi $A\cdot B\cdot C = (ac)\cdot(ab)\cdot(bc) = (abc)^2$. Sada imamo $V = abc = \sqrt{ABC}$.

Pitanja za 4 boda:

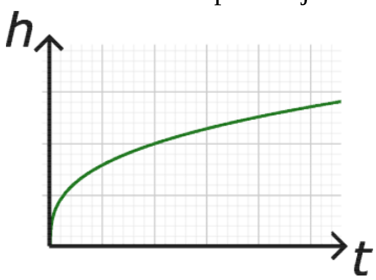
9. Dvije kocke, obujma V i W, sijeku se. Dio kocke obujma V koji nije zajednički dvjema kockama iznosi 90% njenoga obujma. Dio kocke obujma W koji nije zajednički dvjema kockama iznosi 85% njenoga obujma. Koja je veza između V i W?



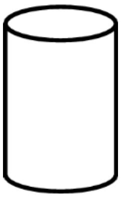
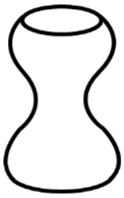
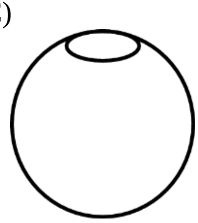
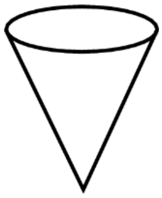
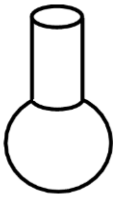
A) $V = \frac{2}{3}W$ B) $V = \frac{3}{2}W$ C) $V = \frac{85}{90}W$ D) $V = \frac{90}{85}W$ E) $V = W$

Rješenje: B
Označimo s X obujam zajedničkog dijela dviju kocaka. Iz uvjeta zadatka slijedi $X = 10\%V$ i $X = 15\%W$. Odnosno, $10\%V = 15\%W$. Slijedi $V = \frac{3}{2}W$.

10. Vaza se konstantnom brzinom puni vodom do vrha. Graf prikazuje visinu h vode kao funkciju vremena t.



Kakav bi mogao biti oblik vaze?

A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

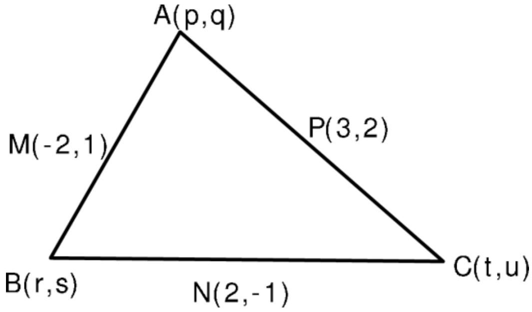
Rješenje: D
Iz grafa vidimo da s vremenom visina vode sporije raste, tj. da vaza postaje sve šira.

11. $\left|\sqrt{17} - 5\right| + \left|\sqrt{17} + 5\right| =$

A) 10 B) $2\sqrt{17}$ C) $\sqrt{34} - 10$ D) $10 - \sqrt{34}$ E) 0

Rješenje: A
$\left|\sqrt{17} - 5\right| + \left|\sqrt{17} + 5\right| = -\sqrt{17} + 5 + \sqrt{17} + 5 = 10.$

12. Vrhovi trokuta su $A(p,q)$, $B(r,s)$ i $C(t,u)$, kao na slici. Polovišta stranica trokuta su točke $M(-2,1)$, $N(2,-1)$ i $P(3,2)$. Koliko iznosi $p+q+r+s+t+u$?



A) 2 B) $\frac{5}{2}$ C) 3 D) 5 E) Ništa od navedenog.

Rješenje: D

Iz formule za koordinate polovišta dužine imamo: $\frac{p+r}{2}=-2, \frac{r+t}{2}=2, \frac{t+p}{2}=3$ i $\frac{q+s}{2}=1, \frac{s+u}{2}=-1, \frac{u+q}{2}=2$.

Zbrojimo li tri prve jednadžbe dobit ćemo $p+r+t=3$.

Zbrojimo li zadnje tri jednadžbe dobit ćemo $q+s+u=2$.

Sada vidimo da je $p+q+r+s+t+u=(p+r+t)+(q+s+u)=3+2=5$.

13. Prije nogometne utakmice Real Madrid - Manchester United predviđalo se:

1. Utakmica neće završiti nerješeno.
2. Real Madrid će zabiti gol.
3. Real Madrid će pobijediti.
4. Real Madrid neće izgubiti.
5. Bit će zabijena tri gola.

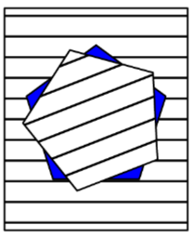
Koji je bio konačan rezultat ako su se ispunila točno tri od navedenih predviđanja?

A) 3 - 0 B) 2 - 1 C) 0 - 3 D) 1 - 2 E) To nije moguće.

Rješenje: D

U svim rješenjima (osim E) zabijena su tri gola, dakle 5. predviđanje se ispunilo. Također, u nijednom rješenju nije nerješen rezultat, dakle 1. predviđanje se ispunilo. Kako se 3. i 4. predviđanje ispunjavaju istovremeno ona otpadaju jer bi onda imali više od 3 ispunjena predviđanja. Dakle, ispunjeno je još 2. predviđanje, tj. Real Madrid je zabio gol (ali nije pobijedio).

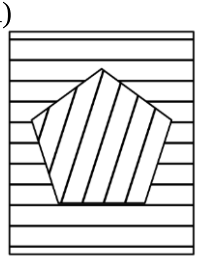
14.



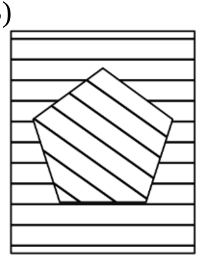
Iz papira na crte izrežemo pravilan peterokut. U svakom koraku rotiramo peterokut oko njegova središta za 21°. Na slici je stanje nakon prvog koraka.

Što ćemo vidjeti kada pentagon prvi put ponovo stane u izrezanu rupu?

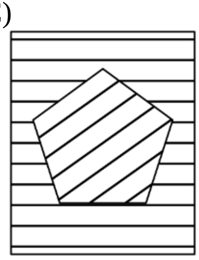
A)



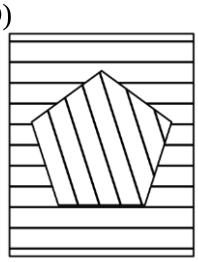
B)



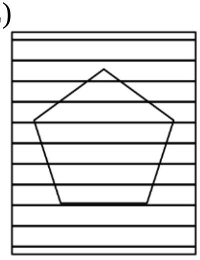
C)



D)



E)



Rješenje: B

Središnji kut peterokuta je $\frac{360°}{5}=72°$. Najmanji zajednički višekratnik brojeva 72 i 21 je $V(72,21)=3\cdot 24\cdot 7$. To znači da će pentagon prvi put ponovo stati u izrezanu rupu nakon 24 koraka, tj. nakon $7\cdot 72°$.

15. Koji od danih brojeva nije djelitelj broja $18^{2017} + 18^{2018}$?

A) 8 B) 18 C) 28 D) 38 E) 48

Rješenje: C
$18^{2017} + 18^{2018} = 18^{2017}(1 + 18) = 2^{2017} \cdot 3^{4034} \cdot 19$.
Vidimo da 7 nije faktor zadanog broja pa $28 = 7 \cdot 2^2$ nije njegov djelitelj.

16. Tri od karti na slici podijeljene su Nadiji, a ostatak Rini. Nadija pomnoži vrijednosti svoje tri karte, a Rina pomnoži vrijednosti svoje dvije karte. Suma ta dva produkta je prost broj. Kolika je suma vrijednosti Nadijinih karti?

A) 12 B) 13 C) 15 D) 17 E) 18

Rješenje: B
Da bi suma bila prost broj mora biti neparna (jer je veća od 2). To znači da su zbrojeni paran i neparan broj, što znači da su svi parni brojevi kod jedne osobe. Također, 3 i 6 moraju biti kod iste osobe jer bi inače oba umnoška bila djeljiva s tri. Proizlazi da Nadija ima karte 3, 4 i 6. Njihov zbroj je 13.

Pitanja za 5 bodova:

17. Neka su m i n rješenja jednadžbe $x^2 - x - 2018 = 0$. Kolika je vrijednost izraza $n^2 + m$?

A) 2016 B) 2017 C) 2018 D) 2019 E) 2020

Rješenje: D
Uvrstimo li n u jednadžbu dobit ćemo $n^2 - n = 2018$. Iz Vieteovih formula znamo da je $n + m = 1$.
Raspišemo: $n^2 + m = n^2 - n + n + m = (n^2 - n) + (n + m) = 2018 + 1 = 2019$.

18. Četiri brata A, B, C i D različitih su visina. Oni izjavljuju:
A: Nisam ni najviši ni najniži. B: Nisam najniži. C: Ja sam najviši. D: Ja sam najniži.
Točno jedan od njih laže. Koji brat je najviši?

A) A B) B C) C D) D E) Ne može se odrediti.

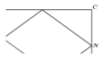
Rješenje: B
Kandidati za najvišeg brata su B i C. Ako B laže onda je on najniži, što bi značilo da i D laže što je nemoguće jer točno jedan od njih laže. Znači da C laže, a B je najviši.

19. Neka je f funkcija takva da je $f(x + y) = f(x)f(y)$ za sve cijele brojeve x i y. Ako je $f(1) = \frac{1}{2}$ odredi vrijednost izraza $f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$.

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{5}{2}$ D) $\frac{15}{8}$ E) 6

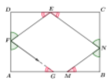
Rješenje: D
Imamo:
$f(1+0) = f(1)f(0) \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}f(0) \Rightarrow f(0) = 1,$
$f(2) = f(1+1) = f(1)f(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$
$f(3) = f(2+1) = f(2)f(1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$
Dakle, $f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}.$

20. Na slici je skica biljarskog stola dimenzija 3 m × 2 m. Kugla je ispucana iz točke M na duljoj stranici. Odbija se jednom od svake od preostalih stranica, kao na slici. Na kojoj će udaljenosti od točke A kugla udariti početnu stranicu ako je $|BM| = 1.2$ m i $|BN| = 0.8$ m.



A) 1.2 m B) 1.5 m C) 2 m D) 2.8 m E) 1.8 m

Rješenje: E



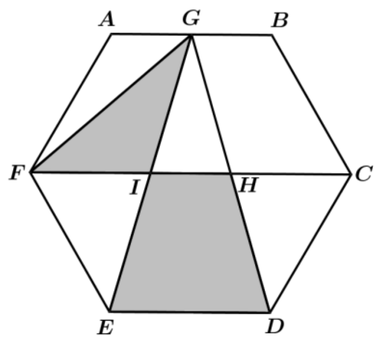
Znamo da je $|BM| = 1.2 \text{ m} = 12 \text{ dm}$ i $|BN| = 0.8 \text{ m} = 8 \text{ dm}$.
Iz $|BN| = 8$ dm slijedi da je $|NC| = 20 - 8 = 12$ dm.
Trokuti MBN i NCE su slični pa vrijedi $|MB| : |BN| = |CE| : |NC|$, tj. $12 : 8 = |CE| : 12$ iz čega slijedi $|CE| = 18$ dm.
Onda je $|DE| = 30 - 18 = 12$.
Primjetimo sada da su trokuti MBN i EDF sukladni, pa je $|DF| = 8$.
Sada je $|AF| = 20 - 8 = 12$ pa iz sukladnosti trokuta NCE i FAG slijedi $|AG| = 18 \text{ dm} = 1.8$ m.

21. Koliko realnih rješenja ima jednadžba $\left||4^x - 3| - 2\right| = 1$?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Rješenje: B
$|4^x - 3| - 2 \in \{-1,1\}$
$|4^x - 3| \in \{1,3\}$
$4^x - 3 \in \{-1,1-3,3\}$
$4^x \in \{2,4,0,6\}$
Od četiri krajnje jednadžbe $4^x = 2$, $4^x = 4$, $4^x = 0$, $4^x = 6$ samo $4^x = 0$ nema rješenja.

22. Dan je pravilan šesterokut $ABCDEF$. G je polovište dužine $\overline{AB}$. H i I redom su presjeci dužina $\overline{GD}$ i $\overline{GE}$ s $\overline{FC}$. Koji je omjer površine trokuta GIF i površine trapeza $IHDE$?



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Rješenje: A
Označimo s v visinu trokuta GIF iz vrha G. Visina trapeza $IHDE$ također je duljine v.
Označimo s a duljinu stranice pravilnog šesterokuta. $\overline{IH}$ je srednjica trokuta EDG pa je duljine $\frac{a}{2}$.

Površina trapeza $IHDE$ onda je $P_1 = \frac{\left(a+\frac{a}{2}\right)}{2} \cdot v = \frac{3}{4}av$.

Ako sa S označimo središte šesterokuta onda je $|FI| = |FS| - |IS| = a - \frac{a}{4} = \frac{3a}{4}$.

Površina trokuta GIF onda je $P_2 = \frac{\frac{3a}{4} \cdot v}{2} = \frac{3}{8}av$.

Dakle, $\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{3}{8}av}{\frac{3}{4}av} = \frac{1}{2}$.

23. U razredu je 40% više djevojčica nego dječaka. Koliko je učenika u tom razredu ako vjerojatnost da se nasumično odabrana delegacija od dvije osobe sastoji od djevojčice i dječaka iznosi $\frac{1}{2}$?

A) 20 B) 24 C) 36 D) 38 E) To nije moguće.

Rješenje: C

Označimo broj djevojčica u razredu s x, a broj dječaka s y.

Vrijedi $x = 1.4y$. U razredu je $x + y$ učenika.

Opisana vjerojatnost računa se ovako: $\frac{x}{x+y} \cdot \frac{y}{x+y-1} + \frac{y}{x+y} \cdot \frac{x}{x+y-1}$.

Izjednačimo li taj izraz s $\frac{1}{2}$ imamo $\frac{2xy}{(x+y)(x+y-1)} = \frac{1}{2}$.

Uvrstimo li $x = 1.4y$ kao rješenje jednadžbe dobivamo $y = 15$. Onda je $x = 21$. U razredu je $21 + 15 = 36$ učenika.

24. Arhimed je izračunao 15!. Rezultat piše na ploči. Nažalost, dvije znamenke (druga i deseta) nisu vidljive. Koje su to dvije znamenke?

1■0767436■000

A) 2 i 0 B) 4 i 8 C) 7 i 4 D) 9 i 2 E) 3 i 8

Rješenje: E

Rezultat treba biti djeljiv sa svim prirodnim brojevima od 1 do 15.

Da bi bio djeljiv s 9 zbroj znamenaka mora biti djeljiv s 9 pa otpadaju rješenja A i B.

Za ispitivanje djeljivosti sa 7 promatramo broj koji se dobiva ovako: početnom se broju ispusti znamenka jedinica i od tako dobivenog broja oduzme se dvostruka znamenka jedinica. Ako je novodobiveni broj djeljiv sa 7, tada je i početni broj djeljiv sa 7. Uzastopnim ponavljanjem tog postupka dobivaju se brojevi sa sve manjim brojem znamenaka, a kada se dobije 0, to znači da je početni broj djeljiv sa 7.

Nakon provjere rješenja C, D i E vidimo da je samo za znamenke pod E broj djeljiv sa 7.

$1307674368000 \longrightarrow 130767436800 \longrightarrow 13076743680 \longrightarrow 1307674368 \longrightarrow 130767420 \longrightarrow 13076742 \longrightarrow 1307670 \longrightarrow 130767 \longrightarrow 13062 \longrightarrow 1302 \longrightarrow 126 \longrightarrow 0$

Rješenja zadataka bit će objavljena 20. travnja 2018. godine na internet stranici HMD-a. Eventualne primjedbe na rješenja zadataka primaju se isključivo elektronskim putem na e-mail klokan@math.hr do 27. travnja 2018. u 23:59.
Rezultati natjecanja najbolje plasiranih učenika bit će objavljeni 2. svibnja 2018. godine na oglasnoj ploči škole i na mrežnim stranicama HMD-a.
Primjedbe i žalbe učenika primaju se isključivo elektronskim putem na e-mail klokan@math.hr do 9. svibnja 2018. u 23:59.
Nagrade najboljim učenicima dodjeljivat će se od 17. svibnja 2018. godine.
Obavijesti se mogu dobiti na stranici http://www.matematika.hr/klokan/2018/ i na mrežnim stranicama HMD-a.